

فصل ۱ - آمار و احتمال

شمارش ۱ درس

احتمال ۲ درس

چرخه آمار در حل مسائل ۳ درس

«... و احاطَ بما لَدَيْهِمْ و اَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا» (آیه ۲۸ / سوره مبارکه جن)
«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را شمارش کرده است»



روستای مشکله - استان گیلان (شهرستان املش)

درس ۱

شمارش

فعالیت



۱. فرض کنید در کتابخانهٔ مدرسه ۳۰ کتاب متفاوت دربارهٔ روان‌شناسی و ۲۵ کتاب متفاوت با موضوع تعلیم و تربیت اسلامی وجود دارد. اگر دانش‌آموزی فرصت داشته باشد فقط یک کتاب با موضوع روان‌شناسی یا تعلیم و تربیت اسلامی مطالعه کند، برای این کار چند انتخاب دارد؟

واضح است که او می‌تواند یکی از ۳۰ کتاب روان‌شناسی «یا» یکی از ۲۵ کتاب تعلیم و تربیت اسلامی را انتخاب و مطالعه کند و در مجموع، $30 + 25 = 55$ راه انتخاب دارد.

۲. خانم فاطمی پرستار بیمارستان حضرت زینب (س) است. او می‌تواند به صورت «رایگان» (استفاده از سرویس بیمارستان یا پیاده‌روی) یا با «پرداخت هزینه» (استفاده از تاکسی، اتوبوس یا مترو) به محل کارش برود. خانم فاطمی برای رسیدن به محل کارش چند انتخاب دارد؟ همهٔ حالت‌های ممکن را که او می‌تواند به صورت رایگان «یا» با پرداخت هزینه به محل کارش برود، در یک مجموعه بنویسید: $A = \{ \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots, \dots \}$.

شما برای حل کردن هر دو قسمت، از قاعده یا اصلی استفاده کردید که به اصل جمع معروف است و به صورت زیر بیان می‌شود.

اصل جمع

اگر بتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد، و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد. (اصل جمع به بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم است.)

مثال: شما به چند طریق می توانید فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان نویس را از بین چهار خودکار با چهار رنگ مختلف و پنج مداد با رنگ های متفاوت و سه روان نویس با رنگ های متمایز انتخاب کنید؟

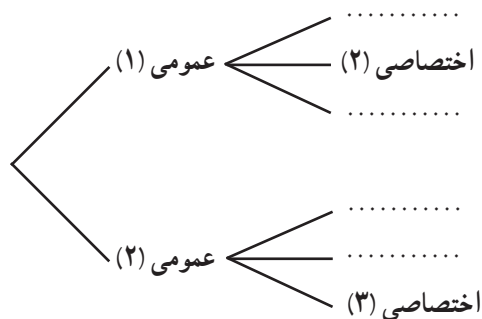
حل: در صورت مسئله از لفظ «یا» استفاده شده و قید شده است که فقط یکی از این اشیا می تواند انتخاب شود؛ بنابراین، طبق اصل جمع داریم:

$$۱۲ = ۵ + ۴ + ۳ = \text{تعداد انتخاب ها}$$



فعالیت

فرض کنید دانشجویی می خواهد از بین دو درس عمومی ارائه شده، یک درس عمومی و از میان سه درس اختصاصی ارائه شده، یک درس را انتخاب کند. او به چند طریق می تواند یک درس عمومی «و» یک درس اختصاصی خود را انتخاب کند؟ با کامل کردن نمودار زیر به سؤال بالا پاسخ دهید:



انتخاب درس عمومی به دو طریق امکان پذیر است و هر کدام که انتخاب شود برای انتخاب درس اختصاصی راه انتخاب وجود دارد. پس در کل، این کار به $\dots = \dots \times \dots$ طریق امکان پذیر است.

اصل ضرب

اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام پذیرد، طوری که در مرحله اول به m طریق «و» در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام پذیر است. (اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله است.)

مثال: مدیرعامل یک شرکت برای تصمیم‌گیری دربارهٔ توسعهٔ شرکت، ۱۵ نفر از سهام‌داران و هیئت‌امنا را در دو گروه A و B دسته‌بندی می‌کند. ۷ نفر از آنها در گروه A و ۸ نفر در گروه B قرار می‌گیرند. اعضای گروه A باید دربارهٔ نتایج مساعد احتمالی و اعضای گروه B دربارهٔ نتایج نامساعد احتمالی تحقیق کنند.

الف) مدیرعامل به چند طریق می‌تواند فقط با یک نفر از این ۱۵ نفر مشورت کند؟
 ب) اگر مدیرعامل بخواهد از هر دو گروه مشورت بگیرد به شرط آنکه از هر گروه ۱ نفر نتیجهٔ تحقیقاتش را با او در میان بگذارد، به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

راه‌حل:

الف) از اصل جمع استفاده می‌کنیم؛ زیرا مدیرعامل می‌تواند یک نفر از گروه A («یا» یک نفر از گروه B را به $7+8=15$ طریق انتخاب کند.

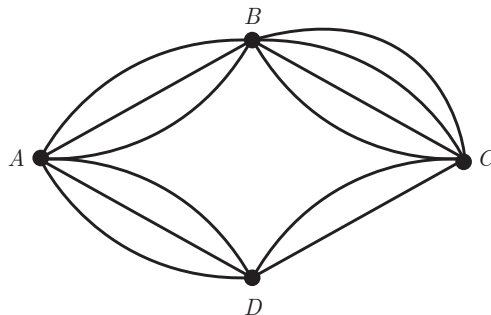
ب) در این حالت، مدیرعامل می‌تواند به ۷ طریق یک نفر از گروه A را انتخاب کند («و» به ازای هر انتخاب از A ، به ۸ طریق می‌تواند یک نفر از گروه B را انتخاب کند. بنابراین، طبق اصل ضرب به $7 \times 8 = 56$ طریق می‌تواند این کار را انجام دهد.

کار در کلاس

مطابق شکل روبه‌رو، میان چهار شهر A ، B ، C و D راه‌هایی وجود دارد؛ مشخص کنید که به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B سفر کرد؟

از A به B سه راه وجود دارد. از هر کدام از این سه راه که به B برسیم، برای رفتن به C چهار راه موجود است؛ بنابراین، طبق اصل ضرب به $\dots \times \dots = \dots$ طریق می‌توان از A به C (از طریق B) سفر کرد.



ب) از شهر A به شهر C سفر کرد؟

برای سفر از A به C می‌توان یکی از دو مسیر $A \rightarrow B \rightarrow C$ («یا» $A \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow C$) را انتخاب کرد (اصل \dots)؛ بنابراین: تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر D + تعداد راه‌های سفر از A به C از طریق شهر B = تعداد راه‌های سفر از A به C

$$= 3 \times 4 + 3 \times \dots = \dots$$

پ) از شهر B به شهر D سفر کرد؟

برای رفتن از شهر B به شهر D می‌توان یکی از دو مسیر $B \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow D$ («یا» $B \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow D$) را انتخاب کرد؛ پس داریم:

$$17 = 4 \times \dots + \dots \times \dots = 17$$

نماد فاکتوریل

همان طور که برای ضرب یک عدد، مانند a ، در خودش از نماد توان استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $a \times a = a^2$ ، برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۱ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از نماد فاکتوریل (!) استفاده می‌کنیم. برای مثال، $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$ و $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$.

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل را به صورت $0! = 1$ و $1! = 1$ تعریف می‌کنیم.
مثال: حاصل هر یک را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $4! \times 2 = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times 2 = 24 \times 2 = 48$

ب) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \overbrace{(3 \times 2 \times 1)}^{3!}}{\underbrace{(3 \times 2 \times 1)}_{3!}} = 5 \times 4 = 20$

پ) $\frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

ت) $\frac{3! \times 5! \times 0!}{7! \times 1!} = \frac{\cancel{3!} \times \cancel{5!} \times 1}{7 \times \cancel{6!} \times 1} = \frac{1}{7}$

جایگشت

چهار شیء متمایز a, b, c, d را در نظر بگیرید. آرایش یا حالت $abcd$ ، که از کنار هم قرار گرفتن این چهار شیء به دست آمده، با آرایش $acbd$ متفاوت است و به هر کدام از آنها یک جایگشت ۴ تایی از این ۴ شیء گفته می‌شود. در حالت کلی، «هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن شیء می‌نامیم.»

فعالیت

۱- اگر افراد A, B, C بخواهند در یک همایش سخنرانی کنند، این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

$$\frac{3}{A \text{ یا } B \text{ یا } C} \quad \frac{2}{\text{یکی از ۲ نفر باقی مانده}} \quad \frac{1}{1 \text{ نفر باقی مانده}} \rightarrow 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$ABC - ACB - BAC - BCA - CAB - CBA$$

(اول شخص B ، بعد C و آخر A سخنرانی کرده‌اند)

۲- با ارقام ۲، ۷، ۴، ۵ و ۶ چند عدد ۵ رقمی (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

$$\rightarrow 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \rightarrow \text{تعداد اعداد ۵ رقمی} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$$

۳- ثابت کنید تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز، برابر است با $n!$.

حل: اگر برای هر کدام از این اشیاء یک مکان در نظر بگیریم (مطابق شکل زیر)، برای مکان اول از چپ (یا راست) n انتخاب داریم و برای مکان بعدی انتخاب داریم و ... و برای مکان آخر یک انتخاب داریم و بنابر اصل ضرب، کل حالت‌ها برابر است با، $= 1 \times 2 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n$.

$$\underline{n} \quad \underline{n-1} \quad \underline{n-2} \quad \dots \quad \underline{2} \quad \underline{1}$$

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن شیء می‌نامیم، و تعداد این جایگشت‌ها برابر است با $n!$.

کار در کلاس

ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ مفروض‌اند؛ با این ارقام:

۱. چند عدد پنج رقمی و بدون تکرار ارقام، می‌توان نوشت؟

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{5}{5 \text{ یا } 4 \text{ یا } 3 \text{ یا } 2 \text{ یا } 1} \quad \frac{5}{\dots} \quad \frac{3}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{1}{\dots} \rightarrow 5 \times 4! = 600$ اصل ضرب

(توجه دارید که صفر در سمت چپ اعداد خوانده نمی‌شود.)

۲. چند عدد ۵ رقمی و فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

(می‌دانیم که اگر رقم یکان یک عدد، فرد باشد آن عدد فرد است.) بنابراین:

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{4}{4 \text{ یا } 3 \text{ یا } 1} \quad \frac{4}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{1}{\dots} \rightarrow 4 \times 4 \times \dots \times 2 \times \dots = 288$

۳. چند عدد پنج رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

روش اول: تعداد ۵ رقمی‌های فرد - تعداد کل ۵ رقمی‌ها = تعداد ۵ رقمی‌های زوج
 $= 600 - \dots = \dots$

روش دوم: اعداد زوج و ۵ رقمی‌ای که با این ارقام می‌توان ساخت، یا به صفر ختم می‌شوند یا به ۲ و ۴. تعداد ارقام را در هر حالت جدا محاسبه می‌کنیم و بنابر اصل جمع، آنها را جمع می‌کنیم:

الف) ۵ رقمی‌هایی که به صفر ختم می‌شوند

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{5}{5} \quad \frac{3}{\dots} \quad \frac{1}{\dots} \quad \frac{1}{\dots} \rightarrow 5! = \dots$ اصل ضرب

ب) ۵ رقمی‌هایی که به ۲ یا ۴ ختم می‌شوند:

تعداد انتخاب‌ها \rightarrow $\frac{4}{4 \text{ یا } 2} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \quad \frac{2}{\dots} \rightarrow 4 \times \dots \times \dots \times 2 \times 2 = 192$

$120 + 192 = 312 =$ تعداد ۵ رقمی‌های زوج

۴. چند عدد ۵ رقمی و مضرب ۵ (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟

۵ رقمی هایی که به ۵ ختم می شوند + ۵ رقمی هایی که به صفر ختم می شوند = تعداد ۵ رقمی های مضرب ۵

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow \frac{\dots}{\dots} \frac{4}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{1}{\text{صفر}} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} \dots! = \dots$$

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow \frac{4}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{1}{5} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 4 \times \dots \times \dots \times \dots \times 1 = \dots$$

$$5 \text{ مضرب } 5 = \dots + \dots = 216$$

تبدیل (انتخاب r شیء از بین n شیء، که در آن جابه جایی اشیاء انتخاب شده اهمیت دارد).

فعالیت

۱. فرض کنید بخواهیم تعداد اعداد ۴ رقمی را که با ارقام ۱ تا ۷ می توان نوشت، حساب کنیم. در این صورت، داریم: (تکرار ارقام مجاز نیست).

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow \frac{7}{\dots} \frac{6}{\dots} \frac{5}{\dots} \frac{4}{\dots} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 7 \times \dots \times \dots \times \dots$$

$$\text{از طرفی: } 7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times \dots}{3!} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

(توجه دارید که با جابه جایی هر رقم از این عدد ۴ رقمی با رقم دیگر، یک عدد ۴ رقمی جدید حاصل می شود. به عبارت دیگر، در این جایگشت ها، ترتیب قرار گرفتن اشیاء انتخاب شده، اهمیت دارد.)

۲. به چند طریق می توانیم سه کتاب را از بین ۵ کتاب متمایز، انتخاب کنیم و در یک ردیف بچینیم؟

$$\text{تعداد انتخابها} \rightarrow \frac{5}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \frac{\dots}{\dots} \xrightarrow{\text{اصل ضرب}} 5 \times \dots \times \dots = \dots$$

$$\text{از طرفی: } \frac{5!}{(5-3)!} = \dots$$



۳. در حالت کلی، نشان دهید تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n ($r \leq n$)، که جابه‌جایی r شیء انتخاب شده اهمیت داشته باشد،

$$\frac{n!}{(n-r)!} \text{ برابر است با:}$$

$$\begin{aligned} \text{تعداد انتخاب‌ها} &\rightarrow \frac{n}{n} \frac{n-1}{n-1} \dots \dots \frac{(n-r+2)}{n-r+2} \frac{(n-r+1)}{n-r+1} \\ \text{طبق اصل ضرب} &\rightarrow n(n-1)(n-2)\dots(n-r+2)(\dots\dots\dots) \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\times(\dots\dots\dots)!}{(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت‌ها r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء (که جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب مهم باشد) را با نماد $P(n,r)$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱، ۲، ۴، ۶، ۸، ۹ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار مجاز نیست).

حل: در واقع باید سه رقم را از بین ۷ رقم داده شده انتخاب کنیم که البته جابه‌جایی آنها پس از انتخاب، عدد جدیدی می‌سازد و اهمیت دارد.

$$\text{روش اول: } P(7,3) = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 210$$

$$\text{روش دوم: اصل ضرب} \rightarrow \frac{7}{7} \frac{6}{6} \frac{5}{5} \rightarrow 7 \times 6 \times 5 = 210$$

ترکیب (انتخاب r شیء از بین n شیء که در آن جابه‌جایی اشیای انتخاب شده، اهمیت ندارد).

فعالیت

فرض کنید بخواهیم از میان ارقام ۱، ۲، ۴، ۶ و سه رقم انتخاب کنیم و با آنها یک مجموعه سه عضوی تشکیل دهیم. با توجه به تعریف مجموعه که بر اساس آن، جابه‌جایی اعضای یک مجموعه، مجموعه جدیدی تولید نمی‌کند و نیز چون سه رقم انتخاب شده، ۳! جایگشت دارند که برای تشکیل مجموعه فقط یک مجموعه ساخته می‌شود (هر ۶ حالت ۱ مجموعه می‌سازد)، برای رسیدن به جواب مسئله کافی است کل جایگشت‌های سه تایی از ۴ رقم (انتخاب‌های سه تایی از بین ۴ رقم) را بر تقسیم کنیم.

$$\text{تعداد مجموعه‌های سه عضوی} = \frac{P(4,3)}{3!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4$$

انتخاب سه رقم	۱,۲,۴	۱,۲,۶	۱,۴,۶	۲,۴,۶
جایگشت‌های سه رقم انتخاب شده	۱۲۴	۱۲۶	۱۴۶	۲۴۶
	۱۴۲	۱۶۲	۱۶۴	۲۶۴
	۲۴۱	۲۱۶	۴۱۶	۴۲۶
	۲۱۴	۲۶۱	۴۶۱	۴۶۲
	۴۱۲	۶۱۲	۶۱۴	۶۲۴
	۴۲۱	۶۲۱	۶۴۱	۶۴۲
	$A_1 = \{1,2,4\}$	$A_2 = \{\dots, \dots, \dots\}$	$A_3 = \{1,4,6\}$	$A_4 = \{\dots, \dots, \dots\}$

$$\text{تعداد مجموعه‌های سه عضوی} = \frac{24}{6} = 4$$

ترکیب r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء را که جابه‌جایی اشیای انتخاب شده پس از انتخاب، حالت جدید تولید نکرده و ترتیب انتخاب اهمیت نداشته باشد، با $C_r^n = \binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم و بنابر دستور زیر محاسبه می‌کنیم.

$$C_r^n = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: به چند طریق می‌توانیم سه کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب کنیم و به دوستان هدیه بدهیم؟

حل: در هدیه دادن، ترتیب مهم نیست؛ بنابراین، از ترکیب استفاده می‌کنیم،

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35$$

کار در کلاس

۱. به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۹، عددی ۵ رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست.)

روش اول: $\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \longrightarrow \quad \dots \times 8 \times \dots \times \dots \times 5$

روش دوم: $P(9, \dots) = \frac{9!}{(9-\dots)!} = \dots$

۲. به چند طریق می توان از بین ۹ نفر یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل داد؟
در ساختن تیم با جابه جایی افراد انتخاب شده، تیم جدیدی تولید نمی شود بنابراین، از ترکیب استفاده می کنیم:

$$\text{تعداد تیم های ۶ نفره} = \binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times \dots} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \dots}{6! \times \dots} = 84$$

۳. مجموعه ۸ عضوی $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟
هر سه عضو از این ۸ عضو که انتخاب شود، فقط یک زیرمجموعه سه عضوی می سازد (در مجموعه ها جابه جایی اعضا اهمیت ندارد)؛ بنابراین، داریم:

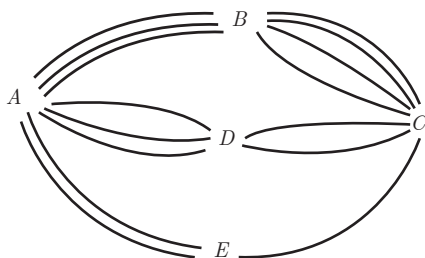
$$\text{تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{\dots \times \dots} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times \dots}{\dots \times \dots} = 56$$

۴. در جعبه ای ۴ مهره قرمز و ۵ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توانیم سه مهره از این جعبه خارج کنیم؟
در انتخاب مهره های رنگی نیز ترتیب مهم نیست (اگر ۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی خارج شود، اهمیت ندارد که با چه ترتیبی خارج شده اند. در هر صورت، ۲ قرمز و ۱ آبی خارج شده است) و بنابراین داریم:

$$\text{تعداد انتخاب ۳ مهره از بین ۹ مهره} = \binom{9}{\dots} = \frac{9!}{3! \times \dots} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \dots}{3! \times \dots} = 84$$

تمرین

- می خواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟
- بین پنج شهر A, B, C, D, E مطابق شکل زیر راه هایی وجود دارد که همه دو طرفه اند. مشخص کنید به چند طریق می توان:
 - از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟
 - از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟
 - از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



۳. با حروف کلمه «ولایت» و بدون تکرار حروف: (با معنی یا بی معنی)

الف) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۳ حرفی می توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟

پ) چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟

۴. یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود. اگر همه تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

۵. یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

۶. مجموعه $A = \{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$ مفروض است؛

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد ۵ رقمی و زوج (بدون تکرار ارقام) می توان ساخت؟

ب) چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از ۸۰۰۰۰ می توان نوشت؟

پ) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی دارد؟

ت) مجموعه A چند زیرمجموعه سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

۷. روی محیط یک دایره ۱۲ نقطه وجود دارد. مشخص کنید: الف) با این دوازده نقطه، چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

ب) چه تعداد وتر می توان تشکیل داد؟

۸. می خواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل

دهیم. مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل بدهیم؛ هرگاه بخواهیم:

الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموز پایه دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

۹. مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $(2 \times 3 + 3 \times 4 + 3^2)$ باشد.

۱۰. تعداد راه ها یا جاده ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل زیر بتوان به ۲۰ طریق از

شهر A به شهر D سفر کرد.

