



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# راهنمای هنر آموز ریاضی (۱)

کلیه رشته‌ها

شاخه فنی و حرفه‌ای و کاردانش

پایه دهم دوره دوم متوسطه



## وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی



- نام کتاب: راهنمای هنرآموز ریاضی (۱) - ۲۱۰۷۶۰
- پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
- مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش
- شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: شهرناز بخشعلی زاده، ناصر بروجردیان، سوسن پناهنده، زین العابدین دهقانی ابیانه و زیبا فانی (اعضای گروه تألیف)
- مدیریت آماده‌سازی هنری: اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
- شناسه افزوده آماده‌سازی: مجید ذاکری یونسی (مدیر هنری) - طاهره حسن‌زاده (طراح جلد) - غزاله کشمیری (صفحه‌آرا)
- نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهیدموسوی)  
تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹  
وب‌گاه: [www.irtextbook.ir](http://www.irtextbook.ir) و [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir)
- ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (دارو پخش) تلفن: ۵ - ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰  
صندوق پستی: ۳۷۵۱۵ - ۱۳۹
- چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
- سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ دوم ۱۳۹۷

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع بدون کسب مجوز ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.



دست توانای معلم است که چشم انداز آینده ما را ترسیم می کند.

امام خمینی (قدّس سرّه الشّریف)

مقدمه

۱..... فصل اول: نسبت و تناسب

۲۵..... فصل دوم: درصد و کاربردهای آن

۵۵..... فصل سوم: واحدهای اندازه‌گیری

۷۹..... فصل چهارم: معادله درجه دوم

۱۱۱..... فصل پنجم: توان‌رسانی به توان عددهای گویا

۱۴۷..... فصل ششم: نسبت‌های مثلثاتی

۱۸۵..... فصل هفتم: تابع

### رویکرد حاکم بر برنامه درسی ریاضی دهم فنی و حرفه‌ای

هدف کلی برنامه‌های درسی تربیت یکپارچه عقلی، ایمانی، علمی، عملی و اخلاقی هنرآموزان است به گونه‌ای که بتوانند موقعیت خود را نسبت به خود، خدا، دیگر انسان‌ها و نظام خلقت به درستی درک کرده و توانایی اصلاح مستمر موقعیت فردی و اجتماعی خویش را کسب نمایند (سند برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران). در برنامه درسی ملی یازده حوزه تربیت و یادگیری مشخص شده‌اند که حدود محتوایی، روش‌ها، فرایندها، و عناصر کلیدی یادگیری را روشن می‌سازند. در برنامه درسی ملی، ریاضیات به عنوان علم مطالعه الگوها و ارتباطات دارای نظم و برخوردار از سازگاری درونی، زبانی دقیق برای تعریف دقیق اصطلاحات و نمادها و ابزارکار در بسیاری از علوم و حرفه‌ها در جهت توانمندسازی انسان برای توصیف و کنترل موقعیت‌های پیچیده یکی از حوزه‌های تربیت و یادگیری قلمداد شده است. در گذشته برنامه درسی ریاضی به عنوان مجموعه‌ای از دانش و رویه‌ها فرض می‌شد و نقش آموزشگران ریاضی در واقع انتخاب مجموعه‌ای از عناوین بود که فرض می‌شد هنرجویان را برای زندگی آینده‌شان آماده می‌سازد. هنرجویان رویه‌ها را در قالب انجام و تکرار تمرینات ریاضی یاد می‌گرفتند و سپس مسائل کلامی به آنها معرفی می‌شد. این گونه مسائل معمولاً به گونه‌ای بودند که فقط یک مفهوم ریاضی در آنها مشاهده می‌شد. در دوره‌های بعدی مهارت‌های حل کردن مسئله ارزش بسیاری پیدا کردند و حل مسائل مرتبط با زندگی و مسائل کاربردی مورد توجه برنامه‌های درسی قرار گرفت. لکن هنوز به حل مسئله و تحقیق اغلب به عنوان فعالیت‌های جانبی نگاه می‌شد و نه جزیی تفکیک ناپذیر از فرایند یاددهی-یادگیری. نگاه دیگری به ریاضی، ریاضی را مجموعه‌ای از فرایندها می‌داند.

در این نگاه وظیفه آموزشگران ریاضی کمک به هنرجویان است تا بفهمند چگونه ریاضی‌سازی کنند. در این وضعیت به جای تصمیم‌گیری در مورد «کدام عناوین ریاضی» به تصمیم‌گیری در مورد «کدام فرایندها» پرداخته می‌شود. لذا تجاری که به هنرجویان کمک می‌کنند تا این فرایندها پرورش داده شوند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. در چنین وضعیتی، ریاضیات به عنوان یک موضوع مجرد و منفک از زندگی دیده نمی‌شود بلکه با تجربیات مخاطب، با دیگر موضوعات درسی و حوزه‌های یاددانی و زندگی روزانه وی

پیوند داده می‌شود. به هنجرویان فرصت مدل‌سازی وضعیت‌های واقعی داده می‌شود تا با درک ریاضی بتوانند تجارب زندگی خود را تفسیر کنند. لذا ریاضیات شامل منطق، تحلیل و بررسی، تبادل ایده‌هاست و درک ایده‌های مجرد ریاضی متکی بر تجربیات و تفکر و بازتاب نسبت به آنهاست. هنجرویان در حین مواجهه با وضعیت‌های جدید، تجربه کردن آنها و تعمق و بازتاب نسبت به آنها دنیای واقعی خود را به گونه‌ای بازسازی می‌کنند که شامل درک آنها از ریاضیات باشد. سطح درک مخاطب از ایده‌های ریاضی و توانایی او در به کارگیری مفاهیم و مهارت‌ها بسته به وضعیت اجتماعی که فرد در آن رشد پیدا کرده است متفاوت است. برای مثال فرزندی که در خانه فرصت کمک کردن به پدرش در ساختن یک قفسه چوبی و اندازه‌گیری قطعات الوار را دارد، نسبت به فردی که اندازه‌گیری را فقط در مدرسه تجربه می‌کند، احتمالاً درک بهتری از اندازه‌گیری و اهمیت دقت در اندازه‌گیری و انتخاب ابزار خواهد داشت.

ولی هدف از آموزش و پرورش چیست؟ هدف، پرورش متخصص ریاضی نیست. بلکه هدف پرورش قدرت تفکر و تعقل است. لذا هدف اصلی برنامه ریاضی پرورش مهارت‌های تفکر و تعقل است. بنابراین محتوا و فرایندهای ریاضی در خدمت و بستری برای پرورش مهارت‌های تفکر هستند. در چنین وضعیتی مبنای انتخاب و مدیریت فرایندها و محتوای ریاضی اهداف ذیل می‌باشند:

۱ آموزش موضوعاتی که مبنای پایه درک علمی از جهان پیرامون است.

۲ آموزش روش‌های تولید علم و رسیدن به حقایق و شناخت در علوم

۳ رشد توانایی‌های عقلانی در درک و تجزیه و تحلیل مسائل

۴ پرورش روحیه حقیقت‌جویی و درک آن

۵ تقویت ارزش‌های الهی به منظور رشد شخصیتی

۶ پرورش صداقت علمی و روحیه نقادی در پذیرش مطالب

۷ پرورش باور مثبت نسبت به توانمندی‌های خود برای کشف مطالب جدید

۸ آموزش روابط اجتماعی و برخوردهای صحیح اجتماعی

همان‌گونه که در زندگی، فرد با ابتلا و مواجهه با مسائل، در جهت حل این مسائل - و با سعی و تلاش در ایجاد نظم منطقی بین تجربیات گذشته خود و با به کارگیری تفکر و تعقل و انتخاب راهبرد صحیح، توانمندی‌های خود را رشد می‌دهد، یادگیری نیز

در برخورد ساخت شناختی ذهن انسان با وضعیت مسئله‌ای جدید و با سعی در حل آن شکل می‌گیرد. در این مسیر داشتن صبر و استقامت در حل مسئله و روحیه حقیقت‌جویی و نقادی است که او را همراهی می‌کند پس فرصت‌های آموزشی باید به گونه‌ای باشند که با ایجاد موقعیت مسئله‌ای و درگیری هنرجو با مسئله، وی را مجبور کند تا با یک فعالیت علمی / ذهنی وضعیت جدید را تحلیل کند و راه‌حل مناسب را بیابد و ساخت شناختی ذهن خود را توسعه داده و یا اصلاح کند. وضعیت‌های مسئله‌ای می‌توانند ساخت شناخت علمی یا ارزش را به چالش کشیده و لذا موجب رشد علمی یا ارزشی مخاطب شوند. با توجه به اینکه یادگیری در خلأ صورت نمی‌گیرد. محیط‌های آموزشی باید به گونه‌ای باشند تا فرصت‌هایی برای رشد توانمندی‌های مخاطب فراهم کنند. در چنین محیط‌هایی هنرجو باید برای بیان نظرات و افکار خود احساس امنیت نموده و برای افکار دیگران احترام قائل شود. پذیرش یا عدم پذیرش نظرات پس از طی فرایند گفت‌وگو و نقد و بررسی و تحلیل و با هدایت فردی آگاه (دبیر) شکل می‌گیرد.

لذا دبیر باید نسبت به توانمندی‌ها، نیازهای مخاطبش، نسبت به موضوع مورد گفتگو و اهداف آن آگاهی داشته و با ایجاد فضای مناسب گفت‌وگو یا طرح مسئله در وضعیت‌های مناسب و زیر نظر داشتن فعالیت‌های هنرجو و راهنمایی او هدایت و مداخله صحیح و به موقع فرصت تحلیل و تصمیم‌گیری را برای هنرجو فراهم کند.

### اصول و استانداردهای حاکم بر برنامه درسی ریاضی

زمانی، در دبیرباز، فرض بر این بود که ریاضیات برای گروه خاصی از افراد جامعه است یا ریاضیات را همه نمی‌توانند «یاد بگیرند». این گفتارها مربوط به زمانی بوده است که ریاضیات به عنوان مجموعه‌ای از اصول و رویه‌ها در نظر گرفته می‌شد و یادگیری آن را فقط برای گروهی که قصد تحصیل در رشته‌های مرتبط با ریاضی و رشته‌های فنی داشتند، ضروری و لازم می‌دانستند. با تغییر هدف آموزش ریاضی و تغییر نگاه نسبت به آنچه محتوا و کار ریاضی خواننده می‌شود، ضرورت آموزش ریاضی برای همگان درک می‌شود. لذا «ریاضیات برای همه» معنا پیدا می‌کند. برای برقراری عدالت آموزشی نباید سطح آموزش ریاضی را پایین بیاوریم بلکه باید فرصت‌های برابر برای رشد مهارت‌ها و توان ریاضی برای همگان فراهم کنیم و با توجه به نیازهای فردی مخاطب، وی را در رسیدن به اهداف آموزشی / تربیتی یاری دهیم.

## یادگیری ریاضیات

فرد در مواجهه با مسائل و تجربه و بازسازی ساخت شناختی ذهن خود یاد می‌گیرد، درک عمیق، توانایی به‌کارگیری و به‌کار بستن فرایندها، مفاهیم رویه‌ها و روش‌ها لازمه یادگیری ریاضی است. کسب دانش فقط بخش کوچکی از یادگرفته‌هاست و دانستن اینکه چه زمان، چگونه و چرا از آنچه می‌دانند باید استفاده کنند است که یادگیری را ارزشمند می‌نماید.

زمانی که هنرجو از طریق فعالیت‌ها به چالش کشیده می‌شود، در توانایی برخورد با مسائل باور مثبت بیشتری نسبت به توانمندی خود پیدا می‌کند و در مکاشفه مطالب جدید انعطاف بیشتری برای یافتن راه‌حل‌های جایگزین از خود نشان می‌دهد. یادگیری زمانی ارزشمند است که درک معنادار یا درک مفهومی در تعامل با درک رویه‌ای باشد. یعنی دانستن در کنار دانستن چگونگی، درک در کنار عملکرد الگوریتمی، دانش مفهومی در کنار دانش رویه‌ای و یا دانش معنادار در کنار دانش مکانیکی رشد کرده و در تعامل با یکدیگر - همدیگر را تقویت کنند. دانش یا فهم رویه‌ای (ابزاری) به معنای دانستن قوانین بدون دلیل و به‌کارگیری آنها بدون دانستن چرایی آن است. در مقابل دانش مفهومی (رابطه‌ای) به این معنا است که هنرجو از چرایی آنچه انجام می‌دهد آگاه باشد. در این وضعیت او خود می‌تواند قانون‌ساز باشد و برای موقعیت‌های مسئله‌ای خود قاعده و قانونی کشف کرده یا بسازد. در واقع تمرکز درک و فهم ابزاری بر چگونگی انجام دادن و تمرکز درک و فهم رابطه‌ای بر چرایی انجام دادن است. مفاهیم، طرح‌واره یا تصویرهای ذهنی، در ساخت شناختی ذهن وجود دارند. یادگیری معنادار زمانی شکل می‌گیرد که بین این طرح‌واره‌ها رابطه و اتصال برقرار شود. هرچه ارتباطات پیچیده‌تر باشند، یادگیری عمق بیشتری دارد.

## یاددهی ریاضیات

یاددهی مؤثر ریاضی نیازمند شناخت و ارزیابی ساخت شناختی مخاطبان است. یعنی باید آنچه مخاطبان می‌دانند را شناسایی کرده و برای رسیدن به آنچه مخاطبان باید انجام دهند، آنها را به چالش کشیده و در این مسیر مخاطب را هدایت و حمایت کرد. وظیفه یاددهنده فراهم کردن محیط و وضعیت‌های مسئله‌ای است تا مخاطبان از طریق



درگیر شدن با مسئله و تجربه کردن یاد بگیرند. دبیران باید با چالش‌هایی که ممکن است هنرجویان به هنگام یادگیری مفهوم با آنها روبرو شوند، آشنایی داشته باشند تا بتوانند برای مقابله با آنها از قبل برنامه‌ریزی و طراحی کنند. دبیران باید از شیوه‌ها و ابزار ارزیابی آگاهی داشته باشند تا بتوانند درک و شناخت مخاطبان را به منظور طراحی بهتر آموزشی و هدایت مؤثر تر منطبق با نیازهای فردی آنها مورد ارزیابی قرار دهند.

دبیران باید در کنار دانش موضوعی از دانش پداگوژیکی و دانش پداگوژیکی محتوا نیز آگاهی داشته باشند تا بدانند چگونه و چه سؤال‌هایی را چه زمان مطرح کرده و باید با پاسخ‌ها چگونه روبرو شوند.

## فناوری

اکثر آموزشگران بر تأثیر مثبت فناوری آموزشی بر یادگیری توافق دارند. اما استفاده مؤثر از فناوری بستگی به دبیر و انتخاب مناسب فناوری دارد. فناوری باید در راستای رسیدن به اهداف آموزشی/ تربیتی باشد. توانایی گرافیکی و امکان دسترسی به مدل‌های دیداری و امکان برقراری تعامل و پویایی برخی محیط‌های پویا (مانند GEOGEBRA) فرصت‌هایی غنی برای رشد مهارت‌های تفکر فراهم می‌آورند.

## اثبات و استدلال، ارتباطات و حل مسئله

استدلال ریاضی روش مؤثری برای رشد بصیرت نسبت به پدیده‌های مختلف در اختیار قرار می‌دهد. افرادی که استدلال می‌کنند به شکل تحلیلی فکر می‌کنند، به الگوها، ساختار یا نظم و ترتیب موجود در وضعیت‌های دنیای واقعی توجه می‌کنند. آنها سؤال می‌کنند، حدس می‌زنند و اثبات می‌کنند. لذا مهم است که به هنرجویان کمک کنیم تا با توجه به تجربیات اولیه خود با ریاضیات، به دنبال دلیل باشند. سؤالاتی از قبیل «فکر می‌کنید چرا این درست است؟»، «کسی فکر می‌کند که جواب می‌تواند چیز دیگری باشد؟ اگر بله، چرا؟» به یادگیرندگان کمک می‌کنند درک کنند تا هر آنچه را بیان می‌کنند، باید با شواهد برای پشتیبانی یا رد همراه باشد.

انجام دادن کار ریاضی شامل کشف است. کشف کردن با فرضیه سازی (حدس آگاهانه) همراه است. دبیران می‌توانند فرضیه‌های قبلی مخاطبان را به چالش کشیده تا آنها را اصلاح کنند.

هنرجویان از طریق گفتگو در کلاس می‌توانند استدلال کردن و روش‌های مختلف آن را بهتر یاد بگیرند. ایده‌های خود را با ایده‌های دیگران مقایسه کرده و شیوه‌های استدلال خود را تقویت کنند. هنگامی که فرد، تفکر و استدلال خود را برای دیگران به طور شفاهی یا کتبی بیان می‌کند، یاد می‌گیرد تا دیگران را متقاعد کنند و بیان خود را شفاف کنند. برای این منظور باید تفکرات خود را منسجم کرده و بین مفاهیم ارتباط برقرار کنند. برقراری ارتباط با توضیحات کلامی با نمادین رسم شکل، استفاده از اشیا و غیره همراه است که به رشد درک معنادار آنها کمک می‌کند. حل مسئله یعنی درگیر شدن با وضعیت‌هایی که راه‌حل آن از قبل در دسترس نیست و یادگیرنده در مسیر حل آنها درک و فهم خود از ریاضی را رشد می‌دهد. مسئله حل‌کن‌های خوب از آنچه انجام می‌دهند به خوبی آگاهی داشته و بر آن نظارت و کنترل دارند و همواره در طی حل مسئله فرایندها، عملیات خود را ارزیابی و اصلاح می‌کنند. مهارتی که فراشناخت نام دارد. نقش دبیران، پرورش این مهارت از طریق فراهم کردن فرصت‌های حل مسئله است. این کار را می‌توان با طرح پرسش‌های مداخله‌گر چون «پیش از اینکه ادامه دهید، آیا مطمئن هستید؟»، «راه دیگری نیز تا اینجا داشتید؟» «چرا کاری که تا اینجا کردید درست است؟» انجام داد. این گونه پرسش‌ها به یادگیرنده کمک می‌کند تا عادت کنند تفکر خود را کنترل کرده و درک و فهمشان را ارتقا بدهند.

## پیوندها و اتصالات

برقراری پیوند و ارتباط از لازمه‌های یادگیری معنادار است. ارتباطات و پیوندها در ریاضی به چند دسته تقسیم می‌شوند:

۱ ارتباط بین مفاهیم: ساخت شناختی ذهن شبکه‌ای از مفاهیم است که ارتباط بین مفاهیم، عمق و پیچیدگی‌های آن را تعیین می‌کند. هرچه بین مفاهیم ریاضی ارتباط برقرار شود، درک آن مفاهیم عمیق‌تر است.

۲ ارتباط بین شاخه‌های ریاضی: برقراری ارتباط بین شاخه‌های ریاضی این امکان را فراهم می‌سازد تا ابعاد مختلف از یک مفهوم، یک مسئله مورد بررسی قرار گیرند. ارتباط بین شاخه‌های ریاضی به درک ریاضی به عنوان یک کل منسجم کمک می‌کند.

۳ ارتباط و اتصال بین روش‌های حل یک مسئله: این گونه برقراری ارتباط مستقیماً به رشد تفکر واگرا کمک می‌کند و تحلیل روش‌های مختلف موجب پرورش مهارت ساخت رویه‌های جدید

می‌شود که به پرورش تفکر خلاق نیز کمک می‌کند.

**۴** ارتباط و اتصال بین بازنمایی‌های چندگانه مفاهیم: این نوع ارتباط به معرفی یک ایده یا مفهوم به شکل‌های مختلف اشاره دارد. توانایی ترجمه بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم به هم و حرکت از یکی به دیگری از نشانه‌های یادگیری عمیق و معنادار است و کمک می‌کند تا از طریق تشخیص ارتباطات بین بازنمایی‌های معادل و تشخیص خواص مشترک آنها مفاهیم مجرد و فرایندها شکل بگیرند. با استفاده از مدل‌های ریاضی یا بازنمایی‌های کلامی، نموداری (تصویری)، عددی (جدولی)، جبری و فیزیکی و... هنرجویان می‌توانند مسائل و مفاهیم و رویه‌ها را بررسی کرده و به تحلیل بهتر وضعیت‌ها بپردازند. توانایی ایجاد ارتباط بین بازنمایی‌ها و کسب اطلاعات از هر یک از نمایش‌ها و ترجمه آن به نمایشی دیگر موجب می‌شود تا درک عمیق‌تری از مفهوم شکل بگیرد.

**۵** ارتباط و اتصال بین روش‌های ریاضی به منظور تعمیم دادن در ریاضیات می‌توان از طریق برقراری ارتباط بین رویه‌ها و مفاهیم، کاربرد یک رویه را در بافت‌های مختلف تعمیم داد.

**۶** برقراری ارتباط بین ریاضی با حوزه‌های آموزشی دیگر و با زندگی روزمره که کمک می‌کند تا هنرجویان ریاضی را در بافت‌های مختلف و مورد علاقه تجربه کنند.

## آموزش ریاضی از طریق حل مسئله

رویکردهای آموزش ریاضی در گذشته بر آموزش برای حل مسئله و بر شیوه‌هایی از تدریس ریاضی که بتوان از آن برای مسئله حل کردن استفاده کرد تأکید داشتند. در چنین وضعیتی مسئله به گونه‌ای طراحی می‌شد تا بتوان از آخرین آموخته‌های ریاضی برای حل آنها استفاده کرد. امروزه آموزش ریاضیات به این امر اشاره دارد که از مفاهیم و رویه‌ها نباید فقط به عنوان ابزاری برای حل مسائل ساختار یافته استفاده کرد بلکه به آنها به عنوان وضعیت‌ها و راه‌هایی برای تفکر و چگونگی سازمان‌دهی تجربیات نگریست.

همچنین نباید به حل مسئله به عنوان فعالیتی نگاه کرد که هنرجو را ملزم به استفاده از آنچه آموخته می‌کند. بلکه این فرایند را به عنوان ابزاری برای کسب دانش ریاضی جدید و فرایندی برای به‌کارگیری آنچه که قبلاً آموخته شده، در نظر گرفت. امروزه آموزش ریاضیات برای حل مسئله به آموزش ریاضیات از طریق حل مسئله تغییر یافته است. آموزش مفاهیم و موضوعات ریاضی در بسترهای حل مسئله و محیط‌های آمیخته با پرسشگری به فراگیران کمک می‌کند به درک عمیقی از مفاهیم، موضوعات و ایده‌های مختلف ریاضی دست پیدا

کنند. در آموزش ریاضی از طریق حل مسئله تأکید بر درگیری فرد در فعالیتهایی است که به تولید فردی و شخصی دانش منجر می‌شوند. رویکرد یادگیری ریاضی از طریق حل مسئله چنین تبیین می‌شود:

- در تمام وضعیت‌های آموزشی هنرجویان درگیر حل مسئله هستند.
  - حل مسئله کمک می‌کند تا هنرجویان مهارت‌های تجزیه و تحلیل و استدلال را در خود رشد دهند.
  - حل مسئله هنرجویان را مجبور می‌کند تا از طریق مواجهه با مسائل جدید، فرایند تفکر خود را ارزیابی کرده و با کسب اطلاعات جدید آن را اصلاح کنند.
  - حل مسئله فرصتی فراهم می‌آورد تا هنرجویان روشی برای حل آن طراحی کنند.
  - حل مسئله درک و یادگیری را افزایش می‌دهد.
  - در رویکرد آموزش از طریق حل مسئله، هنرجویان با درگیر شدن در انجام فعالیتهای ریاضی، ابتکار و خلاقیت، حدس زدن، الگویابی، نقد و بررسی راه‌حل‌ها، و جواب‌ها بین مفاهیم و موضوعات ریاضی اتصال و ارتباط برقرار می‌کنند.
- در چنین وضعیتی انتخاب و طرح وضعیت مسئله‌ای برای شروع از اهمیت بسیاری برخوردار است. امکان دارد فعالیتهای حل مسئله با حل یک مسئله از دنیای واقعی با انجام پروژه‌های کوچک و تحقیقات انجام شده توسط هنرجویان شروع شود. از هنرجویان انتظار می‌رود که صرفاً راه‌حل خود را بیان نکنند بلکه فرایندها و رویکردهایی را که برای رسیدن به پاسخ به کار گرفته‌اند را نیز گزارش دهند.

### اهمیت گفتمان‌ها و بحث‌های کلاسی

یکی از ویژگی‌های بحث‌ها و گفتمان‌های کلاسی، هدایت هنرجویان، نظارت، کنترل، طرح پرسش‌هایی هدفمند به منظور ایجاد ارتباط و اتصال بین مفاهیم و ایده‌های ریاضی است. ارتباطات وسیله‌ای برای در میان گذاشتن عقیده‌ها و ایده‌ها و مورد نقد واقع شدن آنها و در نهایت اصلاح و توسعه آنهاست. تدریس ریاضی باید بر پایه گفتگو بین داده‌دهنده با یادگیرنده یا یادگیرندگان با هم به منظور بررسی و کاوش ایده‌ها و درک یکدیگر شکل گیرد. فراهم کردن فضایی که در آن بحث‌ها و گفتگوها و مقابله‌های مرتبط با ریاضی، به شکلی که زنده و در جریان باشند، بسیار ایده آل است. در چنین فضایی یادگیرنده‌ها ایده‌ها و تفکرات خود را با شهادت بیان کرده و به نقد ایده‌ها و تفکرات دیگران پرداخته و خود

نیز مورد نقد قرار می‌گیرند. هنرجویان یاد می‌گیرند که در صورت اشتباه کردن می‌توانند به اصلاح اشتباهات خود بپردازند. در چنین فضایی نگاه دبیر به ریاضی می‌تواند بر نگرش هنرجو نسبت به ریاضی تأثیر مثبت یا منفی بگذارد.

یاددهنده باید هنرجویان را به اتخاذ تصمیم دعوت کرده و آنها را تشویق کند تا روش خود برای حل کردن (مدل ریاضی خود) را به کار ببرند. تعامل و گفت‌وگو بین اعضای گروه را تشویق کرده و در صورت لزوم با پرسش‌های مداخله‌گر نقش میانجی را ایفا کند.

در تمام این مراحل باید بر ادامه و ابرام در حل مسئله تأکید شود. نه بر سرعت انجام آن. در حین انجام کار گروهی، هنرجویان باید تشویق شوند تا با یکدیگر در تعامل بوده و با هم همکاری کنند. اندیشه‌های خود را به اشتراک بگذارند و همگام با تکمیل و بهبود اندیشه‌ها در گروه، تفکرات و راهبردهای خود را ارزیابی کنند.

دبیر به عنوان هماهنگ‌کننده، تسهیل‌کننده و مداخله‌گر می‌تواند همواره سؤالاتی برای شروع کار، ادامه کار، تکمیل کار مطرح کند. سؤالاتی مانند: اگر..... چه می‌شد؟ چرا؟..... چه کار دیگری می‌توان کرد؟ و غیره و بدین ترتیب هنرجویان را به تحقیقات بیشتر ترغیب کرده تا مدل خود را توسعه دهند.

در چنین شرایطی اگر به هنرجویان فرصت داده شود تا خود به طرح مسئله بپردازند و سؤال کنند، مفاهیم را بهتر و عمیق‌تر درک کرده و یادگیری معنادارتر می‌شود.

### پرسش‌های مؤثر مداخله‌گر

پرسش‌ها می‌تواند خلأ بین آنچه که هنرجو یاد گرفته و آنچه باید یاد بگیرد را پر کنند. پرسش‌های مؤثر می‌تواند فرصت‌هایی از قبیل فرصت‌های زیر را فراهم آورد:

■ رویارویی با چالش‌های متناسب با نیازهای فردی هنرجو

■ ارزیابی

■ ارتقای مهارت‌های تفکر در سطوح بالاتر

■ ایجاد فرصت تأمل و تعامل بین هنرجو با ایده‌های آموزش داده شده

■ فراهم کردن فرصت تفحص و بررسی پیدا کردن توضیحات

■ بحث و گفتگو با دبیر

■ کنترل خود یادگیری

## به کار گیری ICT

بسیاری از دبیران با تأثیر مثبت ICT در یادگیری موافق هستند اما باید توجه داشت هدف اصلی یادگیری است و نه فناوری. ابزار باید متناسب با هدف یادگیری باشد. برای مثال برای بررسی الگوهای عددی می‌توان از Excel و استفاده آن و الگوهای عددی را در صفحه گسترده‌ها بررسی کرد. آشنایی با امکانات ICT به هنرجو امکان می‌دهد تا به فرضیه‌سازی و پیش‌بینی کردن پرداخته و مهارت‌های استدلال کردن خود را توسعه دهند. به کارگیری رایانه می‌تواند به هنرجویانی که سبک یادگیری آنها دیداری است کمک بسیاری کند. برخی اوقات از ICT به عنوان یک منبع یاددهی استفاده می‌شود. این عمل به دو روش انجام می‌شود:

۱ نمایش، ارائه و مدل‌سازی یکی از ابعاد ریاضی

۲ تمرکز بر گفتمان‌ها و بحث‌های ریاضی، تفسیر کردن، پیش‌بینی کردن یا تعمیم دادن در هر دو حالت دبیر می‌تواند با گروهی از هنرجویان و یا با کل کلاس کار کند. به طور مثال می‌توان با اجرای فایل یا برنامه‌ای در یک رایانه با صفحه نمایش بزرگ یا یک برنامه تلویزیونی به عنوان برانگیزاننده بحث و گفتگو استفاده کرد. معلم می‌تواند سؤالاتی در سطوح مختلف پیچیدگی و دشواری در زمینه آنچه نمایش داده شده، طرح کند. یا با استفاده از نرم‌افزارهای پویا و تعاملی چون GEOGEBRA وضعیت‌هایی را نمایش داده تا هنرجویان به پیش‌بینی کردن و حدس زدن بپردازند و آنها را مورد آزمایش قرار دهند.

## نقش مثال

به هنگام ارائه مثال‌ها باید توجه داشت تا نمونه‌هایی از نامثال‌ها نیز ارائه شوند. با این کار تا حدی ارتباط دادن ویژگی‌های نامربوط توسط هنرجو جلوگیری می‌شود. ارائه مثال‌های مختلف این امکان را فراهم می‌سازد تا هنرجو به تصویرسازی ذهنی بپردازد. لذا بسیار مهم است مثال‌هایی انتخاب شوند تا ابعاد مختلف یک مفهوم را نمایش داده و در عین حال مخاطب را دچار بدفهمی نکند.

## ارزیابی و ارزشیابی

ارزیابی و ارزشیابی جزئی تفکیک ناپذیر از چرخه فرایند یاددهی - یادگیری است و باید

به گونه‌ای طراحی شود تا شواهدی معتبر در ارتباط با توانایی‌های مخاطبان در رسیدن و دستیابی به اهداف آموزشی و همچنین در ارتباط با طراحی‌های آموزشی دبیران در اختیار قرار دهد تا بتوان برای رشد و ارتقای توانایی‌های مخاطبان و بهبود و اصلاح طرح‌های آموزشی اقدام مناسب انجام داد. ارزیابی در کوتاه مدت و به شکل غیر رسمی جزئی طبیعی از فعالیت‌های کلاس درس است و می‌تواند در قالب مشاهده کردن، گوش دادن به هنرجویان، سؤال کردن و شرکت در بحث و گفتگوها و تصحیح نوشته‌های هنرجویان در حضور او یا بدون حضور او انجام شود. از این نوع ارزیابی‌ها می‌توان خیلی سریع در جمع‌بندی‌ها، رفع بدفهمی‌ها و یا بیان نکات آموزشی استفاده کرد. ارائه بازخوردها به شکل مثبت و همراه با راهکارهای رفع اشکالات در رشد هنرجویان مفید است. خود ارزیابی یکی از شیوه‌هایی است که موجب می‌شود تا هنرجو نسبت به دانسته‌ها و تفکر خود مدیریت پیدا کرده و آنها را رشد دهد. در میان گذاشتن معیارهای ارزشیابی با هنرجویان کمک می‌کند تا عملکرد خود را ارزیابی کنند و لذا یادگیری خود را استحکام بخشند.

### ارزشیابی عملکردی

ارزشیابی عملکردی مشاهده مستقیم و نظام دار و ارزشیابی از عملکرد هنرجویان است. در این شیوه از هنرجویان خواسته می‌شود تا با عملکرد خاص یا تولید چیزی مهارت و تبحر خود را نمایش دهند. از این شیوه می‌توان برای ارزشیابی مهارت‌های زیر استفاده نمود:

■ طراحی و اجرای یک طرح

■ نوشتن مقالات و مطالبی که نیاز به تلفیق و به‌کارگیری اطلاعات دارد.

■ نشان دادن تبحر لازم در به‌کارگیری ابزار یا تکنیک

■ مدل‌سازی

■ تهیه و تفسیر نمودار

■ جمع‌آوری اطلاعات و غیره

### طراحی آزمون‌های عملکردی

برای طراحی آزمون‌های عملکردی (کتبی یا عملی) باید مراحل زیر طی شود:

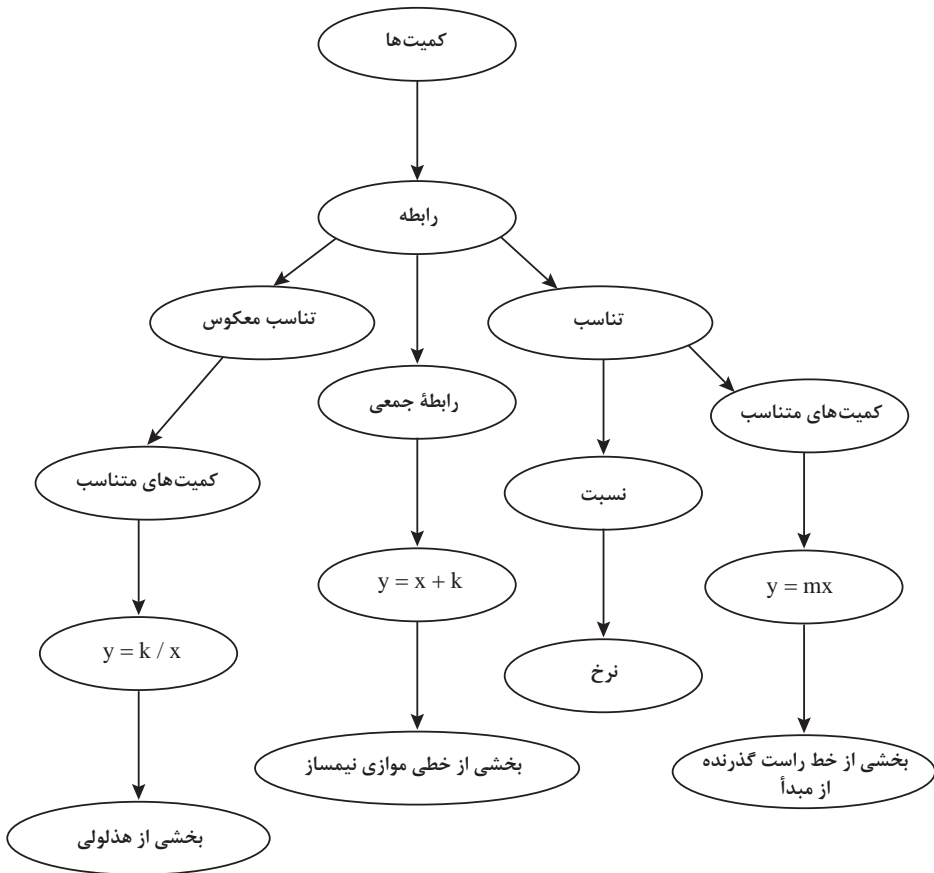
■ فهرست کردن مهارت‌ها و دانستنی‌ها و نگرش‌های مورد انتظار

- کدام مهارت‌های شناختی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- کدام مهارت‌های اجتماعی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- چه مهارت‌های اجتماعی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- چه مهارت‌های فراشناختی را هنرجویان باید کسب کنند؟
- چه نوع مسائلی را هنرجویان باید حل کنند؟
- چه اصول و مفاهیمی را هنرجویان باید به کار ببرند؟
- طراحی تکالیف و آزمون‌هایی که امکان بروز عملکرد مورد نظر را فراهم کند
- در طراحی انجام شده، مهارت مورد نظر چقدر با مهارت‌های شناختی، اجتماعی دیگر مربوط است و تا چه حد روی آنها اثر می‌گذارد؟
- در طراحی انجام شده، مهارت‌های مورد نظر تا چه حد با اهداف برنامه‌ها مربوط هستند؟
- ماهیت و اهمیت مهارت‌ها چگونه و تا چه اندازه است؟ آیا قابل آموزش هستند یا توسط هنرجویان باید کسب شوند؟
- چقدر زمان برای انجام فعالیت / تکلیف لازم است؟
- تعیین معیارهای ارزشیابی (معیارهای قابل وضوح و قابل اندازه‌گیری): توصیه می‌شود تا برای هنرجویان مثال‌هایی آورده شود تا انتظاراتی که از آنها است را درک کنند.



## فصل اول

### نسبت و تناسب



## اهداف کلی فصل

- درک مفهوم کمیت‌های متناسب مستقیم
- درک مفهوم کمیت‌های متناسب معکوس
- درک مفهوم نرخ

### عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- با استفاده از مقادیر متناظر دو کمیت، وجود رابطه بین دو کمیت متناسب را تشخیص دهند و نوع رابطه (مستقیم یا معکوس) را مشخص کنند.
- رابطه بین دو کمیت متناسب را به روش‌های مختلف (روش هندسی، روش جبری و ...) نمایش دهند.
- با داشتن رابطه بین دو کمیت، مقادیر متناظر کمیت‌ها را به دست آورند.
- مسائل مرتبط با نسبت در کمیت‌های متناسب را با روش‌های جبری و هندسی و ... حل کنند.

### پیش‌نیازها:

- آشنایی با مفهوم نسبت

### نگاه کلی به فصل:

مفهوم نسبت به دلیل کاربردهای آن از گذشته تا امروز در علوم مختلف و زندگی روزمره از اهمیت خاصی برخوردار است یکی از نسبت‌های معروف نسبت طلایی است: معبد پارتنون (معبد دختر) در سال‌های ۳۴۷ تا ۳۳۸ قبل از میلاد مسیح در آکروپولیس واقع در آتن ساخته شده است و عظیم‌ترین یادگار هنر معماری یونان باستان است، نسبت ارتفاع به طول تیر بزرگ این معبد نسبت طلایی است.



شکل ۱- معبد پارتنون

پرگار جالبی که در پمپی (یکی از شهرهای ایتالیا) در کارگاه مجسمه‌سازی پیدا شده است دال بر آن است که یونانی‌ها و رومی‌ها نه تنها از نسبت طلایی آگاهی داشته‌اند بلکه از آن استفاده هم می‌کرده‌اند. این پرگار هم‌اکنون در موزه ناپل نگهداری می‌شود که نسبت بین اجزای آن به نسبت طلایی نزدیک است. در خطاطی استاد میرعماد توانست با نزدیک کردن اجزای حروف و کلمات به نسبت طلایی آنها را به درجه‌اعلی زیبایی برساند.



شکل ۲ - نمونه‌ای از خط استاد میر عماد

در پدیده‌های طبیعی اجزای موجودات زنده تحت تأثیر شرایط محیطی با نسبت‌های خاصی رشد می‌کنند مثلاً نسبت نوک انگشتان تا آرنج به فاصله‌ی مچ تا آرنج یا نسبت فاصله‌ی شانه تا بالای سر به اندازه‌ی سر در هر فرد عدد ثابتی است (که نزدیک نسبت طلایی است). در مسائل مالی، نسبت‌های مالی (Financial Ratios) را می‌توان از جمله ابزار سودمند در تعیین موقعیت مالی شرکت‌ها به حساب آورد. محاسبه‌ی نسبت برخی از اقلام مهم مالی درک درستی از واقعیت‌های مهم درباره‌ی نتایج عملیات و وضعیت مالی یک شرکت را به دست می‌دهد. با بررسی و تحلیل این نسبت‌ها می‌توان به آسیب‌شناسی فعالیت مالی یک شرکت نیز دست یافت.

در زندگی روزمره برای تهیه‌ی غذا معمولاً مواد اولیه را با نسبت‌های خاصی مخلوط می‌کنند، در عکاسی موسیقی و ... نیز کاربرد نسبت دیده می‌شود.

در این فصل با تمرکز بر مفهوم کمیت‌های متناسب، نسبت بین مقادیرهای دو کمیت مطرح می‌شود و مسئله‌های مربوط به آنها بررسی می‌شوند. سپس مفهوم رابطه‌ی بین دو کمیت متناسب معکوس مطرح می‌شود و تفاوت آن با رابطه‌ی بین دو کمیت متناسب مستقیم برجسته می‌شود.

مثال	توصیف فرایند	فرایند
ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی	- ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	حل مسئله
- استفاده از رسم شکل، نمودار و روش جبری برای حل مثال ۳	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسئله‌ها و یا انتخاب مناسب آنها	
- تشریح چگونگی استفاده از یک طول مشخص برحسب گیره بزرگ برای بیان طول برحسب گیره کوچک (قسمت ۴ از فعالیت ۱)	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	ارتباط کلامی
- استفاده از زبان ریاضی برای بیان رابطه معکوس بین دو کمیت (نتیجه صفحه ۲۷ کتاب درسی)	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	استدلال و اثبات
- ارائه دلیل برای رد نظر مینا در مورد تعیین درصد روغن به سس (مسئله ۲ صفحه ۲۲)	به‌کارگیری استدلال	
- استفاده از روش جبری و رسم نمودار برای حل مسئله مربوط به پس‌انداز ماهانه علی (سؤال ۴ صفحه ۲۲). - رسم نمودار رابطه بین سبب زمینی و قیمت آن با توجه به رابطه وزن سبب زمینی و قیمت آن (سؤال ۶ کار در کلاس ۶)	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	پیوندها و اتصالات
- استفاده از نسبت برای بیان نرخ یک کالا	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	
- استفاده از روش رسم شکل برای حل مسائل مربوط به نسبت (سؤال ۴ از مسائل صفحه ۲۲). - نمایش‌های جبری و رسم نمودار برای حل مسائل مربوط به نسبت. (صفحه ۲۲ سؤال ۴)	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	بازنمایی‌ها
- مقایسه نرخ‌های متفاوت یک کالا (مسئله ۴ صفحه ۳۰)	مانند مقایسه کردن ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	سایر مهارت‌های تفکر

## بخش اول: نسبت‌های مستقیم

### اهداف بخش

- درک مفهوم نسبت به‌عنوان رابطه بین مقادیر دو کمیت
- استفاده از روش‌های مختلف (رسم شکل، روش هندسی، روش جبری) برای حل مسائل مربوط به کمیت‌های متناسب مستقیم
- مدل‌سازی رابطه بین دو کمیت متناسب مستقیم به کمک عبارت ضربی
- یافتن مقادیر متناظر دو کمیت متناسب مستقیم
- درک مفهوم نرخ و استفاده از آن برای محاسبه مقادیر کمیت‌های متناسب
- استفاده از مفهوم نرخ برای مقایسه رابطه بین کمیت‌های متناسب
- محاسبه ضریب تبدیل برای واحدهای مختلف یک کمیت یا دو کمیت مختلف

### واژه‌های کلیدی:

نسبت، تناسب، ضریب تبدیل، نرخ، رابطه جمعی، رابطه ضربی.

### نگاه کلی به بخش:

این بخش با طرح مسئله‌ای مربوط به اندازه‌گیری طول با یک واحد مشخص آغاز می‌شود تا زمینه انجام یک فعالیت برای درک کمیت‌های متناسب فراهم شود. هنرجویان با انجام این فعالیت ضمن حل مسئله طرح شده رابطه بین دو مقدار از یک کمیت را در قالب جدول و نمودار نشان می‌دهند. این رابطه با نسبت بین مقادیر این کمیت‌ها مشخص می‌شود که به‌عنوان ضریب تبدیل نام‌گذاری می‌شود. مثال‌هایی که در ادامه می‌آیند، ضمن اشاره به نقش ضریب تبدیل واحدها روش‌های رسم شکل، هندسی و جبری برای حل مسائل مرتبط با نسبت را ارائه می‌کنند. در ادامه نسبت بین کمیت‌های متناسبی که از یک جنس نیستند یا واحدهای اندازه‌گیری آنها یکسان نیست به‌عنوان نرخ معرفی می‌شوند و زمینه لازم برای مقایسه نرخ‌های دو کمیت فراهم می‌شود. در قسمت آخر بخش به نوع دیگری از رابطه بین دو کمیت اشاره می‌شود که به جای ثابت بودن تقسیم دو مقدار کمیت، تفاضل مقدار دو کمیت ثابت هستند. این گونه رابطه‌ها را رابطه جمعی می‌نامند. رابطه بین کمیت‌های متناسب در واقع رابطه‌ای ضربی است.

## ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان ضمن اشاره به تاریخچه و اهمیت استفاده از نسبت، از هنرجویان خواست که نمونه‌هایی از کاربرد نسبت در زندگی روزمره یا دروس دیگر خود را مطرح کنند، در صورتی که مطالب ارائه شده توسط آنها قابلیت تبدیل به فعالیت را داشته باشد، فعالیتی بر پایه آن مطرح کنید. در غیر این صورت با بیان شفاهی مسئله مطرح شده در کتاب یا با مطالعه متن ابتدای فصل انگیزه لازم برای انجام فعالیت توسط هنرجویان را فراهم کنید.

## فعالیت آموزشی

نمایش رابطه بین دو کمیت متناسب معمولاً با روش‌های زیر انجام می‌شود:

### ■ جدول

### ■ رسم نمودار

### ■ یک عبارت به زبان فارسی

### ■ معادله (عبارت جبری)

هر کدام از این روش‌ها ویژگی‌های خاص خود را دارند که برخی از آنها عبارت‌اند از: در نمایش جدولی با ارائه چند مقدار متناظر از مقادیر متناسب، یکسان بودن نسبت این مقادیر (تناسب) به خوبی مشخص می‌شود.

در رسم نمودار، دید کلی‌تری از رابطه بین مقادیر متناسب به نمایش در می‌آید.

بیان رابطه بین دو کمیت متناسب به صورت یک عبارت به زبان فارسی امکان درک بهتر مفهوم نسبت را افزایش می‌دهد.

در نمایش جبری، ارتباط بین مقادیر در قالب یک فرمول (معادله) ارائه می‌شود استفاده از این معادله برای یافتن مقادیر متناظر به‌سادگی قابل انجام است.

در هر کدام از قسمت‌ها توصیه می‌شود از هنرجویان خواسته شود تا نمایش‌های مختلف رابطه بین دو نسبت را به یکدیگر تبدیل کنند.

17 در جدول زیر، مقادیر متناسب به اندازه‌ای بر حسب کرده‌اند که با مقادیر متناسب یکسان اندازه را به حسب کرده کوچک نشان می‌دهد این جدول را کامل کنید.

1	2
2	4
3	6

18 در زیر، نموداری رسم شده که رابطه بین اندازه‌ها به حسب کرده بزرگ و اندازه‌ها به حسب کرده کوچک را نشان می‌دهد.

19 اگر طول کتاب  $\frac{1}{2}$  و عرض آن  $\frac{1}{3}$  بوده بزرگ باشد، به کمک نمودار بالا طول و عرض کتاب را به حسب کرده کوچک پیدا کنید.

20 نسبت طول کرده بزرگ به طول کرده کوچک را بنویسید. چگونه می‌تواند با داشتن طول کتاب و عرض کرده بزرگ، از این نسبت برای پیدا کردن طول کتاب به حسب کرده کوچک استفاده کنید؟

## اهداف موضوعی:

■ درک رابطهٔ بین دو واحد اندازه‌گیری از یک کمیت از طریق مقایسهٔ نسبت مقادیر متناظر.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت استفاده از جدول، مهارت استفاده از نمودار، الگویابی، تفکر بصری

۱ جدول تکمیل شده:

اندازه برحسب گیره‌های کوچک	اندازه برحسب گیره‌های بزرگ
۰	۰
۳	۲
۶	۴
۹	۶

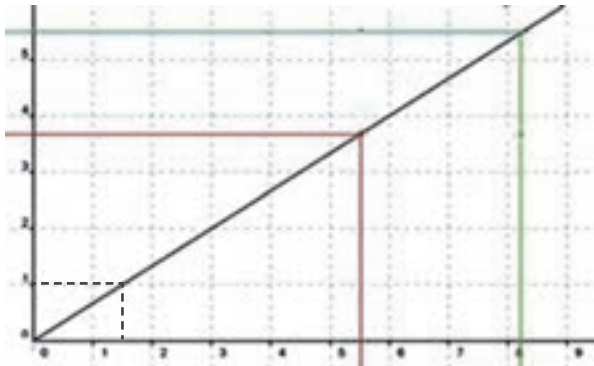
۲ نمودار رسم شده:



۳ با استفاده از نمودار ملاحظه می‌شود طول و عرض برحسب گیرهٔ کوچک عبارت است از:



طول بر حسب گیره کوچک تقریباً برابر  $8\frac{1}{5}$  و عرض بر حسب گیره کوچک برابر  $5\frac{6}{10}$  است.



**۴** توجه داشته باشید که اگر از نقطه ۱ روی محور لایها موازی محورهای X رسم کنیم و سپس از محل برخورد آن با نمودار موازی محور لایها رسم کنیم، مشاهده می‌شود که  $1/5$  گیره کوچک داریم یعنی نسبت طول گیره بزرگ به طول گیره کوچک عبارت است از  $5/3$  (توجه کنید نسبت تعداد گیره‌های بزرگ به تعداد گیره‌های کوچک  $5/3$  است). برای به دست آوردن طول بر حسب گیره کوچک کافی است طول بر حسب گیره بزرگ را در  $3/5$  ضرب کنیم.

$$(\text{طول بر حسب گیره کوچک} = \text{طول بر حسب گیره بزرگ}) \times \frac{3}{5}$$

$$\text{مثلاً در این مسئله داریم: طول کتاب} = 8\frac{1}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5} \times \frac{3}{5} = 5\frac{6}{10}$$

$$\text{عرض کتاب بر حسب گیره کوچک: } 3\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{11}{5} \times \frac{3}{5} = 5\frac{6}{10}$$

هرگاه دو کمیت متناسب رابطه مستقیم داشته باشند دارای ویژگی‌های مهم زیر هستند:

- ✓ با افزایش یکی از آنها دیگری نیز افزایش می‌یابد.
  - ✓ نمودار رابطه آنها یک خط راست است که از مبدأ می‌گذرد و شیب این خط همان نسبت بین دو کمیت (ضریب تبدیل) می‌باشد.
- پس از حل فعالیت توسط هنرجویان می‌توان سؤالات زیر را از آنها پرسید:
- آیا با افزایش یک کمیت (یا واحد)، کمیت (یا واحد) دیگر افزایش می‌یابد یا کاهش می‌یابد.
  - آیا نمودار این رابطه، یک خط راست است؟

- آیا می‌توانید معادله این خط را بنویسید؟
- شیب (ضریب زاویه) این خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟
- نمودار دو کمیت متناسب مستقیم از کدام نقطه همیشه می‌گذرد؟ (جواب: (۰ و ۰))

۱۱) آیا دو نسبت ۲۲ به ۵۵ و ۶ به ۱۱ دو نسبت مساوی‌اند؟  
 بله،  $K$  برابر است با .....  
 خیر؛ نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با نسبت ۲۲ به ۵۵ و  $K$  برابر است با .....

۱۲) آیا دو نسبت ۲ به ۵ و ۱۰ به ۲۵ دو نسبت مساوی‌اند؟  
 بله؛  $K$  برابر است با .....  
 خیر؛ نسبت ۲ به ۵ برابر است با نسبت ..... به .....

۱۳) اثر یک روزنامه عکس‌ها با انعکاس  $50\%$  چاپ می‌شوند. در مرحله صفحه‌آرایی تصمیم گرفته شد عکس‌ها با طول ۱۲ چاپ شوند. عرض عکس‌ها چقدر باید باشد؟

### اهداف:

- حل مسئله مرتبط با نسبت
- ۱) خیر، نسبت ۶ به ۱۱ برابر است با ۴۲ به ۷۷ و  $K$  برابر است با:  $\frac{۶}{۱۱}$
- ۲) بله، برابر است با:  $\frac{۲}{۵}$
- ۳)  $\frac{۵}{۶} = \frac{x}{۱۲} = k \Rightarrow x = ۱۲k = ۱۲ \times \frac{۵}{۶} = ۱۰$

### فعالیت آموزشی

در میدان نریمان، هر ۳ کیلوگرم سیب‌زمینی ۳۰۰۰ تومان است.

## اهداف موضوعی:

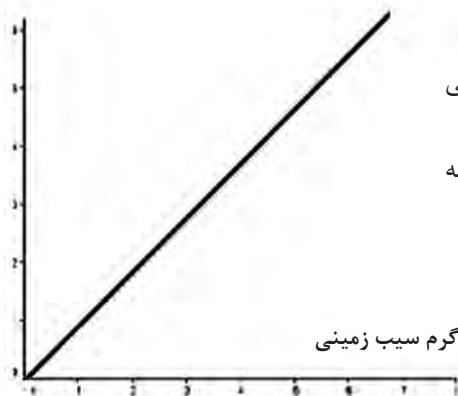
درک مفهوم نرخ

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی، بازنمایی‌های چندگانه
- ۱ نسبت قیمت سیب زمینی به وزن آن، برابر است با:  $3000$  تومان به  $3$  کیلو گرم سیب زمینی
- ۲ نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن برابر است با  $1000$  تومان به  $1$  کیلوگرم سیب‌زمینی.
- ۳ این نسبت نشان می‌دهد که با  $1000$  تومان می‌توان  $1$  کیلو گرم سیب‌زمینی خرید.
- ۴ نسبت وزن سیب زمینی به قیمت آن، برابر است با:  $3$  کیلوگرم سیب‌زمینی به  $3000$  تومان
- ۵ نسبت وزن سیب‌زمینی به قیمت آن برابر است با  $\frac{1}{1000}$  کیلوگرم سیب‌زمینی به  $1$  تومان.
- ۶ این نسبت نشان می‌دهد که با  $1$  تومان می‌توان  $\frac{1}{1000}$  کیلوگرم ( $1$  گرم) سیب‌زمینی خرید.
- ۷ برای پیدا کردن قیمت  $5$  کیلوگرم سیب‌زمینی رابطه زیر را کامل کنید.

$$\frac{5 \text{ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{5000 \text{ تومان}} = \frac{3 \text{ کیلوگرم سیب‌زمینی}}{3000 \text{ تومان}}$$

قیمت بر حسب هزار تومان



- ۸ نمودار رابطه بین مقدار سیب زمینی و قیمت آنها را رسم کنید.
- ۹ شیب، نسبت قیمت سیب‌زمینی به وزن آن را نشان می‌دهد.

در مثال‌های این قسمت نسبت دو کمیت متناسب با واحدهای مختلف (نرخ) در بافت‌های مختلف عنوان شده است تا هنرجو درک بهتری از مفهوم نرخ داشته باشد و زمینه مقایسه نرخ‌های مختلف از دو کمیت در بافت‌های عنوان شده فراهم شود. در این قسمت همچنین روش‌های مختلف حل مسائل مربوط به نرخ مطرح شده است.

کاربردهای ۴

۱) نرخ مصرف بنزین به مسافت طی شده در دو ماشین مختلف به ترتیب  $\frac{۳۰}{۳۰۰}$  لیتر و  $\frac{۲۷}{۳۰۰}$  کیلومتر است. کدام ماشین پامرفه‌تر است؟

۲) بلیت‌های یک سینما در یک ساعت مانده به شروع فیلم، در هر دقیقه به میزان ثابتی به فروش می‌رسد. اگر این سینما ۲۴۰ بلیت را در ۱۶ دقیقه بفروشد، ابتدا نرخ فروش بلیت در دقیقه را پیدا کنید. سپس به کمک آن، تعداد بلیت‌های فروخته شده در هر ساعت را به دست آورید.

### اهداف:

- کسب مهارت در محاسبه نرخ دو کمیت متناسب .
- کسب مهارت در استفاده از نرخ در حل مسائل.

۱) نرخ مصرف در ماشین اول  $\frac{۳۰}{۳۰۰} = ۰/۰۹۳$  و در ماشین دوم  $\frac{۲۷}{۳۰۰} = ۰/۰۹$

است یعنی ماشین اول در یک کیلومتر  $۰/۰۹۳$  لیتر و ماشین دوم در یک کیلومتر  $۰/۰۹$  لیتر مصرف می‌کند، پس مصرف ماشین دوم کمتر و مقرون به صرفه‌تر است.

۲)  $\frac{۲۴۰}{۱۶} = ۲۴۰ \div ۱۶ = ۱۵$  در دقیقه

تعداد بلیت‌های فروخته شده در ساعت:  $۱۵ \times ۶۰ = ۹۰۰$

## فعالیت آموزشی

فعالیت ۳

علی و احمد با سرعت برابر در یک مسیر دایره‌ای دوچرخه سواری می‌کردند. علی زودتر از احمد دوچرخه‌سواری را شروع کرده بود؛ به طوری که وقتی که او ۹ دور زده بود، احمد ۴ دور زده بود.



### اهداف موضوعی:

- آشنایی با رابطهٔ جمعی بین دو کمیت
- مقایسهٔ رابطهٔ جمعی و ضربی بین دو کمیت.
- تشخیص نوع رابطه (جمعی یا ضربی) بین دو کمیت با استفاده از مقادیر مختلف دو کمیت.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، الگویابی، مقایسه کردن
- ۱ تکمیل شدهٔ جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۶
۳	۹
۶	۱۲
۹	۱۵

- ۲ کافی است از اعداد ستون اول (از سمت چپ) ۶ واحد کم کنیم تا اعداد ستون دوم به دست آیند. این فعالیت تمرینی است برای الگویابی در دو مرحله. ابتدا در مرحله اول، اعداد ستون سمت چپ کامل می‌شوند و سپس با کشف رابطه بین دو ستون اعداد ستون دوم کامل می‌شوند.
- ۳ سرعت علی ۳ برابر سرعت احمد است.
- ۴ تکمیل شده جدول:

تعداد دورهای احمد	تعداد دورهای علی
۰	۰
۳	۹
۴	۱۲
۵	۱۵

- ۵ کافی است اعداد ستون اول را بر ۳ تقسیم کنیم تا اعداد ستون دوم به دست آیند. در مثال بعد از این فعالیت، سؤالی در مورد رابطهٔ بین سن دو نفر مطرح شده است. با توجه

به اینکه در هر زمان با افزودن عددی ثابت به سن یکی، سن دیگری به دست می‌آید، این رابطه جمعی است. معادله جبری این رابطه به صورت  $y = x + k$  است و می‌توان از هنرجویان خواست تفاوت آن را با معادله مربوط به نسبت مستقیم بررسی کنند.

## مسئله‌ها



### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، پیوند و اتصال

از هنرجویان بخواهید با استفاده از یک نقشه فاصله بین دو نقطه مهم (مثلاً دو شهر مهم در نقشه شهرهای ایران) را روی نقشه اندازه‌گیری کنند و به کمک مقیاس آن (که در کنار نقشه درج شده است) فاصله واقعی این دو شهر را پیدا کنند و آن را با فاصله رسمی اعلام شده بین دو شهر مقایسه کنند. در صورت وجود تفاوت دلیل این تفاوت را بیابند.

۳) مینا برای تهیه نوعی سس سالاد، به کتاب آشپزی مراجعه کرد. نسبت روغن به سرکه در آن سس، ۳ به ۴ بود. مینا گفت: یعنی ۷۵٪ سس روغن است. آیا مینا درست متوجه شده بود؟ توضیح دهید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، استدلال کردن

جواب: خیر، اگر نسبت روغن به کل سس ۳ به ۴ باشد ۷۵ درصد سس روغن است اما در اینجا نسبت روغن به سرکه گفته شده است.

۴) ماکسی می‌خواهد عکسی را در ابعاد  $25 \times 25$  بزرگ کند و سپس آن را روی طولی به طول ۵۵ سانتی‌متر چاپ کند. عرض عکس بزرگ شده چقدر خواهد بود؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، بازنمایی، پیوند اتصال ریاضی و خارج ریاضی

طول مقوا را متناظر طول عکس در نظر می‌گیریم:

$$\frac{35}{25} = \frac{55}{x} = k \rightarrow x = 55 \times \frac{25}{35} = \frac{275}{7}$$

۴) علی هر ماه مقداری ثابت پول را پس‌انداز می‌کند. جدول زیر مقدار پس‌انداز او را در چند ماه نشان می‌دهد.

شماره ماه	مقدار پس‌انداز (تومان)
۲	۳۵۰
۴	۷۰۰
۶	۱۰۵۰
۸	-
۱۰	-

این جدول به سه روش رسم شکل، رسم نمودار و جبری کامل کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها، الگویابی

رسم شکل:

۱	۱
---	---

۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰	۵۰
----	----	----	----	----	----	----

۴	۴
---	---

۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۰۰
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

هشت ماه:

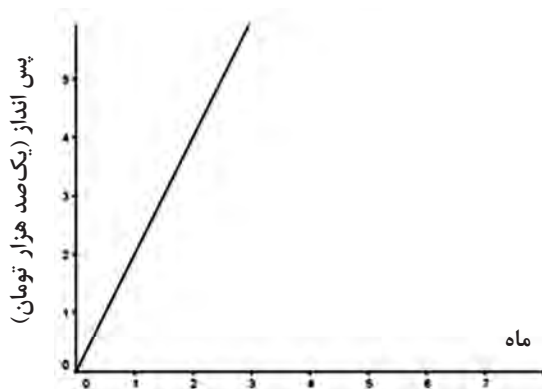
$$7 \times 200 = 1400$$

$$10 \text{ ماه: } 7 \times 250 = 1750$$

۵	۵
---	---

۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰	۲۵۰
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

نمودار:



جبری: پس از ۸ ماه:  $۸ \times \frac{۳۵۰}{۲} = ۱۴۰۰$  و پس از ۱۰ ماه:  $۱۰ \times \frac{۳۵۰}{۲} = ۱۷۵۰$



## بخش دوم: نسبت‌های معکوس

### اهداف بخش

- درک مفهوم رابطه معکوس بین دو کمیت متناسب
- تشخیص رابطه معکوس بین دو کمیت متناسب
- یافتن مقادیر متناظر دو کمیت که با هم رابطه معکوس دارند.
- مدل‌سازی رابطه بین دو کمیت متناسب معکوس به کمک تقسیم.

### واژه‌های کلیدی:

نسبت معکوس، نسبت مستقیم.

### نگاه کلی به بخش:

یکی از اشتباهات رایج که در حل مسائل مربوط به کمیت‌های متناسب اتفاق می‌افتد ناشی از عدم درک تفاوت بین نسبت‌های مستقیم و معکوس می‌باشد. این بخش با طرح یک مسئله و شرح فرایند حل آن توسط یکی از هنرجویان آغاز می‌شود. در این مسئله این اشتباه باز شده است تا با تحلیل جواب به دست آمده و پی بردن به نتیجه نادرست توسط خود هنرجو، زمینه لازم برای معرفی مفهوم نسبت معکوس فراهم شود.

در ادامه، با مقایسه تفاوت بین رابطه کمیت‌های متناسب مستقیم و کمیت‌های متناسب معکوس، روش تشخیص کمیت‌های متناسب معکوس بیان می‌شود و جهت درک بهتر این گونه رابطه‌ها، نموداری از یک رابطه معکوس بین دو کمیت ارائه می‌شود. تأکید بر ثابت بودن حاصل ضرب مقادیر متناظر از دو کمیت که دارای رابطه معکوس هستند، به عنوان یکی از ویژگی‌های اساسی این گونه رابطه‌ها به هنرجویان در درک و تشخیص بهتر این گونه رابطه‌ها کمک می‌کند. در مثال‌ها و کار در کلاس‌ها این نکته نیز ذکر می‌شود که همه کمیت‌ها لزوماً متناسب مستقیم یا معکوس نیستند.

در این بخش از هنرجویان خواسته می‌شود که مسئله‌ای در زمینه کمیت‌های متناسب با رابطه معکوس طرح کنند. با این کار، هنرجویان برای طرح موفقیت‌آمیز مسئله در موقعیت مفروض، سعی می‌کنند دانسته‌های خود را سازماندهی و منسجم کنند و در قالب مسائل خوش تعریف بیان کنند. در این صورت، حتی اگر در طرح مسئله صحیح چندان هم موفق نباشند، تلاش صورت گرفته توسط

آنها فرصت بازتاب روی محتوای مورد نظر را در اختیارشان قرار می‌دهد. این امر می‌تواند به فهم عمیق‌تر موضوع کمک کند و باعث شود هنرجویان از طرح مسئله و یادگیری ریاضی لذت ببرند. این عمل، همچنین به دبیران کمک می‌کند تا نسبت به ادراکات و دانش ریاضی هنرجویان بصیرت بهتری به دست آورند.

### ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان مثال‌هایی از کمیت‌های متناسب با رابطه معکوس را مطرح کرد و با دادن یک مقدار از این کمیت‌ها، از هنرجویان خواست مقدار متناظر آن را به دست آورند و تأثیر رفتار یک کمیت بر کمیت دیگر را بیان کنند. مثلاً با کاهش یک کمیت، کمیت دیگر چه تغییری پیدا می‌کند؟ یا می‌توان از هنرجویان خواست با مطالعه مطالب ابتدای بخش به حل فعالیت ۴ بپردازند.

## فعالیت آموزشی


برای پر کردن مخزن آبی، ۱۰ شیر آب یکسان بر سر لوله‌ها کار گذاشته شده است. دو شیر آب وقتی به طور کامل باز هستند، این مخزن در ۸ ساعت پر می‌شود.

۱) اگر ۴ شیر آب هم‌زمان، به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟ دبیر/مختریان به من گفته: حواست باشد که شیرهای آب با هم حرف نمی‌زنند!

۲) اگر ۸ شیر آب هم‌زمان به طور کامل باز شوند، مخزن در چند ساعت پر می‌شود؟

۳) رابطه بین تعداد شیرهای باز آب و زمان پر شدن مخزن را توصیف کنید.

فعالیت ۴



### اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین دو کمیت متناسب معکوس.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی.
  - ۱) چون تعداد شیرها دو برابر شده است، پس زمان نصف می‌شود. یعنی ۴ ساعت
  - ۲) چون در این حالت تعداد شیرها دو برابر حالت (۱) شده است، زمان نیز نصف زمان حالت (۱) است، یعنی ۲ ساعت.
  - ۳) هرچه تعداد شیرهایی که آب از طریق آنها وارد حوض می‌شود افزایش یابد سرعت پر شدن حوض بیشتر شده و حوض در زمان کمتری پر خواهد شد. بنابراین با افزایش تعداد شیرها، زمان پر شدن حوض کاهش خواهد یافت.
- توضیحات پس از فعالیت در ایجاد درک صحیح از رابطه بین دو کمیت متناسب

که رابطه معکوس دارند نقش اساسی دارند بنابراین توصیه می‌شود این توضیح‌ها به صورت پرسش و پاسخ بین دبیر و هنرجویان مطرح شود تا همگی آنها ضمن مشارکت در فرایند درک مفهوم به اشکالات احتمالی خود در درک این مفهوم پی ببرند. در غیر این صورت دبیر از هنرجویان بخواهد که با مطالعه متن پس از فعالیت، اشکالات احتمالی خود از درک مطلب را از دبیر سؤال کنند. طی مراحل ذکر شده در پرسش و پاسخ دبیر و هنرجو، در چند مسئله مشابه به درک بیشتر این مفهوم کمک می‌کند.

توجه کنید که دو کمیت متناسب که با هم رابطه معکوس دارند، دارای ویژگی‌های زیر هستند.

✓ حاصل ضرب مقادیر متناظر از این دو کمیت مقدار ثابتی است، بنابراین با افزایش (کاهش) یکی از آنها دیگری کاهش (افزایش) می‌یابد.

✓ نمودار رابطه یک شاخه از هذلولی است.

پس از انجام این فعالیت می‌توان برای درک بهتر مفهوم و تشخیص نسبت‌های معکوس این ویژگی‌ها را برای هنرجویان توصیف کرد (مثلاً از روی نمودار مشخص کرد که تغییرات یک کمیت چه تأثیری بر تغییرات کمیت دیگر دارد. یا با دادن مقادیر بیشتری از یک کمیت مقدارهای بیشتری از کمیت دیگر را به دست آورد) و در مسائل مختلف به این ویژگی‌ها اشاره داشت.

گرفتن آسان



۱- الف) دو کمیت متناسب را نام ببرید که با هم رابطه معکوس داشته باشند.

۲) یا در نظر گرفتن ارتباط این دو کمیت، مسئله‌ای طرح کنید.

۳) شمعی به طول ۱۴ سانتی‌متر را روشن می‌کنیم، این شمع در هر ۵ دقیقه ۱ سانتی‌متر کوتاه می‌شود.

الف) اگر لحظه روشن کردن شمع را زمان صفر در نظر بگیریم، رابطه بین زمان و طول شمع را بنویسید.

ب) با افزایش زمان، طول شمع چگونه تغییر می‌کند؟ آیا زمان و طول شمع کمیت‌های متناسب معکوس یکدیگرند؟ چرا؟

## اهداف:

- تقویت مهارت تشخیص کمیت‌های متناسب معکوس.
- پرورش مهارت‌های الگویابی، مدل‌سازی، استدلال کردن، طرح مسئله

۱ مثال‌های متنوعی از محیط پیرامونی را می‌توان مطرح کرد. در صورتی که لازم باشد دیر می‌تواند با ذکر ویژگی‌های کمیت‌های متناسب با نسبت معکوس (از جمله اینکه با افزایش مقادیر یکی مقدار دیگری کاهش می‌یابد) به ارائه مثال‌ها توسط هنرآموزان کمک کند، یا پاسخ‌های درست را تفسیر و پاسخ‌های نادرست را به کمک هنرجویان تحلیل و تصحیح کند.

۲ طرح یک مسئله می‌تواند با راهنمایی دیر انجام شود.

۳

$$y = 14 - \frac{t}{5} \quad (\text{الف})$$

(با به صورت کلامی: طول شمع بر حسب سانتی‌متر  $= \frac{1}{5}$  زمان طی شده بر حسب دقیقه - ۱۴)

ب) با افزایش و گذر زمان طول شمع کاهش می‌یابد. چون حاصل ضرب این دو کمیت عدد ثابتی نیست، بنابراین رابطه بین این دو کمیت از نوع تناسب معکوس نیست. نمودار این رابطه بخشی از خط است در حالی که نمودار رابطه‌های معکوس یک منحنی هذلولی است. این سؤال اشاره به یک اشتباه که ممکن است برای هنرجویان اتفاق بیفتد دارد، نوع رابطه بین طول شمع و مدت زمان سوختن شمع (که با افزایش زمان، طول شمع کاهش می‌یابد) ممکن است این تصور را در ذهن هنرجو ایجاد کند که کمیت‌های ذکر شده متناسب معکوس هستند. اما علاوه بر تشخیص از روی نمودار، با توجه به رابطه خطی بین این دو کمیت (و اینکه حاصل ضرب این دو کمیت یک عدد ثابتی نیست) می‌توان فهمید که متناسب معکوس نیستند.

## مسئله‌ها

(۱) جاهای خالی را پر کنید.

نسبت دو کمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند  نامیده می‌شود.

دو کمیت  $A$  و  $B$  را در نظر بگیرید. اگر با افزایش یک واحد از  $A$ ، یک واحد از  $B$  افزایش یابد، دو کمیت رابطه  دارند.

## مهارت‌ها و فرایندها:

### ■ بازیابی اطلاعات

- نسبت دو کمیت متناسب که با یک واحد اندازه‌گیری نمی‌شوند نرخ نامیده می‌شود.
- دو کمیت  $A$  و  $B$  را در نظر بگیرید. اگر با افزایش هر واحد از  $A$  یک واحد از  $B$  افزایش یابد دو کمیت رابطه جمعی دارند.

۲) دو مثال از نرخ بیان کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، پرورش تفکر واگرا

قیمت میوه به وزن آن، مسافت طی شده نسبت به زمان سپری شده از شروع حرکت در یک خودرو با سرعت ثابت و ....

۳) اگر ضریب تبدیل واحد A به B عدد  $\frac{2}{3}$  باشد، به سوال‌های زیر پاسخ دهید.  
 الف) ۴ واحد از A معادل چند واحد از B است؟  
 ب) ۴ واحد از B معادل چند واحد از A است؟  
 پ) ضریب تبدیل واحد B به واحد A را بنویسید.  
 ت) رابطه بین این دو واحد را با نمودار نشان دهید و به پرسش‌های الف و ب از روی نمودار پاسخ دهید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

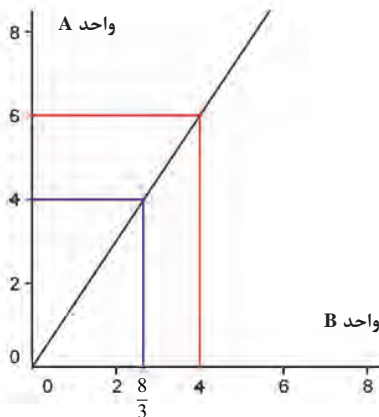
■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، تفکر بصری

$$\text{حل: الف) } x = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{ب) } x = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

$$\text{پ) } \frac{3}{2}$$

ت)



۱۶ جدول زیر نوزی کالا را نشان می‌دهد که در سه اندازه کوچک، متوسط و بزرگ بسته بندی شده است.

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱۲۰۰	۰/۰۰۱۲۵	۸۰۰
متوسط	۴	۳۰۰۰	۰/۰۰۱۳۳	۷۵۰
بزرگ	۱۵	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۶۶۶/۶۷

الف) جدول را کامل کنید.  
ب) کدام بسته با صرفه‌تر است؟

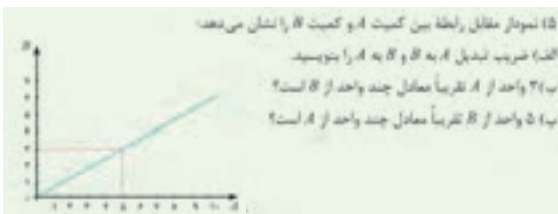
### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه کردن

حل: الف)

نوع	وزن (کیلوگرم)	قیمت (تومان)	نسبت وزن به قیمت	نسبت قیمت به وزن
کوچک	۱/۵	۱۲۰۰	۰/۰۰۱۲۵	۸۰۰
متوسط	۴	۳۰۰۰	۰/۰۰۱۳۳	۷۵۰
بزرگ	۱۵	۱۰۰۰۰	۰/۰۰۱۵	۶۶۶/۶۷

ب) بسته بزرگ زیرا قیمت آن نسبت به وزن از بقیه بسته‌ها کمتر است.



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پرورش تفکر بصری

حل:

الف) ضریب تبدیل A به B عبارت است از:  $\frac{۳}{۵}$  و ضریب تبدیل B به A عبارت

است از:  $\frac{۵}{۳}$ .

$$\frac{۳}{۵} \times ۳ = \frac{۹}{۵} = ۱/۸ \text{ (ب)}$$

$$\frac{۵}{۳} \times ۵ = \frac{۲۵}{۳} \approx ۸/۳۳ \text{ (پ)}$$

۶) از میان کمیت‌های متناسب زیر، کدام مستقیم و کدام معکوس است؟  
الف) وزن یک کالا و قیمت آن؛  
ب) تعداد شهرهایی که یک جوی آب را بر می‌کشد و زمان پر شدن جوی؛  
پ) زمان مکالمه با تلفن همراه و هزینه آن؛  
ت) تعداد مشتریان در یک بانک به زمان انتظار آنها یا فرض برابری زمان سرویس‌دهی؛  
ث) وزن بسته پستی و هزینه ارسال بدون در نظر گرفتن هزینه ثابت؛  
ج) تعداد کارگران و زمان انجام کار برای تخلیه بارهای یک انبار؛  
چ) درآمد حاصل از دریافت عوارضی در یک اتوبان و تعداد ماشین‌هایی که از آن عبور می‌کنند.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ مقایسه کردن، استدلال کردن

حل: هر دو کمیت متناسب که با افزایش یکی دیگری نیز افزایش یابد مستقیم و در غیر این صورت معکوس است:

الف) مستقیم (ب) معکوس (پ) مستقیم (ت) مستقیم (ث) مستقیم  
ج) معکوس (چ) مستقیم

مطالب این فصل در ارتباط با چند نوع خاص از رابطه‌های بین دو کمیت بود. این رابطه‌ها از ساده‌ترین رابطه‌های ممکن بین دو کمیت بودند که همواره مورد توجه بوده و در زندگی روزانه مورد استفاده قرار می‌گیرند. توسعه این مفهوم در فصل آخر کتاب تحت عنوان تابع انجام شده است. عملاً در این فصل به‌طور غیر مستقیم با مفهوم تابع سر و کار داشته‌ایم بدون آنکه نامی از تابع بیاوریم.

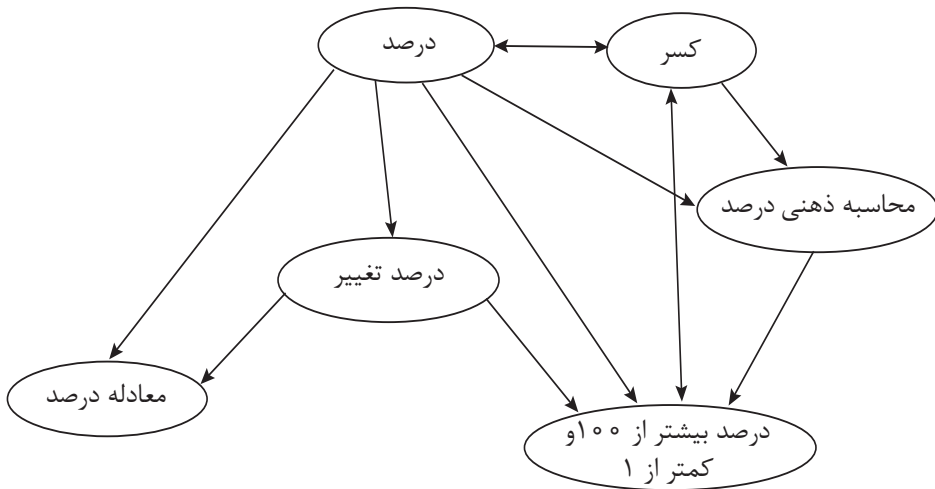
در کمیت‌های متناسب مستقیم رابطه بین آنها با ضابطه  $y = Kx$  بیان و در کمیت‌های متناسب معکوس رابطه آنها با ضابطه  $y = \frac{k}{x}$  بیان و در کمیت‌هایی که رابطه جمعی داشتند، رابطه بین آنها با ضابطه  $y = x + K$  بیان می‌شد. تمام اینها انواع خاصی از توابع هستند. در برخی از مسائل با ترکیبی از این توابع هم برخورد کرده‌اید. مثلاً در مسئله سوختن شمع که طول آن مرتبط با زمان سپری شده بود و با افزایش زمان، طول شمع کاهش می‌یافت اما این رابطه از نوع تناسب معکوس نبود و ضابطه آن به صورت  $y = Kx + b$  بوده است. بنابراین رابطه بین طول شمع و زمان ترکیبی از تناسب مستقیم و رابطه جمعی است. منتها در اینجا مقدار  $K$  منفی است و به همین خاطر با افزایش زمان طول شمع کاهش می‌یابد. در کمیت‌های متناسب مستقیم معمولاً ضریب تناسب  $K$  مثبت است زیرا کمیت‌های هندسی و فیزیکی که معمولاً با آنها سر و کار داریم، مثبت هستند.



## فصل دوم

# درصد و کاربردهای آن

## طرح کلی مفاهیم فصل دوم (نقشه مفهومی)



## اهداف کلی فصل

- درک ارتباط بین کسر و درصد
- درک مفهوم درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- درک مفهوم درصد تغییر یک کمیت
- توجه به اهمیت کاربرد درصد در مسائل زندگی روزمره
- کسب مهارت محاسبه ذهنی درصد

### عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- درصدی از یک مقدار را به صورت ذهنی محاسبه کنند.
- درصد را با روش‌های مختلف محاسبه کنند و روش مناسب برای هر مسئله را بیابند و به کار گیرند.

- برای حل مسائل مرتبط با درصد معادله تشکیل دهند و معادله را حل کنند.
- درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ مقادیر مختلف را تفسیر و محاسبه کنند.
- درصد تغییر در مقدار کمیت‌ها را محاسبه کنند.

### پیش نیازها:

- آشنایی با مفهوم درصد و محاسبات مربوط به آن.

## نگاه کلی به فصل

مفهوم درصد و محاسبات با آن در زندگی بسیار به کار می‌رود. درک درست از این مفهوم، هنرجو را برای تشخیص آن در زمینه‌های گوناگون و چگونگی محاسبه با آن آماده می‌کند.

برای مثال، در علم احتمال مقدار یک احتمال یا نتایج به صورت درصد نیز بیان می‌شود. ارائه آمارهای اقتصادی از رشد یا کاهش یک مقدار یا شاخص‌های اقتصادی معمولاً با درصد بیان می‌شود. در اکثر فروشگاه‌هایی که در ایامی خاص اجناس خود را با تخفیف عرضه می‌کنند، مقدار تخفیف با درصد بیان می‌شود. این قبیل کاربردها باعث شده است که اکثر مردم درکی از مفهوم درصد داشته باشند. مثلاً در زبان محاوره‌ای وقتی اشاره به قطعیت اتفاقی داریم از اصطلاح ۱۰۰ درصد استفاده می‌کنیم و وقتی به عدم انجام یک اتفاق یقین داریم احتمال انجام آن اتفاق را با صفر درصد بیان می‌کنیم.

این فصل با بیان یک داستان درباره برخی اشتباهات رایج در محاسبات با درصد شروع شده است تا یک یادآوری غیر مستقیم از مفهوم درصد انجام شود. بخش اول این فصل، حالت یادآوری مفهوم درصد و چگونگی محاسبات با درصد و محاسبات ذهنی درصد را دارد. بخش دوم به آموزش مفهوم درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ می‌پردازد و با ارائه یک گزارش از یک نشریه درباره موضوعی که تقریباً همگی هنرجویان به نوعی با آن ارتباط دارند شروع شده است. این بخش از طریق مباحثه هنرجو با یکی از دبیران خود آموزش را ادامه می‌دهد. بخش سوم به مفهوم درصد تغییرات یک کمیت می‌پردازد و از طریق یک فعالیت محاسباتی این مفهوم را آموزش می‌دهد.

فرایند	توصیف فرایند	مثال
حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	- ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسئله‌ها و یا انتخاب مناسب آنها	- نوشتن معادله درصد و تبدیل به کسر کردن (کار در کلاس ۳)
ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	- ارائه توضیح برای بیان درستی یا نادرستی نظر یکی از هنرجویان (قسمت «پ» فعالیت ۱) - ارائه توضیح در مورد درستی یا نادرستی تصور جعفر (سؤال ۹ از مسئله‌های بخش اول)
	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	- توضیح دادن (مسئله ۷ از بخش اول)
استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	- ارائه دلیل برای مقایسه $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ (سؤال ۲ از مسائل بخش ۲) - ارائه دلیل برای بررسی درستی یا نادرستی نظر جعفر (سؤال ۹ از مسئله‌های بخش ۱)
پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری در خارج از ریاضی	- ارتباط کسر و درصد (در حوزه اعداد) - به‌کارگیری درصد در بیان رشد وزن نوزاد (ارتباط با پزشکی)
	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	- نمایش میزان افزایش مساحت به‌صورت درصد تغییر (مثال دوم بعد از فعالیت ۳)
بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	- نمایش درصد بیان‌کننده سهم بازار فروش و سود حاصل از آن به‌صورت نمودار (نمودار میله‌ای ابتدای فصل)
سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگوییابی و ...	- تعمیم عبارت ضربی مربوط به محاسبه درصد یک مقدار خاص به معادله درصد (فعالیت ۲) - مقایسه $\frac{۵}{۷}$ و $\frac{۵}{۷}$ (سؤال ۲ از مسئله‌های بخش ۲) - مقایسه درصد‌های ارائه شده توسط دوفروشگاه (مسئله ۱۰ بخش ۱) - ارزیابی نظر جعفر (سؤال ۹ از مسئله بخش ۱)

## بخش اول: محاسبه ذهنی درصد

### اهداف بخش

- شناختن روش‌های مختلف محاسبه درصد یک مقدار و کسب توانایی محاسبه درصد
- بیان کسری از یک مقدار به صورت درصد
- بیان درصدی از یک مقدار به صورت کسر
- تشخیص وضعیت‌هایی که نیاز به انجام محاسبات ذهنی درصد دارد
- محاسبه ذهنی درصد برخی از مقادیر
- حل مسائل مربوط به درصد با تشکیل معادله

### واژه‌های کلیدی:

درصد، محاسبه ذهنی درصد

### نگاه کلی به بخش:

در این بخش ابتدا با روایت یک اتفاق که ناشی از برداشت اشتباه در انجام محاسبات درصد است توجه هنرجویان به یکی از اشتباهات رایج در این گونه محاسبات جلب می‌شود. سپس با انجام فعالیت روش صحیح محاسبه درصدی از مقدار و درصد کل ارائه می‌شود. در زندگی روزمره بسیار اتفاق می‌افتد که نیاز به محاسبه دقیق درصد یک مقدار نداریم همچنین ابزار محاسبه (ماشین حساب) نیز در دسترس ما نیست. اما لازم است محاسبه تقریبی و سریع از درصد داشته باشیم، مثلاً گاهی برای خرید به یک فروشگاه می‌رویم و با درصدهای تخفیف اجناس مختلف روبه‌رو می‌شویم برای تصمیم‌گیری در مورد میزان خرید لازم است تقریبی از میزان قیمت کالاهای انتخابی پس از تخفیف داشته باشیم، بنابراین لازم است مهارت‌هایی در محاسبه درصد یک مقدار به‌طور ذهنی داشته باشیم. در این بخش روش‌هایی برای محاسبه برخی از درصدها به‌صورت ذهنی ارائه می‌شود.

### ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب دبیر با توجه به سطح علمی هنرجویان در صورتی که نیاز است فعالیتی جهت یادآوری مفهوم درصد طراحی نماید و با بیان ارتباط بین کسر و درصد و استفاده از درصدهایی نظیر ۲۰، ۲۵، ۵۰ یا ۷۵ درصد آمادگی لازم برای ورود به مبحث را ایجاد کند. استفاده از رسم شکل برای درک بهتر مفهوم مفید است. در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند معلم می‌تواند با بیان اتفاقی نظیر آنچه در ابتدای فصل بیان شده است، سؤالاتی از این قبیل را از هنرجویان بپرسد.

- در محاسبه درصد چه اشتباهی اتفاق افتاده بود؟
  - آیا مواردی مشابه برای شما اتفاق افتاده است که دچار اشتباه برداشت بشوید و آیا به اشتباه خود پی برده‌اید؟ آیا می‌توانید روش محاسبه خود را توصیف کنید؟
- با طرح این سؤال‌ها، فضای آموزشی به سمتی هدایت می‌شود که تمامی هنرجویان در رسیدن به اهداف روایت مطرح شده، مشارکت داشته باشند. در غیر این صورت معلم می‌تواند از هنرجویان بخواهد متن ابتدای فصل را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت ۱ آمادگی داشته باشند.

## فعالیت آموزشی

هنرجویان هنرمندی در یک کار فوق برنامه مشارکت داشته‌اند. ۱۰ درصد از کلاس اول، ۲۰ درصد از هنرجویان کلاس دوم و ۳۰ درصد از هنرجویان کلاس سوم در این کار شرکت کرده‌اند. تعداد هنرجویان کلاس اول ۳۰ نفر، کلاس دوم ۲۵ نفر و کلاس سوم ۴۰ نفر است. کلاً از هر کلاس چند نفر در کار فوق برنامه شرکت داشته‌اند؟

بیا چند درصد از مجموع هنرجویان این سه کلاس در کار فوق برنامه شرکت کرده‌اند؟

بیا آیا جمع درصد‌های هنرجویان شرکت‌کننده از این سه کلاس معنای خاصی دارد؟

بنا بر آن که هنرجویان گفتند برای محاسبه درصد شرکت‌کننده کل سه کلاس در کار فوق برنامه می‌توانیم میانگین درصد شرکت‌کننده کل این سه کلاس را حساب کنیم. آیا نظر او درست است؟ چرا؟ توضیح دهید.

### اهداف موضوعی:

- کسب مهارت محاسبه درصد یک مقدار با روش‌های مختلف.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، ارتباطات کلامی، استدلال کردن، ارزیابی کردن

$$۱۰\% \times ۳۰ = \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۳۰ = ۳$$

الف) کلاس اول:

$$۲۰\% \times ۲۵ = \frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۲۵ = ۵$$

کلاس دوم:

$$۳۰\% \times ۴۰ = \frac{۳۰}{۱۰۰} \times ۴۰ = ۱۲$$

کلاس سوم:

$$\frac{۳ + ۵ + ۱۲}{۳۰ + ۲۵ + ۴۰} = \frac{۲۰}{۹۵} \approx ۰/۲۱۰۵ \Rightarrow ۰/۲۱۰۵ \times ۱۰۰ = ۲۱/۰۵ \approx ۲۱\% \quad \text{ب)}$$

پ) خیر، زیرا تعداد هنرجویان کلاس‌ها متفاوت است و مبنای محاسبه درصد سه کلاس یکسان نیست. برای یافتن میانگین درست باید با توجه به تعداد هنرجویان هر کلاس به درصد آن کلاس وزن داد و میانگین وزنی درصدهای شرکت کنندگان کلاس‌ها را به دست آورد. میانگین وزنی درصدها، همان جواب در قسمت (ب) است. (ت) خیر، جمع درصدها نشان دهنده هیچ مفهوم خاصی نیست.

در مورد محاسبات مربوط به میانگین، یکی از اشتباهات رایج، ناشی از عدم توجه به معنی میانگین وزنی است. اگر بخواهیم میانگین چند مقدار را به دست آوریم باید فراوانی همه آنها یکسان باشد و میانگینی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد (حاصل تقسیم مجموع همه مقادیر بر تعداد آنها) معنی دارد. اما در صورتی که فراوانی آنها متفاوت است (میزان اثر بخشی هر واحد از هر کدام از داده‌ها در نتیجه یکسان نیست) میانگین معمولی معنی خاصی ندارد و لازم است برای محاسبه میانگین به طور معنی‌دار، میانگین وزنی مقادیر را به دست آوریم. توجه به این موضوع، به ویژه مواقعی که درصدهایی از چند مقدار در اختیار داریم و می‌خواهیم درصد کل مقادیر را به دست آوریم، موجب اجتناب از اشتباه می‌شود. با توجه به وضعیت کلاس، دبیران محترم می‌توانند جهت ارتقای مهارت محاسبه درصد و درک اشتباه رایج کار در کلاس‌ها یا مسئله‌هایی منطبق با اهداف این فعالیت طرح کرده و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند و روش حل خود را توصیف و نتایج حاصل را تفسیر کنند. در صورت وجود درک نادرست از این موضوع با ارائه توضیحات مناسب می‌توان هنرجویان را به درک صحیحی از این مفهوم رساند. یکی دیگر از اشتباهات رایج را در مسئله زیر و حل آن توسط یکی از هنرجویان می‌توان دید:

یکی از فروشندگان کالا در پایان هفته ۲۰ قلم از یک نوع کالا را فروخته است اگر قیمت هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان بوده باشد و ۲۰ درصد سود کرده باشد میزان سود او در هر قلم کالا چقدر است؟

حل هنرجو:

برای هر قلم کالا ۳۰۰۰۰ تومان دریافت کرده است که ۲۰ درصد آن سود می‌باشد. بنابراین میزان سود برابر  $۳۰۰۰۰ \times ۲۰\% = ۶۰۰۰$  می‌باشد.

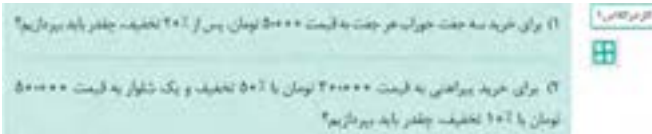
اشکال راه حل ارائه شده این است که درصد به عنوان جزئی از کل قیمت فروش محاسبه شده است در حالی که مجموع سود و قیمت تمام شده، قیمت فروش را می‌دهد به عبارت دیگر داریم:

قیمت تمام شده + ۲۰٪ قیمت تمام شده = ۳۰۰۰۰ تومان که اگر به صورت

کسری نشان دهیم داریم :

قیمت تمام شده + ۲۰٪ قیمت تمام شده = قیمت تمام شده +  $\frac{1}{5}$  قیمت تمام شده  
 $= 1\frac{1}{5}$  قیمت تمام شده

بنابراین سود ۵۰۰۰ تومان و قیمت تمام شده ۲۵۰۰۰ تومان می‌باشد. بنابراین لازم است در محاسبه درصد سود روی قیمت تمام شده تأکید شود یعنی در اینجا کل، قیمت تمام شده است و قیمت فروش نیست. گفتگو در کلاس درباره این گونه وضعیت‌ها به درک بهتر مفهوم درصد کمک می‌کند.



**اهداف:**

■ تقویت مهارت محاسبه درصد از یک مقدار در حل مسائل زندگی روزمره

۱  $0/20 \times 50000 = \frac{20}{100} \times 50000 = 10000 \rightarrow 50000 - 10000 = 40000$

پس  $3 \times 40000$  تومان باید بپردازیم

۲ قیمت پیراهن پس از تخفیف:

$0/50 \times 300000 = \frac{50}{100} \times 300000 = 150000 \rightarrow 300000 - 150000 = 150000$

قیمت شلوار پس از تخفیف

$0/10 \times 500000 = \frac{10}{100} \times 500000 = 50000 \rightarrow 500000 - 50000 = 450000$

قابل پرداخت:  $450000 + 150000 = 600000$

دبیران محترم در این قسمت می‌توانند با ارائه سؤالاتی نظیر کار در کلاس‌ها، در مسائلی که چند درصد مختلف بیان می‌شود، مهارت محاسبه صحیح درصد یک مقدار را ارتقا دهند.



**اهداف:**

■ تقویت مهارت محاسبه درصد یک مقدار به‌طور ذهنی از طریق برقراری ارتباط بین



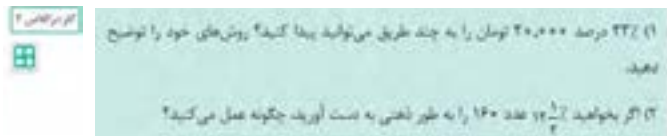
درصدهای مختلف از یک مقدار، برقراری ارتباطات کلامی، پرورش مهارت تفکر واگرا  
**۱** ۴ درصد یک مقدار ۲ برابر ۲ درصد آن است پس حاصل  $1200 = 2 \times 600$  خواهد بود.

**۲** ۱۰ درصد یک مقدار ۵ برابر ۲ درصد آن است پس حاصل  $3000 = 5 \times 600$  خواهد بود.

**۳** ۹۲ درصد یک مقدار ۸ درصد از ۱۰۰ درصد کمتر است و ۸ درصد ۴ برابر ۲ درصد آن است پس ۸ درصد مقدار  $2400 = 4 \times 600$  و  $27600 = 2400 \times 11.5$  ۹۲ درصد خواهد بود.

**۴** روش اول چون ۵۰ درصد نصف می‌باشد، کافی است نصف  $30000$  را به دست آوریم ( $30000$  را بر ۲ تقسیم کنیم)، روش دوم ۵۰ درصد ۲۵ برابر ۲ درصد است پس حاصل ضرب ۲۵ در  $600$  را به دست می‌آوریم. روش سوم ۱۰ درصد  $30000$  را به دست می‌آوریم و حاصل را در ۵ ضرب می‌کنیم، روش چهارم ضرب  $30000$  در ۵۰ درصد است.

لازم به ذکر است در اینجا ارائه یک قالب یا قالب‌های خاص توسط دبیر جهت انجام محاسبات ذهنی درصد هنرجویان مورد نظر نیست. بلکه ارائه مثال‌هایی از روش‌های مختلف محاسبه ذهنی درصد است. پرسیدن روش‌های محاسبه ذهنی هنرجویان و تشویق آنها برای ارائه روش‌های متنوع که توسط خود آنها ساخته شده می‌تواند مهارت‌های ذهنی آنها را ارتقا دهد. این مهارت‌ها در موارد مشابه در سایر موضوع‌ها نیز قابل به کارگیری است.



### اهداف:

■ تقویت مهارت محاسبه و تخمین درصدی از یک مقدار به‌طور ذهنی از طریق برقراری ارتباط با کسر معادل.

■ محاسبه درصد یک مقدار با روش‌های مختلف.

برقراری ارتباطات کلامی، پرورش مهارت تفکر واگرا

**روش اول:** ۳۳ درصد را به‌طور تقریبی، کسر  $\frac{1}{3}$  در نظر گرفته و آن را حل می‌کنیم.

$$30000 \times \frac{1}{3} = \frac{30000}{3} = 10000$$

**روش دوم:** به جای ۳۳ درصد از کسر  $\frac{۳}{۱۰}$  استفاده می‌کنیم.

$$۳۰۰۰۰۰ \times \frac{۳}{۱۰} = \frac{۹۰۰۰۰۰}{۱۰} = ۹۰۰۰۰۰$$

**روش سوم:** آن را در  $\frac{۳۳}{۱۰۰}$  ضرب کنیم:

$$۳۰۰۰۰۰ \times \frac{۳۳}{۱۰۰} = \frac{۹۹۰۰۰۰۰}{۱۰۰} = ۹۹۰۰۰$$

**روش چهارم:** ۱٪ از ۳۰۰۰۰۰ (که معادل تقسیم بر ۱۰۰ در محاسبه درصد است) را پیدا کرده و حاصل را در ۳۳ ضرب کنیم:

$$۳۰۰ \times ۳۳ = ۹۹۰۰$$

با توجه به نوع نیاز ما در محاسبه درصد (محاسبات کاملاً دقیق یا محاسبه تقریبی) روش مناسب برای محاسبه درصد را انتخاب می‌کنیم.

۲  $\frac{۱۲}{۵}$  درصد نصف ۲۵ درصد که  $\frac{۱}{۴}$  می‌باشد. ابتدا  $\frac{۱}{۴}$  را پیدا کرده و سپس بر ۲ تقسیم می‌کنیم. یعنی

$$۱۶۰ \div ۴ = ۴۰ \rightarrow ۴۰ \div ۲ = ۲۰$$

یا می‌توان گفت:  $\frac{۱۲}{۵}$  درصد همان  $\frac{۱}{۸}$  است ( $\frac{۱۲}{۵} = \frac{۱}{۸}$ ) یعنی کافی است ۱۶۰ بر عدد ۸ تقسیم شود پس حاصل  $۱۶۰ \div ۸ = ۲۰$  خواهد بود.

## مسئله‌ها

۱) یک دروازه‌بان در بازی اول خود ۹ توپ از ۱۰ توپی را که به طرف دروازه رده شده مهار کرد. این دروازه‌بان در بازی دوم خود ۵ توپ از ۸ توپ و در بازی سوم خود ۶ توپ از ۷ توپ فرستاده شده به طرف دروازه را مهار کرد. البته در هر بازی، این دروازه‌بان چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

ب) او در این سه بازی روی هم چند درصد از توپ‌ها را مهار کرده است؟

ج) آیا جمع درصد توپ‌های مهار شده در این سه بازی معنای خاصی دارد؟



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی، ارزیابی کردن (الف)

$$\frac{9}{10} \times 100 = 90 \rightarrow 90\%$$

$$\frac{5}{8} \times 100 = 62 \frac{5}{8} \rightarrow 62 \frac{5}{8}\%$$

$$\frac{6}{7} \times 100 = 85 \frac{6}{7} \rightarrow 85 \frac{6}{7}\%$$

$$\frac{9+5+6}{10+8+7} \times 100 = \frac{20}{25} \times 100 = 80 \rightarrow 80\% \quad (\text{ب})$$

(ج) خیر، چون تعداد پرتاب‌های هر کدام از بازی‌ها با دیگری متفاوت است، پس معنای خاصی ندارد.

۳) تعداد پاسخ‌های درست محمد به سؤال‌های سه آزمون، در جدول زیر آورده شده است. الفبا جدول را کامل کنید. بعد درصد کل پاسخ‌های درست در سه آزمون را پیدا کنید.

آزمون	سؤال‌های سه آزمون	تعداد پاسخ‌های درست	درصد پاسخ‌های درست
۱	۹	۷	۷۷٪
۲	۶	۶	۱۰۰
۳	۱۰	۷	۷۰
مجموع سه آزمون	۲۵	۲۰	۸۰

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی

شماره آزمون	تعداد سؤالات آزمون	تعداد پاسخ‌های صحیح	درصد پاسخ‌های صحیح
۱	۹	۷	۷۷٪
۲	۶	۶	۱۰۰
۳	۱۰	۷	۷۰
مجموع سه آزمون	۲۵	۲۰	۸۰

۳) با توجه به اینکه ۳۵٪ عدد ۲۲۰۰ برابر ۷۷ است، محاسبات زیر را به صورت ذهنی انجام دهید:

الف) ۷ درصد ۲۴۰۰ (ب) ۷۰ درصد ۲۲۰۰ (پ) ۵ درصد ۲۲۰۰  
 ت) ۳/۵ درصد ۲۴۰۰ (ث) ۱۴ درصد ۲۲۰۰ (ج) ۳۱ درصد ۲۴۰۰

### مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، مقایسه کردن

$$۷۷ \div ۵ = ۱۵۴$$

$$۷۷ \times ۲ = ۱۵۴$$

$$۷۷ \div ۷ = ۱۱$$

$$۷۷ \div ۱۰ = ۷.۷$$

$$۱۵۴ \times ۲ = ۳۰۸$$

$$۱۵۴ \times ۳ = ۴۶۲$$

الف) ۷ درصد، یک پنجم ۳۵ درصد است یعنی:

ب) ۷۰ درصد، دو برابر ۳۵ درصد است پس:

پ) ۵ درصد، یک هفتم ۳۵ درصد است یعنی:

ت) ۳/۵ درصد، یک دهم ۳۵ درصد است یعنی:

ث) ۱۴ درصد، دو برابر ۷ درصد است یعنی:

ج) ۲۱ درصد، سه برابر ۷ درصد است یعنی:

۴) هر عدد در ستون اول جدول زیر با توصیفی در ستون دوم بیان شده است. هر عدد را به توصیف آن ارتباط دهید و برای هر یک، مثالی بیاورید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ بازیابی اطلاعات، تفکر واگرا

مثال	توصیف	درصد
 کسری از شکل مقابل که رنگ شده	من نصف نصف هستم!	۲۵٪
نسبت هر عدد به خودش	من با یک برابرم!	۵۰٪
نسبت شربت به آب در یک نوشنی که برای هر ۵ لیتر آب نیم لیتر شربت کافی است.	من از یک چهارم کوار، ولی از یک سوم پیشتر هستم!	۳۰٪
شانس رو یا پشت آمدن در پرتاب یک سکه	من با $\frac{1}{2}$ برابرم!	۵۰٪
نسبت شربت به آب در یک نوشیدنی که برای هر ۱۰ لیتر آب، ۳ لیتر شربت استفاده شده	من از نصف کوار و از یک چهارم پیشترم!	۱۰٪
شانس پیروزی یک نفر در قرعه کشی که بین ۲۰۰ نفرم شانسی انجام می شود.	من از $\frac{1}{200}$ کمترم!	۰.۵٪
شانس خروج یک مهره خاص از ظرف شامل ۱۰۰ مهره	من یک دهم یک دهم هستم!	۳۰۰٪
نسبت سن یک پدر ۳۰ ساله به فرزند یک ساله اش	من از یک پیشترم!	$\frac{1}{30}$ ٪

۵) سعید گفت اگر به عددی ۱۰ تا اضافه کنم و سپس ۱۰ تا از حاصل کم کنم، همان عدد قبلی به دست می‌آید. حالا اگر ۱۰٪ عددی را به آن اضافه کنم و سپس ۱۰٪ حاصل را از آن (حاصل) کم کنم، آیا همان عدد اول به دست می‌آید؟ یا یک مثال عددی، پاسخ سؤال سعید را به دست آورید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، ارزیابی کردن، استدلال کردن

عدد ۱۰۰ را در نظر می‌گیریم ۱۰ درصد آن عدد ۱۰ است که اگر اضافه شود حاصل ۱۱۰ خواهد بود و ۱۰ درصد این عدد ۱۱ است که اگر از ۱۱۰ کم کنیم حاصل ۹۹ خواهد بود. این‌گونه محاسبات در مورد درصد نیز از اشتباهات رایج می‌باشد که ناشی از مقایسه کردن آن با اضافه و کم کردن یک عدد به عدد دیگر است درحالی‌که در مرحله اول درصدی از ۱۰۰ و حال آنکه در مرحله دوم درصدی از ۱۱۰ حساب می‌شود که مقدار آنها متفاوت است بنابراین مقدار افزوده شده با مقدار کم شده مساوی نیست. می‌توان از هنر جوین خواست با عوض کردن مراحل (یعنی ابتدا درصدی را کم کرده و سپس همان درصد را اضافه کنیم) پاسخ را با قسمت قبل مقایسه کرده و در مورد آن توضیح دهند.

۳ درصد بنویسد که از  $\frac{1}{4}$  بیشتر و از  $\frac{2}{3}$  کمتر باشد.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه، پیوند و اتصال

در این سؤال دو مطلب مورد توجه است اول: سؤالی که بیش از یک پاسخ دارد دوم: سؤالی که بیش از یک راه حل درست دارد (پرورش تفکر واگرا) مثلاً یک راه حل بیان کسر به صورت درصد (که با توجه به کسرهای داده شده محاسبه درصد نیز به صورت ذهنی و بدون محاسبه قابل انجام است) و یافتن درصد مورد نظر و راه دوم یافتن کسری بین این دو کسر و تبدیل کسر به درصد. در این سؤال هر درصد بین ۵۰ درصد و ۷۵ درصد جواب است.

۷) سعید گفت: من می‌توانم مسئله‌های مربوط به درصد را به صورت ذهنی و خیلی سریع حساب کنم. سعید پرسید: مثلاً سریع بگو. ۹۰ درصد ۵۵ چقدر می‌شود؟ او به سرعت گفت:  $۵۵ - ۵۵ = ۴۹/۵$ . سعید پرسید: ۶ درصد ۱,۴۰۰ چقدر می‌شود؟ سعید گفت:  $۸۴ = ۱۴ \times ۶$ . سعید پرسید: ۲۵٪ عدد ۴۴ چقدر می‌شود؟ سعید گفت:  $۱۱ = ۴ \times ۲۵$ . سعید گفت: ۲۵٪ درصد حقوق من ۱۲۰,۰۰۰ تومان است. حقوق من چقدر است؟ او به سرعت جواب داد: ۴۸۰,۰۰۰ تومان. در هر حالت، روش محاسبه سعید را توضیح دهید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند اتصال ریاضی و خارج ریاضی، استدلال کردن، ارتباطات کلامی

● با توجه به اینکه ۹۰ درصد به اندازه ۱۰ درصد با ۱۰۰ درصد فاصله دارد ابتدا ۱۰ درصد ۵۵ را حساب کرده که ۵/۵ است و حاصل را از ۵۵ (که ۱۰۰ درصد مقدار است) کم کرده است.

● ۶ درصد همان ۶ برابر ۱٪ است که کافی است ۱٪ از ۱۴۰۰ یعنی ۱۴ را در ۶ ضرب کنیم.

● ۲۵٪ هر عددی  $\frac{1}{4}$  آن است یعنی باید عدد بر ۴ تقسیم شود.

● ۲۵٪ هر عددی،  $\frac{1}{4}$  آن است بنابراین خود عدد، ۴ برابر ۲۵٪ عدد است. پس باید در ۴ ضرب شود تا کل حقوق به دست آید.

۸ الف) ۴۹/۵، چند درصد ۳۳ است؟  
ب) چند درصد از ۹۰، برابر با ۸۰ است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

$$۴۹/۵ = \frac{x}{۱۰۰} \times ۳۳ \rightarrow \frac{x}{۱۰۰} = \frac{۴۹/۵}{۳۳} \rightarrow x = ۱۵۰ \rightarrow ۱۵۰\% \quad \text{الف)}$$

برای حل معادله  $۴۹/۵ = \frac{x}{۱۰۰} \times ۳۳$  در صورتی که هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند  $\frac{x}{۱۰۰}$  را  $a$  گرفته و معادله  $۴۹/۵ = a \times ۳۳$  را بر حسب  $a$  حل کرده و سپس  $a$  را  $\frac{x}{۱۰۰}$  گرفته و  $x$  را به دست آورند.

ب) چند درصد از ۹۰ برابر با ۸۰ است؟

$$۸۰ = \frac{x}{۱۰۰} \times ۹۰ \rightarrow \frac{x}{۱۰۰} = \frac{۸۰}{۹۰} \rightarrow x \approx ۸۸/۸۹ \rightarrow ۸۸/۸۹\%$$

۱۹) جعفر می‌خواهد نمره ریاضی خود را از ۱۴ به ۱۸ برساند. او فکر می‌کند اگر در امتحان بعدی ۴٪ بیشتر به سؤال‌ها پاسخ درست بدهد، به هدف خود می‌رسد. آیا او درست فکر کرده است؟ توضیح دهید چرا.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، ارزیابی کردن، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن این سؤال با پاسخ واگراست. برای همین استدلال هنرجو درستی یا نادرستی را تعیین می‌کند. برای مثال هنرجویی آزمون را ۲۰ نمره‌ای در نظر بگیرد. در این صورت

با توجه به محاسبات

$$18 - 14 = 4 \rightarrow \frac{4}{20} \times 100 = 20 \rightarrow 20\%$$

واضح است که پاسخ درست نیست و جعفر مقدار افزایش نمره را با درصد افزایش آن اشتباه گرفته است. راه حل دیگر این مسئله به صورت زیر است که ابتدا ۴ درصد ۲۰ را حساب می‌کنیم یعنی  $0/8 = 20 \times 4/100 = 0/8$  که نمره او  $14 + 0/8 = 14/8$  خواهد شد نه ۱۸.

در صورتی که هنرآموز استدلال بیاورد که آزمون ۱۰۰ نمره‌ای باشد، می‌توان گفت، جعفر درست فکر کرده است.



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، مقایسه کردن، ارتباطات کلامی، استدلال کردن

می‌توان با یک مقدار معین (به‌عنوان قیمت کفش) این دو تخفیف را با هم مقایسه کرد:

اگر قیمت کیف ۴۰۰۰۰۰ تومان باشد؛

$$0/25 \times 400000 = 140000 \quad \text{درفروشگاه الف (خرید نرگس): مقدار تخفیف:}$$

$$400000 - 140000 = 260000 \quad \text{مقدار پول پرداخت شده توسط نرگس:}$$

$$0/25 \times 400000 = 100000 \quad \text{در فروشگاه ب (خرید ناهید): مقدار تخفیف اول:}$$

$$400000 - 100000 = 300000 \quad \text{قیمت پس از تخفیف اول:}$$

$$0/10 \times 300000 = 30000 \quad \text{مقدار تخفیف دوم:}$$

$$300000 - 30000 = 270000 \quad \text{مقدار پول پرداخت شده توسط ناهید:}$$

ملاحظه می‌شود ناهید مبلغ بیشتری پرداخته است. در اینجاست می‌توان از هنرجویان خواست تا علت این تفاوت را توضیح دهند یا از آنها سؤال کرد اگر ابتدا تخفیف ۱۰ درصدی و سپس تخفیف ۲۵ درصدی اعمال شود نتیجه چگونه است؟ در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند می‌توان این مقایسه را به‌طور کلی و با استفاده از یک پارامتر نظیر  $a$  انجام داد.

## بخش دوم: درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱

### اهداف بخش

- درک مفهوم درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- انجام محاسبه ذهنی با درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
- حل مسائل مربوط به درصد با تشکیل معادله

### واژه‌های کلیدی:

درصد بیشتر از ۱۰۰، درصد کمتر از ۱، محاسبه ذهنی درصد.

### نگاه کلی به بخش:

در موضوع درصد گاهی به درصدهای بیش از ۱۰۰ یا کمتر از ۱ برخورد می‌کنیم. درصدهای بیشتر از ۱۰۰ مشابه کسرهای بزرگ‌تر از واحد هستند که به جای بیان جزئی از کل، بیان‌کننده چند برابر بودن نسبت به یک مقدار مینا هستند. کسرها گاهی به منظور بیان جزئی از کل و گاهی برای بیان چند برابر یک مقدار به کار برده می‌شوند. درصد نیز گاهی برای بیان درصدی از یک کل (که به صورت درصدی از صفر تا صد بیان می‌شود) و گاهی برای اشاره به چند برابر یک مقدار مورد استفاده قرار می‌گیرد (که در این حالت با درصدی بیشتر از ۱۰۰ مشخص می‌شود) این موضوع به تفسیر درست نتایج مربوط به مسائلی که در آنها با درصدهای بیشتر از ۱۰۰ سروکار داریم، کمک می‌کند.

درمورد درصدهای کمتر از ۱ مفهوم جدیدی رخ نمی‌دهد ولی معمولاً اشتباه محاسباتی وجود دارد. مثلاً  $\frac{5}{7}$  درصد اگر به صورت کسر نمایش داده شود، معادل  $\frac{5}{1000}$  می‌باشد که ممکن است معادل  $\frac{5}{10}$  در نظر گرفته شود. عدم آشنایی هنرجویان با این قبیل درصدها موجب ارائه تفسیر اشتباه از نتایج یک مسئله یا اشتباه در محاسبات می‌شود. بنابراین موضوع این بخش درصدهای بیش از ۱۰۰ و کمتر از ۱ در نظر گرفته شده است. این بخش با اعلام خبری که در آن درصد



بیشتر از ۱۰۰ آمده است، شروع می‌شود و زمینه لازم برای طرح این موضوع فراهم می‌شود. سپس به صورت بحثی دوجانبه این مفهوم آموزش داده می‌شود. در جهت افزایش درک درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و مفهوم درصدهای کمتر از ۱ چند مثال ارائه می‌شود. بخش با بیان راه کارهایی برای انجام محاسبات ذهنی درصد ادامه می‌یابد و نحوه تشکیل معادله‌ای که به کمک آن بتوان مسائل مرتبط با درصد را حل کرد در قالب فعالیت و مثال، توضیح داده می‌شود.

### ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب با مراجعه به سایت‌های خبری، می‌توان خبری را که برای هنرجویان جذابیت خاصی داشته باشد یافت که حاوی درصدی بیش از ۱۰۰ باشد و به عنوان شروع در مورد آن صحبت کرد یا از هنرجویان خواست تا با مراجعه به سایت‌های خبری، خبرهای مشابهی را بیابند و در کلاس مطرح کنند و آن را معنی و تفسیر کنند. سپس با طرح سؤال‌هایی نظیر سؤال‌های ابتدای بخش، همه هنرجویان را در این بحث درگیر کرد. در غیر این صورت می‌توان از همان متن ابتدای فصل استفاده کرد.

شروع این بخش در قالب یک مباحثه بین هنرجو و معلم است، زیرا هنرجویان با مفهوم درصد آشنایی دارند و فقط حالتی که میزان درصد بیش از ۱۰۰ شود مطرح است. ذکر این نکته ضروری است که وقتی درصد مقداری با عدد بیشتر از ۱۰۰ بیان می‌شود به معنی جزئی از کل نیست بلکه نظیر مفهوم کسر بزرگ‌تر از ۱ است که معنی چند برابری دارد.

کار در کلاس ۳

۱) ۰/۲٪ از ۳ میلیون نفر، چند نفر می‌شود؟

۲) ۵ نفر از ۴,۰۰۰ نفر چند درصد این نفراند؟

۳) ۱۴٪ از ۴۰۰ لیتر آب، چند لیتر آب است؟

۴) وزن مریخ در هنگام تولد ۳ کیلوگرم بوده و در ده سالگی ۲۱ کیلوگرم است. وزن او در ده سالگی چند درصد وزن نوزادی‌اش است؟

---

۵) مثالی بیان کنید که رشد ۱۲٪ درصدی را نشان دهد آن را تفسیر کنید.

---

۶) مثالی بیان کنید که کاهش ۱۵٪ را نشان دهد آن را تفسیر کنید.

## اهداف:

- تقویت مهارت محاسبه درصدهای بیشتر از ۱۰۰ و کمتر از ۱
  - تقویت مهارت در بیان نسبت‌ها به صورت درصد.
  - پرورش مهارت‌های حل مسئله، برقراری ارتباط کلامی، تفکر واگرا
- سؤال‌های مطرح شده در این کار در کلاس بر درصدهای بیشتر از ۱۰۰ یا کمتر از ۱ تمرکز دارد. حل این سؤال‌ها موجب می‌شود تا درصدهای بیشتر از ۱۰۰ یا کمتر از یک را در یک زمینه واقعی ببینند و درک مناسبی از این گونه درصدها داشته باشند. در قسمت ۵ و ۶ این کار در کلاس توصیه می‌شود تا در مورد نحوه محاسبه اعداد موجود در صورت مثال طرح شده توسط هنرجو سؤال شود (مثلاً در نمونه مثال ذکر شده در قسمت ۵ نحوه محاسبه عدد ۵ میلیون و عدد ۱۱ میلیون و دویست هزار نفر را بیان کنند).

$$۱) \quad ۰/۲\% \text{ یعنی } \frac{۰/۲}{۱۰۰} = \frac{۲}{۱۰۰۰} \text{ در نتیجه داریم: } ۳۰۰۰۰۰۰ \times \frac{۲}{۱۰۰۰} = ۶۰۰۰$$

$$۲) \quad x \times ۴۰۰۰ = ۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۴۰۰۰} \Rightarrow x = ۰/۰۰۱۲۵ \Rightarrow ۰/۱۲۵\%$$

$$۳) \quad \frac{۱۴۰}{۱۰۰} \times ۴۰۰ = ۵۶۰$$

$$۴) \quad x \times ۳ = ۲۱ \Rightarrow x = ۷ \Rightarrow ۷۰۰\%$$

- ۵) می‌توانیم از مثال جمعیت استفاده کنیم. مثلاً، جمعیت یک کشور ۵ میلیون و جمعیت کشوری دیگر ۶ میلیون و دویست هزار نفر است. جمعیت کشور دوم چند

درصد جمعیت کشور اول است؟

۶ مثلاً، قیمت یک نوع گوشی در فروشگاه ۵۸۰ هزار تومان و قیمت تولید آن در کارخانه ۵۷۵۳۶۰ تومان است.  
قیمت تولید این گوشی در کارخانه چند درصد کمتر از قیمت آن در فروشگاه است؟

## فعالیت آموزشی

۱) یک نسای با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان  $\frac{2}{3}$  از ۲۴ را پیدا کرد.

۲) با توجه به اینکه درصد را می‌توانیم با یک عدد کسری نمایش دهیم، یک نسای با عبارت ضربی بنویسید که به کمک آن بتوان  $20\%$  از ۳۶ را پیدا کرد.

۳) یک نسای با عبارت ضربی در حالت کلی بنویسید که به کمک آن بتوان درصدی از یک مقدار را پیدا کرد. در این معادله، مقدار اولیه را با  $a$ ، درصد را با  $b$  و مقدار نهایی را با  $k$  نشان دهید.

۴) سه مسئله را طوری طرح کنید که در یکی  $k$ ، و در یکی  $a$  و در یکی  $b$  مجهول باشد.

### اهداف موضوعی:

■ تشکیل معادله در مسائل مربوط به درصد.

### مهارت‌ها و فرایندها:

طرح مسئله، مدل‌سازی جبری مسائل مرتبط با درصد از طریق تشکیل معادله.

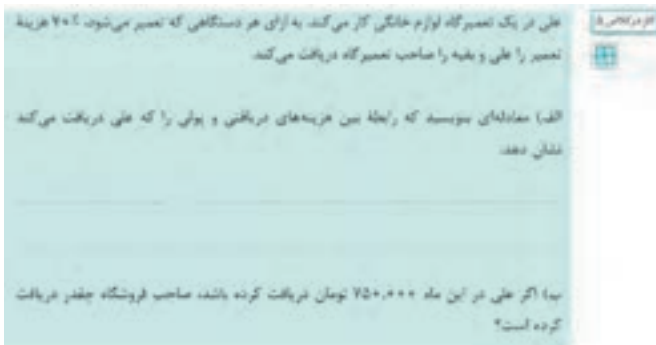
$$\frac{2}{3} \times 24 = 16 \quad 1$$

$$0/30 \times 36 = \frac{30}{100} \times 36 = 10/8 \quad 2$$

$$a \times x = y \quad 3 \text{ (در اینجا } a \text{ به صورت اعشاری یا کسری نشان داده می‌شود).}$$

۴ مسئله ۱- در یک فروشگاه کفش کالاها با  $20\%$  تخفیف عرضه می‌شود. اگر قیمت اولیه یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان باشد، خریدار چه مبلغی را تخفیف گرفته است؟  
مسئله ۲- در فروشگاه دیگر، قیمت اولیه یک کفش ۶۰۰۰۰ تومان است. خریدار پس از تخفیف ۴۰۰۰۰ تومان به فروشنده پرداخته است. خریدار چند درصد تخفیف گرفته است؟

مسئله ۳- در فروشگاه اول که کالاها با  $20\%$  تخفیف عرضه می‌شود. اگر قیمت کفشی پس از تخفیف ۴۰۰۰۰ تومان باشد قیمت اولیه آن چقدر بوده است؟



### اهداف:

■ مدل‌سازی یک وضعیت زندگی روزانه مرتبط با درصد به کمک معادله و استفاده از آن در حل مسئله.

$$\text{الف) } y = 0.70x = \frac{7}{10}x$$

ب) راه اول: دریافتی صاحب فروشگاه از  $x$  ریال هزینه دریافتی:  $x - \frac{7}{10}x = \frac{3}{10}x$   
بنابراین داریم:

$$\frac{7}{10}x = 750000 \rightarrow x = \frac{750000}{7} \rightarrow \frac{3}{10}x = \frac{3}{10} \times \frac{750000}{7} = \frac{225000}{7}$$

راه دوم: می‌توان با توجه به سهم علی (که ۷۰ درصد است) و سهم صاحب مغازه (که ۳۰ درصد می‌شود) نسبت سهم صاحب مغازه به سهم علی را از ۱۰۰ که ۳۰ به ۷۰ می‌باشد را به صورت کسری نوشت: یعنی  $\frac{30}{70} = \frac{3}{7}$  و از آن در محاسبه سهم

صاحب مغازه استفاده کرد یعنی:

$$\frac{3}{7} \times 750000 = \frac{225000}{7}$$

### مسئله‌ها

#### ۱- جدول زیر را کامل کنید.

۱- (در این جدول درصدها به صورت‌های مختلف عدد اعشاری، عدد صحیح و عدد کسری بیان شده است. می‌توان از هنرجویان خواست که درصد کسری را به صورت اعشاری یا برعکس نمایش دهند).

### مهارت‌ها و فرایندها:

تبدیل درصد، کسر و اعشاری به هم

درصد	به صورت کسر	به صورت اعشاری
۳۷/۵٪	$\frac{۳}{۸}$	۰/۳۷۵
۱۱۰٪	$\frac{۱۱}{۱۰}$	۱/۱
۱٪	$\frac{۱}{۱۰۰}$	۰/۰۱
۰/۵٪	$\frac{۱}{۲۰۰}$	۰/۰۰۵
۱۲/۵٪	$\frac{۱}{۸}$	۰/۱۲۵
$\frac{۲}{۵}$ ٪	$\frac{۱}{۲۵۰}$	۰/۰۰۴

۲/۷ یک مقدار بیشتر است یا ۰/۷٪ همان مقدار ۲ چرا؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، ارزیابی کردن، مقایسه کردن

۰/۷ درصد یعنی  $\frac{۰/۷}{۱۰۰}$  که همان  $\frac{۷}{۱۰۰۰}$  است، که مقدار آن از  $\frac{۷}{۱۰}$  کمتر است.

۳) یک نوع کالا در فروشگاه‌های الف و ب با تخفیف ارائه شده است:

در فروشگاه الف قیمت پس از تخفیف ۱۵۰,۰۰۰ ریال و در فروشگاه ب قیمت قبل از تخفیف ۳۰۰,۰۰۰ ریال می‌باشد. اگر درصد تخفیف فروشگاه الف برابر ۴۰٪ و فروشگاه ب برابر ۲۵٪ باشد: الف) قبل از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

ب) بعد از تخفیف، خرید از کدام فروشگاه باصرفه‌تر است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، مقایسه کردن

با توجه به اینکه فروشگاه ۲۰٪ تخفیف می‌دهد پس ۸۰٪ قیمت هر کالا باید

$$0/80 \times X = 150000$$

پرداخت شود. بنابراین داریم:

**فروشگاه الف) قیمت قبل از تخفیف:**

$$150000 \div 0/80 = \frac{150000 \times 100}{80} = 187500$$

**فروشگاه ب) قیمت پس از تخفیف:**

$$200000 \times 0/25 = 50000 \rightarrow 200000 - 50000 = 150000$$

واضح است قبل از تخفیف خرید از فروشگاه الف مقرون به صرفه‌تر است و بعد از تخفیف قیمت در هر دو فروشگاه یکسان است.

## بخش سوم: درصد تغییر

### اهداف بخش

- درک مفهوم درصد تغییر
- یافتن درصد تغییر مقادیر یک کمیت
- محاسبه مقدار اولیه یا مقدار نهایی از طریق درصد تغییر
- درک معنی علامت درصد تغییر (+/-) در مسائل و تفسیر آن

### واژه‌های کلیدی:

درصد تغییر.

### نگاه کلی به بخش:

ارزیابی مناسب پدیده‌هایی نظیر تورم، تغییر قیمت سهام مختلف و... برای پیش‌بینی وضعیت آینده و برنامه‌ریزی مناسب جهت کنترل مطلوب این پدیده‌ها بسیار اساسی است. در هر کدام از این پدیده‌ها با نوعی کاهش و یا افزایش مقادیر در یک بازه زمانی مواجه هستیم. میزان افزایش یا کاهش، نسبت به مقدار اولیه سنجیده و به صورت درصد تغییر بیان می‌شود. در این بخش با طرح یک سؤال از چگونگی تصمیم‌گیری در بازار سهام، سعی در ایجاد انگیزه در هنرجویان برای ورود به موضوع درصد تغییر شده است. سپس با ارائه یک فعالیت، زمینه برای درک مفهوم درصد تغییر فراهم آمده است. در ادامه با ذکر چند مثال، علامت درصد تغییر (منفی یا مثبت) معنی شده است.

### ورود به مطلب:

دبیران می‌توانند با استفاده از اخبار اقتصادی مرتبط با رشد یا کاهش تورم یا رصد کردن تحولات برخی از بورس‌ها کلاس را با طرح سؤال‌های مناسب از هنرجویان شروع کنند و انگیزه لازم جهت ورود به مبحث را به‌وجود آورند. در زمینه موضوع‌های مطرح شده در این بخش یکی از اشتباهات رایج این است که برای محاسبه درصد تغییر مقدار تغییر را بر مقدار اولیه تقسیم نمی‌کنند، بنابراین لازم است توضیح داده شود که وقتی درصد تغییری از یک مقدار را بیان می‌کنیم

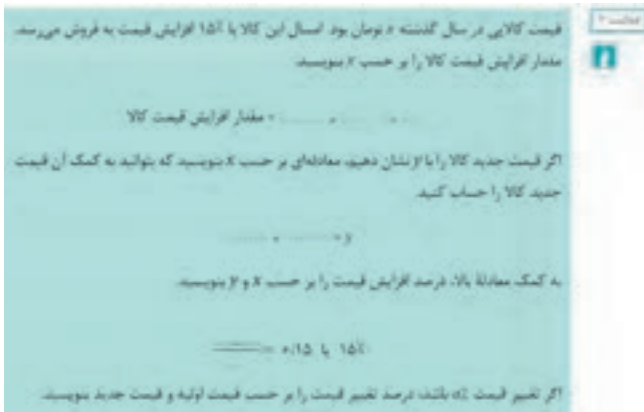
آن را به صورت نسبی از ۱۰۰ در نظر می‌گیریم که با نسبت تغییر به مقدار اولیه برابر است. بنابراین لازم است که مقدار تغییر بر مقدار اولیه تقسیم شود. یکی دیگر از موضوع‌هایی که در این بخش به آن توجه شده است اشاره به درصد‌های متوالی افزایش یا کاهش یک مقدار است، یک اشتباه رایج این است که برای محاسبه درصد کل وقتی درصد‌های مختلفی را به طور متوالی بر یک مقدار اعمال می‌کنیم، گاهی درصدها را با هم جمع می‌کنند که درست نیست. می‌توان با مثال‌هایی نظیر مثال زیر هنرجویان را از این اشتباه رایج برحذر کرد:

قیمت کالایی ۲۰۰۰۰۰ تومان است دو وضعیت زیر را در نظر بگیرید:

الف) ابتدا یک تخفیف ۱۰ درصدی و سپس یک تخفیف ۲۰ درصدی بر آن اعمال شود.

ب) از ابتدا یک تخفیف ۳۰ درصدی بر آن اعمال شود.  
 با محاسبه قیمت کالا پس از تخفیف در هر کدام از حالات مشخص کنید کدام برای فروشنده و کدام برای خریدار مقرون به صرفه‌تر است؟

## فعالیت آموزشی



### اهداف موضوعی:

- درک مفهوم درصد تغییر

### مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی، پیوندها و اتصال‌های ریاضی و خارج ریاضی



$$0/15 \times x = 0/15 x$$

۱ مقدار افزایش کالا:

$$y = x + 0/15x = 1/15x$$

۲

$$0/15 = \frac{y - x}{x}$$

۳

$$\frac{a}{100} = \frac{\text{قیمت اولیه} - \text{قیمت جدید}}{\text{قیمت اولیه}}$$

۴

هر کدام از مثال‌های ارائه شده در این قسمت انواع مختلفی از مسائل مرتبط با درصد تغییر را در زمینه واقعی مطرح می‌کند. در اولین مثال، مفهوم درصد تغییر با علامت مثبت (که نشان‌دهنده رشد است) ارائه شده و دومین مثال مربوط به درصد تغییری با علامت منفی است (که کاهش مقدار را نشان می‌دهد). در سومین مثال با ارائه افزایش دو کمیت (طول و عرض)، درصد تغییر کمیت مرتبط با آن (مساحت) مورد نظر است. در این مسئله برای محاسبه درصد تغییر علاوه بر استفاده از رابطه درصد تغییر لازم است از معادله مساحت بر حسب طول و عرض استفاده شود. در آخرین مثال نیز با ارائه درصد تغییر (افزایش و کاهش) و داشتن مقادیر اولیه، مقدار ثانویه خواسته شده است. دبیران محترم می‌توانند در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند، مسائل مختلفی در زمینه واقعی مطرح کنند و از هنرجویان بخواهند با حل آنها و تفسیر جواب‌ها درک بهتری از موضوع درصد تغییر پیدا کنند.



۱) ابعاد یک پارک به طول ۳۰ و عرض ۱۰ متر است. درصد تغییر مساحت این پارک را محاسبه کنید.  
 ۲) قیمت بلیت یک موزه در ابتدای سال ۲۰۰۰٪ افزایش داشته و پس از سه ماه، دوباره ۱۰٪ افزایش یافته است. قیمت بلیت این موزه در سال گذشته ۱۰۰۰۰ تومان بوده است. (الف) قیمت بلیت این موزه اکنون چقدر است؟  
 (ب) درصد تغییر قیمت بلیت این موزه نسبت به سال قبل چقدر است؟ (توجه: ۳۰٪ نیست!)

## اهداف:

■ تقویت مهارت انجام محاسبات مربوط به درصد تغییر، روش مهارت حل مسئله

۱ مساحت پارک قبل از افزایش:  $xy$

مقدار افزایش طول:  $x \times 0/10 = 0/1x$  مقدار افزایش عرض:  $y \times 0/10 = 0/1y$

طول پس از افزایش:  $0/1x + x = 1/1x$  عرض پس از افزایش:  $0/1y + y = 1/1y$

مساحت پس از افزایش:  $1/1x \times 1/1y = 1/21xy$

درصد تغییر:  $\frac{1/21xy - xy}{xy} \times 100 = 21\%$

الف) مقدار افزایش قیمت بلیط ابتدای سال:

$$1000 \times 0/20 = 200$$

قیمت ابتدای سال:

$$1000 + 200 = 1200$$

مقدار افزایش قیمت پس از سه ماه:

$$1200 \times 0/10 = 120$$

قیمت بلیط پس از سه ماه:

$$1200 + 120 = 1320$$

ب) نسبت تغییر:  $\frac{1320 - 1000}{1000} = 32$  یعنی ۳۲ درصد افزایش یافته است.

## مسئله‌ها

۱) در هر پروانه عبارت درست را مشخص کنید.

الف) اگر قیمت جدید یک کالا نسبت به قیمت اولیه افزایش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) و اگر کاهش داشته باشد درصد تغییر (مثبت/منفی) می‌باشد.

ب) اگر قیمت کالایی ۵,۵۰۰ تومان باشد و قیمت آن به ۷,۰۰۰ تومان رسیده باشد، درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰، بین ۱ و ۱۰۰، کوچک‌تر از ۱) و اگر قیمت آن به ۱۲,۰۰۰ تومان رسیده باشد درصد افزایش قیمت (بزرگ‌تر از ۱۰۰، کوچک‌تر از ۱۰۰) می‌باشد.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال، پیوندها و اتصال‌ها، بازیابی اطلاعات
- الف) قسمت اول: مثبت، قسمت دوم: منفی.

ب) قسمت اول: یعنی ۲۷ درصد ( $0/27 \times 100$ ) افزایش داشته است که عددی بین ۱ و ۱۰۰ است.

$$\frac{7000 - 5500}{5500} = \frac{1500}{5500} = \frac{3}{11} \approx 0/27$$

قسمت دوم: که عددی بزرگ‌تر از ۱۰۰ است. یعنی ۱۱۸ درصد ( $1/18 \times 100$ ) افزایش داشته است.

$$\frac{12000 - 5500}{5500} = \frac{6500}{5500} = \frac{13}{11} \approx 1/18$$

۲) اگر قیمت اولیه یک کالا با  $x$  و قیمت جدید آن با  $y$  مشخص شده باشد، معادله  $y = \frac{3}{11}x$  رابطه بین قیمت اولیه و قیمت جدید این کالا را نشان می‌دهد.

الف) درصد تغییر را به دست آورید.

ب) کالایی که در سال گذشته ۱۰۰ هزار تومان بوده است، امسال چند تومان است؟

ب) کالایی که امسال ۱۰۰ هزار تومان است، در سال گذشته چند تومان بوده است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال با زندگی روزانه

فصل دوم: درصد و کاربردهای آن

$$\frac{y-x}{x} = \frac{\frac{1}{2}x - x}{x} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \quad \text{الف)}$$

یعنی این کالا ۵۰ درصد کاهش قیمت داشته است.

$$-\frac{1}{2} = \frac{y-x}{x} = \frac{y-1000000}{1000000} \rightarrow y = 500000 \quad \text{ب)}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{y-x}{x} = \frac{1000000-x}{x} \rightarrow x = 2000000 \quad \text{پ)}$$

۳) قیمت ۴ نوع کالا الف و ب و پ و ت در سال جاری نسبت به سال گذشته طبق جدول زیر تغییر داشته است.  
 الف) جدول را تکمیل کنید.  
 ب) این چهار کالا را در یک سبد به نام سبد کالا در نظر بگیرید. درصد تغییر قیمت این سبد کالا چقدر است؟

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصد تغییر
الف)	۱۰۰۰,۰۰۰	۱۱۵,۰۰۰	—
ب)	۱۲۵,۰۰۰	۱۵۰,۰۰۰	۲۰٪
پ)	۱۵۰,۰۰۰	۱۶۵,۰۰۰	۱۰٪
ت)	۲۰۰,۰۰۰	۱۸۰,۰۰۰	۱۰٪

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله پیوند و اتصال با زندگی روزانه

توضیح: لازم است در این مسئله نیز بر محاسبه درست درصد تغییر کلی تأکید داشت.

نوع کالا	قیمت سال گذشته	قیمت امسال	درصد تغییر
الف	۱۰۰۰۰۰	۱۱۵۰۰۰	۱۵٪
ب	۱۲۵۰۰۰	۱۵۰۰۰۰	۲۰٪
پ	۱۵۰۰۰۰	۱۶۵۰۰۰	۱۰٪
ت	۲۰۰۰۰۰	۱۸۰۰۰۰	-۱۰٪
کل	۵۵۰۰۰۰	۵۸۰۰۰۰	۵/۴۵٪

۴) طول هر ضلع یک مکعب بر اثر گرما ۱٪ واحد افزایش یافته است. اثر طول ضلع اولیه این مکعب ۱ واحد باشد، درصد تغییر حجم مکعب را حساب کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

### توضیح:

در این مسئله می‌خواهیم با مشخص بودن تغییرات طول ضلع مکعب، تغییرات حجم را به صورت درصد تغییر بیان کنیم.

یعنی  $\frac{(1/1)^3 - 1^3}{1^3} = 0/331$  درصد  $33/1$  یعنی  $(0/331 \times 100)$  افزایش داشته است.

## توسعه دانش

اگرچه مفهوم درصد مفهوم ساده‌ای است، ولی در کاربردهای آن ابهاماتی پیش می‌آید. در محاسبات با درصدهای پایین ممکن است این اشتباه پیش آید که درصدها را می‌توان با هم جمع کرد.

فرض کنید ۱۰ درصد افراد کلاس (الف) و ۱۵ درصد افراد کلاس (ب) امروز غایب بوده‌اند در این صورت مجموعاً از این دو کلاس چند درصد غایب بوده‌اند؟

اگر به مفهوم درصد خوب دقت نشود ممکن است از اصطلاح «مجموعاً» هنرجو به این نتیجه برسد که باید درصدها را با هم جمع کند که کاملاً اشتباه است. یک اشتباه دیگر ممکن است این باشد که میانگین این درصدها را حساب کنیم و بگوییم مجموعاً  $12/5$  درصد افراد دو کلاس غایب بوده‌اند. اگر تعداد افراد دو کلاس مساوی باشند میانگین‌گیری جواب درستی می‌دهد. اما، اگر تعداد افراد دو کلاس مساوی نباشند، میانگین‌گیری از درصدها جواب درستی نخواهد داد.

مثلاً فرض کنید کلاس (الف) ۳۰ نفره و کلاس (ب) ۲۰ نفره باشد. از کلاس (الف) ۳ نفر و از کلاس (ب) نیز ۳ نفر غایب بوده‌اند. پس ۶ نفر از ۵۰ نفر غایب بوده‌اند که می‌شود ۱۲ درصد نه  $12/5$  درصد.

دو مقدار درصد متفاوت با هم قابل قیاس نیستند چون ممکن است کل مرجع آنها متفاوت باشند. در مثال بالا ۱۰ درصد کلاس (الف) با ۱۵ درصد کلاس (ب) مساوی بودند.

نوع دیگری از میانگین‌گیری وجود دارد که میانگین وزنی نامیده می‌شود. در این نوع میانگین‌گیری از تعدادی عدد، همه آنها را یکسان در نظر نمی‌گیریم و برای هر کدام وزنی در نظر می‌گیریم. در محاسبه معدل شاگردان این وضعیت رخ می‌دهد و مثلاً می‌گویند نمره امتحان آخر را با ضریب ۲ و بقیه نمرات را با ضریب ۱ در نظر می‌گیریم. این همان میانگین‌گیری وزنی است که برای امتحان آخر وزن ۲ و برای بقیه نمرات وزن ۱ در نظر گرفته شده است.

اگر  $n$  عدد  $x_1, \dots, x_n$  را به ترتیب با وزن‌های  $p_1, \dots, p_n$  در نظر بگیریم طبق تعریف میانگین وزنی آنها عبارت است از:

$$\frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n}$$

در بیشتر کاربردهای مفهوم میانگین وزنی، وزن‌ها اعداد مثبتی هستند.

در کار با درصدها، اگر چند درصد مختلف داشته باشیم که کل مرجع آنها با هم متفاوت است می‌توان برای هر درصد به اندازه کل مرجع آن وزن در نظر گرفت و در این صورت میانگین وزنی درصدها، مقدار درست درصد مجموع را نشان می‌دهد. در مثال بالا اگر برای ۱۰ درصد وزن ۳۰ و برای ۱۵ درصد وزن ۲۰ را در نظر بگیریم میانگین وزنی آنها عبارت است از:

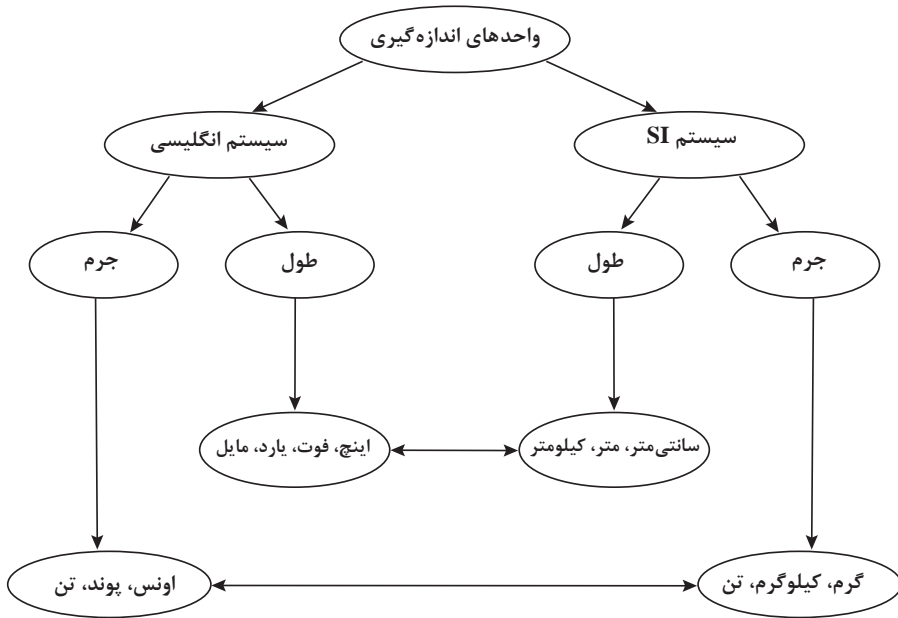
$$\frac{۳۰ \times ۱۰ + ۲۰ \times ۱۵}{۳۰ + ۲۰} = ۱۲$$

جواب درست نیز همان ۱۲ درصد است.

## فصل سوم

# واحدهای اندازه گیری

## طرح کلی مفاهیم فصل سوم (نقشه مفهومی)



## اهداف کلی فصل

- آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری طول و جرم در سیستم‌های انگلیسی.
- درک ارتباط بین واحدهای اندازه‌گیری در یک سیستم.
- درک ارتباط بین واحدهای اندازه‌گیری در دو سیستم متفاوت.

### عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- مقدار کمیت‌های طول و جرم که با یک واحد در یک سیستم مشخص شده‌اند را به واحدهای دیگر در همان سیستم تبدیل کنند.
- مقدار کمیت‌های طول و جرم که با یک واحد در یک سیستم مشخص شده را به واحدهای سیستم دیگر تبدیل کنند.
- از واحدهای اندازه‌گیری، در اندازه‌گیری کمیت‌های مختلف استفاده کنند.
- با استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری مقدار کمیت‌های معین را به‌دست آورند.



■ بدون استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری، مقدار کمیت‌های مشخص شده را به‌طور تقریبی تخمین بزنند.

### پیش‌نیازها:

■ آشنایی با سیستم SI، مهارت استفاده از ابزارهای اندازه‌گیری.

## نگاه کلی به فصل

در زندگی روزمره هر جا با کمیتی سروکار داریم از واحدی برای اندازه‌گیری آن استفاده می‌کنیم. وجود واحد استاندارد و همگانی برای داشتن درک مشترک از اندازه اشیا ضروری است. نحوه شکل‌گیری اولیه این واحدها به‌صورت طبیعی با استفاده از اشیا در دسترس مانند دست و پا بوده است که به‌صورت خواندنی در کتاب آمده است. تفاوت اندازه دست و پای افراد ضرورت و اهمیت استانداردسازی واحدها یا اندازه‌گیری را از مدت‌ها قبل نشان داده است. معاملات و تبادلات و محاسبات و ... که جزء جدانشدنی از تعاملات اجتماعی است، فقط با داشتن واحدهای مشترک برای کمیت‌های مختلف ممکن می‌شود. امروزه ضرورت آشنایی و درک واحدهای مختلف و مهارت استفاده از آنها در هر جا که با یک کمیت سروکار داریم مشهود است. مقدار استفاده از یک دارو، مقدار مواد اولیه در دستور تهیه یک غذا، طول پارچه لازم برای دوخت یک لباس و ... همگی با واحدهای اندازه‌گیری در یک سیستم اندازه‌گیری بیان می‌شود. با توجه به اینکه برای بیان مقدار کمیت‌ها معمولاً از واحدهای دو سیستم اندازه‌گیری انگلیسی و متریک (SI) استفاده می‌شود، در این کتاب تمرکز بر معرفی و استفاده از واحدهای این دو سیستم است. همچنین، در کمیت‌های طول و جرم، واحدهایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، مطرح خواهند شد. به دلیل تفاوت‌هایی که در شکل‌گیری واحدها وجود داشته است مقدار آنها یکسان نبوده است و بعضی واحدهای انگلیسی در کشورهای مختلف اندازه متفاوت دارند. به همین دلیل، مقدار واحدها برحسب یکدیگر به صورت تقریبی بیان شده است. مثلاً یک یارد تقریباً معادل ۹۰ سانتی‌متر، و یک فوت تقریباً معادل ۳۰ سانتی‌متر، و یک اونس تقریباً معادل ۲۸ گرم و یک پوند تقریباً معادل ۴۵۰ گرم در نظر گرفته می‌شود. این رابطه تقریبی باعث می‌شود، برخی تبدیل واحدها تقریبی شوند. مثلاً، مواقعی که هنر جوینان برای استخراج رابطه بین واحدها از اینترنت استفاده می‌کنند یا وقتی که مثلاً با دو خط‌کش مختلف که واحد یکی اینچ و واحد دیگری سانتی‌متر است یک طول مشخص را اندازه‌گیری می‌کنند، اگر ضریب تبدیل استفاده شده دقیق نباشد، بین مقدار به دست آمده با ضریب تبدیل و مقدار اندازه‌گیری شده با ابزار ممکن است اختلاف وجود داشته باشد.

فرایند	توصیف فرایند	مثال
حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	- ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسئله‌ها و با انتخاب مناسب آنها	- استفاده از راهبردهای الگویی در حل مسئله‌ها (فعالیت ۲)
ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	- توضیح در خصوص رابطه بین دو ستون از جدول (سؤال ۲ از فعالیت ۲) - توضیح رابطه بین اونس و پوند (سؤال ۲ کار در کلاس بعد از فعالیت ۳)
	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	- بیان رابطه بین فارنهایت و سانتی‌گراد به‌صورت یک گزاره ریاضی
استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	- دلیل ساده‌تر بودن کار با واحدهای متریک در طول (کاردر کلاس ۲)
پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	- استفاده از اعداد برای نمایش کمیت‌ها برحسب یک واحد (ارتباط ریاضی و فیزیک)
	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	- پیوند واحدهای اندازه‌گیری SI و واحدهای اندازه‌گیری انگلیسی
بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	- ارائه جدولی و جبری بین دو واحد اینچ و فوت (کار در کلاس ۲)
سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویی و...	- به‌دست آوردن رابطه اونس و گرم با استفاده از یک مثال خاص (فعالیت ۳) - مقایسه واحدهای اینچ و سانتی‌متر برای طول (فعالیت ۱)

## بخش اول: واحد اندازه‌گیری انگلیسی (طول)

### اهداف بخش

- اندازه‌گیری طول مشخص شده با استفاده از وسیله اندازه‌گیری
- ارائه تخمین مناسبی از طول مشخص شده بدون استفاده از وسیله اندازه‌گیری
- تبدیل طول مشخص شده برحسب یک واحد به واحدهای دیگر در همان سیستم یا سیستم دیگر
- یافتن ضریب تبدیل یک واحد به واحد دیگر در یک سیستم اندازه‌گیری

### واژه‌های کلیدی:

سیستم اندازه‌گیری انگلیسی، سیستم اندازه‌گیری SI، ضریب تبدیل، تخمین طول

### نگاه کلی به بخش:

بخش ابتدایی فصل به معرفی واحدهای کمیت طول پرداخته شده است. آشنایی با این واحدها امکان استفاده از دستورالعمل‌ها و جدول‌های مرتبط با طول که نمونه‌هایی از آن در بخش آمده است را فراهم می‌کند. همچنین مهارت در تخمین یک طول موجب می‌شود که انجام محاسبات و تصمیم‌گیری در زمان‌هایی که بیان مقدار واحدها به صورت دقیق مورد نظر نیست، امکان‌پذیر باشد. مثلاً در نظر بگیرید که می‌خواهیم برآورد تقریبی از هزینه رنگ‌آمیزی یا سنگ کردن دیوارهای یک یا چند اتاق را داشته باشیم، می‌توانیم با تخمین طول و عرض، مساحت مورد نظر را به طور تقریبی حساب کرده و برآوردی از هزینه داشته باشیم. در این بخش با روایت یک ماجرا به طور ضمنی، یک واحد اندازه‌گیری طول در سیستم انگلیسی معرفی می‌شود. سپس با ارائه یک فعالیت این واحد با واحدی که برای هنرجویان آشنا می‌باشد (سانتی‌متر) مقایسه می‌شود. همچنین، در این بخش با ارائه جدول‌های حاوی طول‌های مورد نیاز برحسب واحدهای سیستم انگلیسی به لزوم آشنایی با واحدهای مختلف و نحوه تبدیل آنها به یکدیگر اشاره می‌شود.

### ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان سؤال‌های زیر را مطرح کرد:

آیا می‌دانید واحدهای اندازه‌گیری چگونه شکل گرفته‌اند؟

لزوم استفاده از واحدهای اندازه‌گیری چیست؟

و با استفاده از مطالب مربوط به قسمت خواندنی‌های این فصل اهمیت و تاریخچه‌ای از نحوه و ضرورت شکل‌گیری این واحدها را متذکر شوید، یا می‌توان جدول‌های حاوی اندازه طول‌های مورد استفاده

هنرجویان هر رشته (نظیر جدول زیر) را استخراج کرده و تبدیل اندازه‌ها از یک واحد به واحد دیگر را از آنها خواست. یا از هنرجویان خواست برخی طول‌ها (نظیر طول و عرض کتاب درسی) را با استفاده از خط‌کش در سیستم SI اندازه‌گیری کنند و به واحدهای دیگر در همان سیستم تبدیل کنند. یا مثال‌هایی از زندگی روزمره که استفاده از واحدهای انگلیسی در آنها مصطلح است (نظیر سایز لباس و...) را بیان کرد تا با دیدن لزوم آشنایی با این واحدها انگیزه لازم برای شروع یادگیری در آنها به‌وجود آید.

جزء ۳-۳-۳: گنجینه میوه‌ها در طولانی ۲۰۱۶ اینچ

مقطع سطح ... ۹ میلی‌متر مربع	انوار آبی طولانی ۲۰۱۶ اینچ							
	اینگ ۱		اینگ ۲		اینگ ۳		اینگ ۴	
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸
۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶
۳۷	۳۸	۳۹	۴۰	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵
۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴
۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰	۶۱	۶۲	۶۳
۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲

## فعالیت آموزشی

۱) با توجه به خط‌کشی که بر حسب سانتی‌متر و اینچ علامت‌گذاری شده، بگویید هر اینچ تقریباً چند سانتی‌متر است؟

۲) به دو خط‌کشی روی‌هم‌رو توجه کنید: فکر می‌کنید کدام خط‌کش با سانتی‌متر و کدام‌یک با اینچ علامت‌گذاری شده است؟

۳) طول‌های مشخص شده را با توجه به هر یک از خط‌کشی‌ها پیدا کنید.

طول (سانتی‌متر)	طول (اینچ)
۱	۱
۲	۲
۳	۳
۴	۴
۵	۵
۶	۶
۷	۷
۸	۸
۹	۹
۱۰	۱۰

۴) فکر می‌کنید استفاده از کدام واحد برای اندازه‌گیری طول ساده‌تر است؟ چرا؟

## اهداف موضوعی:

- درک رابطه بین واحدهای سانتی‌متر و اینچ.
- کسب مهارت تبدیل واحدها به یکدیگر در دو سیستم

- کسب مهارت اندازه‌گیری بر حسب واحدهای انگلیسی طول.
- اندازه‌گیری با واحدهای انگلیسی.
- درک دشواری استفاده از سیستم انگلیسی نسبت به سیستم SI.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، ارزیابی و مقایسه کردن
- ۱ هر اینچ تقریباً  $\frac{2}{5}$  سانتی‌متر است.
- ۲ خط‌کش صفحه قبل که واحدهای آن به هشت قسمت تقسیم شده است با اینچ و خط‌کش پایین که واحدهای آن به ۱۰ قسمت تقسیم شده است با سانتی‌متر علامت‌گذاری شده است. یا می‌توان گفت خط‌کش بالا که واحدهایش بزرگ‌تر است اینچ و خط‌کش پایین که واحدهایش کوچک‌تر است با سانتی‌متر علامت زده شده است.
- ۳ تکمیل شده جدول به صورت زیر است.

بر حسب in		بر حسب cm	
$\frac{4}{8}$	A	$\frac{1}{1}$	A
$\frac{15}{16}$	B	$\frac{2}{3}$	B
$\frac{13}{18}$	C	$\frac{3}{5}$	C
$\frac{213}{16}$	D	۷	D
$\frac{39}{16}$	E	۹	E

- ۴ استفاده از واحد سانتی‌متر برای اندازه‌گیری طول ساده‌تر است به دلیل اینکه مبنای عددنویسی ما اعشاری (ده‌دهی) است و تقسیم کردن یا ضرب کردن در عدد ۱۰ برای ما ساده‌تر است.
- لازم به ذکر است که با توجه به میزان دقت تصویر خط‌کش‌ها و اندازه‌گیری به کمک آنها، اعداد جدول قسمت ۳ تقریبی است.

### توصیه آموزشی:

باید ذکر شود که هر واحد اینچ به هشت قسمت و هر واحد سانتی‌متر به ۱۰ قسمت تقسیم می‌شود. این نکته به هنرجویان در استفاده از خط‌کش‌هایی که بر حسب اینچ مدرج شده‌اند، کمک می‌کند. همچنین، می‌توان گفت: یکی از دلایل گستردگی استفاده از سیستم واحد متریک به عنوان واحد رسمی در کشورهای مختلف این است

که در این سیستم هر واحد با تقسیم بر ۱۰ به واحد کوچکتر تبدیل می‌شود که با مبنای ده‌دهی اعداد که مورد استفاده عموم است همخوانی دارد. همچنین هنرجویان گاهی برای نمایش طولی که بر حسب اینچ و با استفاده از خط‌کش به دست آمده است، اشتباهاتی نظیر نمایش ۲/۷ به جای  $2\frac{7}{8}$  انجام می‌دهند که ناشی از عدم توجه به تقسیم‌بندی ۸ قسمتی یک واحد اینچ در خط‌کش است.

توضیحات بعد از فعالیت اشاره به این مطلب دارد که اندازه‌های مصطلح در مورد وسایل گوناگون (مثل تلویزیون ۲۳ اینچی یا ...) حاوی اطلاعات ضمنی است که آشنایی با آنها در تصمیم‌گیری برای انتخاب وسیله مناسب مؤثر است. در این قسمت به اندازه اتاق پذیرایی در انتخاب اندازه تلویزیون مناسب (که هم از نظر هماهنگی با مساحت اتاق و هم رعایت فاصله مناسب جهت رؤیت بهتر تصویر) توجه شده است.



### اهداف:

- کاربرد واحدهای اندازه‌گیری سیستم انگلیسی طول در زندگی روزمره.
- پرورش مهارت استدلال کردن
- 1 حدافل فاصله ۱/۸ متر
- 2 طبق جدول تلویزیون از ۲۸ اینچی به بالا می‌تواند باشد در مورد اینکه کدام بهتر است در کلاس بحث شود.

1) اندازه‌های داده شده در ستون دوم (از سمت چپ) جدول زیر را که بر حسب اینچ هستند، به متر تبدیل کنید.

طول (اینچ)	طول (متر)	طول (اینچ)	طول (متر)
4	10.16	19	48.26
6	15.24	26	66.04
8	20.32	32	81.28
10	25.40	39	99.06
12	30.48	46	116.84
14	35.56	52	132.08

2) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون دوم چه رابطهای وجود دارد؟  
 3) بین اعداد در ستون اول و اعداد در ستون سوم چه رابطه‌ای وجود دارد؟  
 4) جاهای خالی را پر کنید:  
 5 فوت = \_\_\_\_\_ اینچ  
 1 متر = \_\_\_\_\_ اینچ  
 5) اگر برای بخش فیلدهای آموزشی به‌تعمیم تلویزیون در کلاس شما بگذارید، فکر می‌کنید چه اندازه‌ای مناسب است؟

### اهداف موضوعی:

- کسب مهارت تبدیل واحدهای انگلیسی طول
- درک رابطه بین واحد فوت و اینچ.

### اهداف فرایندی:

- حل مسئله، استدلال کردن، ارزیابی کردن.
- 1) تبدیل واحدها به متر (جدول روبه‌رو)
- 2) اعداد ستون دوم ۱۲ برابر اعداد ستون اول هستند.
- 3) اعداد ستون مربوط به واحد متر تقریباً  $0.31$  برابر اعداد ستون اول هستند.
- 4) الف)  $0.0254$  متر = ۱ اینچ  
 ب)  $0.31$  متر = ۱۲ اینچ = ۱ فوت

بر حسب feet	بر حسب inch	بر حسب متر	Min Size	Max Size
۴	۴۸	۱/۲۴	۱۹	۳۲
۶	۷۲	۱/۸۶	۲۶	۴۶
۸	۹۶	۲/۴۸	۳۲	۶۳
۱۰	۱۲۰	۳/۱	۴۰	۸۰
۱۲	۱۴۴	۳/۷۲	۴۶	۹۶
۱۴	۱۶۸	۴/۳۴	۵۲	۱۱۲

- 5) با توجه به فاصله نزدیک‌ترین نفر و دورترین نفر به محل نصب تلویزیون در کلاس خود، تلویزیون مناسب را انتخاب می‌کنیم.
- سیستم اندازه‌گیری انگلیسی که در کنار سیستم SI مطرح شده است، در کشورهای آمریکا و میانمار و لیبیا (کشوری در غرب آفریقا) مورد استفاده است. برخی از واحدهای این سیستم هنوز هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بخش مربوط به خواندن‌های این قسمت نیز اشاره به تاریخ استفاده از واحدهای مشترک و نحوه شکل‌گیری آنها دارد که لزوم و اهمیت استفاده از این واحدها را در تعاملات بین افراد نشان می‌دهد.

۱- جدول زیر را تکمیل کنید.

طول	طول	طول	طول	طول
عرض کتاب ریاضی	۳۰	۳۰	۳۰	۳۰
طول کتاب ریاضی	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰
طول پنجره اتاق	۱۰	۱۰	۱۰	۱۰
طول میزهای کلاس از اندازه سرگود	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰	۱۰۰
طول اتاق	۳	۳	۳	۳
دور کمر خودتان	۷۰	۷۰	۷۰	۷۰

۲- از نظر شما کار با کدام سیستم اندازه گیری راحت تر است؟ چرا؟

## اهداف:

- تقویت مهارت تخمین زدن طول
  - تقویت مهارت تبدیل واحدها به یکدیگر
  - تقویت مهارت استفاده از ابزارهای اندازه گیری
  - پرورش مهارت های ارزیابی کردن، استدلال کردن
- ۱ تکمیل جدول

طول اندازه گرفته شده بر حسب واحدهای اندازه گیری SI	طول اندازه گرفته شده بر حسب واحدهای اندازه گیری انگلیسی	طول حدس زده شده بر حسب واحدهای اندازه گیری SI	طول حدس زده شده بر حسب واحدهای اندازه گیری انگلیسی	
۲۰/۲ سانتی متر	$7\frac{15}{16}$ اینچ	cm -----	in -----	عرض کتاب ریاضی
۲۶/۸ سانتی متر	۰/۸۷ فوت	m-----	ft -----	طول کتاب ریاضی
-----	-----	m -----	yd -----	طول پنجره اتاق
-----	-----	mm -----	in -----	طول خودکاری که از آن استفاده می کنید
-----	-----	m -----	ft -----	طول اتاق
-----	-----	cm -----	in -----	دور کمر خودتان

۲ با واحد SI راحت تر است. دلیل آن نیز مبنای سیستم عدد نویسی رایج است که ۱۰ می باشد. کار با واحدهای سیستم انگلیسی به مهارت کار با کسرها و اعداد مخلوط و اعداد مرکب وابسته است که مشکل تر از کار با سیستم دهدهی است.



در این کار در کلاس، با تخمین برخی از طول‌ها و اندازه‌گیری آنها با ابزارهای اندازه‌گیری، مهارت تخمین زدن بالاتر می‌رود. می‌توان به هنرجویان توصیه کرد که طول‌های مختلف را تخمین بزنند و سپس با ابزارهای اندازه‌گیری، دقت تقریب خود را بررسی کنند. با انجام این عمل، مهارت تخمین بهتر افزایش می‌یابد.

## مسئله‌ها

مسئله ۱۱

۱۱ ورزشکاری در برش سه‌گانه به ترتیب ۴ فوت و ۶ اینچ، ۳ فوت و ۵ اینچ، ۳ فوت و ۱۱ اینچ برده است.



الف) این ورزشکار روی همه چند فوت و چند اینچ برده است؟

ب) او چند متر برده است؟

ج) اگر رکورد این رشته ۱۲ فوت و ۱۰ اینچ باشد، برای شکستن رکورد، چقدر بیشتر باید می‌برد؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

$$\text{الف) } ۱۲ \text{ فوت و } ۱۰ \text{ اینچ} \rightarrow ۱۲ \frac{۱۰}{۱۲} = ۱۱ \frac{۲۲}{۱۲} = ۱۱ \frac{۱۱}{۱۲} + ۴ \frac{۵}{۱۲} + ۳ \frac{۱۱}{۱۲}$$

این قسمت را می‌توان با نماد اعداد مرکب به صورت زیر حل کرد:

$$\begin{array}{r} ۴' \quad ۶'' + \\ ۴' \quad ۵'' \\ ۳' \quad ۱۱'' \\ \hline ۱۱' \quad ۲۲'' \longrightarrow ۱۲' \quad ۱۰'' \end{array}$$

ب) متر  $۱۲ \times ۰/۳۱ + ۱۰ \times ۰/۰۲۵ = ۳/۹۷$

پ) حداقل ۱ اینچ بیشتر یعنی باید حداقل ۱۲ فوت و ۱۱ اینچ می‌پرید.

### توصیه:

در این مسئله می‌توان به هنرجویان گفت این مسئله را با راه‌های متفاوتی حل کرده و سپس نتایج را با هم مقایسه کنند تا خطای تقریب را متوجه شوند. (مثلاً یکی از راه‌ها تبدیل فوت به اینچ و سپس تبدیل به متر و...)

- ۲۲) قد شما چند سانتی متر است؟  
الف) چند متر است؟  
ب) چند اینچ است؟  
پ) چند فوت است؟  
ت) چند یارد است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها
- فرض کنیم قد برحسب سانتی متر ۱۶۸ باشد
- برحسب متر:  $1/68$  متر، برحسب اینچ:  $65/52$
- برحسب فوت:  $5/510$  ، برحسب یارد:  $1/831$



### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها
- $212/04 = 342 \times 0/62$

۲۳) در یک مسابقه دو لندادی، هر تیم باید  $40$  مایل بدود اگر هر بازیکن مجاز باشد فقط  $4$  کیلومتر بدود، هر تیم چند دوپنده باید داشته باشد؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها
- $20 \times 1/61 = 32/2$
- $32/2 \div 3 = 10/7 \Rightarrow 11$  نفر

۲۴) یک دبیر هنر، یک بسته نوار تزئینی به طول  $50$  یارد خرید. هر دانش‌آموز برای تکمیل پروژه به  $1/8$  متر نوار نیاز دارد.  $30$  دانش‌آموز در این پروژه شرکت دارند. چند یارد نوار باقی می‌ماند؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها
- $0/8 \times 1/09 = 0/872$
- $0/872 \times 30 = 26/16 \Rightarrow 50 - 26/16 = 23/84$

۶) سه وسیله نام ببرید که به طور رایج، اندازه‌شان با واحدهای انگلیسی بیان می‌شود.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها، تفکر واگرا
- تلوزیون (اینچ)، یخچال (فوت)، قطر لوله آب، پیچ‌ها و ...

۷) تحقیق کنید سایز کفش (برای مثال ۱۳۸، ۴\* و غیره) چگونه تعیین شده است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

- جمع‌آوری اطلاعات، ارتباطات کلامی، ارزیابی کردن
- با اندازه‌گیری مناسب فاصله پاشنه تا انگشت شست (شکل روبه‌رو) و مراجعه به سایت‌های اینترنتی می‌توان سایز را پیدا کرد (البته معمولاً سایز کفش کارخانه‌های مختلف با هم یکسان نیستند) رابطه‌ای که در بسیاری از سایت‌ها به آن اشاره شده است به صورت:
- سایز کفش = (طول پا (برحسب سانتی‌متر) + ۲) × ۱/۵.



۸) حسین هنرجوی رشتهٔ صنایع چوب است. او برای انجام پروژهٔ خود که ساخت صندلی است به الگوی زیر دست پیدا کرده. ابعاد و اندازه‌های روی شکل بر حسب فوت و اینچ است. این اندازه‌ها را بر حسب سانتی‌متر به دست آورید.



### مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها، حل مسئله
- ارتفاع پشت صندلی (که از ۲ فوت و ۸ اینچ تا ۳ فوت و ۶ اینچ می‌باشد) برحسب سانتی‌متر عبارت است از:

$$۲' ۸'' = ۲ \times ۳۱ + ۸ \times ۲ / ۵۴ = ۸۲ / ۳۲$$

$$۳' ۶'' = ۳ \times ۳۱ + ۶ \times ۲ / ۵۴ = ۱۰۸ / ۲۴$$

همچنین ارتفاع قسمت جلوی صندلی برحسب سانتی‌متر:

$$۱' ۶'' = ۱ \times ۳۱ + ۶ \times ۲ / ۵۴ = ۴۶ / ۲۴$$

و فاصله ابتدای صندلی از محل تکیه‌دادن برحسب سانتی‌متر:

$$۱' ۴'' = ۱ \times ۳۱ + ۴ \times ۲ / ۵۴ = ۴۱ / ۱۶$$

۹) در دریانوردی از واحدهی به نام گره برای اندازه‌گیری سرعت شناورها در دریا استفاده می‌شود. سرعت یک گره برابر است با یک مایل دریایی بر ساعت. مایل دریایی یا واحد مایل که از آن برای اندازه‌گیری طول در خشکی استفاده می‌شود فرق دارد. تحقیق کنید یک مایل دریایی یا مایل (اندازه‌گیری در خشکی) چه رابطه‌ای دارد.

## مهارت‌ها و فرایندها:

- جمع‌آوری اطلاعات، ارزیابی کردن ارتباطات کلامی
- مایل دریایی تقریباً  $1/15$  مایل (اندازه‌گیری در خشکی) است.

۱۰) فاصله دو بندر خارک و بوشهر در دریا برابر با  $30$  مایل دریایی است. فاصله این دو بندر از هم چند کیلومتر است؟

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها
- مایل دریایی معادل  $1852$  متر یعنی:  $1/1852$  کیلومتر است. پس فاصله مورد نظر:
- $$30 \times 1852 = 55560 \text{ کیلومتر است.}$$

## بخش دوم: واحد اندازه‌گیری انگلیسی (جرم)

### اهداف بخش

- آشنایی با برخی واحدهای اندازه‌گیری جرم در سیستم اندازه‌گیری انگلیسی
- اندازه‌گیری جرم مشخص شده با استفاده از وسیله اندازه‌گیری
- ارائه تخمین وزن اجسام مشخص شده بدون استفاده از ترازو
- تبدیل جرم مشخص شده برحسب یک واحد به واحدهای دیگر در همان سیستم یا سیستم دیگر

### واژه‌های کلیدی:

- سیستم اندازه‌گیری انگلیسی، سیستم اندازه‌گیری SI، تبدیل واحدهای اندازه‌گیری، تخمین جرم

### نگاه کلی به بخش:

اگر به اخبار اقتصادی توجه کرده باشیم، ملاحظه خواهیم کرد که برخی از واحدهای جرمی مورد استفاده قرار می‌گیرند در سیستم SI نیستند. این مطلب در کتاب‌های آشپزی یا الگوهای خیاطی و .. نیز دیده می‌شود. آشنایی با این واحدها و نحوه تبدیل آنها به واحدهای سیستم متریک در درک صحیح از مقدار آنها و ارائه تخمین مناسب از مقدار این واحدها مؤثر است. این بخش با بیان یک وضعیت مسئله‌گونه یکی از این واحدها معرفی می‌شود و انگیزه برای انجام فعالیت توسط هنرجویان ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است که در مسائل فصل، کمیت دما نیز مطرح شده است. دلایل طرح این کمیت در کتاب این است که: اولاً هنرجویان اطلاع داشته باشند که در این سیستم واحد دیگری برای اندازه‌گیری دما وجود دارد و ثانیاً با تبدیل واحدهای دما به یکدیگر نیز آشنا شوند. ولی تمرکز بر این کمیت و تدریس آن از اهداف کتاب نیست.

### ورود به مطلب:

برای ورود به مطلب می‌توان با اعلام خبری اقتصادی مرتبط با جرم (وزن) یا با ارائه جدولی نظیر جدول تهیه کیک که برای هنرجویان جذاب باشد و با طرح سؤالاتی از میزان آشنایی آنها با این واحدها انگیزه لازم جهت توجه هنرجویان را فراهم کرد.

۱) وزن یک سکه ۵۰۰۰ ریالی تقریباً ۰.۲۴ اونس است. یک سکه ۵۰۰۰ ریالی را در دست بگیرید و وزن آن را بر حسب گرم تخمین بزنید.



۲) بر حسب تخمین خود بگویید ۱ اونس تقریباً چند گرم است.

۳) با مراجعه به اینترنت، وزن یک سکه ۵۰۰۰ ریالی را بر حسب گرم پیدا کنید.

۴) با در نظر گرفتن وزن یک سکه ۵۰۰۰ ریالی، هر اونس تقریباً چند گرم است؟









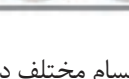
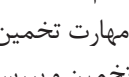
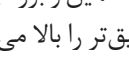



### اهداف موضوعی:

- آشنایی با واحدهای اندازه‌گیری وزن در واحد انگلیسی (اونس)
- تقویت مهارت تخمین وزن (جرم).
- درک رابطه بین انس و گرم از طریق مقایسه اندازه وزن (جرم) یک جسم مشخص بر حسب واحدهای مختلف.
- تقویت مهارت تبدیل واحدهای وزن (جرم) به یکدیگر.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، تخمین زدن، جمع‌آوری اطلاعات
- ۱ و ۲ با توجه به مهارت تخمین پاسخ هنرجویان ارائه می‌شود.
- ۳ وزن یک سکه ۵۰۰۰ ریالی براساس اعلام بانک مرکزی ۱۰/۱ گرم است.
- ۴ هر اونس تقریباً ۲۸ گرم است.

جدول زیر وزن سکه‌های رایج بر اساس اعلام بانک مرکزی بر حسب گرم است، وزن بر حسب واحد اونس نیز با تبدیل در کنار آن آمده است. هنرجویان می‌توانند از هر کدام نوع سکه برای انجام فعالیت استفاده کنند (ترجیحاً سکه‌های سنگین‌تر برای تخمین جرم انتخاب شود).

تصویر	ارزش(دال)	وزن (گرم)	وزن (اونس)	تصویر	ارزش(دال)	وزن (گرم)	وزن (اونس)
	۵۰۰۰	۲۰۰	۰.۰۱۲		۵۰۰۰	۲۰۰	۰.۰۱۲
	۱۰۰۰۰	۴۰۰	۰.۰۲۴		۱۰۰۰۰	۴۰۰	۰.۰۲۴
	۲۰۰۰۰	۸۰۰	۰.۰۴۸		۲۰۰۰۰	۸۰۰	۰.۰۴۸
	۵۰۰۰	۲۰۰	۰.۰۱۲		۵۰۰۰	۲۰۰	۰.۰۱۲
	۱۰۰۰۰	۴۰۰	۰.۰۲۴		۱۰۰۰۰	۴۰۰	۰.۰۲۴
	۲۰۰۰۰	۸۰۰	۰.۰۴۸		۲۰۰۰۰	۸۰۰	۰.۰۴۸
	۵۰۰۰	۲۰۰	۰.۰۱۲		۵۰۰۰	۲۰۰	۰.۰۱۲

با توجه به اهداف این فعالیت می‌توان با انتخاب اجسام مختلف دیگر که در دسترس هستند و طی مراحل فعالیت فوق نیز برای تقویت مهارت تخمین جرم استفاده کرد. ذکر این نکته ضروری است که افزایش فرصت‌های تخمین و بررسی میزان دقت درک بهتری از مفهوم جرم می‌دهد و مهارت تخمین دقیق‌تر را بالا می‌برد.

۴۱ فرض کنید می‌خواهید دستور پخت یک غذای اصلی ایرانی را برای دوستان فرستید و دوست شما اهل کشوری است که در آنجا از سیستم انگلیسی استفاده می‌شود. مقادیر مورد نیاز را بر حسب چه واحدهایی می‌نویسید؟



۴۲ ضرب تبدیل اونس به گرم را پیدا کنید.

۴۳ توضیح دهید برای تبدیل اونس به پوند یا برعکس، از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

۴۴ برای تبدیل اونس به کیلوگرم از چه عملیاتی استفاده می‌کنید؟

۴۵ برای تبدیل واحدها، جدول روبه‌رو را کامل کنید:

۱ گرم	... اونس
۱ پوند	گرم
۱ کیلوگرم	... اونس
۱ پوند	کیلوگرم

## اهداف:

- پرورش مهارت‌های برقراری ارتباطات کلامی، استدلال کردن
- تقویت مهارت تبدیل واحدها به یکدیگر.
- پرورش مهارت‌های برقراری ارتباطات کلامی، استدلال کردن

### ۱ واحد انگلیسی

۲ هر اونس ۲۸ گرم است .

۳ تبدیل اونس به پوند: مقدار بر حسب اونس را بر عدد ۱۶ تقسیم می‌کنیم تا مقدار بر حسب پوند به دست آید.

تبدیل پوند به اونس: مقدار بر حسب پوند را در عدد ۱۶ ضرب می‌کنیم تا مقدار بر حسب اونس به دست آید.

۴ مقدار بر حسب اونس را در عدد  $0/028$  ضرب می‌کنیم.

۱ گرم	$0/035$ اونس
۱ پوند	۴۵۰ گرم
۱ کیلوگرم	$35/27$ اونس
۱ پوند	$0/45$ کیلوگرم



مسئله‌ها

۱۶ پرسنو مواد لازم زیر را برای تهیه کیک از یکی از دوستانتان در خارج از ایران گرفت. به کمک اینترنت یا منابع دیگر، واحدهایی را که نمی‌شناسید، شناسایی کنید و با انتخاب واحد مناسب و کامل کردن جدول زیر به پرسنو کمک کنید تا بتواند کیک خود را بپزد.

مواد لازم	واحد اندازه‌گیری	مقدار
خرمای خرد شده	C	۱
کره	lb	$\frac{1}{2}$
جوش شیرین	tsp	۱
نمک	tsp	$\frac{1}{2}$
پودر کاکائو	tbsp	۳
زرد	C	$1\frac{1}{2}$
تخم مرغ		۳
شکر	C	$\frac{1}{2}$
وانیل	tsp	۱
گرمای خرد شده	C	$\frac{1}{4}$
شکلات درآمده	C	$\frac{1}{2}$
شکر پودری	C	$1\frac{1}{2}$
دما پخت	F	۳۵۰
اندازه ظرف	inch	۹ inches × ۱ inches



### مهارت‌ها و فرایندها :

حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی و خارج ریاضی

واحدهای سیستم SI	واحدهای انگلیسی	مواد لازم
۲۴۰ ml	۱ C	خرمای خرد شده
۲۲۵ g	$\frac{1}{2}$ lb	کره
۵ ml	۱ tsp	جوش شیرین
$\frac{۲}{۵}$ ml	$\frac{1}{2}$ tsp	نمک
۴۵ ml	۳ tbsp	پودر کاکائو

واحدهای سیستم SI	واحدهای انگلیسی	مواد لازم
۳۶۰ ml	$1\frac{1}{2}$ C	آرد
۲	۲	تخم مرغ
۱۶۰ ml	$\frac{2}{3}$ C	شکر
۵ ml	۱ tsp	وانیل
۱۲۰ ml	$\frac{1}{2}$ C	گردوی خرد شده
۱۸۰ ml	$\frac{3}{4}$ C	شکلات خرد شده
۳۰۰ ml	$1\frac{1}{4}$ C	شکر قهوه‌ای
۱۷۶/۶۶°C	۳۵۰ °F	دمای پخت
۳۳/۰۲cm×۲۲/۸۶cm	۱۳ inches × ۹ inches	اندازه طرف

۱۴ پرستو در مقابل می‌خوانند مواد زیر را برای تهیه یک کیک برای دوستش بفرستند. با انتخاب واحد مناسب جدول زیر را کامل کنید تا مواد لازم برای تهیه کیک مورد نظرش را بر حسب واحدهای اندازه‌گیری در سیستم انگلیسی بفرستد.

۱۵۰ g	پودر قند	۱۵۰ g
۵۰ g	شکر	۵۰ g
۲۵۰ g	آرد	۲۵۰ g
۸۰ ml	بجایگاه روغن	۸۰ ml
۲ ml	نمک	۲ ml
۱۵۰ g	آب	۱۵۰ g
۱	تخم مرغ	۱
۱۶۰ ml	شیر	۱۶۰ ml
۲۵۰ ml	شیره	۲۵۰ ml
۲	دانه پخت	۲
۳۳/۰۲ cm	طول کیک به عرض	۳۳/۰۲ cm
۲۲/۸۶ cm	اندازه طرف	۲۲/۸۶ cm

### مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

تذکر: اندازه‌های تبدیل شده به واحد انگلیسی تقریبی است.

واحدهای انگلیسی	واحدهای سیستم SI	مواد لازم
۱/۶۵ lb	۷۵۰ g	توت فرنگی خرد شده
۱/۷۵ oz	۵۰ g	شکر
۰/۵۵ lb	۲۵۰ g	آرد
$\frac{1}{4}$ c	۶۰ ml	بیکیکنگ پودر
$\frac{1}{2}$ tsp	۲ ml	نمک
۴/۲ oz	۱۲۰ g	کره
۱	۱	تخم مرغ
$\frac{2}{3}$ C	۱۶۰ ml	شیر
۱ C	۲۵۰ ml	خامه
۶۶۲°F	۳۵۰ °C	دمای پخت
۱۰inch	ظرف گرد به قطر: ۲۵cm	اندازه ظرف

معنی برخی از علائم که در واحد انگلیسی استفاده می‌شود به صورت زیر است:

علامت	معنی به زبان انگلیسی	معنی به زبان فارسی
C	Cup	فنجان
tsp	teaspoon	قاشق چایخوری
tbsp	Table spoon	قاشق غذاخوری
lb	pound	پوند
oz	ounce	اونس

ضمناً برابری زیر بین این واحدها برقرار است.

۱۶ قاشق سوپ خوری	۱ فنجان
۲ فنجان	۱ pint
۴ فنجان	۱ quart
۱۶ فنجان	۱ گالن
۲ pint	۱ quart
۴ quart	۱ گالن
۲۴۰ میلی لیتر	۱ فنجان

۴۷۳ میلی لیتر	۱ pint
۰/۹۵ لیتر	۱ quart
$\frac{1}{8}$ قاشق چایخوری	۱ pint
۵ میلی لیتر	۱ قاشق چایخوری
۳ قاشق چایخوری	۱ قاشق غذا خوری
۱ اونس	۱ قاشق غذا خوری
۱۲۸ اونس	۱ گالن

۳۳ در سیستم انگلیسی برای اندازه گیری دما از واحد فارنهایت استفاده می شود. رابطه بین درجه فارنهایت و درجه سانتی گراد را با فرمول زیر می توان نشان داد:

$32 + (\text{میزان دما بر حسب سانتی گراد} \times 1.8) = \text{میزان دما بر حسب فارنهایت} (F)$

لازمه با مراجعه به یک سایت وضعیت دمای چند شهر را پیدا کرد. با توجه به جدول، دمای فرانکفورت و ادیس آبابا را بر حسب سانتی گراد محاسبه کنید.



### مهارت ها و فرایندها :

■ حل مسئله، تقویت مهارت استفاده از فرمول

نام شهر	فارنهایت	سانتی گراد	نام شهر	فارنهایت	سانتی گراد
Accra	۷۵	۲۳/۸۸	Edmonton	۳۶	۲/۲۲
Addis Ababa	۶۳	۱۷/۲۲	Frankfort	۴۶	۷/۷۷
Adelaide	۶۸	۲۰	Guatemala	۶۸	۲۰

اندازه‌گیری به معنای نسبت‌دادن یک عدد به یک کمیت در وضعیت‌های مختلف است. این عمل همیشه هم سر راست و آسان نیست و در برخی موارد به صورت تعریف شده و قراردادی در می‌آید. مثلاً وضعیت رفاهی کشورها با هم فرق می‌کند و برخی کشورها در رفاه بیشتری هستند، آیا می‌توانید وضعیت رفاهی کشورها را به صورت عددی بیان کنید؟ این سؤال است که اقتصاددان‌ها با آن روبه‌رو هستند. برای داشتن نظریه‌های مناسب در هر شاخه علمی، لازم است کمیت‌هایی که در آن شاخه با آن روبه‌رو هستیم به نوعی قابل اندازه‌گیری باشند تا بتوان روابطی دقیق بین آنها به دست آورد.

ساده‌ترین حالت برای اندازه‌گیری یک کمیت، موقعی است که کمیت ویژگی جمع‌پذیری دارد. یعنی، می‌توان با روشی مانند در کنار هم گذاردن دو مقدار از آن کمیت عمل جمع بین دو مقدار از آن کمیت را تعریف کرد. مثلاً طول پاره‌خط‌ها جمع‌پذیر است زیرا جمع طول دو پاره‌خط با در کنارهم قراردادن آنها تعریف می‌شود. این وضعیت برای مساحت و حجم اشکال هندسی هم برقرار است. هر نوع عملیاتی روی یک کمیت را می‌توان جمع کردن حساب کرد به شرط آنکه خاصیت‌های اساسی جمع کردن (جابه‌جایی، شرکت‌پذیری، قاعده حذف از طرفین) برای آن برقرار باشند.

معمولاً در هر شاخه علمی چند کمیت اصلی وجود دارند که باید روش عملیاتی اندازه‌گیری آنها مشخص باشد و بقیه کمیت‌ها طبق فرمول‌هایی بر حسب کمیت‌های اصلی تعریف می‌شوند.

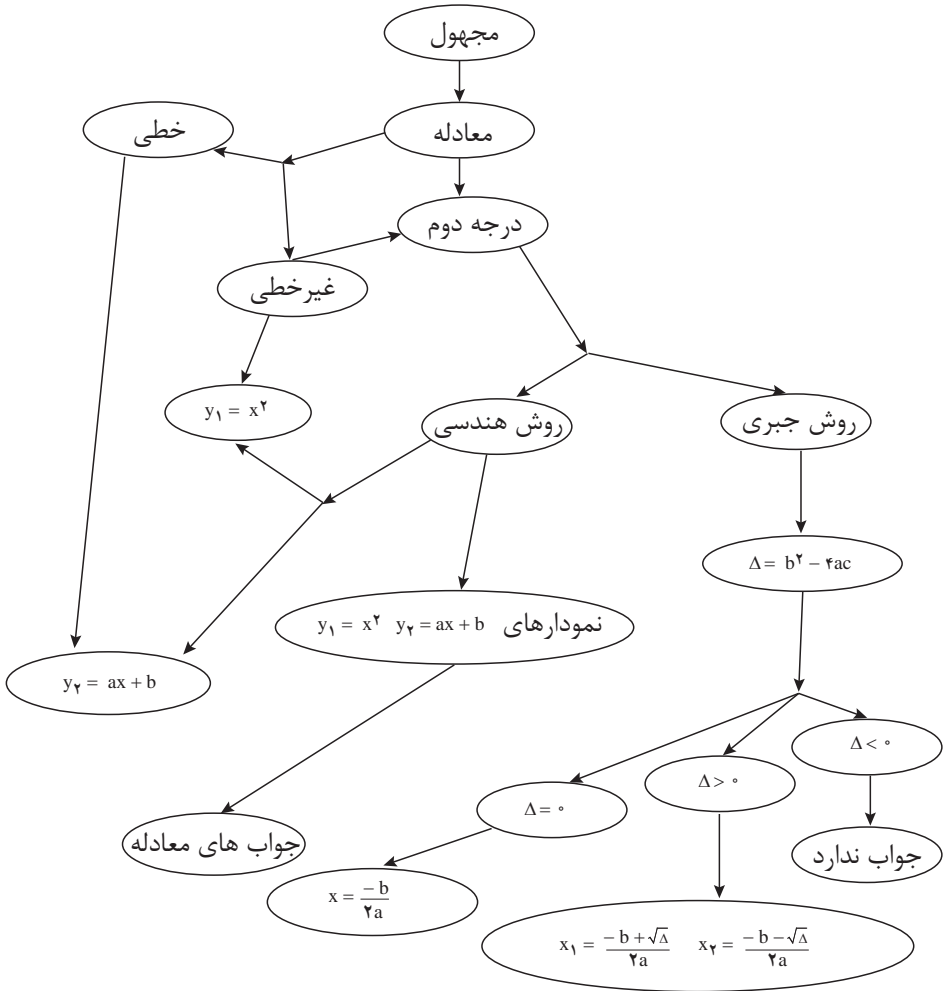
یک نکته اساسی در اندازه‌گیری، خطای اندازه‌گیری است. معمولاً روش‌های عملیاتی که برای محاسبه اندازه یک کمیت تعریف می‌شوند در عمل وابسته به میزان دقت ما و دقت وسایلی است که به کار می‌بریم و هیچ‌کدام از این موارد دقت کامل ندارند. مثلاً در یک محاسبه ساده طول یک پاره‌خط با خط‌کش، توانایی بصری ما در انطباق دقیق خط‌کش بر پاره‌خط و خواندن اعدادی که دیده می‌شوند مطرح است و خطایی در حدود میلی‌متر یا دهم میلی‌متر را ایجاد می‌کند. در محاسباتی که حساسیت بالایی دارند باید به میزان دقت اندازه‌گیری توجه شود تا نتیجه نهایی کار خراب نشود. مثلاً در فرستادن یک موشک در فضا اگر خطای اندازه‌گیری از یک حدی بیشتر شود، ممکن است باعث سرنگونی موشک شود.



## فصل چہارم

### معادلہ درجہ دوم

## طرح کلی مفاهیم فصل چهارم (نقشه مفهومی)





مثال	توضیح فرایند	فرایند
ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	حل مسئله
- روش حل هندسی و یافتن نقطه تلاقی تقریبی - روش حل جبری (A) و یافتن جواب‌های معادله در صورت وجود	شناخت و به کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و یا انتخاب مناسب آنها	ارتباط کلامی
- بحث بین مادر زهرا و مشاور مالی او در رسیدن به معادله درجه دوم	سازماندهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ارتباط کلامی
- برای یافتن نقطه برخورد دو منحنی مسائل فعالیت ۳ و کار در کلاس بعد از آن را به زبان ریاضی بنویسد و مفهوم نقطه تلاقی را بیان کند.	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	استدلال و اثبات
- بیان دلیل برای تشخیص معادله درجه دوم - بیان دلیل برای تشخیص و شناسایی بین رابطه‌های خطی و غیرخطی - دلیل درستی یا نادرستی رابطه‌ها را در مسائل آخر فصل بیان کند. - بیان دلیل برای تشخیص جواب معادله از طریق هندسی - بیان دلیل برای تشخیص تعداد جواب‌های معادله درجه دوم	به کارگیری استدلال	پهوندها و اتصالات
- مسئله کارگاه میز تحریر و مدل‌سازی ریاضی آن، و حل مسئله - مسئله کارگاه صنایع دستی و مدل‌سازی ریاضی آن، و حل مسئله	تشخیص و به کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	بازنمایی‌ها
- روش‌های حل معادله درجه دوم به دو صورت هندسی و جبری - نقطه تلاقی دو منحنی و ارتباط آن با جواب معادله برخورد دو منحنی	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	سایر مهارت‌های تفکر
حل معادله درجه دوم به روش هندسی (مثال ۳)	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	
- توانایی مقایسه جواب معادله $x^2 = ax + b$ و نقطه تلاقی نمودارهای $y = x^2$ و $y = ax + b$ - یافتن اختلاف بین دو رابطه خطی و غیرخطی	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویی و ...	

## اهداف کلی فصل

- آشنایی با معادلهٔ درجهٔ دوم
- استفاده از معادلهٔ درجهٔ دوم برای مدل سازی پدیده‌ها
- آشنایی با رابطهٔ غیر خطی و تفاوت آن با رابطهٔ خطی
- درک مفهوم جواب یک معادله
- آشنایی با روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم و یافتن ریشه‌ها به صورت تقریبی در صورت وجود
- آشنایی با روش جبری حل معادلهٔ درجهٔ دوم

### عملکرد مورد انتظار از هنرجویان:

هنرجویان باید قادر باشند:

- از معادله‌های درجهٔ دوم در حل مسائل زندگی روزمره استفاده کنند.
- توانایی رسم نمودار معادله‌های  $y = ax + b$  و  $y = x^2$  را داشته باشند.
- معادله‌های درجهٔ دوم را با روش‌های جبری و هندسی حل کنند.

### پیش نیازها:

- آشنایی با معادلهٔ درجهٔ اول و عملیات جبری ساده روی آنها و حل آنها
- آشنایی با چند جمله‌ای‌ها و یافتن مقدار آنها به ازای مقدار عددی برای متغیر
- تعیین مختصات نقطهٔ مشخص شده در صفحهٔ مختصات و برعکس
- آشنایی با رسم رابطه‌های خطی

### نگاه کلی به فصل :

معادله‌ها و حل آنها بخش مهمی از ریاضی را تشکیل می‌دهند. در مدل سازی پدیده‌های واقعی، همواره به معادله‌هایی برخورد می‌کنیم که معادله‌های درجهٔ دوم یکی از انواع سادهٔ آن است.

این فصل با طرح یک مسئله آغاز می‌شود تا معادله‌های درجهٔ دوم در یک زمینهٔ واقعی ساخته شوند. هدف بعدی، آشنایی با شیوه‌های حل معادله‌های درجه دوم است. برای بیان روش هندسی در حل معادله‌های درجهٔ دوم لازم است رابطه‌های غیرخطی را بشناسیم. به همین دلیل بخش بعدی دربارهٔ رابطه‌های غیرخطی است. شناخت رابطه‌های خطی و معادلهٔ درجهٔ اول در سال‌های قبل انجام شده است و

در این فصل با چند رابطه غیرخطی آشنا می‌شویم که نوع خاصی از آن، رابطه‌های درجه دوم است.

روش هندسی حل معادله‌های درجه دوم نیازمند درک مفهوم نقطه تلاقی نمودار رابطه‌ها است. به همین دلیل، ابتدا نقاط تلاقی دو خط در یک مسئله واقعی بررسی شده و نقطه تلاقی و مفهوم آن معرفی شده است. سپس روش‌های حل معادله‌های درجه دوم و یافتن جواب‌های آن در صورت وجود مطرح می‌شود. در این فصل دو روش هندسی و جبری حل معادله‌های درجه دوم ارائه می‌شوند.

## بخش اول: معادله‌های درجه دوم

### اهداف بخش

- آشنایی با معادله‌های درجه دوم و تشخیص آن از بین چند معادله
- درک مفهوم جواب معادله‌های درجه دوم
- استفاده از معادله‌های درجه دوم در مدل‌سازی پدیده‌ها

### واژه‌های کلیدی:

معادله درجه دوم، جواب معادله

### نگاه کلی به بخش :

در این بخش با طرح یک وضعیت مسئله‌گونه در زندگی روزمره و سعی در حل آن به یک معادله درجه دوم می‌رسیم. مهم‌ترین فعالیت آموزشی این بخش مدل‌سازی ریاضی برای رسیدن به معادله درجه دوم می‌باشد تا این معادله‌ها به طور طبیعی مطرح شوند. همچنین مفهوم جواب این معادله‌ها طرح می‌شوند زیرا جواب اصلی موقعیت‌های مسئله‌گونه در بین جواب‌های این معادله‌ها است.

### فعالیت آموزشی

۱) با استفاده از رابطه  $۳۰۰۰ - ۶۰۰۰۰x + ۸۰۰۰۰x^۲$  مقدار  $P$  را بر حسب  $x$  به دست آورید.

۲) درآمد حاصل از فروش  $x$  کالا با قیمت  $P$  را یا  $R$  نشان دهید و معادله درآمد را تشکیل دهید.

۳) معادله درآمد را بر حسب  $x$  بنویسید.

۴) چند جمله‌ای درآمد بر حسب  $x$  از درجه چند است؟

۵) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله‌ای برای  $x$  به دست می‌آید؟



### اهداف موضوعی:

- آشنایی با معادله‌های درجه دوم

### مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی وضعیت‌های واقعی با معادله، استدلال، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت تفکر، پیوندها و اتصال‌ها

$$p = \frac{60000 - x}{300} \quad 1$$

$$R = p \cdot x \quad 2$$

$$R = \left( \frac{60000 - x}{300} \right) x = \frac{60000x - x^2}{300} \quad 3$$

4 از درجه 2 است.

$$\frac{60000x - x^2}{300} = 30000000 \Rightarrow x^2 - 60000x + 9000000000 = 0 \quad 5$$

در ادامه تعریف معادله‌های درجه دوم ارائه شده است و مثال‌هایی از آن در زمینه ریاضی و زمینه واقعی آمده است.

تمرین کلاسی



در مثال 2، از معادله  $2(x+y) = 100$  مقدار  $x$  را بر حسب  $y$  حساب کنید و معادله‌ای بر حسب  $y$  بنویسید. معادله به دست آمده بر حسب  $x$  و معادله بر حسب  $y$  چه شباهتی با هم دارند؟

## اهداف:

■ تقویت مهارت تشکیل معادله درجه دوم، پرورش مهارت مقایسه کردن و مدل‌سازی قبل از انجام محاسبه، مناسب است کنجکاوی هنرجو درباره مثال قبل برانگیخته شود که اگر معادله را بر حسب متغیر دیگر می‌نوشتیم چه اتفاقی می‌افتاد. سپس محاسبه را انجام دهیم.

$$2(x+y) = 100 \Rightarrow x+y = 50 \Rightarrow x = 50 - y$$

$$xy = 600 \Rightarrow (50 - y)y = 600 \Rightarrow y^2 - 50y + 600 = 0$$

متوجه می‌شویم که ضرایب عددی معادله درجه دوم پدید آمده در مثال 2 با کار در کلاس یکسان است و فقط نام متغیر عوض می‌شود. آیا می‌توانید دلیل این یکسانی دو معادله را توضیح دهید؟

## بخش دوم: رابطه‌های غیر خطی

### اهداف بخش

- آشنایی با رابطه غیر خطی
- شناخت تفاوت بین رابطه‌های خطی و غیر خطی
- درک مفهوم نقطه برخورد دو خط
- آشنایی با روش رسم نمودار رابطه  $y = X^2$  از طریق جایگذاری عدد به جای متغیر آن (نقطه یابی)

### واژه‌های کلیدی:

رابطه غیر خطی، نقطه برخورد دو خط

### نگاه کلی به بخش :

ابتدا ویژگی اساسی رابطه‌های خطی مطرح می‌شود. سپس رابطه‌هایی آشنا در زمینه زندگی روزمره مطرح می‌شوند که این ویژگی را ندارند و از این طریق رابطه‌های غیر خطی مطرح می‌شوند. سپس با انجام فعالیت‌هایی که طرح شده‌اند هنرجویان با رابطه‌های غیر خطی آشنایی بیشتری می‌یابند و نمودار این رابطه‌ها را نیز به دست می‌آورند. به طور خاص نمودار رابطه  $y = X^2$  به طور دقیق‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین در یک فعالیت مفهوم نقاط برخورد نمودار رابطه‌ها در این بخش آموزش داده می‌شود.

### ورود به مطلب:

در فصل‌های قبل با رابطه‌های خطی برای مدل‌سازی کمیت‌های متناسب بسیار کار شده‌است. با داشتن چنین زمینه‌ای می‌توانید این سؤال را مطرح کنید که آیا همه کمیت‌های مرتبط متناسب هستند؟ می‌توانید از رابطه‌هایی که برای هنرجویان آشنا هستند استفاده کنید. البته لازم است در ضمن طرح این سؤال یا پیشاپیش ویژگی اساسی رابطه‌های خطی را به دست آورید و این ویژگی را در مورد رابطه‌های آشنا بررسی کنید.

## فعالیت آموزشی

فعالیت ۲

رابطه طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطه طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با  $x$ ، محیط آن را با  $P$  و مساحت آن را با  $K$  نشان دهید.

(۱) رابطه  $P$  و  $x$  و همچنین رابطه  $K$  و  $x$  را با دو معادله بنویسید.

(۲) جدول زیر را کامل کنید.

طول ضلع مربع	۱	۲	۳	۴	۵
محیط مربع					
مساحت مربع					

(۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه مختصات محورهای مختصات زیر نشان دهید.

شکل (۱)

شکل (۲)

- (۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲، ۲ به ۳ و ۳ به ۴ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.
- (۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟
- (۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟
- (۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همه این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟
- (۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همه این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

### اهداف موضوعی:

■ آشنایی با رابطه‌های غیرخطی، مقایسه رابطه خطی و غیرخطی

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ مدل‌سازی جبری رابطه‌ها، بازنمایی‌های چندگانه (مقایسه کردن، تفکر بصری)

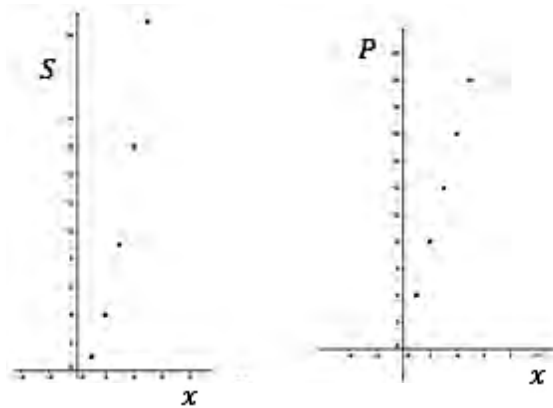
در این فعالیت رابطه بین محیط و مساحت مربع با طول ضلع مربع به صورت معادله، جدول و نمودار خواسته شده تا تفاوت بین رابطه خطی و غیر خطی در این سه قالب دیده شود.

۱  $P = 4x$  و مساحت  $S = x^2$  محیط

۲

$x$ (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
$P$ (محیط مربع)	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
$S$ (مساحت مربع)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

۳



۴

$x$ (طول ضلع مربع)	از ۱ به ۲	از ۲ به ۳	از ۳ به ۴	از ۴ به ۵
میزان افزایش محیط	۴	۴	۴	۴
میزان افزایش مساحت	۳	۵	۷	۹

- ۵ بله، به ازای هر ۱ واحد افزایش طول ضلع ۴ واحد محیط اضافه می‌شود.
- ۶ خیر، به ازای ۱ واحد افزایش طول ضلع افزایش مساحت ثابت نیست و بستگی به مقدار طول ضلع دارد.
- ۷ بله، زیرا میزان افزایش محیط یکسان است.
- ۸ خیر، زیرا میزان افزایش مساحت یکسان نیست.

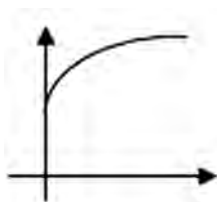


تمرین ۳۳۳

در شکل زیر، محور افقی نشان دهنده زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان دهنده وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟

### اهداف:

- آشنایی با رابطه‌های غیر خطی مختلف
- پرورش مهارت‌های حل مسئله و استدلال کردن، ارائه بازنمایی‌های مختلف برای یک مفهوم، برقراری پیوندها و اتصال با زندگی روزمره تقویت، مهارت مقایسه کردن رابطه وزن انسان و زمان خطی نیست، پس دو نمودار سمت چپ جواب نیست. در هنگام تولد وزن انسان صفر نیست، پس نمودار سمت راست هم جواب نیست. نمودار روبه رو جواب مسئله است زیرا میزان تغییرات وزن انسان نسبت به تغییرات زمان ثابت نیست و در ابتدای تولد نیز انسان مقداری وزن دارد.



تمرین ۳۳۴

یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با  $x$  و مجذور آن  $(x^2)$  را با  $y$  نشان دهید.

(۱) رابطه بین  $x$  و  $y$  را با یک معادله نشان دهید.

(۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$x$	-۲	-۱.۸	-۱.۶	-۱.۴	-۱.۲	-۱	۰	۱	۱.۲	۱.۴	۱.۶	۱.۸	۲
$y$									۱.۴۴				

(۳) نقاط جدول صفحه قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطه  $x^2 = y$  را رسم کنید.

### اهداف:

- آشنایی با رابطه غیر خطی خاص
- پرورش مهارت‌های حل مسئله و استدلال کردن، ارائه بازنمایی‌های مختلف برای یک مفهوم، برقراری پیوند و اتصال با زندگی روزمره، تقویت مهارت مقایسه

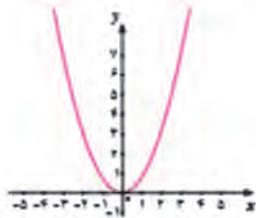
تعمیق درک روابط غیرخطی، تقویت مهارت رسم نمودار  $y = x^2$ ، تقویت مهارت کار با ماشین حساب

$$y = x^2$$

۱

۲

$x$	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
$y$	۴	۳/۲۴	۲/۵۶	۱/۹۶	۱/۴۴	۱	۰	۱	۱/۴۴	۱/۹۶	۲/۵۶	۳/۲۴	۴



۳ این نقاط را در محورهای مشخص شده نمایش دهید و آنها را به هم وصل کنید و شکل دقیق تر را با استفاده از جئوجبرا رسم کنید.

## فعالیت آموزشی

هزینه ثابت ماهیانه یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۷۰,۰۰۰ تومان است. هزینه تهیه مواد اولیه برای هر متر سیم ۶۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۲۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیمهای فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینه ثابت (تومان)							
درآمد حاصل از فروش (تومان)							

۲) اگر  $x$  طول سیمهای فروخته شده،  $C$  هزینه تولید و  $R$  درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشد، رابطه بین طول سیمهای فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطه بین طول سیمهای فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیمهای فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینه تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید).

۴) مختصات نقطه برخورد دو خط را بنویسید.

۵) نقطه تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

## اهداف موضوعی:

■ حل معادله، درک ویژگی نقطه برخورد دو منحنی در بافت مسئله

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، فرضیه‌سازی

۱

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینه تولید (تومان)	۱۷۰۰۰۰	۱۷۶۰۰۰	۱۸۲۰۰۰	۱۸۸۰۰۰	۱۹۴۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۰۶۰۰۰
درآمد حاصل از فروش (تومان)	۰	۴۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۶۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۴۰۰۰۰

۲

هزینه تولید  $x$  کالا برای فروش  $C = y_1 = 170000 + 60x$

درآمد حاصل از فروش  $x$  کالا  $R = y_2 = 400x$

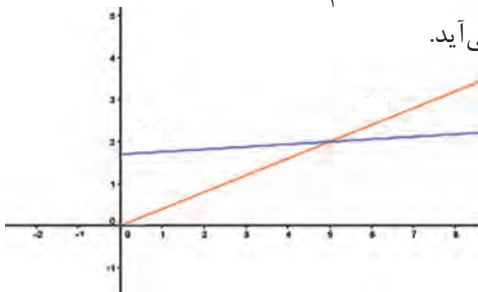
۳

برای آنکه محورهای مختصات را با واحدهای جدید در نظر بگیریم، از آنجا که  $y$  بر حسب تومان است و می‌خواهیم  $Y$  جدید بر حسب ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد، داریم:  $100000Y = y$  و چون  $x$  بر حسب متر است و می‌خواهیم  $X$  جدید بر حسب ۱۰۰ متر باشد داریم  $100X = x$ . با جایگذاری در رابطه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود:

$$100000Y_1 = 170000 + 60 \times 100X \Rightarrow Y_1 = 1/7 + 0/06X$$

$$100000Y_2 = 400 \times 100X \Rightarrow Y_2 = 0/4X$$

با رسم نمودار این دو خط، شکل زیر به دست می‌آید.



۴

با استفاده از شکل می‌توان دید، مختصات نقطه برخورد  $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$  است. در واحدهای اصلی، این مختصات به معنای ۵۰۰ کالا و قیمت ۲۰۰۰۰۰ تومان است.

۵

یعنی با تولید تعداد ۵۰۰ کالا هزینه تولید و درآمد حاصل از فروش یکسان می‌شود ولی

بعد از آن چون نمودار درآمد بالای نمودار هزینه قرار می‌گیرد کارگاه شروع به سوددهی می‌کند یعنی حداقل ۵۰۰ کالا باید تولید شود تا ضرر نکند.

۶ چنین نقطه‌ای روی نمودار هر دو خط است، یعنی نقطه برخورد این دو خط است.

با این فعالیت مفهوم نقطه برخورد و اهمیت آن ذکر می‌شود.

**نکته:** دبیران محترم بیان کنند که نتیجه این فعالیت دو طرفه است یعنی اگر مختصات نقطه‌ای در معادله هر دو خط صدق کند آن نقطه همان نقطه برخورد یا نقطه تلاقی نمودارهای دو خط است و بر عکس مختصات نقطه برخورد دو خط، در معادله دو خط صدق می‌کند.

با قرار گرفتن هنجو در یک وضعیت مسئله‌گونه دیگر از زندگی روزمره، آنها را در درک مفهوم نقطه برخورد ارزیابی می‌کنیم:

تورم ۲۰۰۰

یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مطالبات دستگاههای، سیصدو بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینه مواد اولیه برای هر میز ۲۰,۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰,۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	$x$	$10x$	$30x$	$20x$
هزینه تولید از حساب کارهای				
درآمد حاصل از فروش از حساب تورم				

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده  $x$ ، هزینه تولید  $10x$  و درآمد حاصل از فروش  $30x$  در نظر گرفته شود، رابطه بین تعداد میزها و هزینه تولید و همچنین رابطه بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینه تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه باشد، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید.



۴) مختصات نقطه برخورد دو خط بالا را بیابید.

۵) نقطه تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

## اهداف:

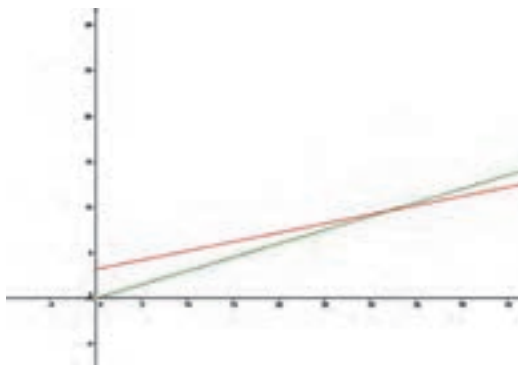
- کسب مهارت حل معادله، پرورش مهارت‌های
- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت‌های تفکر
- ۱ قیمت‌ها و هزینه‌ها را بر حسب هزار تومان می‌نویسیم.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینه تولید (بر حسب هزار تومان)	۳۲۰	۵۲۰	۷۲۰	۹۲۰	۱۱۲۰
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)	۰	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰

$$R = 30000x \quad , \quad C = 320000 + 20000x$$

۲ با تغییر واحد قیمت بر حسب صد هزار تومان رابطه‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند.

$$R = 3x \quad , \quad C = 320 + 2x$$



البته در نمودار واقعی نقطه‌ها جدا از هم هستند.

۴ از روی شکل نقطه برخورد با تبدیل واحدها به ازای  $\begin{bmatrix} 32 \\ 960000 \end{bmatrix}$  می‌دهد که

به معنی ۳۲ میز و ۹۶۰ هزار تومان است که با حل معادله زیر نیز همین جواب به دست می‌آید.

$$320 + 20x = 30x \Rightarrow 10x = 320$$

$$x = 32 \Rightarrow R = 30 \times 32 = 960$$

۵ یعنی با تولید ۳۲ میز هزینه کارگاه و درآمد حاصل از فروش این تعداد میز یکسان است و بعد از آن سوددهی شروع می‌شود.

## بخش سوم: روش های حل معادله درجه دوم

### اهداف بخش

- آشنایی با روش هندسی حل معادله درجه دوم
- آشنایی با روش جبری حل معادله درجه دوم
- کسب مهارت در تعیین جواب های تقریبی معادله به روش هندسی
- کسب مهارت در تعیین تعداد و جواب های معادله به روش جبری
- تشخیص وجود یا عدم وجود جواب ها به روش هندسی
- توانایی به کارگیری فرمول های کلی برای تشخیص وجود و یافتن جواب های معادله درجه دوم

### واژه های کلیدی:

روش هندسی، روش جبری، عبارت  $\Delta$ ، جواب معادله درجه دوم

### نگاه کلی به بخش:

در قسمت های قبل با معادله های درجه دوم و نمودار رابطه های خطی و غیرخطی خاص آشنا شدیم. هدف اصلی این فصل حل این معادله ها و یافتن جواب های آنها است. به همین دلیل با هدایت هنرجویان در انجام فعالیت های ۴ و ۵ و ۶، روش های مختلف حل معادله درجه ۲ و یافتن جواب های آنها (در صورت وجود) آموزش داده می شوند. در روش هندسی حل معادله های درجه دوم، مفهوم تلاقی نمودار رابطه ها نقش اصلی را بازی می کند. البته، روش هندسی برای حل معادله های پیچیده تر نیز قابل استفاده است ولی در این بخش فقط معادله های درجه دوم مطرح می شود و هنرجویان فقط با حل این نوع معادله ها آشنا می شوند. لازم به ذکر است که در روش هندسی معمولاً نمی توانیم جواب دقیق را بیابیم و فقط تقریبی از جواب به دست می آید.

### ورود به مطلب:

مناسب است که یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی مشخص را بنویسید و از هنرجویان بخواهید راه‌های پیشنهادی خود را برای حل آن بگویند. ممکن است کسی نتواند راه حل خاصی ارائه کند، می‌توانید هنرجویان را راهنمایی کنید و با تغییر شکل معادله به صورت تساوی  $x^2$  با معادله یک خط و تجربه‌ای که در برخورد خط‌ها به دست آمده است، هنرجویان را به سمت محل برخورد نمودار رابطه  $y=x^2$  و نمودار یک خط برسانید. سپس می‌توانید از فعالیت طراحی شده در کتاب استفاده کنید.

### فعالیت آموزشی

(1) جدول زیر را کامل کنید.

x	-2	-1	0	1	2	3
x	...	...	...	...	...	...
$x^2$	...	...	...	...	...	...
$2x+3$	...	...	...	...	...	...

(2) با استفاده از جدول بالا، نمودار معادله‌های  $x^2=0$  و  $2x+3=0$  را در دستگاه مختصات روبرو رسم کنید.

(3) مختصات محل برخورد این دو نمودار را بنویسید.

(4) آیا مختصات نقاط برخورد خط و منحنی در هر دو معادله صدق می‌کنند؟

(5) آیا طول‌های نقاط برخورد منحنی (2) و خط (3) در معادله  $x^2=2x+3$  صدق می‌کنند؟

### اهداف موضوعی:

■ آشنایی با روش هندسی حل معادله‌های درجه دوم

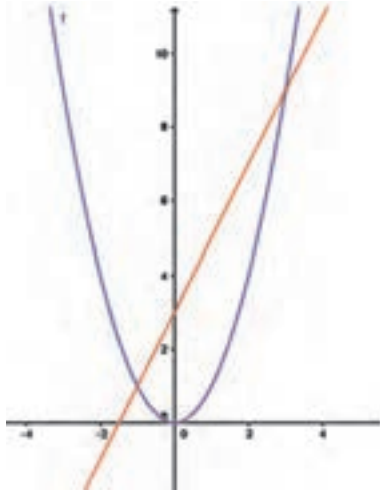
### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، ارزیابی کردن

۱

X	-2	-1	0	1	2	3
$X^2$	4	1	0	1	4	9
$2X+3$	-1	1	3	5	7	9

۲



۳ از روی شکل دو نقطه  $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$  نقاط برخورد این دو نمودار هستند.

۴ بله، زیرا  $(3)^2 = 2(3) + 3$  و  $(-1)^2 = 2(-1) + 3$

۵ بله 
$$\begin{cases} (3)^2 = 2(3) + 3 \Rightarrow 9 = 9 \\ (-1)^2 = 2(-1) + 3 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

در انتهای این فعالیت باید نتیجه‌گیری شود که جواب‌های یک معادله درجه دوم به صورت  $x^2 = ax + b$  را می‌توان با یافتن طول نقطه‌های برخورد نمودار خط  $y = ax + b$  و منحنی  $y = x^2$  پیدا کرد.

این روش همان روش هندسی حل معادله درجه دوم می‌باشد به این صورت که برای حل معادله  $x^2 - 2x - 3 = 0$  ابتدا جمله  $x^2$  را در یک طرف و بقیه را به طرف دیگر می‌بریم، سپس نمودار رابطه‌های  $y_1 = 2x + 3$  و  $y_2 = x^2$  را رسم می‌کنیم. برای یافتن جواب‌های معادله درجه دوم  $x^2 - 2x - 3 = 0$  می‌توان طول نقطه‌های برخورد دو نمودار رابطه‌های بالا را در صورت امکان به دست آورد. در سه مثال بعد انواع حالات ممکن معادله‌های درجه دوم از نظر تعداد جواب‌ها بررسی شده‌اند.

تعداد جواب‌های معادله درجه دوم (با توجه به معادله)، یکی یا دو تا یا هیچ می‌باشد.





معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم افزار جنوجبرا کمک بگیرید).

الف)  $x^2 - 2x + 1 = 0$       ب)  $x^2 - 1 = 0$       ج)  $2x^2 + x + 1 = 0$

### اهداف:

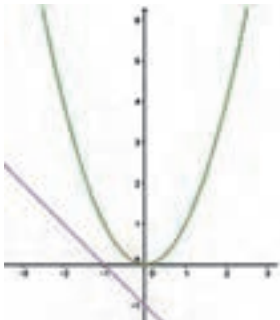
■ کسب مهارت استفاده از روش هندسی برای حل معادله‌های درجه دوم و تشخیص

تعداد جواب‌ها

شکل‌های مربوط به این سه معادله به صورت زیر است.

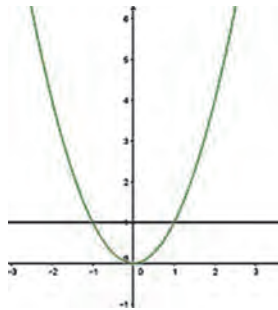
کسب مهارت به کارگیری نرم‌افزار، پرورش تفکر بصری

(پ)



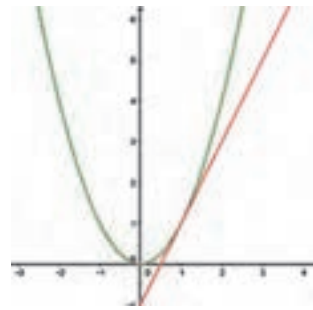
جواب ندارد

(ب)



$X = -1$  و  $X = 1$  جواب‌های معادله هستند

(الف)



$X = 1$  جواب معادله است

### مسئله‌ها

برای تثبیت روش حل هندسی معادله درجه دوم هنرجویان باید در دو سؤال ۱ و ۲ یا با کمک جنوجبرا یا با جدول مقادیر و رسم نمودار آنها طول نقطه‌های برخورد دو منحنی را در صورت وجود به طور تقریبی تعیین نموده و آن را به عنوان جواب تقریبی معادله درجه دوم مطرح نمایند.

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

الف)  $2x^2 - 3x = 5$

ب)  $2x^2 + 8x = 0$

ج)  $x^2 + x = 1$

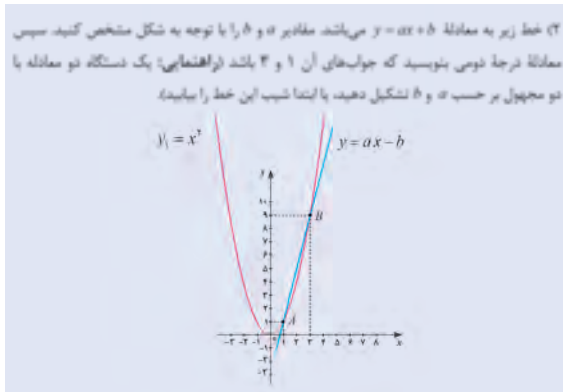
د)  $x^2 + 2x = -4$

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ تفکر بصری، تخمین زدن،

هرکدام از حالت‌های بالا را باید به صورت  $x^2 = ax + b$  در آورده و با رسم نمودارها، معادله را حل کنیم.

برای مثال حالت (الف) را به صورت  $x^2 = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$  و حالت (ب) را به صورت  $x^2 = -2x$  می‌نویسیم و مشابه کار در کلاس (د) حل می‌کنیم.



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

در این مسئله می‌خواهیم ضرایب  $a$  و  $b$  را در معادله درجه دو  $x^2 = ax + b$  طوری بیابیم که جواب‌های آن، طول نقطه‌های داده شده روی نمودار است. در این حالت معادله خط  $y = ax + b$  را باید به صورتی به دست آوریم که نمودار  $y = x^2$  را در نقطه‌هایی به طول‌های ۱ و ۳ قطع کند. مقادیر  $a$  و  $b$  را یافته سپس معادله  $x^2 = ax + b$  را می‌سازیم. این معادله همان معادله درجه دو مورد نظر می‌باشد. برای یافتن  $a$  و  $b$  باید دو نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix}$  روی این خط باشند، بنابراین داریم  $1 = a + b$  و  $9 = 3a + b$ . با حل این دستگاه نتیجه می‌شود  $a = 4$  و  $b = -3$ .

## فعالیت آموزشی

معادله  $x^2 - 6x - 7 = 0$  را در نظر بگیرید.

- جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جمله ثابت را به طرف دیگر ببرید.
- عدد به دست آمده از مرحله (۳) را به دو طرف معادله مرحله (۱) اضافه کنید.
- طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به صورت مجذور یک عبارت بنویسید (یادآوری: اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  است).
- از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای  $x$  به دست آورید.

فعالیت ۵



### اهداف موضوعی:

■ حل یک معادله درجه دوم به صورت جبری با هدف آماده سازی برای تعمیم این روش در حالت کلی

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، اکتشاف هدایت شده (دنبال کردن دستورالعمل‌ها)

$$x^2 + 6x = 7 \quad 1$$

$$\frac{6}{2} = 3 \Rightarrow 3^2 = 9 \quad 2$$

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 16 \quad 3$$

$$(x + 3)^2 = 16 \quad 4$$

$$|x + 3| = 4 \Rightarrow x + 3 = 4 \text{ یا } x + 3 = -4 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = -7 \quad 5$$

این فعالیت زمینه ساز یافتن فرمول کلی برای حل معادله‌های درجه دوم به صورت جبری را فراهم می‌سازد.



معادله  $x^2 - 3x + 2 = 0$  را مانند فعالیت ۵ حل کنید.



### اهداف:

تقویت مهارت دنبال کردن دستورالعمل‌ها به منظور درک رویه‌ها

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x = -2 \rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = \frac{9}{4} - 2 \Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\rightarrow \left|x - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \text{ یا } x - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 2$$

تذکر: می‌توانید قبل از اینکه فعالیت زیر را انجام دهید از هنرجویان سؤال کنید آیا همیشه می‌توان از این راه به جواب رسید؟ آیا معادله همیشه جواب دارد؟ آیا روشی برای یافتن وجود و تعداد جواب‌ها بدون رسم و روش هندسی وجود دارد؟

معادله درجه دوم ناخواه  $ax^2 + bx + c = 0$  را در نظر بگیرید که در آن  $a \neq 0$ .

(۱) طرفین معادله بالا را بر عدد  $a$  تقسیم کنید و معادله درجه دومی بنویسید که ضریب  $x^2$  در آن برابر ۱ باشد.

(۲) جمله‌های دارای  $x$  را در یک طرف تساوی نگه دارید و جمله ثابت را به طرف دیگر ببرید.

(۳) در معادله بالا، نصف ضریب  $x$  را به دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

(۴) عدد به دست آمده از مرحله (۳) را به دو طرف معادله مرحله (۲) اضافه کنید.

(۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac}{4a^2}$$

(۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  در چه شرایطی جواب دارد؟

(۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن  $b^2 - 4ac$  جواب‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر جواب‌های دو معادله زیر است.

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

## اهداف موضوعی:

- یافتن فرمول کلی روش حل معادله درجه دوم، تشخیص وجود جواب و تعداد جواب‌ها

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال، اکتشاف هدایت شده
- $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
  - $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
  - $\frac{b}{a} = \frac{b}{2a} \Rightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$
  - $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
  - $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
  - چون سمت چپ این رابطه به توان دو است پس سمت راست باید عددی غیر منفی باشد.

یعنی باید  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \geq 0$  و چون مخرج عددی همواره مثبت است پس

$b^2 - 4ac \geq 0$  این معادله در صورتی جواب دارد که  $b^2 - 4ac \geq 0$  بند (۷) حال اگر  $b^2 - 4ac \geq 0$  می‌توان از طرفین رابطه به دست آمده در بند (۵) جذر گرفت؛ خواهیم داشت:

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\Rightarrow x + \frac{b}{2a} = + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{یا} \quad x + \frac{b}{2a} = - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و از آنجا خواهیم داشت:

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{یا } x = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

به کمک فعالیت ۶ روش جبری یا فرمول کلی برای یافتن جواب های هر معادله درجه دوم، در صورت وجود، بیان می‌شود. در این فعالیت از  $\Delta = b^2 - 4ac$  برای بررسی وجود جواب و تعداد جواب‌ها استفاده می‌شود.

جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف)  $5x^2 + 2x + 1 = 0$       ب)  $x^2 - 6 = 0$       ج)  $x^2 - 3x = 0$

## اهداف:

■ کسب مهارت استفاده از فرمول‌های محاسبه جواب معادله درجه دوم

حل قسمت الف)  $5x^2 + 2x + 1 = 0$

معادله جواب ندارد  $\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(5)(1) = -16 < 0$

قسمت ب)  $\Rightarrow x^2 - 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(1)(-6) = 24 > 0$

$$\rightarrow x_1 = \frac{-(0) - \sqrt{24}}{2} = -\sqrt{6} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-(0) + \sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$$

$$x^2 - 3x = 0$$

قسمت پ)

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(0) = 9 > 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{9}}{2} = 3 \text{ و } x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{9}}{2} = 0$$

## مسئله‌ها

۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف)  $3x^2 + 5x = 0$

ب)  $3x^2 + 13x + 4 = 0$

پ)  $\sqrt{2}x(x + \sqrt{5}) = \sqrt{8}$

ت)  $x^2 + x + 2 = 0$

ث)  $(2x - 1)^2 = 5$

ج)  $(x + 2)^2 = -2$

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ استفاده از روش جبری برای حل معادله

### توصیه آموزشی:

بهتر است هنرجویان قوی‌تر معادله‌ها را با استفاده از هر دو روش حل کنند. در این قسمت شش معادله درجه دوم داده شده که باید حل شوند همه را می‌توان به دو روش هندسی و جبری حل نمود هدف آموزشی این سؤال حل معادله‌های درجه دوم دلخواه می‌باشد.

الف) حل به روش جبری (جواب‌ها  $x = 0$  و  $x = \frac{-5}{3}$ )

ب) حل به روش جبری (جواب‌ها  $x_1 = \frac{-13 + \sqrt{133}}{6}$  و  $x_2 = \frac{-13 - \sqrt{133}}{6}$ )

پ) می‌توان طرفین را بر  $\sqrt{2}$  تقسیم نمود  $\sqrt{2}x(x + \sqrt{5}) = \sqrt{8}$

$$x(x + \sqrt{5}) = 2 \Rightarrow x^2 + \sqrt{5}x - 2 = 0 \text{ و } \Delta = (\sqrt{5})^2 - 4(1)(-2) = 5 + 8 = 13$$

$$x_2 = \frac{-\sqrt{5} - \sqrt{13}}{2} \text{ و } x_1 = \frac{-\sqrt{5} + \sqrt{13}}{2}$$

هدف آموزشی این سؤال دیدن معادله درجه دوم به شکلی دیگر و تشخیص همه ضرایب که بر  $\sqrt{2}$  بخش پذیرند و ساده نمودن ضرایب جهت محاسبات ساده‌تر و نهایتاً حل است.

ت) با یافتن  $\Delta = -7$  و توجه به اینکه  $\Delta$  منفی است معادله جواب ندارد.

ث) روش اول: سمت چپ را به توان ۲ می‌رسانیم

$$4x^2 + 1 - 4x = 5 \Rightarrow 4x^2 - 4x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{همه جملات را بر ۴ تقسیم می‌کنیم}} x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(1)(-1) = 5 \rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

روش دوم: از طرفین جذر می‌گیریم

$$|2x - 1| = \sqrt{5} \Rightarrow 2x - 1 = \sqrt{5} \text{ یا } 2x - 1 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ و } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ج) مثال چالش برانگیز: (این نوع مسائل ذهن هنرجو را پویا می‌کند) چون سمت چپ معادله غیرمنفی و سمت راست معادله منفی است معادله جواب ندارد.

۳) اگر یکی از جواب‌های معادله  $5x^2 + 13x + c = 0$  برابر  $(-3)$  باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله

می‌دانیم جواب معادله، تساوی رابطه را برقرار می‌کند پس:

$$5(-3)^2 + 13(-3) + c = 0 \Rightarrow 45 - 39 + c = 0 \Rightarrow c = -6$$

پس معادله درجه دوم به صورت  $5x^2 + 13x - 6 = 0$  است.

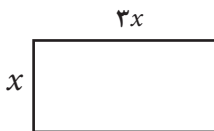
$$\Delta = (13)^2 - 4(5)(-6) = 289 \Rightarrow x_1 = \frac{-13 + \sqrt{289}}{10} \text{ و } x_2 = \frac{-13 - \sqrt{289}}{10}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-13 + 17}{10} = \frac{2}{5} \text{ و } x_2 = \frac{-13 - 17}{10} = -3$$

۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن  $300$  مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

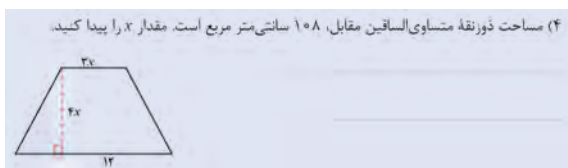


$$\text{مساحت} = x \times 3x = 3x^2 = 300 \Rightarrow 3x^2 - 300 = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 100 = 0 \Rightarrow \Delta = (0)^2 - 4(1)(-100) = 400 > 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{400}}{2} = 10 \text{ و } x_2 = \frac{-\sqrt{400}}{2} = -10$$

جواب منفی قابل قبول نیست و مسئله فقط یک جواب دارد. مستطیل با عرض ۱۰ و طول ۳۰ جواب است.



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

ابتدا با توجه به فرمول مساحت یک ذوزنقه داریم

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(3x+12)(4x)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(3x+12)(4x)}{2} = 108 \Rightarrow 12x^2 + 48x - 216 = 0 \Rightarrow$$

همه جمله‌ها را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم

$$x^2 + 4x - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 72 = 88$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4 + \sqrt{88}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{88}}{2}$$

$x_1 = -2 + \sqrt{22}$  و  $x_2 = -2 - \sqrt{22}$  فقط جواب  $x_1$  قابل قبول است که مثبت است زیرا طول نمی‌تواند منفی شود.

(۵) حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

عدد کوچک‌تر را با  $x$  نشان می‌دهیم. عدد متوالی بعد از آن  $x+1$  خواهد بود. بنابراین مسئله

$$x(x+1) = 132 \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \xrightarrow{\Delta = (1)^2 - 4(1)(-132) = 529}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{529}}{2} = 11 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{529}}{2} = -12$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ و دو عدد متوالی ۱۲ و ۱۱- هر دو جواب هستند.



۴۰ عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافه ۳۵، با مربع آن عدد مساوی باشد.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله

این عدد طبیعی را با  $n$  نشان می‌دهیم.

$$2n + 35 = n^2 \Rightarrow n^2 - 2n - 35 = 0, \quad \Delta = (-2)^2 - 4(1)(-35) = 4 + 140 = 144$$

$$\Rightarrow n = \frac{2+12}{2} = 7 \quad \text{و} \quad n = \frac{2-12}{2} = -5$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا عدد طبیعی مثبت است.

(۷) نشان دهید  $-1 + \sqrt{2}$  یک جواب معادله  $x^2 + 2x - 1 = 0$  است.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ استدلال کردن

می‌دانیم اگر عددی جواب یک معادله باشد باید با جایگذاری آن عدد به جای مجهول معادله، تساوی معادله برقرار شود. پس شرط جواب بودن را بررسی می‌کنیم.

$$\Rightarrow (-1 + \sqrt{2})^2 + 2(-1 + \sqrt{2}) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 1 + 2 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

چون این عدد تساوی را برقرار کرده است، یک جواب معادله است.

(۸) مساحت ناحیه خاکستری  $40$  سانتی‌متر مربع است. اندازه هر ضلع مربع‌ها را بدست آورید.



### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

مساحت مربع بزرگ‌تر  $(3y + 2)^2$  و مساحت مربع کوچک‌تر  $y^2$  است. مساحت قسمت رنگی بین این دو مربع  $(3y + 2)^2 - y^2$  است. با توجه به فرض مسئله:  $40 = (3y + 2)^2 - y^2$ . در این صورت:

$$9y^2 + 4 + 12y - y^2 - 40 = 0 \Rightarrow 8y^2 + 12y - 36 = 0$$

طرفین را بر ۴ تقسیم می‌کنیم

$$2y^2 + 3y - 9 = 0 \xrightarrow{\Delta=9+72} y = \frac{-3 \pm 9}{4} \quad y_1 = -3, \quad y_2 = \frac{3}{2}$$

اندازه ضلع مربع کوچک  $= y = \frac{3}{2}$

$$\text{اندازه ضلع مربع بزرگ} = 3y + 2 = 3\left(\frac{3}{2}\right) + 2 = \frac{13}{2}$$

و جواب منفی قابل قبول نیست.

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیانگذار جبر، کاروانا برزینا).

«مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنم، حاصل آن بیست می شود.»

این مقدار را پیدا کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله

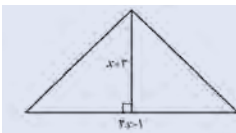
عدد را  $x$  فرض می کنیم.

$$\left(\frac{1}{3}x + 1\right) \left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 20 \Rightarrow \frac{1}{12}x^2 + \frac{7}{12}x - 19 = 0$$

طرفین را در ۱۲ ضرب می کنیم.

$$x^2 + 7x - 228 = 0 \xrightarrow{\Delta=961} x = \frac{-7 \pm 31}{2} \Rightarrow x_1 = -19, \quad x_2 = 12$$

جواب منفی قابل قبول نیست، زیرا مقدار پول منفی نمی تواند باشد.



۱۰) مساحت مثلث روبه رو ۲۴ سانتی متر مربع است.

الف) مقدار  $x$  را پیدا کنید.

ب) اندازه قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، پیوند و اتصال،

(الف)

$$\text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \text{مساحت مثلث}$$

$$= \frac{\quad}{2}$$

$$24 = \frac{(3x-1)(x+3)}{2} \Rightarrow 3x^2 + 8x - 51 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad \text{و} \quad x_2 = -\frac{17}{3}$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا طول قاعده و ارتفاع منفی نمی تواند باشد.

$$\text{ارتفاع قاعده} = 3x - 1 = 3(3) - 1 = 8 \quad (\text{ب})$$

$$\text{اندازه ارتفاع} = x + 3 = 3 + 3 = 6$$

## مجهول، متغیر، پارامتر:

سه اصطلاح مجهول و متغیر و پارامتر در ریاضی بسیار به کار می‌روند. این اصطلاحات بسیار به هم نزدیکند و ممکن است با هم جابه‌جا به کار گرفته شوند. اصطلاح مجهول در ارتباط با مفهوم معادله است. هر کجا عددی نامعلوم باشد ولی اطلاعاتی از آن در دسترس باشد و بخواهیم از طریق آن اطلاعات عدد نامعلوم را به دست آوریم، مفهوم مجهول و معادله رخ می‌دهند. آن عدد نامعلوم را با نمادی نشان می‌دهیم که مجهول نامیده می‌شود و اطلاعات مربوط به مجهول را به طور جبری می‌نویسیم که عموماً به صورت تساوی دو مقدار است و آن را یک معادله می‌نامند؛ مثلاً آیا عددی هست که ضرب آن در خودش با جمع آن با خودش مساوی باشد؟ اگر چنین عددی را با  $x$  نشان دهیم در اینجا  $x$  مجهول است و اطلاعات مسئله می‌گوید  $x + x = x \times x$ . این یک معادله است که ساده شده آن به صورت  $x^2 = 2x$  نوشته می‌شود.

حل یک معادله به معنای یافتن عدد یا اعدادی است که اگر جای مجهول قرار گیرند، تساوی برقرار می‌شود. در این مثال  $0$  و  $2$  جواب هستند. اصطلاح متغیر بیشتر در ارتباط با مفهوم تابع است. اگر بخواهیم اثر یک تابع را روی مقدار دلخواهی از دامنه آن نشان دهیم نمادی را در نظر می‌گیریم که نشان‌دهنده یک مقدار دلخواه در دامنه تابع باشد. این نماد را متغیر تابع می‌نامند. در اینجا نماد متغیر به معنای مجهول نیست و معادله‌ای نیز وجود ندارد فقط چگونگی اثر تابع روی متغیر عموماً با یک فرمول بیان می‌شود.

مثلاً اگر تابعی که مساحت یک مربع را بر حسب طول ضلع آن نشان می‌دهد با  $f$  نشان دهیم داریم  $D_f = (0, +\infty)$  و اگر نماد  $x$  را به عنوان عضو دلخواهی از  $D_f$  به کار ببریم  $x$  متغیر این تابع است و اثر تابع روی  $x$  به صورت  $f(x) = x^2$  نوشته می‌شود. در این نمادگذاری‌ها مجهولی وجود ندارد تا به دنبال آن بگردیم. اما اگر سؤالی به این صورت مطرح شود که به ازای چه مقداری در دامنه مقدار تابع برابر  $4$  می‌شود، در اینجا با یک معادله و یک مجهول روبرو می‌شویم. اگر نمادی که مجهول را نشان می‌دهد با همان  $x$  نشان دهیم باید داشته باشیم  $f(x) = 4$ . این یک معادله است و نماد  $x$  در اینجا مجهول است.

اینکه یک نماد به عنوان مجهول به کار گرفته شده است یا متغیر، مربوط به کاربرد آن است. اگر معادله‌ای در کار است و حل معادله هدف است نماد آن مجهول است ولی اگر معادله‌ای وجود ندارد و شیوه عمل یک تابع توصیف می‌شود نماد به کار رفته متغیر است.

مفهوم پارامتر به مفهوم متغیر بسیار نزدیک است. پارامتر نیز با یک نماد نمایش داده می‌شود که دامنه‌ای از تغییرات برای آن در نظر می‌گیرند. پارامتر هم در معادله‌ها و هم در توابع ممکن است رخ دهد. در برخی معادله‌ها ممکن است اعدادی نامعین و دلخواه وجود داشته باشند که آنها را پارامتر می‌نامند. به ازای هر مقداری برای پارامتر، یک معادله مشخص و جدید خواهیم داشت. عملاً این گونه معادله‌ها دسته‌ای از معادله‌ها هستند و به ازای مقدار دهی به پارامتر یا پارامترهای موجود در آن اعضایی از این دسته معادله‌ها ساخته می‌شوند. مثلاً معادله  $x^2 - 2ax + a = 0$  را در نظر بگیرید. در این معادله  $a$  عدد معینی نیست و به ازای هر مقداری که برای آن در نظر بگیریم معادله جدیدی ساخته می‌شود. این، یک دسته معادله بر حسب پارامتر  $a$  است. در اینجا  $x$  مجهول معادله و  $a$  پارامتری است که نشان‌دهنده عددی دلخواه ولی ثابت است.

اینکه در معادله داده شده کدام نماد مجهول و کدام نماد پارامتر است خود به خود معلوم نیست و ارائه دهنده معادله باید مشخص کند کدام نماد مجهول و کدامیک پارامتر است. در مثال بالا کاملاً ممکن بود ما  $a$  را مجهول و  $x$  را پارامتر در نظر بگیریم.

در بیان قانون توابع نیز ممکن است پارامترهایی رخ دهند که نقش آنها ایجاد دسته‌ای از توابع است که به ازای مقادیر مختلف پارامتر به وجود می‌آیند. مثلاً در تابع با قانون  $f(x) = (x-a)^2 - a$  نماد  $a$  یک پارامتر است که نشان دهنده یک عدد دلخواه ولی ثابت است. با تغییر مقدار  $a$  توابع مختلفی ایجاد می‌شوند. تشخیص اینکه یک نماد به صورت مجهول، متغیر، یا پارامتر به کار رفته است یا از طریق متن گفتگو مشخص می‌شود یا به طور مستقیم باید بیان شود.

### معادله‌ها:

در ریاضیات و کاربردهای آن، مفهوم معادله بسیار رخ می‌دهد. در حالت کلی مفهوم معادله از طریق مفهوم تابع بیان می‌شود. در هر معادله عددی که مجهول آن یک عدد است، تابعی با متغیر عددی مانند  $f$  وجود دارد و معادله به صورت  $f(x) = c$  می‌باشد. جواب‌های این معادله، اعدادی در دامنه تابع  $f$  هستند که تساوی را برقرار می‌کنند. از لحاظ نموداری، جواب‌های این معادله از برخورد نمودار تابع  $f$  و خط  $y=c$  به دست می‌آیند.

در حالتی که  $f$  تابعی چندجمله‌ای از درجه  $n$  باشد، معادله را معادله چندجمله‌ای از درجه  $n$  می‌نامند. قبلاً با معادله‌های درجه اول و در این فصل با معادله‌های درجه دوم آشنا شده‌اید. برای معادله‌های درجه سوم و چهارم نیز روش‌هایی برای

حل آنها وجود دارد، اما گالوا و آبل ثابت کردند که برای حل معادلات چندجمله‌ای درجات بالاتر روش و فرمولی برحسب رادیکال‌ها وجود ندارد.

به همین دلیل در حل معادله‌ها، روش‌های دیگری ابداع شده است که آنها را روش‌های عددی می‌نامند. در این روش‌ها، هدف یافتن جواب دقیق نیست، بلکه یافتن تقریبات اعشاری جواب با دقت کافی هدف خواهد بود. عملاً جواب‌های تقریبی با دقت کافی به همان خوبی جواب‌های دقیق هستند و چیزی از آنها کم ندارند. بر فرض جواب دقیق یک معادله را هم که بیابیم در به کارگیری این جواب برای حل یک مسئله عملی، دقت ابزار ما فقط در حد خاصی است و نمی‌توان از جواب در همان حد دقیق بودنش استفاده کرد. مثلاً فرض کنید جواب دقیق یک معادله  $\sqrt{\quad}$  باشد و دقت ابزار ما فقط در حد اعداد اعشاری دو رقمی باشد. در این حالت مقدار دقیق برای ما فایده‌ای ندارد و همان تقریب اعشاری  $1/41$  از  $\sqrt{2}$  برای کار ما کافی است. پس، اگر معادله را با روش‌های عددی حل می‌کردیم و جواب تقریبی  $1/41$  را به دست می‌آوردیم هیچ کمبودی نسبت به حل دقیق با جواب  $\sqrt{2}$  نداشت.

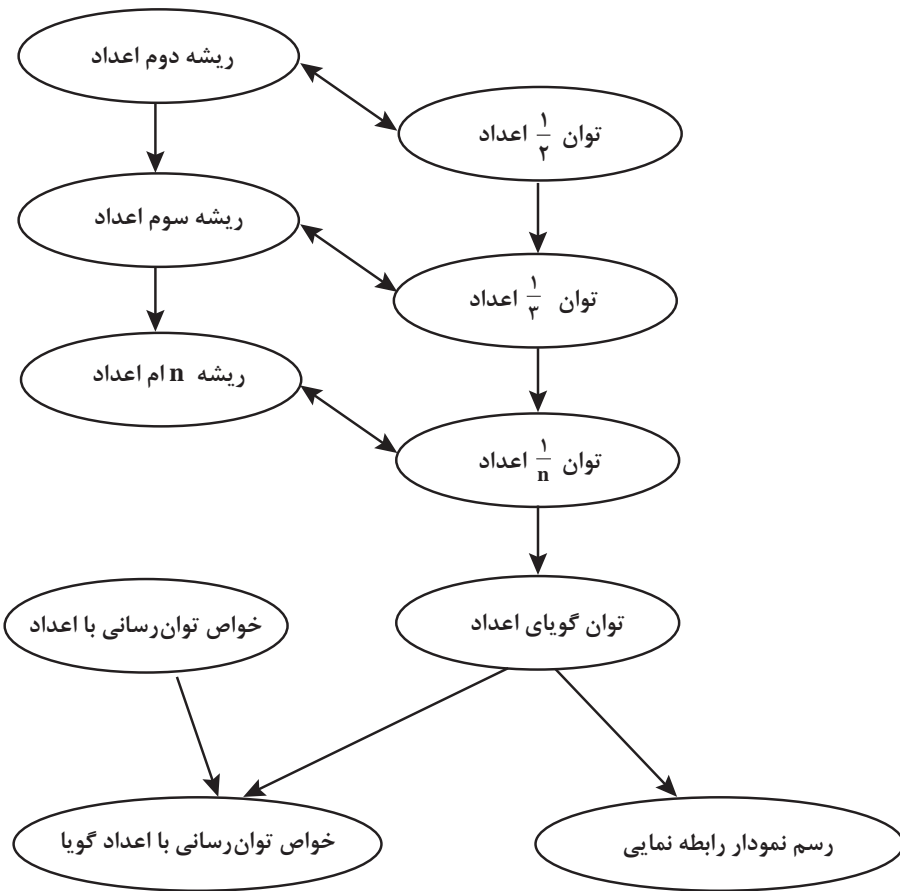
معادله‌ها با توجه به نوع تابع  $f$  به انواع و اقسامی از معادله‌ها تقسیم‌بندی می‌شوند که برخی از آنها قابلیت حل دقیق را دارند و بسیاری از آنها به طور دقیق قابل حل نیستند. اکثر روش‌های عددی حل معادله‌ها عمومیت دارند و در مورد هر تابعی قابل به کار بردن هستند. روش نصف کردن یکی از ساده‌ترین روش‌های حل معادله‌ها است که در سر کلاس هم می‌توان آن را به کار برد و جواب‌هایی با تقریب‌های مناسب به دست آورد. در روش نصف کردن تابع  $f$  باید پیوسته باشد و روی یک بازه بسته  $[a, b]$  تعریف شده باشد و مقدار  $f(a)$  و  $f(b)$  با علامت‌های مختلف باشند تا مطمئن باشیم (طبق قضیه‌ها) معادله  $f(x) = 0$  حداقل یک جواب در بازه  $[a, b]$  دارد.

برای یافتن یکی از این جواب‌ها نقطه  $c = \frac{a+b}{2}$  وسط این بازه را در نظر می‌گیریم و مقدار  $f(c)$  را حساب می‌کنیم. اگر  $f(c) = 0$  به جواب رسیده‌ایم و اگر  $f(c) \neq 0$  به علامت آن نگاه می‌کنیم که با علامت  $f(a)$  تفاوت دارد است یا با علامت  $f(b)$ . با هر کدام تفاوت داشت بازه جدیدی تشکیل می‌دهیم که یک سر آن  $c$  است و سر دیگر آن  $a$  یا  $b$  است. اگر این عملیات را  $n$  بار تکرار کنیم به بازه‌ای می‌رسیم که یک جواب معادله در آن بازه است و طول بازه  $\frac{b-a}{2^n}$  است. برای  $n$  به اندازه کافی بزرگ طول این بازه بسیار کوچک می‌شود به گونه‌ای که دو سر بازه تا چند رقم اعشار با هم مساوی‌اند و یک جواب این معادله عددی با همین رقم‌های اعشار است. برای دقیق‌تر کردن جواب تعداد مراحل تکرار را باید بیشتر کنیم.



## فصل پنجم

توان رسانی به توان عددهای گویا





## اهداف کلی فصل

- درک مفهوم توان‌های گویای اعداد
- درک ارتباط بین توان‌رسانی به توان عددهای گویا و ریشه‌گیری.
- درک مفهوم ریشه  $k$  ام عددهای حقیقی و نمایش رادیکالی آنها.
- تعمیم خواص توان‌رسانی به توان عددهای صحیح به خواص توان‌رسانی به توان عددهای گویا.
- درک تقریب اعشاری ریشه‌های یک عدد.
- توجه به اهمیت توان‌رسانی به توان عددهای گویا در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی

### عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- اعداد با توان‌های کسری را به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی را به صورت توان کسری نمایش دهند.
- با استفاده از ماشین حساب تقریب اعشاری هر عدد با توان گویا را پیدا کنند.
- ریشه‌های یک عدد طبیعی را با استفاده از تجزیه به عوامل اول پیدا کنند.
- از توان‌های گویا در مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های طبیعی استفاده کنند.
- از خواص توان‌رسانی به توان عددهای گویا برای انجام عملیات جبری (ضرب و تقسیم و توان‌رسانی) روی اعداد توان‌دار استفاده کنند.
- از فناوری (ماشین حساب) برای درک و بررسی وضعیت‌ها استفاده کنند.

### پیش‌نیازها:

- آشنایی با ریشه دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با توان‌رسانی به توان اعداد صحیح و خواص آن.
- توانایی رسم نمودار با نقطه‌یابی.
- توانایی تجزیه یک عدد طبیعی به عامل‌های اول.

### نگاه کلی به فصل:

در مدل‌سازی برخی پدیده‌های طبیعی مانند رشد و زوال در زیست‌شناسی، محاسبه انواع سودهای مرکب در علم اقتصاد به مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد

گویا و حقیقی مواجه می‌شویم. هدف این فصل، آموزش مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد گویا است. توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی فرایند دیگری لازم دارد که در ارتباط با حدگیری است و نمی‌توانیم وارد آن شویم. اما به طور شهودی می‌توان انتظار داشت که هنرجویان توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی را هم می‌پذیرند. فرایند آموزش مفهوم توان‌رسانی اعداد که در سال‌های گذشته دیدیم، با تعریف توان‌های طبیعی اعداد شروع می‌شود و با تعمیم آن به توان‌های صحیح ادامه می‌یابد. در این فصل با گسترده‌تر شدن دامنه تعمیم به توان‌رسانی با اعداد گویا خواهیم رسید و زمینه برای معرفی توابع نمایی آماده خواهد شد. نموداری که در آخر این فصل آمده، نمایش برخی از توان‌های یک عدد در یک دستگاه مختصات می‌باشد که نقاطی از نمودار یک تابع نمایی است. با وصل این نقاط به یکدیگر می‌توان نموداری از یک تابع نمایی را مشاهده کرد و توجه هنرجویان علاقمند و قوی‌تر را به توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی (که البته از اهداف کتاب نیست) معطوف کرد.

روش آموزشی این فصل برای درک مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد گویا درگیر شدن مستقیم با مسئله رشد در زیست‌شناسی است. در این فصل، مسئله‌ای در ارتباط با رشد باکتری‌ها و مقدار باکتری‌ها در لحظات گوناگون مطرح شده است. حل این مسئله نیازمند مدل‌سازی است و به کمک الگویی به عددی با توان کسری می‌رسیم. با این روش نیاز به معرفی توان‌های کسری (گویا) از اعداد مشخص می‌شود.

توان‌رسانی به توان اعداد گویا و ریشه‌گیری در ارتباط با یکدیگرند. برای محاسبه مقدار توان‌های کسری یا ریشه‌گیری از اعداد، فقط روش تجزیه عدد به عوامل اول مورد نظر است در غیر این صورت (یعنی وقتی عدد مربع یا مکعب یا ... نیست) برای محاسبه ریشه (یا توان کسری) از ماشین حساب استفاده شود. آموزش نحوه استفاده از ماشین حساب جهت نمایش تقریب اعشاری توان‌های گویا و درک بهتر مقدار این اعداد در این فصل مطرح شده است. ذکر این نکته برای هنرجویان ضروری است که تقریب‌های اعشاری از توان‌های گویا هیچ‌کدام نمایش دهنده مقدار دقیق این اعداد نیستند (مگر در مواقعی که عدد دقیقاً توان  $n$  ام یک عدد آشنای دیگر باشد) و مقدار دقیق آن صرفاً با نمادهای رادیکالی (یا به صورت عددی توان‌دار با توان گویا) نمایش داده می‌شوند.

فرایند	توضیح فرایند	مثال
حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متون ورودی
ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسئله و با انتخاب مناسب آنها - انتقال تفکرات محمد به معلم علوم (در مکالمه محمد و معلم) و سازمان‌دهی آن (کار در کلاس ۳ سؤال آخر)
استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی - استفاده از زبان ریاضی برای بیان «توان $\frac{1}{3}$ هر عدد برابر با ریشه سوم آن عدد است (تعریف صفحه ۹۴ کتاب درسی)
پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	- دلیل تساوی $\sqrt{2}$ و $2^{\frac{1}{2}}$ (فعالیت ۱) - دلیل تساوی $\sqrt[3]{2}$ و $2^{\frac{1}{3}}$ (فعالیت ۲) - سؤال ۱ (کار در کلاس بعد از فعالیت ۳)
بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	- تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی - تشخیص چگونگی ارتباط بین مفاهیم ریاضی - ارتباط توان‌رسانی با اعداد گویا و ریشه‌گیری (در حوزه اعداد) - نمایش عدد با توان $\frac{1}{2}$ به صورت طول یک پاره خط (مثال دوم بعد از فعالیت ۱) - نمایش عدد با توان $\frac{1}{3}$ به صورت طول یک پاره خط (مثال دوم بعد از فعالیت ۲)
سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویی و ...	- نمایش توان‌های گویا روی محورهای مختصات (کار در کلاس ۷ و مسئله ۸ آخر فصل) - استفاده از دیاگرام در فعالیت‌های ۱ و ۲ برای درک مقدار رادیکالی وزن و ارتباط آن با نمایش وزن به صورت یک عدد با توان $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ .
		- بیان ارتباط بین تعداد باکتری‌ها و زمان گذشته از شروع تکثیر (در مکالمه محمد و معلم) - مقایسه ریشه‌های چهارم یک عدد (فعالیت ۴ قسمت ۶) - مقایسه نمایش یک عدد با توان گویا و نمایش رادیکالی آن با استفاده از نمایش اعشاری آنها (استفاده از ابزار بعد از فعالیت ۲ و بعد از فعالیت ۶) - تعمیم ریشه ۲ و ۳ اعداد به ریشه ۴ و ۵ و k (فعالیت ۳) - تعمیم $2^2$ به $2^3$ و $2^3$ به $a^3$ (متن بعد از فعالیت ۲). - تعمیم خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح به خواص توان‌رسانی با اعداد گویا

## بخش اول: مفهوم توان رسانی به توان عددهای گویا

### اهداف بخش

- درک مفهوم توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  از اعداد
- درک ارتباط بین توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  و رادیکال‌های با فرجه ۲ و ۳
- نمایش اعداد با توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی با فرجه ۲ و ۳ به صورت توان کسری
- استفاده از اعداد توان‌دار با توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی
- استفاده از ماشین حساب برای محاسبه تقریب اعشاری اعداد باتوان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$

### واژه‌های کلیدی:

توان رسانی با اعداد گویا، ریشه‌گیری.

### نگاه کلی به بخش :

در این بخش ابتدا با مدل‌سازی به کمک الگویابی، مسئله تکثیر باکتری‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. از این طریق مفهوم توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  اعداد به طور طبیعی مطرح می‌شوند. سپس جهت درک ارتباط بین یک عدد توان‌دار با توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  و ریشه‌گیری، دو فعالیت مطرح شده است. دیاگرامی که در هر دو فعالیت آمده است، برای محاسبه وزن باکتری‌ها از دو مسیر مختلف می‌باشد. از این طریق، درکی از نمایش وزن باکتری‌ها به صورت یک عدد رادیکالی ایجاد شود. مثال‌های این بخش برای تقویت مهارت تبدیل اعداد با توان  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  به اعداد رادیکالی و ارائه تعبیر هندسی آنها مطرح شده است.

### ورود به مطلب :

برای ورود به مطلب در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند، معلم می‌تواند با استفاده از مکالمه ابتدای فصل سؤال‌های مناسبی را در کلاس مطرح کند و فضای آموزشی را به مباحثه‌ای هدایت نماید که تمامی هنرجویان در رسیدن به اهداف مکالمه مطرح شده، مشارکت داشته باشند. در غیر این صورت معلم می‌تواند از هنرجویان بخواهد مکالمه بین معلم و محمد را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت ۱ آمادگی داشته باشند.

اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند و در صورتی که دبیر لازم بداند می‌تواند در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در هر ساعت ۴ برابر می‌شود استفاده کرده و از هنرجویان بخواهد وزن آنها را پس از نیم‌ساعت حساب کنند و سپس باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از هر ساعت ۲ برابر می‌شود را مطرح کند زیرا درک فعالیت با استفاده از اعدادی که مربع کامل هستند، ساده‌تر است.

### فعالیت آموزشی

فعالیت ۱

نویس باکتری را در نظر بگیرید که وزن آن هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر در شروع ۱ گرم باکتری داشته باشید، به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱) اگر وزن باکتری‌ها پس از هر نیم‌ساعت ۲ برابر شود، وزن آنها را پس از یک‌ساعت بر حسب  $2^a$  بدست آورید و در محل تعیین شده بنویسید.

شروع

وزن: ۱ گرم

۱

نیم ساعت پس از شروع

وزن: ۲ گرم

۲

یک ساعت پس از شروع

وزن: ۴ گرم

۴

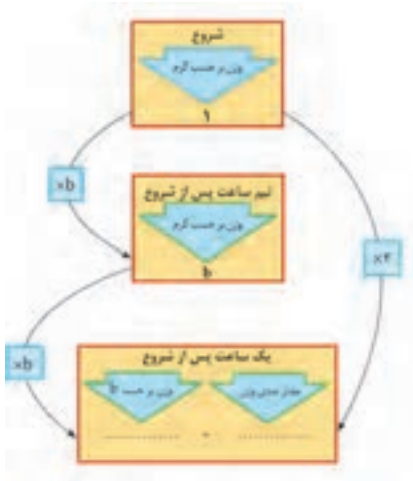
۲) وزن ۱ گرم باکتری را پس از یک ساعت بر حسب گرم محاسبه کنید و در محل تعیین شده بنویسید. از تساوی حاصل مقدار  $a$  را بدست آورید.

اهداف موضوعی:  $\frac{1}{2}$  و  $\sqrt{2}$  در یک زمینه واقعی.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، مدل‌سازی یک پدیده

ارتباط بین  $\sqrt{2}$  و  $2^{\frac{1}{2}}$  در حوزه اعداد، ارتباط بین وزن باکتری‌ها و  $2^{\frac{1}{2}}$  (ارتباط ریاضی و زیست‌شناسی)



## حل فعالیت :

۱ نمودار تکمیل شده :

۲  $b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$$49^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$(-7 \cdot -1)^{\frac{1}{2}} =$$

۲) طول ضلع مربعی را که مساحت آن ۹ سانتی‌متر مربع است، به صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید و آن را ساده کنید.

کاربرگ کلاس ۱



## اهداف :

■ کسب مهارت در نمایش رادیکالی اعداد با توان  $\frac{1}{p}$  و محاسبه حاصل آنها.

الف)  $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49} = 7$       ب)  $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$       ج)  $(0/01)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0/01} = 0/1$

۲  $5^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$

## فعالیت آموزشی

**فعالیت 7**

یک گرم از یک نوع باکتری را در نظر بگیرید که پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. بارش زیر بررسی کنید که پس از  $\frac{1}{4}$  ساعت چند گرم باکتری ایجاد می‌شود.

۱) فرض کنید وزن باکتری‌ها پس از هر  $\frac{1}{4}$  ساعت  $c$  برابر شود. وزن باکتری‌ها را پس از  $\frac{1}{4}$  ساعت  $\frac{1}{4}$  ساعت و  $\frac{1}{4}$  ساعت و یک ساعت بر حسب  $c$  در نمودار زیر بنویسید.

۲) نمودار را کامل کنید و از تساوی حاصل، مقدار  $c$  را به دست آورید.

### اهداف موضوعی :

■ درک ارتباط بین  $\sqrt[3]{2}$  و  $2^{\frac{1}{3}}$  در یک زمینه واقعی.

### مهارت‌ها و فرایندها:

پیوندها و اتصال‌ها، مدل‌سازی یک پدیده

۱) نمودار تکمیل شده :

۲) برای محاسبه مقدار  $c$  داریم:  $c^3 = 2 \Rightarrow c = \sqrt[3]{2}$

در این فعالیت اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند، می‌توان در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در



هر ساعت ۸ برابر می‌شود را در نظر گرفت و از هنرجویان خواست وزن آنها را پس از ۲۰ دقیقه و ۴۰ دقیقه حساب کنند و سپس به باکتری‌هایی که در کتاب مطرح شده رسید.

کار در کلاس ۲

(۱) با توجه به تساوی‌های داده شده، ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس، حاصل را به دست آورید.

الف)  $۶^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow ۲۱۶^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\quad} = \quad$

ب)  $\left(\frac{1}{۷}\right)^۳ = \frac{1}{۳۴۳} \Rightarrow \left(\frac{1}{۳۴۳}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{\dots}{\dots}} = \dots$

(۲) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$(۰/۰۰۱)^{\frac{1}{3}} = \quad \quad \left(\frac{1}{۸}\right)^{\frac{1}{3}} = \quad \quad (۹^۳)^{\frac{1}{3}} = \quad \quad ۶۴^{\frac{1}{3}} = \quad$

### اهداف:

■ کسب مهارت در نمایش رادیکالی اعداد با توان  $\frac{1}{n}$  و محاسبه حاصل آنها، پرورش مهارت برقراری پیوند و اتصال بین مفاهیم ریاضی

الف)  $۲۱۶^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{۲۱۶} = ۶$

۱

ب)  $\left(\frac{1}{۳۴۳}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{۳۴۳}} = \frac{1}{۷}$

$۶۴^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{۶۴} = ۴$

$(۷۲۹)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{۷۲۹} = ۹$

۲

$\left(\frac{1}{۸}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{۸}} = \frac{1}{۲}$

$(۰/۰۰۱)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{۰/۰۰۱} = ۰/۱$

تذکر: اعدادی که در تمرین ۲ کار در کلاس آمده از انواع کسری، اعشاری و صحیح انتخاب شده و دبیران می‌توانند طبق نظر خود اعداد دیگری را انتخاب کنند و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند.



استفاده از ماشین حساب

یک گرم از پاکتری‌هایی را که وزن آنها پس از یکساعت دو برابر می‌شوند در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب، وزن آنها را در هر یک از دو حالت زیر بر حسب گرم با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید. توجه کنید، اگر از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید، ممکن است ترتیب فشار دادن کلیدها متفاوت باشد.



الف) پس از ۱۰ ساعت:

محاسبه از طریق توان رسانی:

$$2 \rightarrow x^y \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow =$$

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

$$2 \rightarrow \sqrt{\phantom{x}} \rightarrow =$$

ب) پس از ۲۰ دقیقه:

محاسبه از طریق توان رسانی:

$$2 \rightarrow x^y \rightarrow 1 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 2 \rightarrow =$$

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

$$2 \rightarrow \sqrt{x} \rightarrow 2 \rightarrow =$$

## استفاده از ابزار :

### اهداف :

- آشنایی با تقریب اعشاری ریشه‌های دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با تقریب اعشاری توان‌های  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  اعداد.
- استفاده از تقریب اعشاری برای مقایسه نمایش یک عدد باتوان  $(\frac{1}{3})$  و  $(\frac{1}{4})$  و نمایش رادیکالی آن اعداد.
- تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای محاسبه تقریب اعشاری ریشه‌های دوم و سوم و توان‌های  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{4}$  اعداد.
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد

$$\sqrt{2} \approx 1/41 \text{ و } 2^{\frac{1}{2}} \approx 1/41 \text{ (الف)}$$

$$\sqrt[3]{2} \approx 1/26 \text{ و } 2^{\frac{1}{3}} \approx 1/26 \text{ (ب)}$$



## مسئله‌ها

۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

$$11^3 = 1331 \Rightarrow 1331^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1331} = \dots$$

$$17^3 = 289 \Rightarrow 289^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{289} = \dots$$

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها

$$11^3 = 1331 \Rightarrow (1331)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1331} = 11$$

$$17^3 = 289 \Rightarrow (289)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{289} = 17$$

۳) مقادیر خواسته شده را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار یا توان گویا بنویسید و سپس عبارت را به توانی مناسب آن را نوشته و با استفاده از ماشین حساب حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار X



ب) با کتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. اگر ما دو گرم باکتری شروع کنیم پس از نیم ساعت چند گرم باکتری داریم؟ مقدار باکتری‌ها پس از بیست دقیقه چند است؟

ج) قطر یک مربع به ضلع ۳ را پیدا کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

الف) مقدار X :

$$x^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \rightarrow x = 27^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27} \approx 5/2$$

ب) وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت:

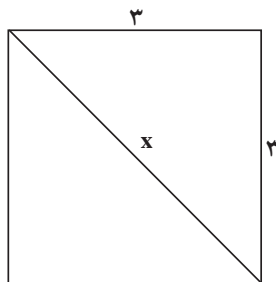
$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$$

وزن باکتری‌ها پس از بیست دقیقه :

$$4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4} \approx 1/58$$

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ :

$$x^2 = 3^2 + 3^2 = 18 \Rightarrow x = 18^{\frac{1}{2}} = \sqrt{18} \approx 4/24$$



۳) بخشی از راه حل احمد برای یافتن ریشه‌های معادله درجه دوم  $2x^2 - 3x - 2 = 0$  به صورت زیر است:

$$x = \frac{3 \pm \left( (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) \right)^{\frac{1}{2}}}{2 \times 2} = \dots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامه راه حل و در صورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را یادداشت آورید.

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارزیابی کردن.

راه حل احمد درست است و ادامه آن به صورت زیر است:

$$x = \frac{3 \pm 25^{\frac{1}{2}}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = -\frac{1}{2}, 2$$

۴) دارایی‌های یک شرکت در هر سال، ۱۵۰ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است:

بدو تأسیس: ۱ میلیارد ریال، پایان سال اول: ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم: ۲/۲۵ میلیارد ریال و ...

الف) دارایی شرکت در پایان سال‌های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.  
 ب) رابطه‌ای بنویسید که دارایی در پایان سال  $n$  ام را به صورت یک عبارت توان دار بر حسب  $n$  نمایش دهد.  
 پ) اگر روند رشد دارایی‌ها در هر ماه نیز طبق رابطه قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه، به صورت یک عدد توان دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و یا ماشین حساب مقدار آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ مدل‌سازی، حل مسئله، پیوندها و اتصالات، الگویابی، تعمیم دادن، مهارت به کارگیری فناوری

چون دارایی‌ها در هر سال ۱۵۰ درصد سال قبل است بنابراین این هر سال ۱/۵ برابر خواهد شد: ( اعداد بر حسب میلیارد ریال می باشند )

الف) پایان سال اول:  $۱/۵ \times ۱ = ۱/۵$       پایان سال دوم:  $۱/۵ \times ۱/۵ = ۱/۵^۲$

پایان سال سوم:  $۱/۵ \times ۱/۵^۲ = ۱/۵^۳$       پایان سال چهارم:  $۱/۵ \times ۱/۵^۳ = ۱/۵^۴$

با توجه به رابطه بین عدد سال و توان می توان میزان دارایی در پایان سال دهم را به صورت زیر نوشت: پایان سال دهم:  $۱/۵^{۱۰}$

ب) با تعمیم رابطه قسمت قبل به سال  $n$  ام داریم: پایان سال  $n$  ام:  $۱/۵^n$

پ) پایان ۴ ماه (معادل  $\frac{۴}{۱۲}$  یا  $\frac{۱}{۳}$  سال)  $۱/۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱/۵} \approx ۱/۱۴$

پایان ۶ ماه (معادل  $\frac{۶}{۱۲}$  یا  $\frac{۱}{۲}$  سال)  $۱/۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱/۵} \approx ۱/۲۲$

## بخش دوم: ریشه‌گیری عددهای حقیقی

### اهداف بخش

- درک مفهوم ریشه‌های دوم و سوم اعداد و تعمیم آن به ریشه  $k$  ام.
- نمایش ریشه‌های دوم و سوم اعداد به صورت رادیکالی تعمیم تعریف  $a^{\frac{1}{2}}$  به  $a^{\frac{1}{n}}$  و نمایش رادیکالی آن.
- محاسبه ریشه‌های  $k$  ام یک عدد طبیعی به کمک تجزیه به عوامل اول.
- تعمیم خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح به توان‌رسانی با اعداد گویا.

### پیش‌نیازهای بخش:

- آشنایی با ریشه دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با توان‌رسانی به توان اعداد صحیح.

### واژه‌های کلیدی:

ریشه‌گیری، توان‌رسانی با اعداد گویا.

### نگاه کلی به بخش:

در این بخش ابتدا با طرح یک سؤال لزوم معرفی ریشه‌های چهارم و بالاتر یک عدد مطرح می‌شود سپس با معرفی ریشه  $k$  ام، تعداد ریشه‌های زوج و فرد یک عدد بررسی می‌شود. نمایش رادیکالی ریشه یک عدد و اینکه چه اعدادی در چه حالت‌هایی دارای ریشه نیستند نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در ادامه معرفی توان  $\frac{1}{n}$  یک عدد به عنوان تعمیم توان‌های  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{3}$  انجام می‌شود. همچنین با بیان خواص توان‌رسانی به توان اعداد گویا (که تعمیمی از خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح می‌باشد) توان  $\frac{1}{n}$  اعداد به توان‌های گویا تعمیم داده می‌شود. در دو قسمت از این بخش کار با ابزار پیشنهاد شده است که برای ارتقای مهارت استفاده از ماشین حساب برای پیدا کردن تقریب اعشاری اعداد با

توان گویا و اعدادِ رادیکالی می‌باشد. با پیدا کردن تقریب اعشاری اعدادی که به صورت‌های مختلف نمایش داده شده‌اند تساوی آنها به کمک ماشین حساب نیز بررسی می‌شود.

### ورود به مطلب :

برای ورود به مطلب معلم می‌تواند با ارائه سؤالی نظیر سؤال ابتدای بخش انگیزه لازم برای جلب توجه دانش‌آموزان را به وجود آورد. سپس از دانش‌آموزان بخواهد تا فعالیت ۳ را انجام دهند.

## فعالیت آموزشی

در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید، سپس به سؤال پاسخ دهید.

۱) یک ریشه دوم عدد ۲۵ عدد ... است؛ زیرا  $25 = 5^2$  .

۲) ریشه‌های دوم یک عدد را تعریف کنید.

۳) یک ریشه سوم عدد ۸ عدد ... است؛ زیرا  $8 = 2^3$  .

۴) ریشه‌های سوم یک عدد را تعریف کنید.

۵) برای ریشه‌های چهارم یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشه چهارم مثالی بزنید.

۶) برای ریشه‌های پنجم یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشه پنجم مثالی بزنید.

۷) برای ریشه‌های  $k$ ام یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

۸) اگر  $N^k = 8$  باشد، یک ریشه ... عدد ... است.

### اهداف موضوعی:

■ آشنایی با ریشه  $k$ ام یک عدد.

## مهارت‌ها و فرایندها:

تعمیم تعریف ریشهٔ دوم و سوم به ریشهٔ چهارم و پنجم  $k$  ام اعداد، بازیابی اطلاعات، فرضیه‌سازی

۱ قسمت اول: ۵ یا -۵ - قسمت دوم:  $5^2=25$  یا  $(-5)^2=25$

۲ عدد  $b$  ریشهٔ دوم عدد  $a$  است هرگاه:  $b^2=a$

۳ قسمت اول: ۲ - قسمت دوم:  $2^3=8$

۴ عدد  $b$  ریشهٔ سوم عدد  $a$  است هرگاه:  $b^3=a$

۵ عدد  $b$  ریشهٔ چهارم عدد  $a$  است هرگاه:  $b^4=a$  مثال از ریشهٔ چهارم: عدد ۳

ریشهٔ چهارم ۸۱ است زیرا  $3^4=81$

۶ عدد  $b$  ریشهٔ پنجم عدد  $a$  است هرگاه:  $b^5=a$  مثال از ریشهٔ پنجم: عدد ۲ ریشهٔ

پنجم ۳۲ است زیرا  $2^5=32$

۷ عدد  $b$  ریشهٔ  $k$  ام عدد  $a$  است هرگاه:  $b^k=a$

۸ عدد  $b$  یک ریشهٔ  $k$  ام عدد  $a$  است هرگاه  $b^k=a$

تمرین ۲



(۱) به جای نقطه چین‌ها، عددهای مناسب قرار دهید.

(الف) از آنجا که  $3^5=243$ ، عدد ..... یک ریشهٔ پنجم عدد ..... است.

(ب) با توجه به تساوی،  $(-5)^4=$  ..... عدد ..... یک ریشهٔ ششم عدد ..... است.

(پ) تساوی  $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$  نشان می‌دهد که عدد  $\frac{1}{2}$  یک ریشهٔ ..... عدد ..... است.

(۲) یک ریشهٔ چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

(الف) ۶۲۵ (ب)  $\frac{1}{81}$  (ج) ۵۰۵۵۱

(۳) یک ریشهٔ پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

(الف) ۱ (ب)  $-\frac{1}{33}$  (ج)  $3 \times 81$

(۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟

## اهداف:

■ کسب مهارت یافتن ریشه‌های چهارم و پنجم، فرضیه‌سازی

(الف) قسمت اول: ۳ - قسمت دوم: ۲۴۳.

(ب) قسمت اول: ۱۵۶۲۵ - قسمت دوم: ۵ - قسمت سوم: ۱۵۶۲۵

(ج) تساوی  $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$  نشان می‌دهد عدد  $\frac{1}{2}$  ریشهٔ سوم عدد  $\frac{1}{8}$  است.

۲- (الف) ۵ یا -۵ (ب)  $\frac{1}{3}$  یا  $-\frac{1}{3}$  (ج) ۰/۱ یا -۰/۱

۳- (الف) ۱ (ب)  $-\frac{1}{3}$  (ج) ۳

دبیران می‌توانند با ذکر مثال‌های بیشتر از اعداد اعشاری، کسری، صحیح یا اعداد توان‌دار درک بهتری از توان‌های کسری در هنرجویان به وجود آورند. البته لازم به ذکر است که عدد داده شده باید توان چهارم یا پنجم یک عدد آشنا باشد تا محاسبه مقدار آن بدون استفاده از ماشین حساب امکان‌پذیر باشد.

۴- آنها را به عوامل اول تجزیه کرده و به صورت حاصل ضرب توان‌های اعداد اول می‌نویسیم. سپس با توجه به توان‌های آنها و تعریف ریشه، ریشه چهارم و پنجم را به دست می‌آوریم. (نمونه این روش با توجه به توانایی تجزیه هنرجویان در این پایه و بر پایه اطلاعات قبلی آنها، در قالب فعالیت و سؤال در کتاب کار آمده است.)

## فعالیت آموزشی

۱) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	۳	۱	$\frac{2}{3}$	۱	$\frac{2}{3}$	۱	۲	...
توان چهارم			$\frac{16}{81}$	...	...	...	...	...

۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا؟

۳) توان چهارم اعداد فرجه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشه چهارم داشته باشد؟ چرا؟

۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۱ و  $\frac{16}{81}$  را بنویسید.

۶) با توجه به پاسخ‌های به دست آمده، در مورد تعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت ۱۶ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

### اهداف موضوعی :

- تعیین تعداد ریشه‌های زوج یک عدد مثبت.
- درک عدم وجود ریشه زوج اعداد منفی.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- الگویابی، تعمیم دادن، استدلال کردن، مقایسه کردن



۱ جدول کامل شده :

عدد	-۲	-۱	$-\frac{۲}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	۲	...	...
توان چهارم	۱۶	۱	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۰	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۱	۱۶	...	...

۲ خیر زیرا هر عددی (مثبت یا منفی) اگر به توان یک عدد زوج برسد علامت آن همواره مثبت است.

۳ با هم مساویند.

۴ خیر زیرا توان چهارم هیچ عددی منفی نیست.

۵ ریشه‌های چهارم ۱ عدد ۱ و -۱ است و ریشه‌های چهارم عدد  $\frac{۱۶}{۸۱}$  اعداد  $\frac{۲}{۳}$  و  $-\frac{۲}{۳}$  هستند.

۶ عدد مثبت  $a$  دوریشه چهارم دارد که قرینه هستند.

۷ بله مثلاً عدد ۶۴ دو ریشه ششم دارد که عبارت‌اند از ۲ و -۲ زیرا  $۲^۶ = ۶۴ = (-۲)^۶$  دبیران در صورت نیاز می‌توانند در قسمت ۷ با انتخاب اعداد اعشاری یا اعداد بیشتر زمینه مساعدتری را برای رسیدن به نتیجه فعالیت توسط هنرجو فراهم کنند.

## فعالیت آموزشی

۱) جدول زیر را کامل کنید.

	-۲	-۱	$-\frac{۲}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	۲
توان چهارم	۱۶	۱	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۰	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۱	۱۶

۲) عددهای سطر آخر جدول چه رابطه‌ای با عددهای سطر اول آن دارند؟

۳) حاصل  $\sqrt[۴]{۱۶}$  و  $\sqrt[۴]{(-۲)^۶}$  را بدست آورید و با نتیجه قسمت قبل مقایسه کنید.

هدف موضوعی:

■ پیدا کردن ریشه ششم یک عدد

مهارت‌ها و فرایندها:

■ الگویابی، مقایسه کردن

a	-۰/۱	۰/۱	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-۲	۲
$\sqrt{\quad}$	$\sqrt[4]{(-0/1)^4}$	$\sqrt[4]{0/1^4}$	$\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}$	$\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}$	$\sqrt[4]{(-2)^4}$	$\sqrt[4]{2^4}$
حاصل	۰/۱	۰/۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۲	۲

۲ اعداد سطر آخر قدر مطلق اعداد سطر اول هستند.

۲  $\sqrt[4]{3^4} = \sqrt[4]{729} = 3$  و  $\sqrt[4]{(-3)^4} = \sqrt[4]{729} = 3$  در این حالت نیز حاصل عدد مثبت ۳ است.

در کار کردن با قدر مطلق بدفهمی‌هایی وجود دارد که برخی از آنها به شکل زیر است: برای محاسبه درست  $|a|$  به هنرجویان متذکر شوید که با توجه به علامت a حاصل  $|a|$  را بنویسند. یعنی برای آنها یاد آوری کنید که  $|a|$  در صورت مثبت بودن a با خود a برابر است و  $|a|$  در صورت منفی بودن a با -a برابر است. اغلب، وقتی از پارامتری داخل علامت قدر مطلق استفاده می‌کنیم هنرجویان مقدار آن پارامتر را مثبت در نظر می‌گیرند. مثلاً در پرسش زیر که از برخی دانش‌آموزان پرسیده شده است:

آیا ممکن است که  $|a| = -a$

دانش‌آموزانی بوده‌اند که جواب منفی داده‌اند و این ناشی از تصور اشتباهی است که علامت a را مثبت فرض می‌کنند. توصیه می‌شود برای محاسبه حاصل قدر مطلق مخصوصاً وقتی عبارات متعددی (که شامل رادیکال یا کسر و یا ... است) داخل علامت قدر مطلق می‌باشد علامت عبارت داخل قدر مطلق را به دست آورند (اگر شامل عبارت رادیکالی یا کسری هستند آنها را با تقریب اعشاری مناسب تقریب بزنند) و سپس با استفاده از تعریف قدر مطلق، حاصل را به دست آورند. مثلاً برای حذف علامت قدر مطلق در عبارت:  $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$  اگر هنرجو بداند  $\sqrt{3}$  از  $\sqrt{2}$  بزرگ‌تر است متوجه می‌شود علامت  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  منفی است بنابراین حاصل قدر مطلق به صورت زیر است.

$$|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

در غیر این صورت با ملاحظه مقدار تقریبی  $\sqrt{2} \approx 1/41$  و  $\sqrt{3} \approx 1/73$  ملاحظه می‌کند:

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} \approx 1/41 - 1/73 = -0/32$$

یعنی حاصل منفی است و سپس از تعریف استفاده می‌کند.

گاهی هنرجویان درساده کردن عباراتی به صورت  $\sqrt[n]{a^2}$  دچار اشتباه می‌شوند. به سؤال زیر، که در یک آزمون برای تحقیق در مورد بدفهمی‌های قدر مطلق مطرح شده است، دقت کنید:

ساده شده عبارت  $\sqrt{(-8)^2}$  کدام است؟

الف) ۸      ب) -۸      ج) -۸ و ۸      د) ۴      ه) ۴ و -۴

این سؤال برای دو سری از دانش‌آموزانی که مباحث مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال به آنها تدریس می‌شده داده شده است، پاسخ صحیح به این سؤال از ۴۵/۵۱ درصد تا ۵۷/۳۵ درصد بوده است. یکی از دلایل این بدفهمی تصور یکی بودن این سؤال با جواب‌های معادله  $a^2 = x^2$  است که این جواب‌ها  $x = \pm a$  می‌باشد.

۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف)  $\sqrt[3]{625}$       ب)  $\sqrt{\frac{1}{64}}$       پ)  $\sqrt[6]{0/000001}$       ت)  $\sqrt{(-0/01)^6}$

۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف)  $5^6$       ب)  $729$       پ)  $1$       ت)  $(-5)^6$

۳) عبارت‌های  $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4}$  و  $\sqrt[4]{(-\frac{5}{3})^4}$  را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

### اهداف:

■ کسب مهارت در محاسبه ریشه زوج برخی اعداد.

۱ الف)  $\sqrt[3]{625} = 5$       ب)  $\sqrt{\frac{1}{64}} = \frac{1}{2}$

پ)  $\sqrt[6]{0/000001} = 0/1$       ت)  $\sqrt{(-0/01)^6} = 0/1$

۲ الف)  $\sqrt[6]{5^6} = 5$       ب)  $\sqrt[6]{729} = 3$

پ)  $\sqrt[6]{1} = 1$       ت)  $\sqrt[6]{(-5)^6} = 5$

۳  $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1$  و  $\sqrt[4]{(-\frac{5}{3})^4} = |-\frac{5}{3}| = \frac{5}{3}$

## فعالیت آموزشی

(۱) جدول زیر را کامل کنید.

رتبه پنجم	۲	۱	$\frac{1}{4}$	۰	-۱	$-\frac{1}{4}$	-۲	عدد
عدد	۳۲	۱	$\frac{1}{۱۰۲۴}$	۰	-۱	$-\frac{1}{۱۰۲۴}$	-۳۲	توان پنجم

(۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشه پنجم دارند؟

(۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطهای با هم دارند؟

### اهداف موضوعی:

- درک وجود ریشه فرد برای هر عدد حقیقی (با علامت مثبت یا منفی)
- تعیین تعداد ریشه‌های فرد یک عدد.

### مهارت‌ها و فرایندها:

- استدلال کردن، الگویابی
- ۱ جدول زیر را کامل کنید.

رتبه پنجم	۲	۱	$\frac{1}{4}$	۰	-۱	$-\frac{1}{4}$	-۲	عدد
عدد	۳۲	۱	$\frac{1}{۱۰۲۴}$	۰	-۱	$-\frac{1}{۱۰۲۴}$	-۳۲	توان پنجم

- ۲ قسمت اول: بله در سطر دوم جدول عدد منفی وجود دارد.
- قسمت دوم: بله می‌توان نتیجه گرفت اعداد منفی ریشه پنجم دارند.
- ۳ توان پنجم دو عدد قرینه، قرینه هم هستند.

حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف)  $\sqrt[5]{11^5}$       ب)  $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$       پ)  $\sqrt[5]{-0/000001}$       ت)  $\sqrt[5]{(-3)^5}$

**اهداف:**

■ تمرین در محاسبه ریشه پنجم برخی اعداد.

الف)  $\sqrt[5]{11^5} = 11$       ب)  $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$

پ)  $\sqrt[5]{-0/000001} = -0/1$       ت)  $\sqrt[5]{(-3)^5} = -3$

ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف)  $(3^8)^{\frac{1}{8}}$       ب)  $(\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}}$       پ)  $(0/000001)^{\frac{1}{5}}$       ت)  $243^{\frac{1}{5}}$

**اهداف:**

■ تمرین در نمایش رادیکالی اعداد با توان گویا

الف)  $(3^8)^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{3^8} = 3$       ب)  $(\frac{1}{32})^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}$

پ)  $(0/000001)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0/000001} = 0/1$       ت)  $243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = 3$

**استفاده از ابزار:**



**اهداف:**

- آشنایی با تقریب اعشاری ریشه‌های اعداد.
- آشنایی با تقریب اعشاری توان  $\frac{1}{n}$  اعداد.
- تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای یافتن تقریب اعشاری ریشه‌های یک عدد.
- تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای یافتن تقریب اعشاری توان  $\frac{1}{n}$  اعداد.

- بررسی تساوی نمایش‌های یک عدد (نمایش به صورت یک عدد باتوان  $\frac{1}{n}$  و نمایش رادیکالی آن عدد) با استفاده از تقریب اعشاری آنها
- تقویت مهارت گرد کردن تقریب اعشاری اعداد.

$$\frac{1}{25} \approx 1/15 \quad \text{و} \quad \sqrt[5]{2} \approx 1/15$$



می‌توانید نمایش اعشاری اعداد دیگر را نیز از هنرجویان بخواهید و برای تأکید بیشتر بر تقریب اعشاری می‌توان از هنرجویان خواست به جای نمایش تا دو رقم اعشار نمایش تا سه یا چهار رقم اعشار را نیز نوشته و مقایسه را با تقریب‌های دقیق‌تر انجام دهند.



یکی از اشتباهات رایج که معمولاً به دلیل عدم توجه به ترتیب عملیات اتفاق می‌افتد، یکسان گرفتن دو عبارت  $(a^m)^n$  و  $(a^n)^m$  می‌باشد در حالی که مثلاً به ازای  $n = \frac{1}{3}$  و  $a = -1$  عبارت اول تعریف می‌شود ولی عبارت دوم تعریف نمی‌شود. می‌توان برای آگاهی هنرجویان فعالیتی را طراحی کرد تا با تأکید بر ترتیب عملیات، مشخص کرد که به ازای چه مقادیری از  $n$  و  $m$  و  $a$  این دو عبارت معنادار هستند و به ازای چه مقادیری معنادار نیستند.

تا اینجا توان‌رسانی به توان اعداد گویای به صورت  $\frac{1}{n}$  آموزش داده شده است. برای تکمیل بحث و رسیدن به توان‌رسانی به توان یک عدد گویای دلخواه، برای پرهیز از مشکل شدن درس، از ارائه تعریف رسمی خودداری شده است و به جای آن با ارائه مثال این تعریف انجام شده است. از طریق این مثال‌ها هنرجو می‌تواند توان‌رسانی‌های دیگر را هم انجام دهد.

در صورت آمادگی کلاس و مشکل نشدن مبحث، شما می‌توانید تعریف رسمی توان رسانی به توان یک عدد گویای دلخواه را پس از ارائه مثال‌ها، به صورت زیر برای هنرجویان بیان کنید.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (0 < a)$$

### استفاده از ابزار :



### اهداف :

- آشنایی با تقریب اعشاری توان‌های گویای اعداد.
- بررسی درستی خواص توان رسانی اعداد با استفاده از تقریب اعشاری آنها
- تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای محاسبه تقریب اعشاری توان‌های گویای اعداد.

$$3^{\frac{2}{3}} \approx 2/08 \quad \text{و} \quad \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 \approx 2/08$$

در صورتی که کلاس آمادگی لازم را دارد معلم می‌تواند برای محاسبه  $\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2$  ابتدا  $3^{\frac{1}{3}}$  را محاسبه کرده سپس نمایش اعشاری آن را تا دو رقم اعشار در نظر

گرفته و به توان ۲ برساند و در مورد اختلاف دو مقدار (که ناشی از گرد کردن

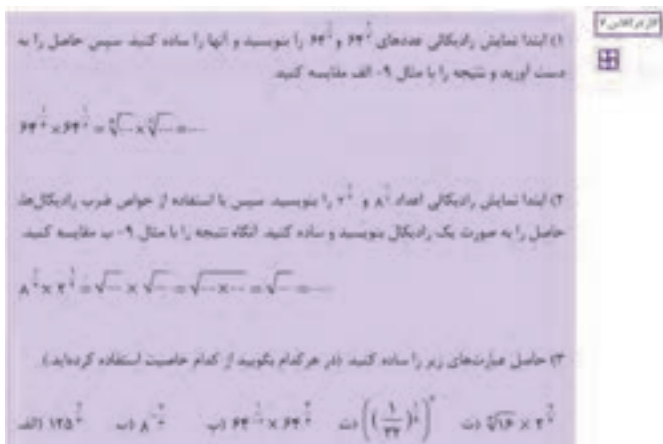
$۳\frac{1}{۳}$  می‌باشد) با هنرجویان بحث کند: (یعنی :  $۲/۰۷۳۶ = (۱/۴۴)^۲ \approx \left(۳\frac{1}{۳}\right)^۲$ )

همچنین می‌توان از هنرجویان خواست برای محاسبه  $\left(۳\frac{1}{۳}\right)^۲$  ابتدا نمایش اعشاری

$۳\frac{1}{۳}$  را تا سه یا چهار رقم اعشار بنویسند و سپس حاصل را به توان ۲ برسانند و

نتیجه حاصل را با نتیجه قبلی مقایسه نمایند تا به نقش دقت تقریب اعداد اولیه،

در دقت نتایج پی‌ببرند. (یعنی :  $۲/۰۷۹۹ = (۱/۴۴۲۲)^۲ \approx \left(۳\frac{1}{۳}\right)^۲$ )



### اهداف :

- بررسی خواص توان‌رسانی با اعداد گویا با استفاده از خواص رادیکال‌ها
- پرورش مهارت مقایسه کردن، استدلال کردن
- 1 همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹- الف مساوی است.

$$۶۴^{\frac{1}{۲}} \times ۶۴^{\frac{1}{۲}} = \sqrt{۶۴} \times \sqrt{۶۴} = ۴ \times ۸ = ۳۲$$

- 2 همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹- ب یکسان است.

$$۸^{\frac{1}{۲}} \times ۸^{\frac{1}{۲}} = \sqrt{۸} \times \sqrt{۸} = \sqrt{۸ \times ۸} = \sqrt{۶۴} = ۸$$



۲ حاصل عبارات زیر را ساده کنید. (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید)

$$\text{الف) } ۱۲۵^{\frac{۲}{۳}} = \left( ۱۲۵^{\frac{۱}{۳}} \right)^2 = (\sqrt[3]{۱۲۵})^2 = ۵^2 = ۲۵$$

خواص توان رسانی (خاصیت  $(a^m)^n = a^{mn}$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با توان

گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{ب) } ۸^{-\frac{۲}{۳}} = \left( ۸^{\frac{۱}{۳}} \right)^{-2} = (\sqrt[3]{۸})^{-2} = ۲^{-2} = \frac{1}{۲^2} = \frac{1}{4}$$

خواص توان رسانی (خاصیت  $a^{mn} = (a^m)^n$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با توان

گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{پ) } ۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۲}{۳}} = ۶۴^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = ۶۴^{\frac{3}{3}} = ۶۴^1 = ۶۴ = ۴^3 = \left( ۴^{\frac{1}{3}} \right)^5 = (\sqrt[3]{۶۴})^5 = ۲^5 = ۳۲$$

خواص توان رسانی (خاصیت  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با

توان گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{ت) } \left( \left( \frac{1}{32} \right)^{\frac{1}{5}} \right)^3 = \left( \sqrt[5]{\frac{1}{32}} \right)^3 = \left( \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8}$$

خواص توان رسانی (خاصیت  $(a^m)^n = a^{mn}$ )، نمایش رادیکالی یک عدد با توان

گویا، محاسبه ریشه یک عدد

$$\text{ث) } \sqrt[3]{۱۶} \times ۲^{\frac{2}{3}} = ۱۶^{\frac{1}{3}} \times ۲^{\frac{2}{3}} = (۴^2)^{\frac{1}{3}} \times ۲^{\frac{2}{3}} = ۴^{\frac{2}{3}} \times ۲^{\frac{2}{3}} = ۸^{\frac{2}{3}} = \left( ۸^{\frac{1}{3}} \right)^2 = (\sqrt[3]{۸})^2 = ۲^2 = ۴$$

برای رسیدن به پاسخ از نمایش رادیکالی یک عدد به نمایش آن عدد به صورت یک عدد

توان دار، خواص توان رسانی (خاصیت  $a^{mn} = (a^m)^n$  و  $a^m \times b^m = (ab)^m$ )، نمایش

رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبه ریشه یک عدد، استفاده شده است.

در جدول زیر، برخی از توان‌های  $a=4$  را می‌بینید:

$x$	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$4^x$	64		4	2	1		4	64

جدول را کامل کنید.

۲ مقادیر  $x$  را روی محور  $x$  ها و مقادیر  $4^x$  را روی محور  $y$  ها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.

۳ آیا نمودار  $4^x$ ، یک خط راست است؟

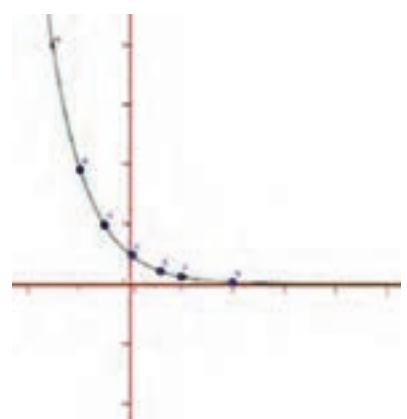
**اهداف:**

- آشنایی با نمودار رابطه  $y=a^x$  در حالت  $a = \frac{1}{4}$
- پرورش مهارت‌های حل مسئله، ارائه بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن.

۱ جدول تکمیل شده:

$x$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$(\frac{1}{4})^x$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

۲



۳ خیر نمودار مربوط به یک خط راست نیست.

می‌توان از هنرجویان خواست با مقایسه نمودار ارائه شده در متن درس و نمودار مربوط به سؤال کار در کلاس، تفاوت‌ها و شباهت‌های این دو نمودار را بیان کنند

و تفسیر کنند. (افزایشی یا کاهشی بودن، علامت اعداد سطر دوم این دو جدول که همگی مثبت هستند و ..) در مثال قبل از کار در کلاس نیز با استفاده از نمودار می‌توان تعبیری از توان‌های حقیقی یک عدد (مثلاً  $2^{\sqrt{2}}$ ) را به هنرجویان قوی‌تر ارائه داد.

## مسئله‌ها

(۱) به جای نقطه‌چین‌ها عبارت مناسب قرار دهید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ یافتن ریشه‌های یک عدد

$$۷^۲ = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{۴۹} = \dots$$

$$۷^۲ = ۴۹ \Rightarrow (۴۹)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{۴۹} = ۷$$

$$۱۷^۳ = ۴۹۱۳ \Rightarrow (۴۹۱۳)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{۴۹۱۳} = \dots$$

$$۱۷^۳ = ۴۹۱۳ \Rightarrow (۴۹۱۳)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{۴۹۱۳} = ۱۷$$

$$۱۳^۴ = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow (۲۸۵۶۱)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{۲۸۵۶۱} = \dots$$

$$۱۳^۴ = ۲۸۵۶۱ \Rightarrow (۲۸۵۶۱)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{۲۸۵۶۱} = ۱۳$$

$$۱۵^{-۴} = \left(\frac{1}{15}\right)^4 = \frac{1}{50625} \Rightarrow \left(\frac{1}{50625}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{50625}} = \dots$$

$$۱۵^{-۴} = \frac{1}{50625} \Rightarrow \left(\frac{1}{50625}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{50625}} = \frac{1}{15}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{19683} \Rightarrow \left(\frac{1}{19683}\right)^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{\frac{1}{19683}} = \dots$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^9 = \frac{1}{19683} \Rightarrow \left(\frac{1}{19683}\right)^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{\frac{1}{19683}} = \frac{1}{3}$$

$$۵^۶ = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{۱۵۶۲۵} = \dots$$

$$۵^۶ = ۱۵۶۲۵ \Rightarrow (۱۵۶۲۵)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{۱۵۶۲۵} = ۵$$

$$ج) (0/3)^5 = 0/00243 \Rightarrow (0/00243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{\dots} = \dots$$

$$(0/3)^5 = 0/00243 \Rightarrow (0/00243)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{0/00243} = 0/3$$

۲) در هر کدام از قسمت‌های زیر، مسئله‌ای در زمینه بیان شده طرح کنید که جواب آن عدد توان‌دار داده شده باشد:  
 الف)  $4^{\frac{1}{4}}$  (تکثیر باکتری‌ها)  
 ب)  $27^{\frac{1}{3}}$  (زمینه هندسی)

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ طرح مسئله نیمه ساختار یافته

الف)  $4^{\frac{1}{4}}$ : (تکثیر باکتری‌ها) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت ۴ برابر می‌شوند اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم وزن آنها پس از ۱۵ دقیقه  $4^{\frac{1}{4}}$  خواهد بود.

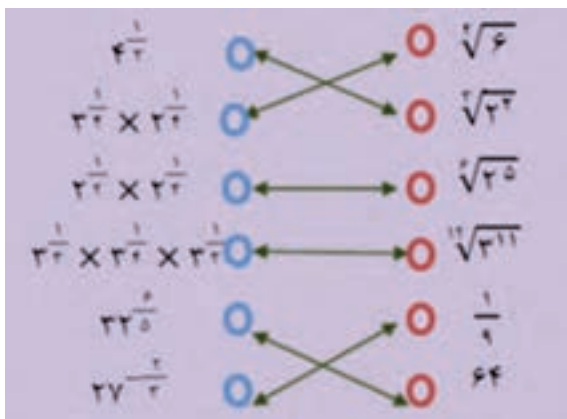
ب)  $27^{\frac{1}{3}}$ : (زمینه هندسی) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ واحد مکعب.

۱۳) هر یک از عددها را به عدد مساوی آن در ستون مقابل وصل کنید.

$4^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[3]{5}$
$3^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[4]{3}$
$2^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[3]{2}$
$3^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[4]{3}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{4}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$27$

### مهارت‌ها و فرایندها:

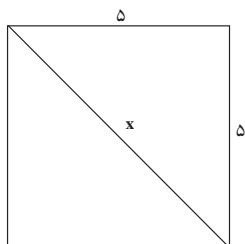
■ مقایسه کردن



### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورت عدد توان‌دار و عبارت رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.  
الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟



الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \Rightarrow x = 5\sqrt{2} = \sqrt{50} \approx 7.07$$

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۳۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

ب) وزن ۱ گرم از یک نوع باکتری که در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. پس از گذشت

۲۰ دقیقه:

$$8^{\frac{20}{60}} = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب:

$$1000^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1000} = 10$$

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ برابر است با:

$$10.8$$

که فقط  $a^2 = 6^2 + 9^2 \Rightarrow a^2 = 117 \Rightarrow a = \pm\sqrt{117} \approx \pm 10.8$

قابل قبول است.

۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارتهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشه پنجم عدد ۳۲

پ) ریشه پنجم عدد -۳۲

ت) ریشه‌های ششم عدد  $\frac{1}{64}$

ث) توان  $\frac{1}{3}$  عدد ۲۷

ج) توان  $\frac{1}{5}$  عدد ۳۲

### مهارت‌ها و فرایندها :

■ محاسبه توان‌های گویای یک عدد

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{ب)}$$

$$\pm\sqrt{121} = \pm 11 \quad \text{الف)}$$

$$\pm\sqrt[6]{\frac{1}{64}} = \pm\frac{1}{2} \quad \text{ت)}$$

$$\sqrt[5]{-32} = -2 \quad \text{پ)}$$

$$32^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{32} = 2 \quad \text{ج)}$$

$$27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3 \quad \text{ث)}$$

۶) حاصل هر کدام از عبارتهای زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار و سپس به صورت عبارت

رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف)  $4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}}$   
 ب)  $64^{\frac{1}{3}} \times 64^{\frac{1}{3}}$   
 پ)  $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$   
 ت)  $5^{\frac{1}{2}} \times 25^{\frac{1}{2}}$   
 ث)  $(3^{\frac{1}{2}})^2$   
 ج)  $(27^{-1})^{\frac{1}{3}}$

### مهارت‌ها و فرایندها :

■ ساده کردن توان‌های گویا

$$\text{الف)} \quad 4^{\frac{1}{2}} \times 4^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 4^1 = 4 = \sqrt[2]{4^2} = \sqrt[2]{16}$$

$$\text{ب)} \quad 64^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 64^{\frac{5}{6}} = \frac{1}{64^{\frac{5}{6}}} = \frac{1}{\left(64^{\frac{1}{6}}\right)^5} = \frac{1}{(\sqrt[6]{64})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$\text{پ)} \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{8^5}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ت) } 5^{\frac{1}{3}} \times 25^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}} = 5^{\frac{3}{3}} = 5$$

$$\text{ث) } \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 3^{\frac{2}{3}} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 = (\sqrt[3]{3})^2 = \sqrt[3]{9}$$

$$\text{ج) } (27^{-2})^{\frac{1}{6}} = 27^{-\frac{2}{6}} = 27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{27^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$$

۷) عبارتهای زیر را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

الف)  $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3}$

ب)  $\sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4}$

### مهارت ها و فرایندها :

■ ریشه گیری از عبارت توان دار

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3} = \sqrt{2}-\sqrt{3} \quad \text{ب)} \quad \sqrt[4]{(1-\sqrt{3})^4} = |1-\sqrt{3}| = \sqrt{3}-1 \quad \text{الف)}$$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.

(برای محاسبه توان های گویا می توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$2^x$	...	...	...	...	...	...	...

### مهارت ها و فرایندها :

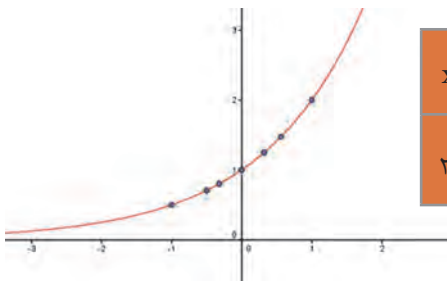
توان رسانی، کار با ماشین حساب

از هنرجویان بخواهید توان های اعداد دیگر را نیز رسم کرده و نمودارها را با نمودار

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x$$

(مثلاً نمودار)

(برای محاسبه توان های گویا می توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)



x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$2^x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt{2}$	2

در تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا، ایده اصلی آن است که خواص اساسی توان رسانی که در زیر می‌آید برقرار بمانند.

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

مثلاً، اگر بخواهیم  $a^{\frac{1}{n}}$  را تعریف کنیم، این عدد باید به گونه‌ای تعریف شود که داشته باشیم:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

این تساوی نشان می‌دهد که  $a^{\frac{1}{n}}$  باید ریشه  $n$ ام  $a$  باشد. از آنجا که اعداد منفی ریشه زوج ندارند ناچاریم که در حالت  $n$ های زوج،  $a$  را مثبت در نظر بگیریم و

طبق قرارداد آن ریشه  $n$ ام  $a$  که مثبت است را به عنوان  $a^{\frac{1}{n}}$  تعریف می‌کنیم،

یعنی  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ . در گسترش این تعریف به اعداد گویای دلخواه  $\frac{m}{n}$  برای حفظ

خواص اساسی توان رسانی  $a^n$  را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n} \times m} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

از آنجا که یک عدد گویا را به شکل‌های مختلف می‌توان نوشت، باید ثابت شود در تعریف بالا نوع نوشتن عدد گویا تأثیری بر نتیجه ندارد. یعنی اگر داشته باشیم

باید بتوانیم ثابت کنیم  $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n']{a})^{m'}$ . در حالتی که  $a$  مثبت

باشد اثبات این تساوی امکان‌پذیر است ولی در حالتی که  $a$  منفی باشد این تساوی ممکن است بی‌معنا شود زیرا ممکن است مجبور باشیم از یک عدد منفی ریشه

زوج بگیریم. مثلاً در توان رسانی عدد  $-1$  به توان  $\frac{1}{3}$  داریم  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$  ولی عبارت

$$(-1)^{\frac{2}{6}} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{-1}$$
 بی‌معناست.

برای آنکه بدون هیچ محدودیتی بتوانیم توان رسانی به توان اعداد گویا را انجام دهیم و از خواص اساسی توان رسانی استفاده کنیم، قرارداد جهانی بر این است که در توان رسانی به توان اعداد گویا پایه همواره مثبت است و توان رسانی اعداد منفی به توان اعداد گویا (غیر صحیح) تعریف نمی‌شود.

با این قرارداد، تعریف انجام شده مشکلی در بر ندارد و خواص اساسی توان رسانی به توان اعداد گویا برقرار خواهند بود، یعنی برای اعداد حقیقی مثبت  $a$  و  $b$  و اعداد



گویای  $r$  و  $s$  داریم:

$$a^{r \cdot s} = a^r a^s, \quad (a^r)^s = a^{rs}, \quad (ab)^r = a^r b^r$$

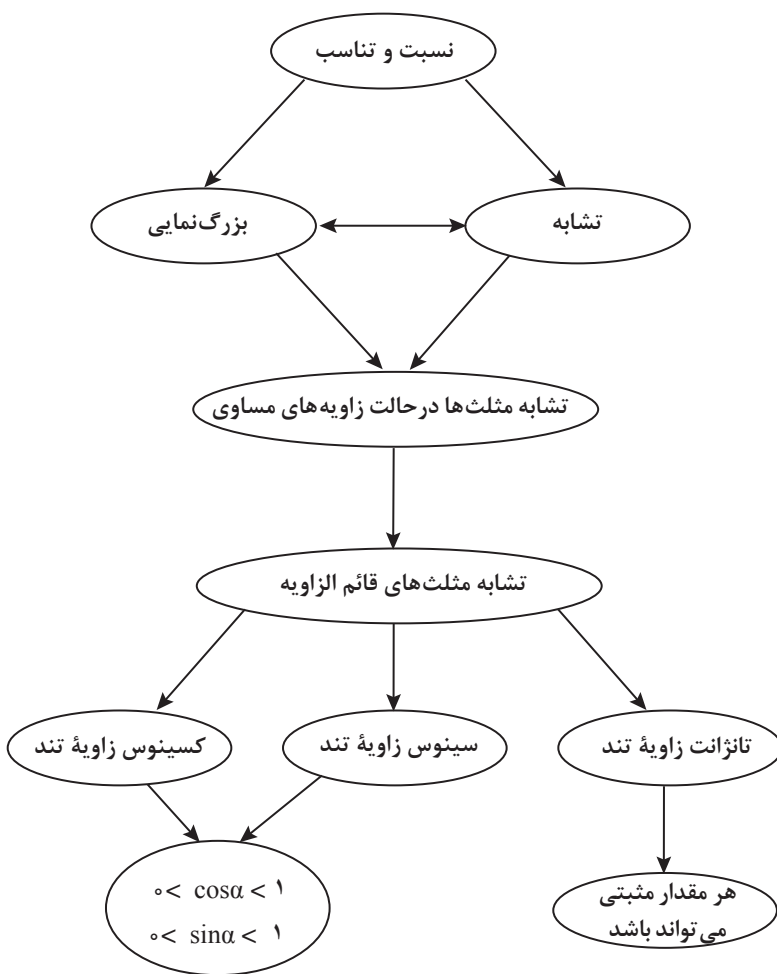
مفهوم توان رسانی به توان اعداد حقیقی هم قابل تعریف است. از آنجا که شناخت ما از اعداد حقیقی از طریق تقریبات گویای این اعداد است، برای هر عدد حقیقی مانند  $c$  فرض کنید که  $\{r_n\}$  دنباله‌ای از اعداد گویا باشد که  $c$  را تقریب می‌زند، به عبارت دیگر این دنباله از اعداد گویا به  $c$  همگراست. فرض کنید  $a$  عدد حقیقی مثبتی باشد، برای تعریف  $a^c$  مقادیر  $a^{r_n}$  ها را حساب می‌کنیم. ثابت می‌شود اعداد  $a^{r_n}$  عدد حقیقی خاصی را تقریب می‌زنند (یعنی به عدد حقیقی خاصی همگرا هستند)، آن عدد را طبق تعریف  $a^c$  می‌نامیم. مثلاً برای یافتن  $5^{\sqrt{2}}$  ابتدا دنباله تقریبات اعشاری  $\sqrt{2}$  را به صورت  $\{r_n\}$  در نظر می‌گیریم و مقادیر  $5^{r_n}$  را محاسبه می‌کنیم. این مقادیر با بزرگ شدن  $n$  به  $5^{\sqrt{2}}$  نزدیک می‌شوند. برای  $n$  به اندازه کافی بزرگ  $5^{r_n}$  تقریبات اعشاری  $5^{\sqrt{2}}$  را تا هر مقدار که خواسته باشیم نشان خواهد داد.

با این تعریف، خواص اساسی توان رسانی برای توان‌های اعداد حقیقی به همان شکل برقرار خواهند بود.



## فصل ششم

# نسبت‌های مثلثاتی



## اهداف کلی فصل

- درک مفهوم ضریب بزرگ‌نمایی  $k$  در دو شکل متشابه برای  $k > 1$  و  $0 < k < 1$ .
- محاسبه مقدار  $k$  با داشتن اندازه دو شکل متشابه
- درک نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس یک زاویه تند به عنوان ویژگی زاویه
- شناسایی مقادیر ممکن برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه تند
- درک رابطه بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی با تغییرات زاویه

### عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

- هنرجویان باید قادر باشند:
- با داشتن اندازه دو شکل متشابه، مقدار  $k$  را تعیین کند.
- نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس یک زاویه تند را با رسم مثلث قائم‌الزاویه محاسبه کند.
- با داشتن نسبت مثلثاتی، زاویه متناظر با آن را از طریق رسم محاسبه کند.
- از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در حل مسائل استفاده کند.

### پیش‌نیازهای فصل :

- آشنایی با دو مفهوم نسبت و تناسب
- آشنایی با مفهوم تشابه دو مثلث

### ابزارهای کمک آموزشی :

خط‌کش، نقاله، گونیا، ماشین حساب و رایانه

فرایند	توصیف فرایند	مثال
حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
ارتباط کلامی	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها	استفاده از تشابه بین دو مثلث برای یافتن نسبت اضلاع متناظرشان و تساوی آنها استفاده از چوب و سایه چوب برای یافتن ارتفاع اهرام مصر
استدلال و اثبات	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	توضیح منوچهر به معلم خودش در مورد سؤال ایجاد شده در سینما (چگونگی بزرگی تصویر روی پرده سینما نسبت به فیلم) توضیح علی به معلم خودش در مورد یافتن طول نردبان باز شده در ماشین آتش‌نشانی
پیوندها و اتصالات	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	برای یافتن ارتفاع کوه از مفهوم تشابه و روابط اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه استفاده کند. برای یافتن طول نردبان جرتقیل آتش‌نشانی از رابطه بین نسبت مثلثاتی استفاده کند.
بازنمایی‌ها	به‌کارگیری استدلال	دلیل عدم تشابه دو شکل را بیان کند دلیل تغییرات نسبت‌های مثلثاتی را با تغییرات زاویه بیان کند
سایر مهارت‌های تفکر	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	دلیل درستی یا نادرستی روابط را در مسائل آخر فصل بیان کند
مهارت‌های تفکر	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	طول سیم نگهدارنده دکل را به کمک مفهوم سینوس بیابد. طول ارتفاع انتهای نردبان را در سطح زمین به کمک سینوس بیابد.
مهارت‌های تفکر	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	در همه قسمت‌های فصل وجود دارد
سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	مقایسه نسبت‌های $\frac{CA}{CB}$ ، $\frac{CE}{CB}$ ، $\frac{CD}{CB}$ و ذکر مساوی بودن آنها به کمک تشابه یا با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع

## بخش اول: تشابه

### اهداف بخش

- درک مفهوم بزرگ‌نمایی (با ضریب  $0 < k < 1$  و با ضریب  $k > 1$ )
- آشنایی با تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها
- استفاده از مفهوم بزرگ‌نمایی و تشابه در حل مسائل

### واژه‌های کلیدی:

تشابه، بزرگ‌نمایی

### نگاه کلی به بخش

مطالب این بخش در ارتباط با تشابه دو شکل و مفهوم بزرگ‌نمایی است. برای رسیدن به مفهوم تشابه از مفهوم کمکی بزرگ‌نمایی استفاده شده است، ولی مفهوم اصلی، تشابه و حالت تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌های دو مثلث است. تشابه کاربردهای بسیار زیاد در زندگی روزمره مانند معماری، ماکت‌سازی، نقشه‌کشی، رسم فنی، بزرگ کردن و کوچک کردن شکل‌ها در رایانه، عکاسی، نجوم، مساحی، تصویربرداری پزشکی، ... دارد. به‌علت نیاز به این مفهوم در تعریف نسبت‌های مثلثاتی و به دلیل نبود قضیه حالت‌های تشابه در کتاب‌های درسی ریاضی سال‌های گذشته، ابتدا مفهوم تشابه از طریق مفهوم بزرگ‌نمایی یادآوری می‌شود. سپس رابطهٔ تالس برای متشابه بودن دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها مطرح شده است.

### ورود به مطلب:

بهتر است از مثال‌هایی که در اطراف خود می‌بینیم و اجسام متشابهی که دیده می‌شوند، شروع کنیم. مانند عکس منظره و خود منظره، نقشهٔ شهر و شهر، ماکت ساختمان و خود ساختمان. سپس مفهوم تشابه و نسبت تشابه یادآوری شود و کاربردهای آن در نقشه و ماکت و عکس و ... ذکر شود. بعد از این مقدمات می‌توانید به کتاب مراجعه کنید و شیوهٔ ساختن شکل‌های متشابه و ویژگی اساسی ثابت بودن نسبت طول پاره‌خط‌های متناظر را تذکر دهید. به عنوان مثال بهتر است در نقشهٔ بین دو شهر، دو نقطهٔ دلخواه را انتخاب نموده و با اندازه‌گیری مستقیم طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند و مقایسه با فاصلهٔ واقعی بین آن دو شهر و یافتن نسبت این دو عدد و ادامهٔ این کار حداقل برای دو

نقطه دلخواه دیگر به این نسبت برسیم. همچنین در استفاده از ضریب بزرگ نمایی متوجه ضرورت بیان این مفهوم و نحوه استفاده از آن می شویم. لطفاً به کتاب کار قسمت تشابه رجوع شود. (مثال‌های حل شده)

## فعالیت آموزشی

دو شکل متشابه رو به رو را در نظر بگیرید.

۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

۲) هر یک از اضلاع ABCD چند برابر اضلاع متناظرش در WXYZ است؟

۳) هر یک از اضلاع WXYZ چند برابر اضلاع متناظرش در ABCD است؟

۴) نسبت اضلاع ABCD به WXYZ را با نسبت اضلاع WXYZ به ABCD مقایسه کنید.

۵) در شکل‌های زیر، نسبت اضلاع را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

### اهداف موضوعی:

- آشنایی با مفهوم بزرگ‌نمایی و معرفی ضریب بزرگ‌نمایی
- محاسبه ضریب بزرگ‌نمایی  $k$  در دو شکل متشابه
- تشخیص رابطه بین مقدار  $k$  با بزرگ شدن یا کوچک شدن شکل

### مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، مقایسه کردن

$$\frac{AB}{WX} = \frac{BC}{XY} = \frac{CD}{ZY} = \frac{AD}{WZ} = 2 \quad (1)$$

۲ برابر

$\frac{1}{2}$  برابر



۴) معکوس یکدیگرند

$$\frac{HL}{MQ} = \frac{3}{6} \neq \frac{HJ}{MN} = \frac{7}{10} \neq \frac{JK}{NP} = \frac{3}{6} \neq \frac{LK}{QP} = \frac{7}{10} \quad (۵)$$

خیر، متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان برابر نیست. کافی است نقاط دلخواه روی یکی از این عکس‌ها انتخاب کنیم و فاصله بین آنها را بیابیم و با فاصله نقاط نظیرشان در عکس دیگر مقایسه کنیم تا وجود تفاوت در نسبت‌ها را تشخیص دهیم.



### اهداف:

- بررسی مفهوم تشابه از طریق مقایسه نسبت اضلاع متناظر
- ساختن شکل متشابه از طریق دستگاه مختصات (طول و عرض نقاط)
- پرورش مهارت استدلال کردن و تفکر بصری
- ۱ خیر، زیرا، نسبت طول اضلاع متناظر متفاوت است. کافی است چند نقطه متناظر را انتخاب کنیم و فاصله‌های متناظر را اندازه‌گیری کنیم و نسبت آنها را به دست آوریم.
- ۲ الف) شکل ۱، زیرا ارتفاع شکل عوض نمی‌شود ولی طول آن سه برابر می‌شود.

ب) شکل ۲

پ) شکل ۳

### توصیه آموزشی:

- به دبیران توصیه می‌شود در حین تدریس به موارد زیر اشاره نمایند.
- بعد از یافتن ضریب بزرگ نمایی، زمانی که k بین صفر و ۱ است ذکر کنیم که

استفاده از لفظ بزرگ نمایی لزوماً به معنی بزرگ شدن نیست بلکه می‌تواند شکل اولیه را کوچک‌تر کند و بستگی به  $k$  دارد.

■ در شکل پروانه‌ها بهتر است نقاط دلخواهی را روی شکل انتخاب کنید و با یافتن فاصله بین این نقاط و نقاط متناظرشان و همچنین یافتن زاویه‌های نظیر در شکل‌های (الف) و (ب) و (پ) به سؤال‌ها پاسخ داد.

■ همچنین می‌توان با قرار دادن پروانه‌ها در مستطیل‌ها طول و عرض آنها را بررسی نمود.

در ادامه در زمینه تاریخی با بیان یک مسئله واقعی (محاسبه طول ارتفاع اهرام مصر) قضیه تشابه مثلث‌ها از طریق تساوی زاویه‌ها به‌طور غیرمستقیم ارائه شده است. اثبات درستی این قضیه به علت طولانی بودن و دور شدن از هدف این فصل ارائه نشده است.

توجه شود که خورشید در فاصله‌ای بسیار دور قرار دارد و شعاع‌های نوری که به یک جسم تابیده می‌شود با هم موازی محسوب می‌شوند زیرا خطای عدم توازی این شعاع‌ها با دستگاه‌های اندازه‌گیری ما قابل تشخیص نیست. با استفاده از خطوط موازی و مورب می‌توان به سؤال گفته شده در قسمت تالس جواب داد. به جای مسئله تاریخی، می‌توان زمینه‌های دیگری مانند یافتن ارتفاع تیرک پرچم و... را انتخاب نموده و برای یادگیری بیشتر در کلاس استفاده نمود.

نکته: توجه شود شرط تساوی زاویه‌ها برای برقراری تشابه بین چندضلعی‌های بیشتر از سه ضلع کافی نیست و برای تشابه بودن هر دو چندضلعی باید برابری نسبت اضلاع رأس‌های نظیر هم برقرار باشد.

به‌عنوان مثال در فعالیت ۱ با اینکه دو شکل مستطیل هستند و زاویه‌های برابر دارند ولی تشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان مساوی نیست.

در مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  که در رأس  $C$  قائمه است،  $KN$  بر  $BC$  عمود است.  
الف) کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.



### اهداف:

■ کسب مهارت تشخیص مثلث‌های متشابه

■ کسب مهارت تشخیص اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه، پرورش مهارت استدلال کردن

الف) دو مثلث  $ABC$  و  $KBH$  به دلیل داشتن زاویه‌های مساوی، متشابه‌اند و ضلع  $AB$  نظیر ضلع  $KB$  می‌باشد زیرا هر دو روبروی زاویه قائمه هستند.

$$\frac{AB}{KB} = \frac{BC}{BH} = \frac{CA}{KH} \quad (\text{ب})$$

ممکن است هنرجویان در تشخیص اضلاع متناظر در شکل‌های متشابه دچار مشکل باشند. در مثلث‌های متشابه اضلاع متناظر آنهایی هستند که زاویه روبروی آنها مساوی هستند.

توجه داشته باشید که در هر تشابهی که بین دو شکل برقرار می‌شود، ابتدا یک تناظر بین نقاط دو شکل برقرار می‌شود و تحت این تناظر است که مفهوم اضلاع متناظر و زاویه‌های متناظر مشخص می‌شوند. البته دو شکل دلخواه، ممکن است تحت تناظرهای متفاوتی با هم متشابه باشند.

در این بخش می‌توانید برای یادگیری عمیق‌تر و ارزیابی بیشتر هنرجویان از تمرین‌ها و مسائل بخش تشابه در کتاب کار استفاده نمایید.

## مسیرهایی برای توسعه

الف) تحقیق کنید آیا برای تشابه دو مثلث قوانین دیگری وجود دارد؟ به تمرین ۱ در کتاب کار در بخش تشابه توجه شود.

ب) آیا می‌توانید قضایای دیگر تشابه دو مثلث را بیان کنید؟

پ) تحقیق کنید ضریب بزرگ‌نمایی منفی وجود دارد یا خیر؟ در صورت وجود، به چه معنا است؟

ت) آیا به کمک رایانه و فقط با کشیدن شکل از یک طرف و بزرگ نمودن آن به شکلی متشابه با آن شکل می‌رسید؟ چرا؟

## بخش دوم: تانژانت یک زاویه

### اهداف بخش

- درک مفهوم تانژانت یک زاویه تند
- محاسبه مقدار تقریبی تانژانت یک زاویه تند
- استفاده از مفهوم تانژانت در حل مسائل واقعی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات تانژانت زاویه
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه

### واژه‌های کلیدی:

تانژانت زاویه تند، نسبت اضلاع

### نگاه کلی به بخش:

این بخش با طرح مسئله‌ای واقعی در مورد ارتباط ابعاد تصویر تشکیل شده روی پرده سینما و فاصله پرده از چشمه نور آغاز می‌شود. سپس از طریق یک فعالیت هندسی، نسبت‌هایی یکسان تشکیل می‌شود که همگی با داشتن یک زاویه تند به دست می‌آیند. این نسبت‌های یکسان در صفحات بعدی به عنوان تانژانت معرفی خواهد شد. علت یکسان شدن این نسبت‌ها، مفهوم تشابه است که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفته است.

شیوه تعریف، بنا کردن یک مثلث قائم‌الزاویه روی زاویه داده شده است و تذکر این نکته ضروریست که طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ساخته شده روی زاویه، تأثیری در تانژانت ندارد. با این شیوه تعریف، مقدار تقریبی تانژانت یک زاویه تند از طریق محاسبه مستقیم و اندازه‌گیری اضلاع توسط هنرچو به دست می‌آید. در ادامه، رابطه بین تغییرات تانژانت و تغییرات زاویه از روی شکل بررسی می‌شود. همچنین مسئله یافتن زاویه‌ای که تانژانت آن داده شده است، در طی یک فعالیت به طور هندسی حل می‌شود. در پایان نحوه کار با ماشین حساب برای محاسبه تانژانت زوایای گوناگون بیان می‌شود.

### ورود به مطلب:

برای معرفی نسبت‌های مثلثاتی با طرح یک مسئلهٔ مربوط به زندگی پیرامونی شروع کنید و از تعریف مستقیم نسبت‌های مثلثاتی پرهیز کنید. هر مسئله‌ای که حل آن نیازمند یک نسبت مثلثاتی است می‌تواند به عنوان ورود به مفهوم استفاده شود. ولی هر چه مسئله ساده‌تر باشد و به فهم هنرجو نزدیک‌تر باشد، و مستقیم‌تر به نسبت مثلثاتی مربوط باشد، بهتر است. رسم شکل فرضی از مسئلهٔ واقعی که در آن اطلاعات مورد نیاز برای حل مسئله موجود می‌باشد، از راهبردهای حل مسئله است و این راهبرد در مسائل مربوط به نسبت‌های مثلثاتی بسیار مناسب است. محاسبهٔ ارتفاع برج‌های مهم شهر یا ساختمان‌های مرتفع یا ارتفاع نقاط طبیعی مثل کوه‌ها و عرض رودخانه‌ها و ... می‌تواند موجب جلب توجه هنرجویان شود.

### توصیهٔ آموزشی:

در صورت نیاز به ارزشیابی تکوینی به فعالیت جایگزین توجه کنید. (کتاب کار فعالیت ابتدای بخش تانژانت)

## فعالیت آموزشی

فعالیت ۲



در شکل روبه‌رو، یک زاویه تند به رأس  $A$  رسم شده است.

۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطه نامواضع مانند  $B$  و  $C$  و  $D$  در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید که ضلع دیگر را به ترتیب در نقاط  $E$  و  $F$  و  $G$  قطع کند.

۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش، مشخص کنید که تساوی‌های زیر برقرارند:

$$\frac{EB}{AB} = \frac{FC}{AC} = \frac{GD}{AD}$$

۳) نتیجه مشخصه‌ای را که در شکل دیده می‌شود، بررسی کنید و به کمک آن فرضی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

### اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت اضلاع ضلع مقابل به زاویهٔ تند به ضلع مجاور با آن در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند

## مهارت‌ها و فرایندها:

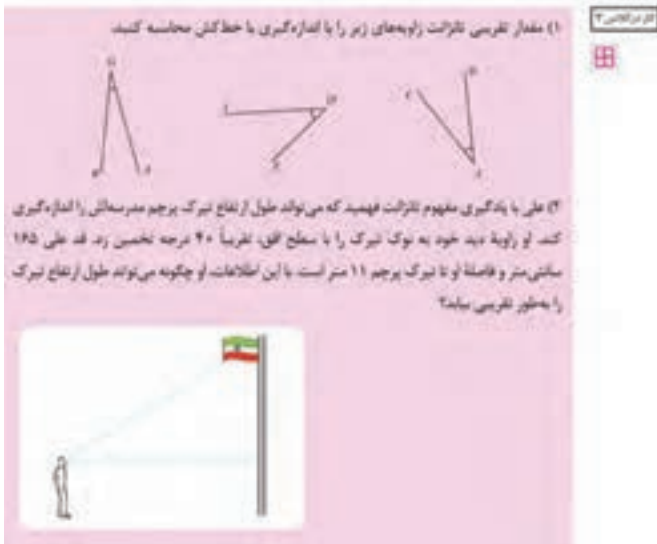
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن  
 1 لازم است هنرجو در رسم خطوط عمود بر هم توانایی استفاده از خط‌کش و گونیا را داشته باشد.

۲ با اندازه‌گیری پاره‌خط‌های ذکر شده به نسبت‌های تقریباً مساوی در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در زاویه A مشترکند می‌رسیم. بهتر است هنرجویان با خط‌کش این کار را انجام داده و نتیجه‌گیری کنند. البته تساوی‌های به دست آمده تقریبی خواهند بود.

۳ با استفاده از زاویه‌های مثلث در مثلث‌های قائم‌الزاویه، دیده می‌شود که طبق نتایج بخش قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه (در شکل) متشابه‌اند (زیرا همگی دارای یک زاویه راست بوده و در زاویه تند A مشترکند). بنابراین می‌توانیم نسبت اضلاع متناظر را بنویسیم و با طرفین وسطین و نوشتن نسبت جدید، نتیجه بگیریم که:

$$\frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF} = \frac{GD}{AG}$$

این تساوی‌ها مبنای اصلی تعریف نسبت مثلثاتی تانژانت هستند.



## اهداف:

■ کسب مهارت در محاسبه تقریبی تانژانت یک زاویه، به کارگیری تانژانت در حل مسائل، برقراری پیوند و اتصال با مسائل زندگی روزمره  
 1 هدف این تمرین، یافتن مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های دلخواه داده شده

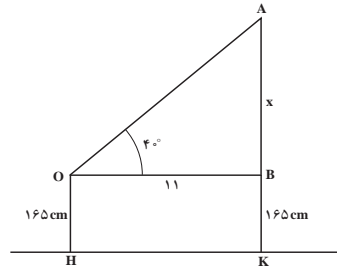
در حالت‌های مختلف است. برای این کار هنرجو باید برای هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب بسازد. کافی است از نقطه‌ای روی یکی از اضلاع زاویه‌های داده شده بر ضلع دیگر عمود کند. سپس با اندازه‌گیری اضلاع روبرو به زاویه و مجاور به زاویه و تقسیم آنها بر هم مقدار تقریبی تانژانت زاویه را محاسبه کند.

۲ در این سؤال هنرجو در یک مسئله محیط پیرامونی خود قرار می‌گیرد. برای حل به شکل زیر توجه کنید.

$$OB=HK=11\text{m}$$

$$= \tan 40^\circ = \frac{x}{11}$$

$$\Rightarrow x = 11 \tan 40^\circ \approx 9.23$$



$$\Rightarrow \text{طول ارتفاع تیرک} = x+BK = 11 \tan 40^\circ + 1.65 \approx 10.88$$

در ادامه سؤالی درباره مقادیر ممکن برای تانژانت یک زاویه مطرح می‌شود که در طی یک فعالیت جواب آن به دست می‌آید.

## فعالیت آموزشی

در شکل زیر  $AC$  بر  $BC$  عمود است

۱) بی‌ی‌ک از نسبت‌های  $\frac{AH}{BC}$  و  $\frac{AK}{BC}$  و  $\frac{AM}{BC}$  چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس  $A$  تشکیل می‌شود این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سوال برای معده‌های سخت دیگر چیست؟

## اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین تغییرات زاویه و تانژانت آن زاویه

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری، یافتن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه، تعمیم دادن

1 در شکل صفحه قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه در ضلع CB مشترکند ولی زاویه‌های تند آنها در رأس B تغییر می‌کند. این نسبت‌ها تانژانت زاویه‌های تندی هستند که در رأس B ساخته شده‌اند. زیرا همگی این نسبت‌ها به صورت نسبت طول ضلع مقابل به این زاویه‌ها به ضلع مجاور این زاویه‌ها هستند.

نسبت‌های  $\frac{CA}{CB}$  و  $\frac{CE}{CB}$  و  $\frac{CD}{CB}$  به ترتیب تانژانت زاویه‌های  $B_1$  و  $B_2$  و  $B_3$  می‌باشند.

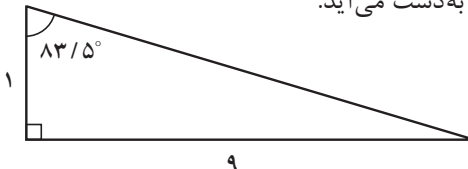
$$\tan B_3 = \frac{AC}{BC}, \quad \tan B_2 = \frac{EC}{BC}, \quad \tan B_1 = \frac{DC}{BC}$$

2 چون BC ثابت و  $DC < EC < AC$  پس  $\frac{AC}{BC} > \frac{EC}{BC} > \frac{DC}{BC}$  یعنی با بزرگ شدن زاویه در رأس B این نسبت‌ها هم بزرگ‌تر می‌شوند.

3 از آنجا که نسبت‌های بند قبل همان تانژانت آن زاویه‌ها بودند نتیجه می‌شود: هرچه زاویه تند بزرگ‌تر شود تانژانت آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و اگر زاویه تند کوچک‌تر شود تانژانت آن کوچک‌تر می‌شود. یعنی

$$\tan B_3 > \tan B_2 > \tan B_1$$

4 بله، کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول اضلاع زاویه قائمه آن 1 و 9 باشد در این صورت زاویه روبرو به ضلع به طول 9 جواب مسئله است. زیرا در محاسبه تانژانت این زاویه نسبت  $\frac{9}{1}$  حساب می‌شود که 9 نمایش طول ضلع روبرو به زاویه و 1 نمایش طول ضلع مجاور به آن زاویه است. با اندازه‌گیری این زاویه با نقاله مقدار تقریبی  $83/5$  درجه به دست می‌آید.



اگر به جای عدد 9 از هر عدد مثبت دیگری هم استفاده کنیم، می‌توانیم عملیات بالا را تکرار کنیم و هر عدد مثبتی تانژانت زاویه‌ای خواهد بود.



## اشباهات ممکن

- ممکن است با توجه به انتخاب ضلعی به طول واحد در حل سؤال ۴ در این فعالیت این حس در هنرجو ایجاد شود که همیشه ضلع مقابل به زاویه تند، همان تانژانت آن زاویه است. بهتر است در اینجا ضمن تذکر این مورد مثال‌های دیگری زده شود که لزوماً از ضلعی به طول واحد استفاده نشود. مثلاً از اعدادی به عنوان طول ضلع استفاده کرد که نسبت آنها ۹ شود.
- به هنرجویان توضیح داده شود که نسبت مثلثاتی یک زاویه مانند  $\tan 40^\circ$  یک عدد است و منظور حاصل ضرب یک عدد در یک عبارت نیست. (به کتاب کار بخش تانژانت یک زاویه در تمرین ۲ توجه شود)

### استفاده از ابزار:

برای یافتن مقدار تانژانت زاویه‌ها می‌توان از ماشین‌های حساب علمی کمک گرفت. توجه داشته باشید که در استفاده از ماشین حساب واحد اندازه‌گیری زاویه به درستی انتخاب شده باشد چون در هر ماشین حسابی می‌توان واحد اندازه‌گیری زاویه را درجه، رادیان، یا گراد انتخاب کرد. روش استفاده به صورت تصویری توضیح داده شده است.

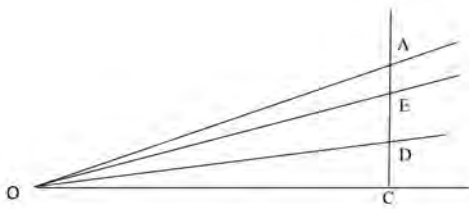


### اهداف:

- درک مفهوم تانژانت به روش هندسی
- به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی با تقریب اعشاری مناسب
- پرورش مهارت استدلال کردن، نمایش یک مفهوم با بازنمایی‌های مختلف، کار با ماشین حساب
- ۱ در شکل صفحه بعد دیده می‌شود که با نزدیک شدن اندازه زاویه به صفر تانژانت

آن نیز به صفر نزدیک می‌شود. زیرا در نسبتی که تانژانت را می‌سازد، مخرج ثابت است ولی صورت از هر عدد مثبت دلخواهی کوچک‌تر می‌شود و این به معنای نزدیک شدن تانژانت به صفر است.

۲ هرچه زاویه بزرگ‌تر شود و به  $90^\circ$  درجه نزدیک شود، تانژانت نیز بزرگ‌تر می‌شود و از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود. زیرا مخرج ثابت است ولی صورت از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند مقدار تانژانت به بی‌نهایت می‌رود. با ماشین حساب نیز می‌توان به این مطلب رسید.



$$\tan 80^\circ \approx 5/67$$

$$\tan 81^\circ \approx 6/31$$

$$\tan 82^\circ \approx 7/11$$

$$\tan 83^\circ \approx 8/14$$

$$\tan 84^\circ \approx 9/51$$

$$\tan 85^\circ \approx 11/43$$

$$\tan 86^\circ \approx 14/3$$

$$\tan 87^\circ \approx 19/0.8$$

$$\tan 88^\circ \approx 28/63$$

$$\tan 89^\circ \approx 57/28$$

$$\tan 89/5^\circ \approx 114/58$$

$$\tan 89/7^\circ \approx 190/98$$

$$\tan 89/9^\circ \approx 572/95$$

$$\tan 89/95^\circ \approx 1145/91$$

## مسئله‌ها

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های  $40^\circ$  و  $50^\circ$  درجه را پیدا کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله

کافی است به کمک نقاله زاویه  $40^\circ$  درجه رسم کنید و با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های تند آن  $40^\circ$  درجه است و با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع روبرو و مجاور به این زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور این زاویه را که جواب مسئله خواهد بود، به دست آورید. همین عملیات را برای زاویه  $50^\circ$  درجه تکرار کنید.



$$\tan 40^\circ \approx \frac{2/5}{3} \approx 0/83$$

۳) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

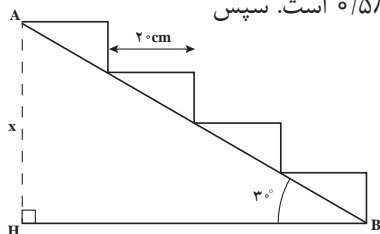
مشابه بند (۴) فعالیت ۴ یا مثال ارائه شده می‌توان عمل کرد. (این زاویه تقریباً ۸۲/۵ درجه است).

۳) با توجه به شکل روبه‌رو ارتفاع نقطه A از زمین را بیابید (فرض همه بندهای ۲ متر است).

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، تفکر بصری

ابتدا تانژانت زاویه ۳۰ درجه را می‌یابیم که تقریباً مساوی ۰/۵۸ است. سپس



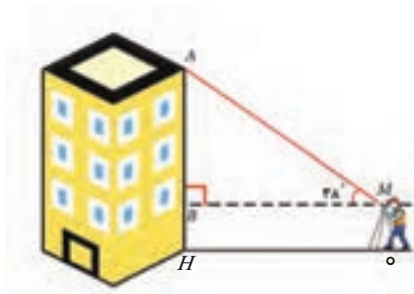
$$BH = 4 \times 2 = 8 \text{ cm}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = x = 8 \times 0.58 = 4.64$$

۴) برای محاسبه ارتفاع ساختمان، مورین زاویه‌ای را در یک سطح افقی در نقطه M به فاصله ۱۵ متری از ساختمان (نقطه O) مسطر کرد و به نقطه بالای ساختمان نگاه کرد. زاویه دید برای ۳۸ درجه بدست آمده است. اگر ارتفاع مورین از زمین یک متر و ۵۴ سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را بدست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری



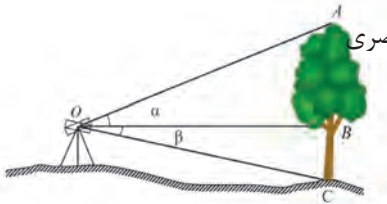
$$\left. \begin{aligned} BH = OM = 15.4 \text{ cm} = 1 / 54 \text{ m} \\ OH = 1.54 \text{ m} \\ \tan \alpha = \frac{AB}{BM} \Rightarrow AB = 15.4 \tan 38^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

متر  $AH = AB + BH \approx 13.25$  ارتفاع ساختمان

۵۵ به کمک دوربین زاویه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  را به ترتیب  $23^\circ$  درجه و  $12^\circ$  درجه بدست آمدند و فاصله افقی دستگاه تا درخت ۱۸ متر است. با توجه به شکل ارتفاع درخت را پیدا کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

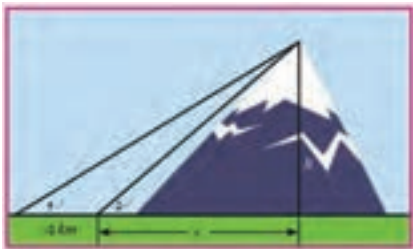


در این دو مثلث  $\hat{B} = 90^\circ$  و  $OB = 18m$  و  $\beta = 12^\circ$  و  $\alpha = 23^\circ$  بنابراین

$$\left. \begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{AB}{OB} \rightarrow AB = OB \tan \alpha = 18 \tan 23^\circ \\ \tan \beta &= \frac{BC}{OB} \rightarrow BC = OB \tan \beta = 18 \tan 12^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

ارتفاع درخت  $= AB + BC \approx 7.64 + 3.83 = 11.47$

۶۶ یک مهندس نقشه‌بردار، برای محاسبه ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه، نوک کوه با زاویه  $50^\circ$  درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه ۱۰ کیلومتر از کوه دور می‌شود مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویه  $40^\circ$  درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

$$\left. \begin{aligned} \tan 40^\circ &= \frac{h}{x/5 + x} \\ \tan 50^\circ &= \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan 50^\circ} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tan 40^\circ = \frac{h}{x/5 + \frac{h}{\tan 50^\circ}} \Rightarrow h \approx 1/43$$

## بخش سوم: سینوس یک زاویه

### اهداف بخش

- درک مفهوم سینوس یک زاویه تند
- محاسبه مقدار تقریبی سینوس یک زاویه تند
- استفاده از سینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات سینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویه تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

### واژه‌های کلیدی:

سینوس زاویه تند، نسبت اضلاع

### نگاه کلی به بخش:

روش آموزشی این بخش طرح مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن استفاده از نسبت مثلثاتی سینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم سینوس ساخته می‌شود. ویژگی‌های سینوس یک زاویه تند و یافتن سینوس یک زاویه تند از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن سینوس زاویه‌های تند ارائه می‌شود.

### ورود به مطلب:

دبیر با هر مسئله‌ای شبیه مسئله‌ای که در این بخش مطرح شده است می‌تواند آموزش را شروع کند و انگیزه تعریف سینوس را ایجاد کند. فعالیت ۶ نمونه‌ای از حل مسئله‌ای است که در آن مفهوم سینوس وجود دارد و می‌توان از طریق آن مفهوم سینوس را تعریف کرد.

فرض کنید دکل به ارتفاع ۳۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویه  $30^\circ$  درجه ساخته است، مهار می‌شود. کارگری زو این سیم در نقطه‌ای مانند  $A$  چنان می‌ایستد که سیم در نقطه‌ای مانند  $B$  با سیم عمود باشد. کارگر دیگری به وسیله یک متر فلزی، فاصله  $A$  تا  $B$  را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت  $\frac{EM}{AM}$  را حساب می‌کند.

۱) کارگری با طول فدهای متفاوت، این کار را تکرار می‌کند و هر کدام، مقداری را برای نسبت طول فده به فاصله متر تا نقطه  $A$  به دست می‌آورند. نشان دهید همه آنها یک مقدار را به دست می‌آورند.

۲) اگر نسبت  $\frac{BM}{AB}$  را حساب کنید، مقدار آن با نسبتی که کارگران به دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟

۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه، مانند شکل زیر، که یک زاویه آن  $30^\circ$  درجه است، نشان دهید نسبتی که کارگران به دست آورده‌اند، برابر است با  $\frac{FK}{EG}$ . این نسبت را با اندازه‌گیری یا خط کش به دست آورید (واضحاً، تشابه دو مثلث  $AHH$  و  $KFK$  را نشان دهید).

۴) با استفاده از این نسبت، طول سیم نگهدارنده دکل را حساب کنید.

## اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت ضلع مقابل به زاویه تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ساخته شده روی اضلاع یک زاویه تند.

## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

## ابزار مورد نیاز:

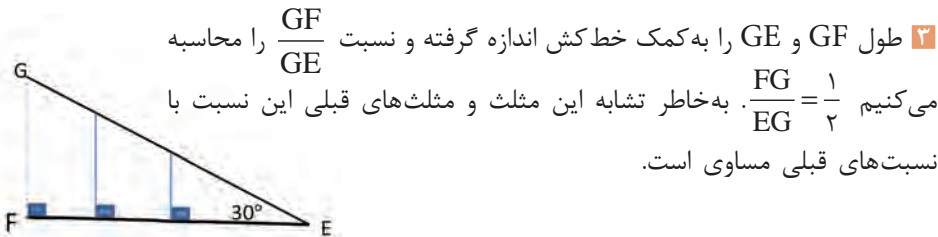
خط کش و نقاله برای اندازه‌گیری مستقیم

- به دلیل تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه  $EDA$  و  $KFA$  (به دلیل زاویه مشترک  $\angle A$  و

$$\frac{KF}{FA} = \frac{ED}{DA} \quad (\angle E = \angle K = 90^\circ) \text{ خواهیم داشت}$$

- به دلیل تشابه دو مثلث  $ABH$  و  $ADE$  (به دلیل زاویه مشترک  $\angle A$  و

$$\frac{BH}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{FK}{AF} = \frac{BH}{AB} \text{ داریم } (\angle H = \angle E = \angle K = 90^\circ) \text{ یعنی نسبت هم با نسبت‌های قبل مساوی است.}$$



۲ طول GF و GE را به کمک خط کش اندازه گرفته و نسبت  $\frac{GF}{GE}$  را محاسبه می‌کنیم  $\frac{FG}{EG} = \frac{1}{2}$ . به‌خاطر تشابه این مثلث و مثلث‌های قبلی این نسبت با نسبت‌های قبلی مساوی است.

۴ به کمک بندهای (۱) و (۲) و (۳) می‌توان مسئله را حل کرد.

$$\frac{BH}{AB} = \frac{\text{طول ارتفاع دکل}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{60 \text{ m}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \text{متر } 120 = \text{طول سیم نگهدارنده}$$

در ادامه مفهوم سینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

۱) به کمک نقاله و یا رسم چند مثلث قائم‌الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های  $20^\circ$  و  $35^\circ$  و  $40^\circ$  درجه را بیابید.

### اهداف:

■ کسب مهارت حل مسئله، یافتن مقدار تقریبی سینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم

مثلاً برای زاویه  $20^\circ$  درجه، ابتدا به کمک نقاله یک زاویه  $20^\circ$  درجه رسم می‌کنیم. سپس با رسم خطی عمود بر یکی از دو ضلع زاویه از نقطه‌ای روی ضلع دیگر زاویه، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم. طول ضلع مقابل به زاویه  $20^\circ$  درجه و وتر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم و با محاسبه نسبت آن‌ها، سینوس زاویه را محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب در مورد بقیه زاویه‌ها عمل می‌کنیم.

$$\sin 40^\circ \approx 0/64 \quad \text{و} \quad \sin 35^\circ \approx 0/57 \quad \text{و} \quad \sin 20^\circ \approx 0/34$$

### فعالیت آموزشی

یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.

۱) نقطه A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره‌خط AB چه رابطه‌ای با زاویه  $\beta$  دارد؟

۲) با کم یا زیاد شدن زاویه  $\beta$ ، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟

۳) یا نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۴) یا نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به  $90^\circ$  درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) سینوس  $\beta$  چه عددی می‌تواند باشد؟

### اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین تغییرات یک زاویه تند و سینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن

برای سینوس یک زاویه تند، درک حدی از مقادیر سینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و ۹۰ درجه

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری

1 با توجه به تعریف سینوس یک زاویه تند در مثلث‌های قائم‌الزاویه چون مثلث

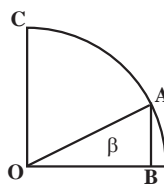
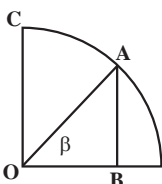
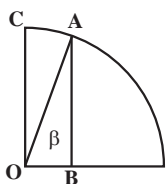
OAB در رأس B قائمه است پس سینوس زاویه  $\beta$  عبارت است از  $\frac{BA}{AO}$  ولی

چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، پس  $\sin\beta = BA$

### اشتباهات ممکن:

در این قسمت انتخاب ضلع مقابل به زاویه همان سینوس زاویه می‌باشد. بهتر است مثال‌هایی زده شود تا معلوم شود این اتفاق همیشه نمی‌افتد و فقط در این مثال که طول وتر ۱ است این وضعیت رخ داده است.

2 با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویه  $\beta$  طول پاره خط BA بزرگ می‌شود. بنابراین سینوس آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و با کم شدن زاویه، سینوس آن کمتر می‌شود. در شکل‌های زیر از چپ به راست به صورت شهودی مشاهده می‌کنید که با کوچک شدن زاویه، طول BA یعنی مقدار سینوس زاویه  $\beta$  نیز کم می‌شود.



3 با نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به صفر طول AB یعنی سینوس زاویه  $\beta$  از هر عدد مثبتی کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود.

4 با نزدیک شدن زاویه  $\beta$  به  $90^\circ$  دیده می‌شود BA به CO نزدیک می‌شود. بنابراین  $\sin\beta$  به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

5 چون در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویه قائمه از وتر کوچک‌تر است پس  $BA < AO = 1$  بنابراین  $\sin\beta < 1$  و چون  $\sin\beta$  طول پاره خط BA است پس  $0 < \sin\beta < 1$  یعنی سینوس زاویه تند  $\beta$  عددی بین ۰ و ۱ است.



ممکن است در نمادگذاری نسبت‌های مثلثاتی هنجویان عبارت  $\sin \alpha$  را همانند ضرب عبارت  $\sin$  در  $\alpha$  فرض کنند و نتیجه بگیرند  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$  در مثال‌های عددی می‌توان نادرستی این تصور را نشان داد. در این بخش سؤال‌هایی پرسیده شده است تا بدفهمی هنجویان را در این مورد کاهش دهد. هدف از این سؤال‌ها آن است که هنجو بداند در رابطه‌هایی مانند  $\frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha}$ ، ضریب  $\alpha$  در صورت با عدد (۲ در مخرج) ضریب عددی قابل ساده شدن نیست. برای بررسی این وضعیت‌ها می‌توان سؤال‌هایی مانند سؤال زیر به هنجویان داد.

۱) درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را با محاسبه عددی تعیین کنید

$$\frac{\sin 6^\circ}{2 \sin 3^\circ} = \sin 3^\circ$$

$$2 \sin 2^\circ = \sin 4^\circ$$

در مسئله زیر هدف تأکید بر مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویه تند که باید بین  $0$  و  $1$  باشد است.


۲) آیا زاویه تندی وجود دارد که سینوس آن  $\frac{4}{3}$  باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا  $\frac{4}{3} > 1$  و همیشه سینوس یک زاویه تند بین  $0$  و  $1$  است. هنجویان ممکن است از دلایل دیگری مانند اینکه سینوس یک زاویه برابر است با اندازه ضلع مقابل به آن زاویه به اندازه وتر و اشاره به این نکته که در مثلث قائم‌الزاویه اضلاع زاویه قائم همواره از وتر کوچک‌تر هستند پس سینوس همواره کسری کوچک‌تر از واحد است نیز استفاده نمایند.

## فعالیت آموزشی

ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبرو رسم کنید.

(۱) اگر طول پاره خط  $OA$  برابر  $a$  باشد سینوس زاویه  $\beta$  چقدر است؟



(۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد  $a$  به صورت  $1 < a < 2$  بتوانید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر  $a$  باشد.

### اهداف:

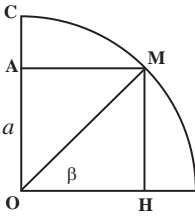
کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که سینوس آن معلوم است از طریق رسم.

### مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تعمیم دادن

1 طبق فعالیت قبل  $MH = \sin\beta$  پس  $a = \sin\beta$

2 ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند زیر رسم کنید روی شعاع قائم آن به اندازه  $a$  جدا کنید،  $a = AO$  از  $A$  عمودی بر  $AO$  رسم کنید تا ربع دایره را در  $M$  قطع کند. زاویه‌ای که پاره خط  $OM$  با شعاع افقی نیم‌دایره می‌سازد، جواب است.



$$OA = MH = \sin\beta$$

حال به کمک مقاله می‌توان اندازه زاویه  $\beta$  را اندازه گرفت.

نتیجه از دو بند (۱) و (۲) : سینوس هر زاویه عددی بین  $0^\circ$  و  $1^\circ$  است و هر عدد بین  $0^\circ$  و  $1^\circ$  می‌تواند سینوس یک زاویه تند باشد.

## مسئله‌ها

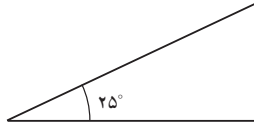
۱- الف) سینوس زاویه  $25^\circ$  درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویه تند آن  $25^\circ$  درجه باشد سپس وتر و طول ضلع روبرو به این زاویه را با خط کش اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت ضلع روبرو به این زاویه به وتر، سینوس  $25^\circ$  درجه می‌باشد. پس:

$$\sin 25^\circ \approx 0.42$$



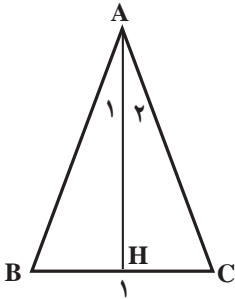
ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویه رأس آن  $5^\circ$  درجه باشد. اگر فاعده این مثلث  $10$  سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ارتفاع این مثلث را از رأس آن رسم می‌کنیم. چون در مثلث متساوی‌الساقین

میانه و عمود منصف و ارتفاع و نیمساز رسم شده از رأس بر هم منطبق‌اند داریم:  
 $\angle A_1 = \angle A_2 = 25^\circ$  و  $HB = CH = 5$  در مثلث قائم‌الزاویه BHA یا CHA،  
 $\angle HAB = 25^\circ$  و



$$\sin 25^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{AB} \Rightarrow AB = \frac{5}{\sin 25^\circ} \approx 11.83$$

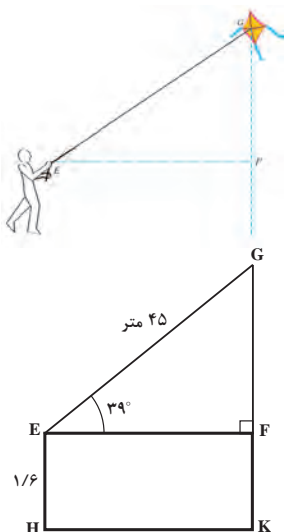
۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر ۵/۸ است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله

می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که طول وتر آن  $10^\circ$  واحد و یکی از ضلع‌های دیگرش ۸ واحد باشد. زاویه روبه‌رو به ضلع به طول ۸ جواب است. این زاویه را با نقاله اندازه می‌گیریم که تقریباً  $53^\circ$  درجه است.

۲۳ رها بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویه نخ با سطح افق  $39^\circ$  درجه و فاصله دست رها از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟



### مهارت‌ها و فرایندها:

#### ■ حل مسئله، پیوندها و اتصالات

$$\sin 39^\circ = \frac{GF}{45} \Rightarrow GF \approx 28.32$$

$$\Rightarrow \text{ارتفاع بادبادک} = GF + FK \approx 28.32 + 1/6 = 29.92$$

## بخش چهارم: کسینوس یک زاویه تند

### اهداف بخش

- درک مفهوم کسینوس یک زاویه تند
- استفاده از کسینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- محاسبه مقدار تقریبی کسینوس یک زاویه تند
- درک رابطه بین تغییرات یک زاویه با تغییرات کسینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویه تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

### واژه‌های کلیدی:

کسینوس زاویه تند، نسبت اضلاع

### نگاه کلی به بخش:


روش آموزشی این بخش طرح یک مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن مفهوم نسبت مثلثاتی کسینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم کسینوس تعریف می‌شود. ویژگی‌های کسینوس یک زاویه و یافتن کسینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن تقریبی کسینوس زاویه‌های تند بیان می‌شود. در پایان با داشتن مقدار کسینوس یک زاویه، چگونگی محاسبه آن زاویه بررسی می‌شود.

### ورود به مطلب:

این مفهوم شبیه مفهوم سینوس است و با همان روش قابل آموزش است. در اینجا نیز می‌توانید مسئله مناسبی بیابید که مفهوم کسینوس در آن وجود داشته باشد و با حل آن مسئله به‌طور ضمنی مفهوم کسینوس را ارائه کنید. یا طبق روند کتاب و با مسئله‌ای که در کتاب مطرح شده است آموزش را شروع کنید.

## فعالیت آموزشی

۱) یک زاویه  $40^\circ$  درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.



۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت  $\frac{AB}{BC}$  را بیابید.

۳) مثلث قائم‌الزاویه دیگری مانند  $A'B'C'$  با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت  $\frac{A'B}{B'C'}$  را محاسبه کنید. آیا مقدار این نسبت با نسبت بند (۲) متفاوت است؟ چرا؟ (در حالت کلی استدلال کنید).

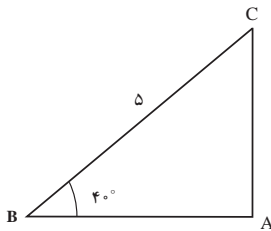
۴) به کمک نسبتی که در بالا به دست آورده‌اید، طول تردپان آنتن‌نشانی را حساب کنید.

### اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت ضلع مجاور به زاویه تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویه ساخته شده روی اضلاع یک زاویه تند

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن
- ۱) در این بند هنرجو باید توانایی رسم داشته باشد و به کمک خط‌کش و پرگار و مقاله مثلث خواسته شده را رسم کند.



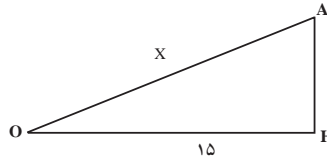
- ۲) به کمک خط‌کش  $AB$  و  $BC$  را اندازه‌گیری می‌کنیم.  $AB \approx 3/8$  و  $BC = 5$

$$\text{در نتیجه } \frac{AB}{BC} \approx 0/76$$

- ۲)  $\frac{A'B}{B'C'} \approx 0/76$  خیر، زیرا دو مثلث رسم شده، دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه تند

مساوی  $40^\circ$  درجه می‌باشند و چون هر کدام یک زاویه  $90^\circ$  درجه نیز دارند با هم متشابه‌اند و اگر نسبت اضلاع متناظر را در این مثلث‌های متشابه بنویسیم با هم مساوی‌اند.

۴ مثلثی که در مسئله آتش‌نشانی رسم کردیم با مثلثی که در بند (۲) رسم کردیم متشابه‌اند (به خاطر بند ۳). با نوشتن نسبت اضلاع متناظر داریم:



$$\frac{15 \text{ متر}}{\text{طول نردبان}} = \frac{OH}{OA} = \frac{AB}{BC} \approx 0.76 \Rightarrow \text{طول نردبان} \approx \frac{15}{0.76} = 19.7 \text{ متر}$$

در ادامه این بخش، مفهوم کسینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.

۱) یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین رسم کنید.

الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.

ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازه یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟  
برای استفاده از محاسبات ۷۰٪، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویه ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

۲) مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.  
کدام طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویه رسم شده را حساب کنید.

۳) با استفاده از محاسبات انجام شده، سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰° و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

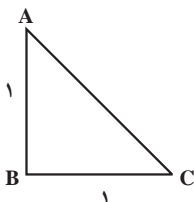
۴) به کمک دو سؤال بالا، جدول زیر را کامل کنید.

زاویه	سینوس	کسینوس	تانژانت
۳۰°			
۴۵°			
۶۰°			

### اهداف:

■ کسب مهارت حل مسئله، محاسبه مقدار دقیق کسینوس زاویه‌های خاص ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ درجه، استدلال کردن

الف: چون دو ضلع این مثلث با هم مساوی‌اند  $\angle A = \angle C$  و چون مجموع آنها ۹۰ درجه است، هر دو زاویه ۴۵ درجه هستند.



$$\left. \begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \angle B = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \angle A = \angle C = 45^\circ$$

(۱) ب:

اگر یکی از ضلع‌های آن ۱ باشد ضلع دیگرش هم ۱ است و با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان طول وتر این مثلث را یافت.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$$

(۱) پ:

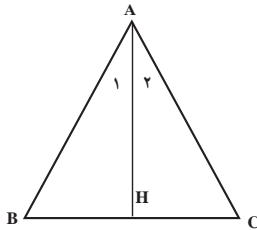
$$\sin \angle A = \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \cos \angle A = \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45^\circ = \tan \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

(۲)

الف: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع همه ضلع‌ها و زاویه‌ها مساوی‌اند. در نتیجه:

$\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$  از طرفی ارتفاع و نیمساز و میانه و عمود منصف رسم شده از همه رأس‌ها یکسان هستند، پس



$$HB = CH = \frac{CB}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \angle HAB = \angle HAC = 30^\circ = \frac{\angle A}{2}$$

در مثلث قائم‌الزاویه ABH به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 1^2 = AH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{ب})$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \sin 60^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

این محاسبه‌ها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

نسبت‌های مثلثاتی	۳۰ درجه	۴۵ درجه	۶۰ درجه
سینوس	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
کسینوس	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
تانژانت	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$

## فعالیت آموزشی

یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.

نقطه  $C$  را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط  $OB$  چه رابطه‌ای با زاویه  $\alpha$  دارد؟

(۱) یا کم یا زیاد شدن زاویه  $\alpha$ ، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

(۲) کسینوس زاویه  $\alpha$  چه اعدادی می‌تواند باشد؟

(۳) یا نزدیک شدن زاویه  $\alpha$  به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

(۴) یا نزدیک شدن زاویه  $\alpha$  به  $90^\circ$  درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

فعالیت ۸



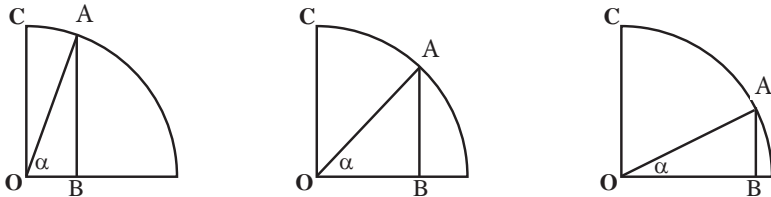
### اهداف موضوعی:

■ درک رابطه بین تغییرات یک زاویه با کسینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویه تند، درک حدی از مقادیر کسینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و  $90^\circ$  درجه



## مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری
- ۱ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویه تند در مثلث‌های قائم الزاویه، چون مثلث در رأس B قائمه است، کسینوس زاویه  $\alpha$  عبارت است از  $\frac{BO}{AO}$  ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است،  $OB = \cos \alpha$ . در کلاس توضیح دهید که فقط در این شکل که طول وتر ۱ واحد است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد.
- ۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویه  $\alpha$  طول پاره خط BO کوچک می‌شود. بنابراین کسینوس  $\alpha$  کوچک‌تر می‌شود و با کم شدن  $\alpha$  کسینوس  $\alpha$  بزرگ‌تر می‌شود. در شکل‌های زیر این مطلب را به صورت شهودی مشاهده می‌کنید.




- ۳ چون در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویه قائمه از وتر کوچک‌تر است داریم:  $BO < AO = 1$ . بنابراین  $\cos \alpha < 1$  و چون  $\cos \alpha$  طول پاره خط BO است داریم:  $0 < \cos \alpha < 1$ . پس:  $0 < \cos \alpha < 1$  یعنی کسینوس زاویه تند  $\alpha$  عددی بین ۰ و ۱ است.

- ۴ با نزدیک شدن زاویه  $\alpha$  به صفر طول OB بزرگ می‌شود و به شعاع افقی نزدیک می‌شود یعنی  $\cos \alpha$  به عدد یک نزدیک می‌شود.

- ۵ با نزدیک شدن زاویه  $\alpha$  به  $90^\circ$  دیده می‌شود BO کوچک می‌شود. یعنی کسینوس زاویه  $\alpha$  از هر عدد مثبتی کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک می‌شود. مناسب است که تذکر داده شود که فقط در این شکل که طول وتر ۱ است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد. بهتر است مثالی زده شود که وتر در آن ۱ نباشد. (به مثال ابتدای بخش کسینوس در کتاب کار توجه شود)

ربع دایره‌ای به شعاع واحد، مانند شکل روبه‌رو رسم کنید.



(۱) اگر طول یاره‌خط  $BO$  برابر  $b$  باشد، کسینوس زاویه  $\alpha$  چقدر است؟

(۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد  $b$  به صورت  $0 < b < 1$  بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر  $b$  باشد.



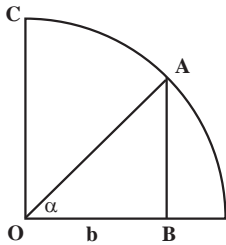
## اهداف موضوعی:

■ کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که کسینوس آن معلوم است از طریق رسم

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات کلامی، تعمیم دادن

- ۱ با توجه به واحد بودن طول وتر در مثلث قائم‌الزاویه  $OAB$  داریم:  $\cos \alpha = OB = b$ .
- ۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. سپس روی شعاع افقی آن به اندازه  $b$  جدا کنید که  $b = BO$ . از  $B$  عمودی بر  $BO$  رسم کنید تا ربع دایره را در  $A$  قطع کند. زاویه  $AOB$  جواب مسئله است زیرا  $\cos \alpha = OB = b$ .



سپس به کمک نقاله می‌توان اندازه آن زاویه را محاسبه نمود.

این فعالیت نشان می‌دهد که هر عدد بین  $0$  و  $1$  می‌تواند برابر کسینوس زاویه‌ای باشد.

دقت شود در این بخش به بدفهمی و نامثال‌های

کسینوس نیز پرداخته شود تا احتمال اشتباه هنرجو به حداقل برسد. مثلاً کدام یک از رابطه‌های زیر درست یا نادرست‌اند (به کمک محاسبه)

۱)  $\frac{\cos 60^\circ}{2 \cos 30^\circ} = \cos 30^\circ$

۲)  $\cos 80^\circ = 2 \cos 40^\circ$

۲ آیا زاویه تندی وجود دارد که کسینوس آن  $\frac{4}{3}$  باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا  $1 > \frac{4}{3}$  درحالی که همیشه کسینوس یک زاویه

تند بین  $0$  و  $1$  است.

### مسیرهایی برای توسعه:

۱ تحقیق توسط هنرجویان برای بررسی درستی رابطه‌های زیر (قرارداد  $(\sin \alpha)^2 = \sin^2 \alpha$ ) بیان شود):

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad (\text{الف})$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \quad (\text{پ})$$

### مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، کسینوس زاویه‌های ۱۵ و ۷۵ درجه را حساب کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

#### حل مسئله

به کمک خط کش و نقاله قبلاً توضیح کامل داده شده است.

$$\cos 15^\circ \approx 0.96, \cos 75^\circ \approx 0.26$$

۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعده ۱۰۰ متر و با زاویه مجاور به قاعده ۵۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مناسب، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویه ۵۰ درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول ارتفاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

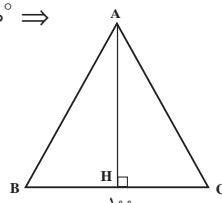
#### حل مسئله

الف) همانند سؤال ۱ عمل می‌کنیم که نتیجه می‌شود  $\cos 50^\circ \approx 0.64$

ب) شکل زمین را مانند زیر رسم می‌کنیم. از A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویه HBA:

$$BH = \frac{BC}{2} = 50 \text{ m} \Rightarrow \cos \angle B = \frac{BH}{AB} \text{ و } \angle B = 50^\circ \Rightarrow$$

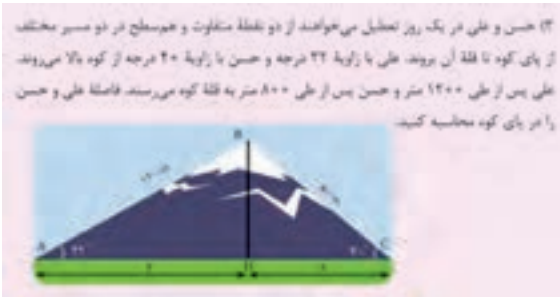
$$\Rightarrow AC = AB = \frac{50}{\cos 50^\circ} \approx \frac{50}{0.64} = 78.125$$



پ) از رابطه فیثاغورس داریم :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{(78/125)^2 - 50^2} \approx 60$$

$$S = \frac{AH \times BC}{2} \approx \frac{60 \times 100}{2} = 3000$$



### مهارت‌ها و فرایندها:

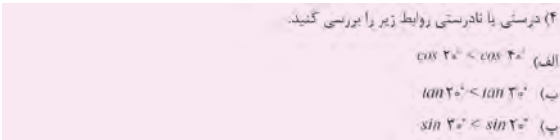
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

ابتدا به کمک مثلث قائم‌الزاویه مناسب مقدار کسینوس زوایه‌های ۳۲ و ۴۰ درجه را می‌یابیم. سپس با استفاده از تعریف کسینوس مقدار X و y را یافته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} \cos 32^\circ &= \frac{y}{1200} \\ \cos 32^\circ &\approx 0.85 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = 1200 \cos 32^\circ \approx 1200 \times 0.85 = 1020 \text{ m}$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 40^\circ &= \frac{x}{800} \\ \cos 40^\circ &\approx 0.77 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 800 \cos 40^\circ \approx 800 \times 0.77 = 616 \text{ m}$$

$$x + y = 1636 \text{ m}$$



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ مقایسه کردن، استدلال کردن

هدف این سؤال استفاده از اطلاعات هنرجو پس از یادگیری نسبت‌های مثلثاتی و تعیین رابطه بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با تغییرات آن زاویه است.

(الف) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود، کسینوس آن کوچک می‌شود.  
 (ب) درست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود تانژانت آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.  
 (پ) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود سینوس آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.

(۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید

$$A = \frac{\sin 60^\circ + \tan 45^\circ - \cos 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} \quad \text{و} \quad B = \frac{\tan 60^\circ + \cos 30^\circ - 2\sqrt{3}}{1 + \sin 60^\circ}$$

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$B = \frac{\sqrt{3} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 0 \quad \text{و} \quad A = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، حل مسئله، تفکر بصری

$$\cos 35^\circ = \frac{m}{x} \Rightarrow m = x \cos 35^\circ, \quad \cos 72^\circ = \frac{n}{y} \Rightarrow n = y \cos 72^\circ$$

$$\begin{cases} x \cos 35^\circ + y \cos 72^\circ = m + n = 33 \\ x \sin 35^\circ = h = y \sin 72^\circ \Rightarrow x = \frac{y \sin 72^\circ}{\sin 35^\circ} \Rightarrow y \approx 19/7, \quad x \approx 32/7 \end{cases}$$

(۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید:

(الف)  $\cos 60^\circ = 2 \cos 30^\circ$  (ب)  $\sin 60^\circ < 2 \sin 30^\circ$   
 (پ)  $\cos 60^\circ < 2 \sin 30^\circ \cos 30^\circ$  (ت)  $\tan 60^\circ + \tan 30^\circ = \frac{2}{\sin 60^\circ}$

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات، استدلال کردن، مقایسه کردن

با جایگذاری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد.

$$\frac{1}{2} \neq 2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(الف) نادرست زیرا

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

ب) درست

$$\frac{1}{2} < 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

پ) درست زیرا

$$\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

ت) درست زیرا

۸) سمت راست تساوی‌های زیر را پیدا کنید.

الف)  $A = \sin 30^\circ + \cos 30^\circ$

ب)  $B = \frac{2\cos 30^\circ - 2\sin 30^\circ}{2\sin 45^\circ + 2\cos 45^\circ}$

ج)  $C = 1 - 2 \sin 30^\circ$

### مهارت‌ها و فرایندها: ■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{2(1) + 2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2(\sqrt{3} - 1)}{3}$$

$$C = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

## تاریخچه و توسعه مثلثات

مثلثات از درون هندسه بیرون آمد و بیش از همه، ریاضیدانان ایرانی روی آن کار کردند. بررسی‌های اخترشناسی در بابل قدیم و یونان، ریاضیدانان را به سمت موضوع‌هایی کشانید که می‌توان آنها را پیش درآمد مثلثات دانست. نخستین تابع‌های مثلثاتی را باید جدول وترها برحسب کمان آنها دانست که برای محاسبه‌های اخترشناسی لازم بود و در دو سده پیش از میلاد به‌وجود آمد.

برای نخستین بار دانشمندان هندی در فاصله زمانی از سده پنجم تا دوازدهم میلادی از «نیم‌وتر» به‌جای وتر استفاده کردند که متناظر با مفهوم سینوس امروزی است. آنها نیم‌وتر را «اردهاجیا» (یا «جیاردها») می‌گفتند که از لحاظ لغوی به معنای نصف وتر است. به تدریج اردهاجیا را کوتاه کردند و «جیا» نامیدند. به جز این، هندی‌ها از یک منهای کسینوس  $X$  هم استفاده می‌کردند و آن را «کوماجیا» می‌نامیدند و مقدار  $\cos X$  را «کوتی جیا» می‌گفتند.

«ابوالوفای بوزجانی» (۹۴۰ تا ۹۸۸ میلادی) ریاضیدان ایرانی (ویرانه‌های بوزجان نزدیک تربت‌جام است)، تانژانت را به نام «ظل» وارد مثلثات کرد و جدولی را تنظیم کرد که نیم درجه، نیم درجه مقدار سینوس‌ها را تعیین می‌کرد. دستورهای  $\sin(a+b)$  و  $\sin(a-b)$  را کشف کرد و برخی از مسئله‌های مثلثات کروی را حل نمود.

اما گام اصلی را نصیرالدین طوسی برداشت. تألیف او به نام «کشف القناع فی اسرار شکل القطاع» در واقع نخستین کتاب درباره مثلثات است. نقش طوسی را در مثلثات، باید شبیه نقش اقلیدس در هندسه دانست. زیرا او توانست مجموعه آنچه را که پیش از او وجود داشت، به صورت دانشی مستقل و منظم درآورد. ترجمه‌های از کتاب طوسی در سال ۱۹۸۱ به زبان فرانسوی انجام گرفت و تا مدت‌ها به‌عنوان کتاب درسی، مورد استفاده دانش‌پژوهان در اروپای غربی بود.

از نام‌گذاری «مثلثات» می‌توان حدس زد که این شاخه از ریاضیات دست کم در آغاز پیدایش خود به‌نحوی با مثلث و مسئله‌های مربوط به مثلث بستگی داشته است. در واقع پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه‌ای از تلاش‌های ریاضیدانان برای رفع دشواری‌های مربوط به محاسبه‌هایی دانست که در هندسه روبروی دانشمندان بوده است.

بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی زمان تیموریان با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادله درجه سوم پیدا کرده بود، توانست راهی برای محاسبه سینوس کمان یک درجه با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات

از سده پنزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت. یک نمونه از مواردی که ایرانی بودن این دانش را تا حدودی نشان می‌دهد از این قرار است: ریاضیدانان ایرانی از واژه «جیب» (واژه عربی به معنی «گریبان») برای سینوس و از واژه «جیب تمام» برای کسینوس استفاده می‌کردند. وقتی نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی به ویژه خوارزمی به زبان لاتین و زبان‌های اروپایی ترجمه شد، معنای واژه «جیب» را در زبان خود به جای آن گذاشتند: سینوس. این واژه در زبان فرانسوی همان معنای جیب عربی را دارد. نخستین ترجمه از نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی که در آن صحبت از نسبت‌های مثلثاتی شده است، ترجمه‌ای بود که در سده دوازدهم میلادی به وسیله گرادوس کره مونه سیس ایتالیایی از عربی به لاتینی انجام گرفت و در آن واژه سینوس را به کار برد. اما درباره ریشه واژه «جیب» دو دیدگاه وجود دارد: «جیا» در زبان سانسکریت به معنای وتر و گاهی نیم وتر است. نخستین کتابی که به وسیله فزازی (یک ریاضیدان ایرانی) به دستور منصور خلیفه عباسی به زبان عربی ترجمه شد، کتابی از نوشته‌های دانشمندان هندی درباره اخترشناسی بود. مترجم برای حرمت گذاشتن به نویسندگان کتاب، «جیا» را تغییر نمی‌دهد و تنها برای اینکه در عربی بی معنا نباشد، آن را به صورت «جیب» در می‌آورد. دیدگاه دوم که منطقی‌تر به نظر می‌آید این است که در ترجمه از واژه فارسی «جیب» - بر وزن سبب - استفاده شد که به معنی «تکه چوب عمود» یا «دیرک» است. نسخه‌نویسان بعدی که فارسی را فراموش کرده بودند و معنای «جیب» را نمی‌دانستند، آن را جیب خواندند که در عربی معنایی داشته باشد. در کتاب، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند به صورت نسبت اضلاع در یک مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده‌اند، ولی با رسم یک نیم‌دایره، اگر از واحد گرادیان برای اندازه زاویه استفاده کنیم، خواهیم دید نسبت‌های مثلثاتی در ارتباط با طول کمان‌های دایره و طول وتر این کمان‌ها است. مثلاً سینوس یک زاویه برابر نصف طول وتر کمان آن زاویه بر حسب رادیان است. با این نگاه، که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را با ارتباط بخشیدن به طول کمان و طول وتر کمان ببینیم می‌توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه را هم تعریف کرد.

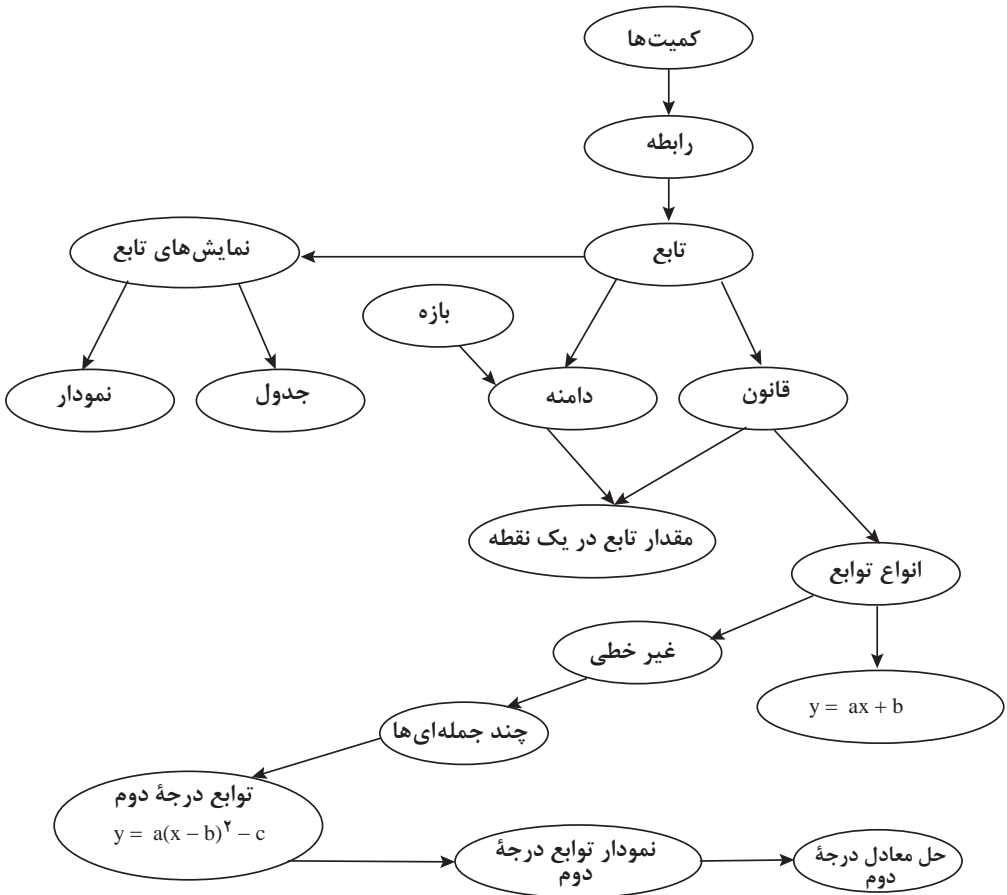
مثلاً، با رسم یک ربع دایره به شعاع واحد در صفحه تحلیلی مشاهده می‌شود که سینوس و کسینوس هر زاویه تندی متناظر مختصات نقطه‌ای روی این نیم‌دایره است که آن زاویه را نشان می‌دهد. می‌توانیم این مطلب را برای بقیه زاویه‌ها نیز تعمیم دهیم و مختصات هر نقطه‌ای روی دایره را به صورت سینوس و کسینوس زاویه متناظر با آن نقطه تعریف کرد.



## فصل هفتم

تابع

طرح کلی مفاهیم فصل هفتم (نقشه مفهومی)



## اهداف کلی

- درک مفهوم رابطه بین کمیت‌ها
- درک مفهوم تابع در زمینه پدیده‌های طبیعی
- آشنایی با نمایش‌های جدولی و نموداری تابع
- آشنایی با قانون تابع و مفهوم متغیر تابع و دامنه تابع
- درک مفهوم بازه در اعداد حقیقی
- آشنایی با انواع توابع خطی و غیرخطی
- آشنایی با توابع خاص (درجه دوم و ثابت)
- آشنایی با انتقال نمودار توابع درجه دوم و درجه اول در راستای افقی و قائم
- درک تساوی توابع
- یافتن جواب معادله درجه دوم با توجه به نمودار تابع درجه دوم
- آشنایی با مقدار تابع در یک نقطه

## عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- رابطه بین دو کمیت را تشخیص داده و قانون آن را بنویسند.
- یک تابع را به صورت جدول و نمودار ارائه دهند.
- تابع بودن یا تابع نبودن رابطه بین کمیت‌ها را تشخیص دهند.
- تعریف یک بازه را بیان کنند و نمایش‌های مختلف بازه را ارائه کنند و روی محور نمایش دهند.
- دامنه و قانون توابعی را که در زمینه واقعی و محیط پیرامونی دیده می‌شوند، به دست آورند.
- بازه‌ها را به عنوان زیر مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی بشناسند و اجتماع و اشتراک آنها را به دست آورند.
- مقدار تابع را در یک نقطه از دامنه محاسبه کنند یا پیدا کنند.
- نمودار توابع درجه دوم را رسم کنند.
- نمودار توابع درجه دوم و درجه اول را در راستای قائم و افقی انتقال دهند و بتوانند قانون آنها را بنویسند.
- توابع چندجمله‌ای را با بیان چند مثال تعریف کنند.
- علامت ضرایب  $a$  و  $b$  و  $c$  را در توابع درجه دوم به کمک نمودار آن تعیین کنند.

- چگونگی تغییرات تابع را از روی نمایش جدولی تابع بیان کنند.
- دو تابع مساوی را تشخیص دهند.
- از روی نمودار توابع درجه دوم، تعداد و علامت جواب‌های معادله درجه دوم را تشخیص دهند و بیان کنند.
- توضیحات کلامی را خوانده و توانایی نقل و تفسیر آنها را داشته باشند.
- مسائل در زمینه‌های واقعی را بخوانند و مدل ریاضی برای آن بسازند.

### پیش نیازهای فصل :

- آشنایی با عبارات گویا و چند جمله‌ای‌ها و یافتن مقدار عددی آنها به ازای مقدار برای متغیر
- آشنایی با مختصات نقطه و نمایش آن در صفحه محورهای مختصات
- آشنایی با رسم توابع درجه اول (خطی)
- آشنایی با مجموعه اعداد حقیقی و زیر مجموعه‌های آن

### واژه‌های کلیدی:

رابطه بین دو کمیت، تابع، دامنه، قانون تابع، بازه، جدول تابع، نمودار تابع، توابع چندجمله‌ای

### ابزار کمک آموزشی:

خط کش، صفحه شطرنجی، رایانه

## نگاه کلی به فصل

روش آموزشی این کتاب برای معرفی تابع، با سایر کتاب‌ها فرق دارد و دبیران با توجه به این تفاوت باید شیوه نوینی برای آموزش مفهوم تابع در پیش بگیرند. هدف این کتاب ارائه مفهوم ریاضی تابع با همان روند تاریخی به وجود آمدن مفهوم تابع است. به همین دلیل در اینجا از تابع به عنوان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب یاد خواهیم کرد و بر مفهوم شهودی و اصلی تابع که عملگری است که به اعضای مجموعه مبدأ، عنصری معین در مجموعه مقصد نظیر می‌کند، تأکید خواهیم داشت. از لحاظ تاریخی، تابع به معنای رابطه بین کمیت‌ها بوده است و ما نیز با همین روش مفهوم تابع را ارائه خواهیم کرد.

این فصل، با یک مکالمه بین معلم و هنرجو شروع می‌شود که با یکدیگر سعی می‌کنند تا یک مسئله را حل کنند. نکته اصلی این مسئله دیدن رابطه بین کمیت‌هایی است که مشاهده می‌کنیم. برای متمرکز کردن هنرجو به مفهوم اصلی رابطه بین کمیت‌ها، فعالیت‌هایی طراحی شده‌اند که در زمینه‌های مختلف وجود رابطه بین کمیت‌ها را نشان می‌دهند.

پس از درک وجود رابطه بین کمیت‌ها، سعی در فرمول‌بندی این رابطه به زبان ریاضی می‌کنیم تا به تعریف اصلی تابع برسیم. تعریف تابع همچنان غیر رسمی انجام می‌شود ولی در طی مثال‌های متعدد دو مفهوم زیربنایی دامنه و قانون تابع ارائه می‌شوند.

**یک اشتباه رایج درباره مفهوم تابع** این است که دامنه یک تابع را از طریق قانون (یا ضابطه) تابع تعیین می‌کنند، در حالی که این دو مفهوم مستقل از یکدیگرند. برای ساختن یا ارائه هر تابعی، ابتدا باید دامنه آن را ارائه کرد و سپس قانونی که روی این دامنه عمل می‌کند را باید بیابیم. دامنه یک تابع را قانون آن معین نمی‌کند بلکه محدودیت‌های مسئله مورد بررسی، و آن چیزی که تابع قرار است توصیف کند، مشخص‌کننده دامنه تابع است. اگر در جهان ریاضی هم باشیم و هیچ محدودیت عملی هم نداشته باشیم، این فرد ارائه‌کننده تابع است که باید بگوید تابع مورد نظرش چه قانونی دارد و این قانون روی چه مجموعه‌ای قرار است عمل کند. برای تأکید روی این نکته، مثال‌ها و مسئله‌های متعددی در متن کتاب آورده شده است.

در ادامه به نمایش‌های تابع‌ها پرداخته شده است. این مفهوم نیز در قالب یک مکالمه بین هنرجویان و دبیر ارائه شده است. این مکالمات با طرح سؤال‌ها و شبهاتی که در این زمینه وجود داشته است شروع می‌شود و در طی مکالمه سعی می‌شود مسئله‌های پیش آمده حل شوند. در ادامه با تعریف جدول و نمودار توابع در طی مثال‌های متعدد مفید بودن این نمایش‌ها برای تشخیص رفتار توابع نشان داده می‌شود.

ادامه فصل به بررسی توابع خاص و نمودار آنها می‌پردازد. از میان توابع خاص، فقط به توابع خطی و درجه دوم پرداخته می‌شود تا سطح کتاب زیاد بالا نرود و مفاهیم برای هنرجویان مشکل نشود.

در این فصل همچنین بازه‌ها و نمایش آنها نیز مطرح می‌شوند تا در بیان ریاضی دامنه تابع‌ها، دچار مشکل نشویم.

از آنجا که رسم نمودار توابع کار آسانی نیست و هنرجویان هنوز مطالب کافی برای رسم نمودار توابع را فرا نگرفته‌اند، در این فصل از نرم‌افزار جئوجبرا کمک گرفته شده است تا به عنوان یک ابزار هنرجویان را در رسم نمودار توابع یاری کند.

فرایند	توضیح فرایند	مثال
حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	- ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
	شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها	- ارائه نمایش‌های جدولی و نموداری تابع در مورد رابطه بین دو کمیت - بیان چگونگی تغییرات تابع از روی نمودار و جدول آن
ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	- ارائه رابطه بین دو کمیت توسط آرش پس از مثال‌های مختلف دبیر در مورد میزان نور چراغ و فاصله چراغ از ما
	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	- با ارائه فرمول مساحت مثلث در فعالیت ۴ تابع ثابت معرفی می‌کند.
استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	- بیان دلیل تشخیص چگونگی تغییرات تابع از روی نمایش‌های نموداری و جدول آن - بیان دلیل برای تشخیص مجموعه مقادیر دامنه توابعی که در زمینه‌های واقعی ساخته می‌شوند. - بیان دلیل تابع بودن یا تابع نبودن رابطه بین دو کمیت
پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	- تعیین رابطه بین طول فنر و وزن وزنه آویزان شده به آن - تعیین رابطه بین گنجایش بنزین در باک ماشین و میزان مسافت طی شده
	تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	- نمایش بازه‌ها به صورت ریاضی و مجموعه‌ای و رسم نمودار آنها روی محور اعداد حقیقی
بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	- تقریباً در بیشتر مواقع این اتفاق افتاده است (مانند ارائه نمایش‌های مختلف یک بازه...)
مهارت‌های سایر تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگوبایی و ...	- توانایی مقایسه نمودارهای توابع و در رسم به روش انتقال - توانایی مقایسه و یافتن نوع تابع از روی قانون آن

## بخش اول: مفهوم تابع

### اهداف بخش

- آشنایی با رابطه بین دو کمیت و درک آن در زمینه واقعی
- نوشتن قانون یا ضابطه برای بیان چگونگی رابطه بین دو کمیت و تعیین مقادیر ممکن برای کمیت‌ها
- تشخیص تابع بودن یا نبودن رابطه بین دو کمیت
- تعیین دامنه تابعی که در زمینه‌های واقعی تعریف شده است از طریق محدودیت‌های واقعی

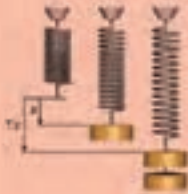
### واژه‌های کلیدی:

رابطه بین دو کمیت، تابع، دامنه

### ورود به مطلب:

رابطه بین کمیت‌ها مفهوم اصلی در پیدایش مفهوم تابع است. دبیران می‌توانند از طریق طرح مسئله‌ای که به یکی از این رابطه‌ها اشاره دارد وارد مفهوم رابطه بین کمیت‌ها شوند. در کتاب از مسئله اندازه‌گیری فاصله ستارگان استفاده شده است تا از طریق آن به رابطه بین شدت نور و فاصله چشمه نور توجه شود. از این نوع رابطه‌ها بسیار داریم که هم به عنوان ورودی و هم به عنوان مثال می‌توانیم از آنها استفاده کنیم. مثلاً رابطه بین شدت صدا و فاصله منبع صدا، رابطه بین فشار هوا و ارتفاع از سطح دریا، رابطه بین فشار وارد بر سطح و مساحت سطح و ... (به مثال‌هایی که در این زمینه در کتاب کار وجود دارد رجوع کنید).

فرض کنید تیری در اختیار دارید که در حالت طبیعی طول آن ۱۰ سانتی‌متر است. به ازای هر ۱۵ گرم وزنه که به آن آویزان می‌کنید، ۱ سانتی‌متر به طول فنر اضافه می‌شود. حداکثر طول این فنر ۴۰ سانتی‌متر است و اگر بیش از این کشیده شود، پاره می‌شود.



- ۱) در جای خالی کلمه مناسب بگذارید.  
هر چه جرم وزنه آویزان شده \_\_\_\_\_ شود، طول فنر \_\_\_\_\_ می‌شود.
- ۲) اگر به این فنر یک وزنه ۳۰۰ گرمی آویزان کنید، طول آن چقدر می‌شود؟
- ۳) اگر با آویزان کردن وزنه‌ای، طول فنر ۲۰ سانتی‌متر شود، جرم آن چقدر بوده است؟
- ۴) در حالت کلی، اگر یک وزنه  $a$  گرمی به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود، طول فنر بر حسب  $a$  چقدر خواهد شد؟
- ۵) اگر وزنه‌ای را به فنر آویزان کنیم و فنر پاره نشود و طول آن برابر  $a$  شود، جرم آن وزنه بر حسب  $a$  چقدر است؟

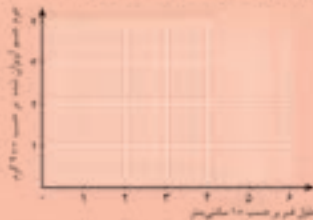
۶) از این طریق، چه آزاری ساخته می‌شود؟

۷) حداقل و حداکثر جرمی که می‌توانیم به این فنر آویزان کنیم، چقدر است؟

۸) جدول زیر ارتباط بین طول فنر و جرم وزنه آویزان شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

طول فنر کشیده شده	۱۰	۱۵	۲۰	_____	۳۰	۳۵	۴۰
جرم وزنه آویزان شده	۰	...	...	۳۰۰	...	...	۷۵۰

۹) در شکل زیر، محور افقی نشان دهنده طول فنر و هر واحد آن معادل ۱۰ سانتی‌متر است. محور عمودی نشان دهنده جرم جسم آویزان شده است و هر واحد آن معادل ۳۰۰ گرم است. جدول بالا، نقطه‌ای از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.



۱۰) حداقل و حداکثر طولی که این فنر پیدا می‌کند، چقدر است؟



### اهداف موضوعی:

درک مفهوم رابطه، قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها

### مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال، بازنمایی‌ها، ارتباط کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

۱ زیادت‌ر - بلندتر، یا کمتر- کوتاه‌تر

۲  $300 \div 15 = 20 \Rightarrow$  طول فنر  $= 20 + 10 = 30$

۳ گرم  $20 - 10 = 10 \Rightarrow 10 \times 15 = 150$

۴  $l = \frac{a}{15} + 10 \quad 0 < a < 750$

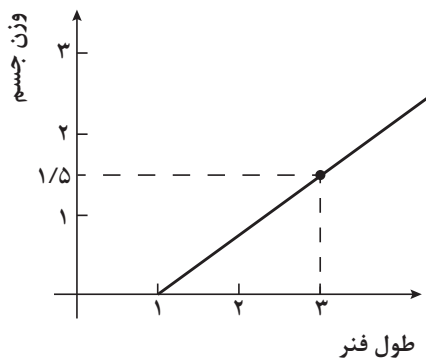
۵  $a = 15(l - 10) \quad 10 < l < 60$

۶ ترازوی دستی

۷ صفر و ۷۵۰ گرم

۸

طول فنر کشیده شده	۱۰	۱۵	۲۰	۳۰	۴۰	۴۵	۵۰	۶۰
جرم جسم آویزان شده	۰	۷۵	۱۵۰	۳۰۰	۴۵۰	۵۲۵	۶۰۰	۷۵۰



۹ نمودار حاصل یک خط است.

۱۰ بین ۱۰ و ۶۰ سانتی‌متر است.

فرض کنید خودرویی با گنجایش ۶۰ لیتر بنزین دارید. اگر این خودرو با سرعت ثابت حرکت کند، برای طی کردن هر ۱۰۰ کیلومتر، ۸ لیتر بنزین مصرف می‌کند. باک این خودرو قبل از حرکت پر شده است. مقدار بنزین باقی‌مانده در باک خودرو با مسافت طی شده رابطه دارد. توجه داشته باشید که هیچ خودرویی تمام بنزین باک خود را مصرف نمی‌کند و لازم است حداقل ۵ لیتر بنزین در باک موجود باشد.

۱۱ در جای خالی کلمه مناسب بگذارید.

هر چه بنزین در باک ..... شود مسافت طی شده ..... می‌شود.

۱۲ حجم بنزین موجود در باک چه تاثیری می‌تواند باشد؟

۱۳ اگر مقدار بنزین باقی‌مانده در باک را بر حسب لیتر یا ۲ نشان دهیم و مسافت طی شده را بر حسب کیلومتر یا  $x$  نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار  $x$  را بر حسب مقدار ۲ بیان کند.

با توجه به پاسخ پرسش‌های بالا، به سوال‌های زیر جواب دهید.

۱۴ جدول زیر، ارتباط بین حجم بنزین موجود در باک و مسافت طی شده را نشان می‌دهد. آن را کامل کنید.

حجم بنزین در باک	۶۰	۵۰	۴۵	۴۰	۳۰	۲۰	۱۰	۰
مسافت طی شده	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰

۱۵ در شکل زیر، محور افقی حجم بنزین در باک را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۱۰ لیتر است. محور عمودی مسافت طی شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۲۰۰ کیلومتر است. جدول صفحه قبل، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را پیدا کنید و بگویید چه شکلی را نشان می‌دهند.

۱۶ با در نظر گرفتن میزان بنزین موجود در باک این خودرو چه مسافت‌هایی را می‌تواند طی کند؟

۱۷ اگر ۲۰ لیتر بنزین در باک باقی مانده باشد، ماشین چند کیلومتر مسافت طی کرده است؟

۱۸ آیا پاسخ دادن به سوال‌های (۱۶) و (۱۷) برای شناخت رابطه بین بنزین باقی مانده و مسافت طی شده کافی است؟

### اهداف موضوعی:

- درک مفهوم رابطه در زمینه‌های مختلف، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها
- شناخت رابطه بین دو کمیت در زمینه‌های واقعی و طبیعی

### مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها

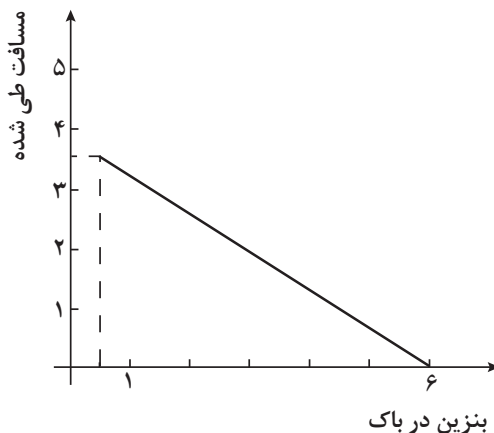
۱ کمتر - بیشتر

۲ حداقل ۵ لیتر و حداکثر ۶۰ لیتر

۳  $5 \leq V \leq 60$ ,  $L = (60 - V) \times 12/5$ , میزان بنزین باک =  $V$

۴

حجم بنزین در باک	۶۰	۵۰	۴۵	۳۵	۳۰	۲۰	۱۰	۵
مسافت طی شده	۰	۱۲۵	۱۸۷/۵	۳۱۲/۵	۳۷۵	۵۰۰	۶۲۵	۶۸۷/۵



۶ بین صفر تا ۶۸۷/۵ کیلومتر

۷ ۵۰۰ کیلومتر

۸ بله، شناخت رابطه بین این دو کمیت فقط نیازمند دانستن بندهای (۲) و (۳) است.

مقتولی به طول ۱۰۰ سانتی‌متر در اختیار داریم. قسمتی از آن را می‌بریم و با آن یک مربع می‌سازیم. مساحت مربع به دست آمده یا طول قطعه بریده شده رابطه دارد. (۱) آیا مساحت می‌تواند صفر باشد؟



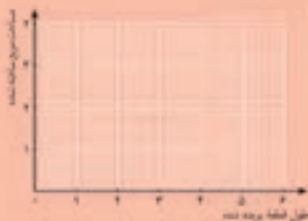
(۲) طول قطعه بریده شده از مقتول، چه مقداری می‌تواند باشد؟

(۳) اگر طول قطعه بریده شده از مقتول را با  $x$  نشان دهیم و مساحت مربع ساخته شده با آن را با  $S$  نشان دهیم، رابطه‌ای بنویسید که مقدار  $S$  را بر حسب مقدار  $x$  بیان می‌کند. با توجه به پاسخ‌های خود، به سؤال‌های زیر جواب دهید.

(۴) جدول زیر، ارتباط طول قطعه بریده شده و مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

طول قطعه بریده شده	۴	۳۰	۴۴	...	۶۰	۱۰۰
مساحت مربع	۶	...	...	۱۴۴	...	...

۵) در شکل زیر، محور افقی طول قطعه بریده شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۴۰ سانتی‌متر است. محور عمودی مساحت مربع ساخته شده را نشان می‌دهد و هر واحد آن معادل ۲۰۰ سانتی‌متر مربع است. جدول صفحه قبل، نقاطی از این صفحه را نشان می‌دهد. این نقاط را بیابید و شکل حاصل را به طور تقریبی رسم کنید.



(۶) مساحت‌های مربع‌های ساخته شده، چه مقداری می‌تواند باشند؟ مجموعه مقادیر این مساحت‌ها را مشخص کنید.

(۷) برای ساختن مربعی به مساحت ۴۰۰ سانتی‌متر مربع، چه مقدار از مقتول را باید ببریم؟

(۸) آیا پاسخ به سؤال‌های (۲) و (۳) برای شناخت رابطه مساحت مربع ساخته شده و طول قطعه بریده شده از مقتول کافی است؟

### اهداف موضوعی:

درک مفهوم رابطه در زمینه هندسی، درک قانون رابطه و مقادیر ممکن کمیت‌ها.

### مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها

۱ خیر زیرا مساحت عددی مثبت است.

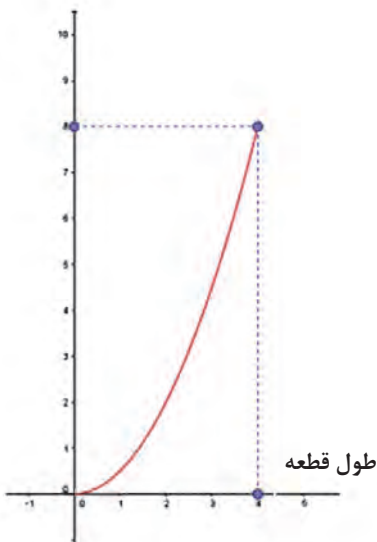
۲ اگر طول قطعه بریده شده را  $x$  در نظر بگیریم  $x$  عددی بین حداقل و حداکثر طول مفتول خواهد بود، یعنی بین صفر و ۱۶۰ سانتی‌متر

۳  $x = 0 < x < 160$   $s = \left(\frac{x}{4}\right)^2 = \frac{x^2}{16}$  طول قطعه بریده شده  $x =$

۴

طول قطعه بریده شده	۴	۲۰	۴۴	۴۸	۶۰	۱۰۰	۱۲۰	۱۶۰
مساحت مربع	۱	۲۵	۱۲۱	۱۴۴	۲۲۵	۶۲۵	۹۰۰	۱۶۰۰

۵



۶ بین صفر و ۱۶۰۰ سانتی مترمربع.

این مجموعه به صورت  $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 1600\}$  نوشته می‌شود.

۷  $900 = \frac{x^2}{16} \Rightarrow x = 120 \text{ cm}$


۸ بله، به کمک جواب‌های بند (۲) و (۳) جواب بقیه سؤال‌ها را می‌توان داد.

پس از این فعالیت‌ها که هنرجویان با مفهوم رابطه بین کمیت‌ها آشنا شده‌اند و مقداری هم به طور غیرمستقیم با مفهوم دامنه و قانون تابع کار کرده‌اند، مفهوم تابع به طور مستقیم ارائه می‌شود. برای تأکید بر یکتایی مقدار تابع با یک مثال، حالتی که یک رابطه تابع نیست نیز تذکر داده می‌شود.

(۱) در فعالیت (۱)، آیا جرم جسم آویزان شده تابعی از طول فنر کشیده شده است؟ آیا طول فنر کشیده شده، تابعی از جرم جسم آویزان شده است؟

(۲) مثالی از دو کمیت مرتبط (الف) و (ب) ارائه کنید که در آن کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) باشد ولی کمیت (الف) تابعی از کمیت (ب) نباشد.

کاربرد کلاس ۱



### اهداف:

- تشخیص نوع رابطه بین دو کمیت، پرورش تفکر واگرا
- 1 ■ بله هم جرم جسم تابعی از طول فنر است و هم طول فنر تابعی از جرم جسم است، زیرا با مشخص شدن هر یک، دیگری کاملاً مشخص می‌شود.
- 2 ■ مثلاً، رابطه بین یک عدد و مربع آن عدد را در نظر بگیرید. با داشتن یک عدد می‌توان مربع آن عدد را تعیین نمود ولی با داشتن مربع یک عدد، دو عدد می‌توان یافت که مربع آنها همان مقدار باشد.

در ادامه، دو مفهوم اساسی دامنه و قانون تابع معرفی می‌شوند و چگونگی تساوی دو تابع بیان می‌شود. مناسب است که در اینجا مثال‌هایی زده شوند که نشان‌دهنده دو تابع مساوی و غیرمساوی باشند.


**مثال:** تابع با قانون  $y_1 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$  و دامنه مجموعه اعداد مثبت با تابع با قانون  $y_2 = x$  و دامنه مجموعه اعداد مثبت مساوی‌اند، زیرا دامنه آنها یکی است و حاصل عمل قانون آنها نیز یکی است.

**مثال:** تابع با قانون  $y_1 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$  و دامنه مجموعه اعداد مثبت با تابع با قانون  $y_2 = x$  و دامنه مجموعه همه اعداد مساوی نیستند، زیرا دامنه آنها یکی نیست.

(۱) در فعالیت (۲)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم بنزین باقی‌مانده در باک، بیان می‌کند.

(۲) در فعالیت (۳)، دامنه و قانون تابعی را بنویسید که مساحت مربع ساخته شده را بر حسب طول قسمت بریده شده از مقنول، بیان می‌کند.

کاربرد کلاس ۳



### اهداف:

- ارتباطات (زبان ریاضی)، شناسایی دامنه و قانون تابع

1 ■ دامنه تابع  $\{v \in \mathbb{R} / 5 \leq v \leq 60\}$

قانون تابع:  $l = (60 - v) \times 12/5$

۲ دامنه تابع  $\{x \in \mathbb{R} / 0 < x \leq 16\}$

قانون تابع:  $s = \frac{x^2}{16}$

## مسئله‌ها

۱- الف) آیا با مشخص بودن محیط یک دایره، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت دایره، تابعی از محیط آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک دایره، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط دایره، تابعی از مساحت آن است؟ دامنه و قانون این تابع را بنویسید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی)

الف) بله، مساحت دایره را از روی محیط آن می‌توان به‌دست آورد و مساحت دایره تابعی از محیط آن است. دامنه این تابع مجموعه همه اعداد مثبت است. برای به‌دست آوردن قانون این تابع فرض کنید  $P$  محیط یک دایره باشد.

$$S = \pi r^2 = \text{مساحت دایره} \quad \text{و} \quad P = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{2\pi}$$

$$\Rightarrow S = \pi \left( \frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{P^2}{4\pi}$$

ب) بله، محیط دایره را از روی مساحت آن می‌توان به‌دست آورد و محیط دایره تابعی از مساحت آن است. دامنه این تابع مجموعه همه اعداد مثبت است. برای به‌دست آوردن قانون این تابع فرض کنید  $S$  مساحت یک دایره باشد.

$$S = \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} = 2\sqrt{\pi S}$$

۲- الف) دو مثلث رسم کنید که محیط آنها  $10$  سانتی‌متر و طول اضلاع آنها متفاوت باشد. مساحت این دو مثلث را پیدا کنید آیا این دو مساحت برابرند؟

ب) آیا با مشخص بودن محیط یک مثلث، مساحت آن مشخص می‌شود؟ آیا مساحت مثلث تابعی از محیط آن است؟

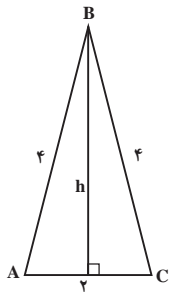
### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن

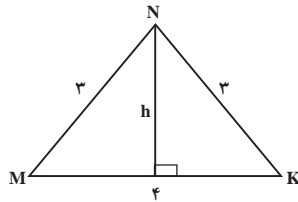
الف) خیر، دو مثلث متساوی‌الساقین زیر را در نظر بگیرید با رسم ارتفاع مرسوم از

رأس این مثلث‌ها و استفاده از رابطه فیثاغورس می‌توان طول ارتفاع آنها را یافت  
 در شکل  $ABC$ ،  $h = \sqrt{15}$  و در شکل  $MNK$ ،  $h = \sqrt{5}$ ، بنابراین

$$S_1 = \frac{\sqrt{15} \times 2}{2} = \sqrt{15} \quad \text{و} \quad S_2 = \frac{\sqrt{5} \times 4}{2} = 2\sqrt{5}$$



(۱)



(۲)

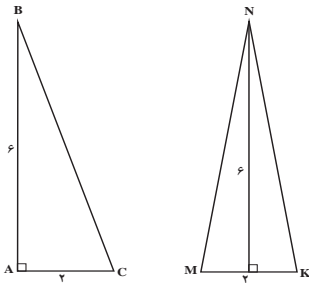
ب) خیر، قسمت (الف) نشان داد که دو مثلث با محیط مساوی ممکن است مساحت متفاوت داشته باشند، پس با دانستن محیط یک مثلث، مساحت آن مشخص نمی‌شود و مساحت مثلث تابعی از محیط آن نیست.

الف) دو مثلث متفاوت با مساحت‌های برابر رسم کنید. محیط آنها را پیدا کنید آیا مقدار محیط‌ها برابرند؟

ب) آیا با مشخص بودن مساحت یک مثلث، محیط آن مشخص می‌شود؟ آیا محیط مثلث تابعی از مساحت آن است؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن



الف) خیر، به دو مثلث بالا توجه کنید.

$$S_{MNK} = \frac{6 \times 2}{2} = 6 \quad \text{و} \quad S_{ABC} = \frac{6 \times 2}{2} = 6$$



ولی در مثلث  $ABC$ ،  $BC = \sqrt{40}$  و در مثلث  $MNK$ ،  $MN = NK = \sqrt{37}$  و بنابراین

$$ABC \text{ محیط} = 6 + 2 + \sqrt{40} \approx 14/3$$

$$MNK \text{ محیط} = \sqrt{37} + \sqrt{37} + 2 \approx 14/1$$

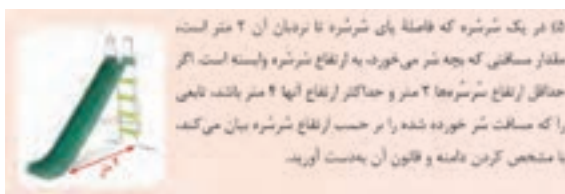
که با هم مساوی نیستند

(ب) خیر، قسمت (الف) نشان داد که دو مثلث با مساحت مساوی ممکن است محیط متفاوت داشته باشند، پس با دانستن مساحت یک مثلث، محیط آن مشخص نمی‌شود و محیط مثلث تابعی از مساحت آن نیست.

۴) سنگی را به هوا پرتاب می‌کنیم و بعد از ۳ ثانیه به زمین برمی‌گردد. آیا ارتفاع سنگ از سطح زمین، تابعی از زمان است؟ چرا؟ اگر زمان را بر حسب ثانیه اندازه بگیریم و مبدأ زمان شروع پرتاب باشد، دامنه این تابع چیست؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، استدلال کردن، پیوند و اتصال با زندگی روزمره  
بله، زیرا در هر لحظه زمان سنگ در جایی معین است و ارتفاع آن نیز معین است. از آنجا که این حرکت فقط در ۳ ثانیه انجام می‌شود، دامنه این تابع مجموعه اعداد بین ۰ تا ۳ است.



### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی، پیوندها و اتصالات، ارتباطات (زبان ریاضی)  
بین طول وتر  $x$  (طول سرسره) و ارتفاع پله‌های سرسره از زمین  $y$  یک رابطه وجود دارد و به کمک قضیه فیثاغورس می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم.

$$x^2 = y^2 + 2^2 \Rightarrow x = \sqrt{y^2 + 4}$$

دامنه این تابع مقادیر ممکن برای  $y$  است که مجموعه اعداد بین ۲ و ۴ است.

۶) یک شیرینی فروشی به طور ثابت، ماهانه ۷ میلیون تومان ثابت اجاره مغازه و آب و برق و مستمر کالکراژ، پرداخت می‌کند. هزینه مواد اولیه هر کیلوگرم شیرینی ۳۰۰۰ تومان است. ظرفیت تولید شیرینی در این مغازه حداکثر ۲۵۰۰ کیلوگرم در ماه است. قیمت هر کیلوگرم شیرینی در بازار ۱۲۰۰۰ تومان است و تمام تولیدات مغازه به فروش می‌رسد. الف) درآمد این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید. ب) هزینه ماهیانه این مغازه تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با به دست آوردن دامنه و قانون آن مشخص کنید. پ) سود این مغازه، تابعی از میزان تولید آن است. این تابع را با مشخص کردن دامنه و قانون آن مشخص کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

الف) اگر  $x$  میزان شیرینی بر حسب کیلوگرم باشد داریم:

$$R = 12000x, \quad 0 \leq x \leq 2500$$

$$C = 3000x + 7000000, \quad 0 \leq x \leq 2500$$

$$P = R - C = 12000x - (3000x + 7000000), \quad 0 \leq x \leq 2500$$

$$P = 9000x - 7000000, \quad 0 \leq x \leq 2500$$

می‌توان در اینجا توضیح داد که حداقل باید ۷۷۸ کیلو شیرینی تولید شود تا شیرینی فروش ضرر نکند. یعنی باید به جای  $x$  در این رابطه عددی قرار داد که  $P$  را مثبت کند.

$$P = 9000x - 7000000 \geq 0 \Rightarrow x \geq 778$$

۷) یک مقاومت ثابت ۳۰ اهمی را به طور موازی با یک مقاومت متغیر می‌بندیم. مقاومت معادل تابعی از مقاومت متغیر است. اگر مقاومت متغیر حداقل ۵ اهم و حداکثر ۱۵۰ اهم باشد. دامنه و قانون تابعی را به دست آورید که مقاومت معادل را بر حسب مقاومت متغیر بیان می‌کند.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{300} = \frac{1}{y} \Rightarrow y = \frac{300x}{300+x}, \quad 5 \leq x \leq 150$$

## بازه‌ها

### اهداف بخش

- درک مفهوم بازه (فاصله)
- استفاده از بازه‌ها در نمایش دامنهٔ توابع
- آشنایی با نمایش هندسی بازه‌ها
- آشنایی با نماد بی‌نهایت و چگونگی استفاده از آن برای نمایش یک بازه

### واژه‌های کلیدی:

بازه، بی‌نهایت

### ورود به مطلب:

هدف این بخش فقط نمادگذاری برای نمایش برخی زیرمجموعه‌های مهم در مجموعهٔ اعداد حقیقی است. بنابراین تنها انگیزهٔ مهم این بخش نمادگذاری برای ساده‌تر صحبت کردن است و مناسب است که با مراجعه به بخش‌های قبل و دیدن برخی زیر مجموعه‌ها که به آنها برخورد کرده بودیم، انگیزهٔ لازم برای نام‌گذاری آنها را فراهم کنید. بازه‌ها دستهٔ خاصی از زیر مجموعه‌های مجموعهٔ اعداد حقیقی هستند که بسیار به کار می‌آیند و به همین دلیل آنها را نام‌گذاری می‌کنیم.

تمرین ۳.۱



بازه‌های زیر را با نماد مجموعه نمایش دهید و روی یک محور نشان دهید.

$[2, 5]$  ،  $(-1, 3)$  ،  $(4, 7]$  ،  $(-4, -2)$

### اهداف:

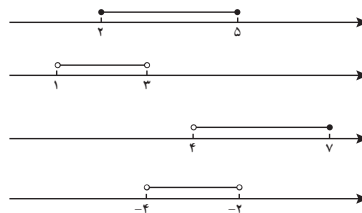
- پرورش نمایش یک مفهوم با ارائه‌های مختلف

$$[2, 5] = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 5\}$$

$$(-1, 3) = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 3\}$$

$$(4, 7] = \{x \in \mathbb{R} / 4 < x \leq 7\}$$

$$(-4, -2) = \{x \in \mathbb{R} / -4 < x < -2\}$$



در ادامه این بخش، نمادهای  $+\infty$  و  $-\infty$  برای نمایش بازه‌های بی‌کران معرفی می‌شوند.

توجه داشته باشید که  $+\infty$  و  $-\infty$  نماد هستند و نشان‌دهنده هیچ عدد حقیقی نیستند و اشاره به نقطه خاصی روی محور اعداد حقیقی ندارند. استفاده از این نمادها در بازه‌ها به معنای بی‌کرانگی بازه از بالا یا پایین است. مثلاً اگر بخواهیم مجموعه همه اعداد بیشتر از ۲، یعنی  $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$ ، را نشان دهیم، می‌توانیم آن را به صورت  $(2 + \infty)$  نمایش دهیم.

چون هر بازه، زیر مجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی است می‌توانید از اجتماع و اشتراک بازه‌ها نیز صحبت کنید و گاهی ممکن است این اعمال مجموعه‌ای مجدداً یک بازه ایجاد کند. همچنین می‌توانید از نماد  $(-\infty, +\infty)$  برای نمایش کل مجموعه اعداد حقیقی برای هنرجویان قوی‌تر استفاده نمایید.

## بخش ۲: نمادگذاری تابع‌ها

### اهداف بخش

- آشنایی با نحوه نام‌گذاری تابع‌ها و دامنه آنها
- آشنایی با مفهوم مقدار تابع در یک نقطه و بیان جبری قانون تابع از طریق یک متغیر
- درک مفهوم دامنه یک تابع به عنوان مجموعه مقادیر متغیر آن تابع
- درک تمایز بین مفهوم تابع و قانون تابع
- درک تفاوت تابع‌های با قانون یکسان و دامنه‌های مختلف

### واژه‌های کلیدی:

متغیر، دامنه تابع، مقدار تابع

### نگاه کلی به بخش

پس از درک مفهوم تابع برای بررسی جزئیات این مفهوم نیازمند نام‌گذاری اجزای مفهوم تابع هستیم تا بتوانیم با سهولت در مورد آنها صحبت کنیم. به همین دلیل شیوه نام‌گذاری خود تابع، دامنه آن و مقادیر تابع به کمک متغیرها مطرح شده‌اند. در این بخش برای داشتن یک تصویر ذهنی بهتر از ماهیت تابع، به طور غیرمستقیم به نمایش فلسفی تابع در یک مثال خاص اشاره شده است. ولی کار با چنین نمایشی از اهداف کتاب نیست. دبیران در صورت نیاز می‌توانند برای کمک به درک مفهوم تابع به عنوان یک عملگر عمل‌کننده روی بعضی مقادیر و ایجاد مقادیری دیگر، از این نمایش استفاده کنند. این نمایش برای توصیف توابع دلخواه بسیار مفید است. از آنجا که در این کتاب فقط با توابع با متغیر عددی و مقادیر عددی سر و کار خواهیم داشت از این نمایش استفاده‌ای نکردیم.

### اشتباه رایج:

در ادامه از طریق مکالمه بین هنر جو و دبیر به اشتباهی رایج در مفهوم تابع پرداخته‌ایم. در این اشتباه، برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه به قانون تابع نگاه می‌کنند که آیا در آن نقطه معنا دارد یا خیر در حالی که برای محاسبه مقدار تابع در یک نقطه

باید به دامنه تابع توجه کرد که آیا آن نقطه در دامنه تابع می باشد یا خیر. این اشتباه ناشی از این بدفهمی است که تابع و قانون تابع یکسان گرفته می شوند در حالی که دامنه تابع نیز بخشی از مفهوم تابع است که مستقل از قانون تابع تعیین می شود. در این بخش با ارائه مثال ها و مسئله ها و کار در کلاس های متنوع سعی شده است اهمیت دامنه و شیوه های تعیین آن مشخص شوند. در تعیین دامنه نکته اصلی در آن است که آن تابع قرار است چه پدیده ای را توصیف کند. محدودیت هایی که شرایط آن پدیده ایجاد می کند وضعیت دامنه تابع را مشخص می کند. البته ارائه تابع در جهان ریاضی هم انجام می شود که حتی اگر هیچ پدیده واقعی هم در کار نباشد این ارائه کننده تابع است که باید دامنه تابع را مشخص کند نه اینکه خود به خود از روی قانون تابع، دامنه آن مشخص باشد.

### ورود به مطلب:

هدف اصلی این بخش نام گذاری تابع ها است و شیوه ورود به این گونه مباحث یادآوری ضرورت نام گذاری برای سخن گفتن است. مثلاً اگر در مورد چند تابع بخواهیم صحبت کنیم باید نامی داشته باشند تا به آنها اشاره کنیم و برای آنکه بتوانیم در مورد تفاوت های این توابع صحبت کنیم باید جزئیات عملیاتی که با توابع انجام می دهیم را بتوانیم بیان کنیم. درباره اهمیت توجه به دامنه تابع ها، می توانید از مثال های کتاب استفاده کنید یا مثال هایی شبیه آن را که متناسب هنرجویان کلاس باشد بیابید و مطرح کنید.

۱- الف) تابع به دست آمده در فعالیت ۲، که مسافت طی شده توسط خودرو را بر حسب حجم پمپین موجود در باک بیان می کند، به نام گذاری کنید و دامنه آن را بنویسید.

ب) مقادیرهای (۲۴۵) و (۱۶۸) را بیابید. آیا عبارت (۲۴۵) معنایی دارد؟

ب) اگر متغیر این تابع را با  $x$  نشان دهیم، مجموعه ای که  $x$  در آن است چه نام دارد؟ قانون تابع چگونه نوشته می شود؟

ت) اگر متغیر این تابع را با  $t$  نشان دهیم، مجموعه ای که  $t$  در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می شود؟

۳- الف) تابع به دست آمده در فعالیت ۳، که مساحت مربع ساخته شده بر حسب طول مفروض بریده شده را بیان می کند، به نام گذاری کنید و دامنه آن را بنویسید.

پ) مقدارهای  $g(5)$  و  $g(12)$  را بیابید. آیا عبارت  $g(300)$  معنایی دارد؟  
 ب) اگر متغیر این تابع را با  $x$  نشان دهیم، مجموعه‌ای که  $x$  در آن است چه نام دارد؟ قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟  
 ت) اگر این تابع را با  $k$  و متغیر این تابع را با  $z$  نشان دهیم، قانون این تابع چگونه نوشته می‌شود؟ مجموعه‌ای را که  $z$  در آن است، مشخص کنید.

## اهداف :

- نام‌گذاری تابع و بیان قانون تابع و دامنه تابع از طریق متغیر، پرورش مهارت‌های استفاده از نمادهای ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی و بیان ایده‌ها، حل مسئله
- ۱ الف)  $x$  را میزان مصرف بنزین بر حسب لیتر در نظر می‌گیریم.

$$g(x) = (60-x) \cdot 12/5 \quad D_g = [5, 60]$$

$$g(45) = (60-45) \cdot 12/5 = 187/5 \quad \text{ب)}$$

$$g(18) = (60-18) \cdot 12/5 = 525$$

خیر،  $g(75)$  معنی ندارد زیرا 75 در دامنه این تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود حجم بنزین موجود در باک ماشین است و ماشینی که باک آن حداکثر 60 لیتر گنجایش دارد نمی‌تواند 75 لیتر بنزین در خود داشته باشد.

پ) مجموعه‌ای که متغیر یک تابع در آن تغییر می‌کند همان دامنه آن تابع است. اگر نام متغیر  $v$  باشد قانون این تابع به صورت  $g(v) = (60 - v) \cdot 12/5$  نوشته می‌شود.

ت) اگر نام متغیر  $t$  باشد قانون این تابع به صورت  $g(t) = (60 - t) \cdot 12/5$  نوشته می‌شود و مجموعه‌ای که  $t$  در آن تغییر می‌کند دامنه  $g$  است.

$$2 \text{ الف) } D_h = (0, 160] \text{ و قانون تابع با متغیر } t \text{ به صورت } h(t) = \frac{t^2}{16} \text{ است.}$$

ب)

$$h(5) = \frac{5^2}{16} = \frac{25}{16} \approx 1/57$$

$$h(12) = \frac{12^2}{16} = 9$$

خیر  $h(200)$  معنی ندارد، زیرا 200 در دامنه تابع نیست. همچنین اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم، عددی که مقدار این تابع در آنجا محاسبه می‌شود، طول مفتول بریده شده از یک مفتول 160 سانتی‌متری است و نمی‌توان

از چنین مفتولی یک مفتول 200 سانتی‌متری برید.

پ) اگر نام متغیر تابع  $x$  باشد قانون تابع به صورت  $h(x) = \frac{x^2}{16}$  نوشته می‌شود و

$x$  در دامنه تابع  $h$  تغییر می‌کند.

ت) در این حالت  $D_k = (0, 160]$  و  $K(z) = \frac{z^2}{16}$  و  $z \in D_k$

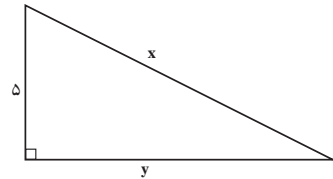
۱) طول یکی از ضلع‌های زاویه قائمه در مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۵ سانتی‌متر است. مساحت این مثلث، وابسته به طول وتر آن است. دامنه و قانون تابعی را مشخص کنید که مساحت این مثلث را بر حسب طول وتر آن بیان می‌کند. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نام‌های انتخابی خود، به زبان ریاضی بنویسید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی)

$$x^2 = 25 + y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 - 25}$$

$$S = \frac{5y}{2} = \frac{5\sqrt{x^2 - 25}}{2}$$



چون وتر از ضلع‌های زاویه قائمه باید بزرگ‌تر باشد، پس:  $x > 5$ . یعنی  $D_s = (5, +\infty)$ .  
حالا اگر متغیر این تابع را به جای  $x$ ،  $l$  بنامیم و قانون تابع مساحت مثلث را  $f$  بنامیم، داریم:

$$f(l) = \frac{5\sqrt{l^2 - 25}}{2} \quad D_f = (5, +\infty)$$

و اگر متغیر این تابع را با  $u$  نشان دهیم و تابع مساحت را با  $h$  نشان دهیم، داریم:

$$h(u) = \frac{5\sqrt{u^2 - 25}}{2} \quad D_h = (5, +\infty)$$

۲) یک باغ میوه به مساحت ۱۰ هکتار در نظر بگیرید. یک کارگر در یک روز می‌تواند ۱۰۰ مترمربع از این باغ را میوه‌چینی کند.  
الف) یک کارگر در چند روز تمام میوه‌های باغ را می‌چیند؟ دو کارگر در چند روز کار میوه‌چینی را تمام خواهند کرد؟  
ب) آیا تعداد روزهای لازم برای چین تمام میوه‌های این باغ تابعی از تعداد کارگران است؟ چرا؟  
قانون این تابع چیست؟ اگر حداکثر ۳۵ نفر کارگر همزمان قادر به کار میوه‌چینی باشند، دامنه این تابع چیست؟  
پ) اگر این تابع را  $f$  بنامیم، مقادیر  $f(5)$  و  $f(30)$  را به دست آورید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟  
ت) آیا  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  و  $f(40)$  معنایی دارند؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)  
الف) ابتدا مساحت زمین را بر حسب مترمربع به دست می‌آوریم.

$$10 \times 10000 = 100000 \text{ m}^2$$

$$100000 \div 100 = 1000 \text{ روز}$$



یک کارگر در ۱۰۰۰ روز میوه‌چینی را کامل می‌کند و دو کارگر در ۵۰۰ روز میوه‌چینی را کامل می‌کنند.

ب) بله تعداد روزهای لازم برای کامل شدن میوه‌چینی تابعی از تعداد کارگران است، زیرا با مشخص شدن تعداد کارگران تعداد روزهای مورد نیاز دقیقاً مشخص خواهد شد و اگر تعداد کارگران  $x$  باشد تعداد روزها به صورت  $\frac{1000}{x}$  است. دامنه این تابع با توجه به اینکه حداکثر تعداد ممکن برای کارگران ۳۵ نفر است، مجموعه  $\{1, 2, \dots, 35\}$  است.

$$g(x) = \frac{1000}{x} \quad (\text{پ})$$

تعداد روزهایی که ۵ کارگر میوه‌چینی را کامل می‌کنند:  $g(5) = 200$

$$g(30) = \frac{1000}{30} = 33\frac{1}{3} \text{ روز} = \text{حدود } 33\frac{1}{3} \text{ روز}$$

ت) خیر زیرا  $x$  نمایش تعداد کارگر است و نصف کارگر بی‌معنی است.

$g(40)$  بی‌معناست زیرا با توجه به دامنه حداکثر ۳۵ کارگر می‌توانند کار کنند.

۴) کرایه تاکسی وابسته به طول مسیر مسافر است. ورودیه تاکسی ۶۰۰ تومان است و به ازای هر ۱۰۰ متر طی شده ۵۰ تومان کرایه گرفته می‌شود. قانون تابعی را که کرایه تاکسی را برحسب مسافت طی شده بیان می‌کند به دست آورید. با توجه به اینکه تاکسی‌ها در روز حداکثر ۵۰۰ کیلومتر طی می‌کنند، دامنه این تابع را مشخص کنید. برای این تابع و متغیر آن نامی انتخاب کنید و دامنه و قانون این تابع را با نامهای انتخابی خود بیان کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، ارتباطات (زبان ریاضی)

فرض مسئله به معنای آن است که به ازای هر ۲ متر، ۱ تومان کرایه دریافت می‌شود. مسافت طی شده را بر حسب متر و کرایه را بر حسب تومان در نظر می‌گیریم. اگر متغیر این تابع را با  $k$  و خود تابع را با  $x$  نشان دهیم طول مسافت طی شده بر حسب متر خواهد بود و داریم:

$$k(x) = -x + 600 \quad D_k = [0, 500000]$$


اگر متغیر را با  $l$  و تابع را با  $f$  نشان دهیم

$$f(l) = \frac{1}{2}l + 600 \quad D_f = [0, 500000]$$

۴) مستطیل‌هایی را در نظر بگیرید که طول آنها ۳ واحد بیشتر از عرض آنها است. مساحت این مستطیل‌ها تابعی از عرض آنها است. این تابع را  $g$  بنامید و متغیر آن را با  $l$  نمایش دهید. دامنه و قانون این تابع را بنویسید. آیا  $g(1)$  معنایی دارد؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال، ارتباطات کلامی (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

$$g(l) = l(1 + 2) \quad Dg = (0, +\infty)$$


خیر  $g(-1)$  معنی ندارد زیرا طول یک پاره خط (عرض) نمی‌تواند منفی باشد.

۵) سنگی را از بالای یک ساختمان ۲۵ متری رها می‌کنید. طبق قوانین فیزیک، ارتفاع این سنگ از سطح زمین تابعی از زمان است. اگر زمان را بر حسب ثانیه با  $t$  و ارتفاع از سطح زمین را با متر اندازه‌گیری کنید و با  $h$  نشان دهید و لحظه رها کردن سنگ لحظه صفر باشد. قانون این تابع به صورت  $h = 25 - 5t^2$  است.

الف) دامنه این تابع را تعیین کنید.

ب) مقدارهای  $h(1)$  و  $h(2)$  را حساب کنید. این مقادیر چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ب) آیا  $h(3)$  و  $h(-1)$  معنایی دارند؟ چرا؟

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

الف) قانون این تابع تا زمانی اعتبار دارد که سنگ به زمین برسد و بعد از آن اعتبار ندارد. رسیدن سنگ به زمین در زمانی رخ می‌دهد که  $h=0$  و با حل معادله  $0 = 25 - 5t^2 = h$  دیده می‌شود که زمان رسیدن سنگ به زمین در لحظه  $t = \sqrt{5}$  است. پس  $D_h = (0, \sqrt{5}]$ .

ب)  $h(1) = -5(1)^2 + 25 = 20$  و  $h(2) = -5(2)^2 + 25 = 5$  یعنی در پایان ۱ ثانیه سنگ در ارتفاع ۲۰ متری و در پایان ۲ ثانیه سنگ در ارتفاع ۵ متری از زمین قرار دارد. هیچ معنایی ندارند زیرا این اعداد در دامنه تابع نیستند و اگر به مفهومی که این تابع بیان می‌کند مراجعه کنیم دیده می‌شود شروع حرکت از لحظه صفر به بعد است و قبل از صفر چنین حرکتی وجود ندارد و همچنین در لحظه  $\sqrt{5}$  حرکت خاتمه می‌یابد و بعد از آن، قانون تابع اعتباری ندارد.

## بخش ۳: نمایش‌های تابع: جدول و نمودار

### اهداف بخش

- آشنایی با جدول تغییرات تابع
- آشنایی با نمودار تابع
- کسب مهارت در رسم جدول مقادیر تابع
- کسب مهارت در رسم نمودار تابع از روی جدول
- تشخیص رفتار تابع از روی جدول و نمودار
- درک رابطه بین نمودار تابع و جدول مقادیر تابع

### نگاه کلی به بخش:

در این بخش با طرح یک مسئله واقعی (تغییرات قیمت سکه در هفته‌های مختلف) هنرجو برای درک عمیق‌تری از تابع که ممکن است ضابطه یا فرمولی نداشته باشد آماده می‌شود. در این مسئله که در طی یک مکالمه مورد بحث قرار می‌گیرد همچنین، نمایش جدولی تابع‌ها نیز مطرح خواهند شد. در این قسمت همزمان دو هدف دنبال می‌شود که یکی درک و پذیرش تابع‌هایی که فرمول ندارند و یکی دیدن جدول تغییرات یک تابع است.

در مثال‌های این قسمت دامنه برخی تابع‌ها گسسته است. (به فعالیتی که در مورد عدد پی و رقم‌های اعشاری آن در کتاب کار شده است، رجوع کنید.) البته نمایش جدولی یک تابع، غیرمستقیم در فعالیت‌ها به عنوان جدول نمایش رابطه بین دو کمیت مطرح شده است که در این بخش به عنوان جدول تغییرات تابع یا نمایش جدولی تابع رسماً معرفی می‌شوند.

### ورود به مطلب:

برای ورود به نمایش جدولی و نموداری تابع‌ها و اهمیت آن می‌توانید تابع قابل توجهی را مطرح کنید و سؤالاتی را در مورد رفتار آن، مانند کم یا زیاد شدن مقادیر تابع مطرح کنید که از روی قانون تابع نتوان به سادگی پاسخ آنها را یافت. سپس با یافتن نقطه به نقطه مقادیر تابع و یادداشت این مقادیر در یک جدول هم به

سؤال‌های مطرح شده پاسخ دهید و هم غیر مستقیم جدول یک تابع را به دست آورده باشید و آن را به عنوان نمایش جدولی تابع معرفی کنید. نمایش نموداری نیز مستقیماً از نمایش جدولی ساخته می‌شود که یک درک بصری و کامل از مقادیر یک جدول به دست می‌دهد.

(۱) برای تابع  $f(x) = \frac{1}{x}$  با دامنه  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

کاربرد کلاس ۵

---

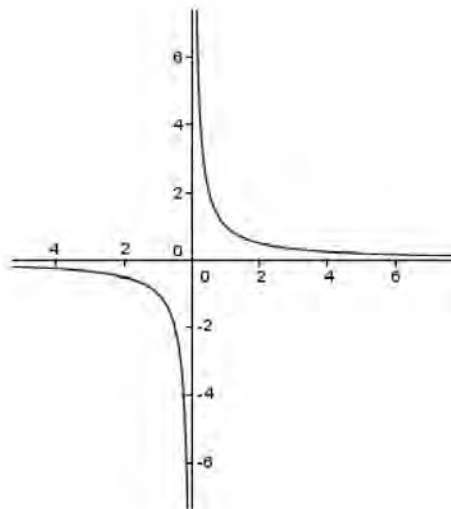
(۲) برای تابع  $g(t) = t - t^2$  با دامنه  $[-1, 2]$  جدول مناسبی رسم کنید و با رسم نمودار آن، چگونگی تغییرات مقادیر تابع را توضیح دهید.

### اهداف:

■ پرورش مهارت‌های نمایش مفاهیم با ارائه‌های مختلف، برقراری ارتباطات کلامی



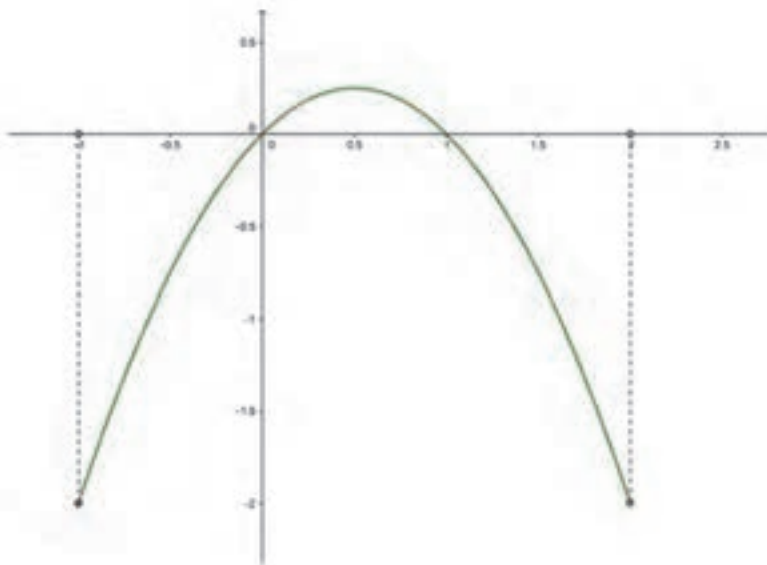
$t$	$-\infty \leftarrow \dots -10 \quad -0/1 \quad -0/0.1 \rightarrow 0$	$\leftarrow 0/0.1 \quad 0/1 \quad 10 \dots \rightarrow +\infty$
$\frac{1}{t}$	$0 \leftarrow \dots -0/1 \quad -10 \quad -100 \rightarrow -\infty$	$+\infty \leftarrow 100 \quad 10 \quad 0/1 \dots \rightarrow 0$



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که مقادیر این تابع در بازه  $(-\infty, 0)$  با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن مقدار متغیر به صفر، مقدار تابع از هر عددی کوچک‌تر می‌شود که به اصطلاح گوییم مقدار تابع به منفی بی‌نهایت می‌رود و هر چه مقدار متغیر از هر عددی کوچک‌تر شود (در اعداد منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ شود)، مقدار تابع به صفر نزدیک‌تر می‌شود و همچنین در بازه  $(0, +\infty)$  با نزدیک شدن مقادیر متغیر به صفر مقدار تابع از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این حالت گوییم مقدار تابع به بی‌نهایت می‌رود و هرچه مقدار متغیر بزرگ‌تر شود مقدار تابع به صفر نزدیک‌تر می‌شود.

۲

$t$	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲
$g(t)$	-۲	$-\frac{3}{4}$	۰	$\frac{1}{4}$	۰	$-\frac{3}{4}$	-۲



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که مقادیر تابع در بازه  $[-1, \frac{1}{4}]$  با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن مقدار متغیر به  $\frac{1}{4}$ ، مقدار تابع بزرگ می‌شود و به  $\frac{1}{4}$  نزدیک می‌شود و همچنین در بازه  $[\frac{1}{4}, 2]$  با بزرگ شدن مقدار متغیر و نزدیک شدن به ۲ مقدار تابع کوچک‌تر شده و به -۲ نزدیک می‌شود.

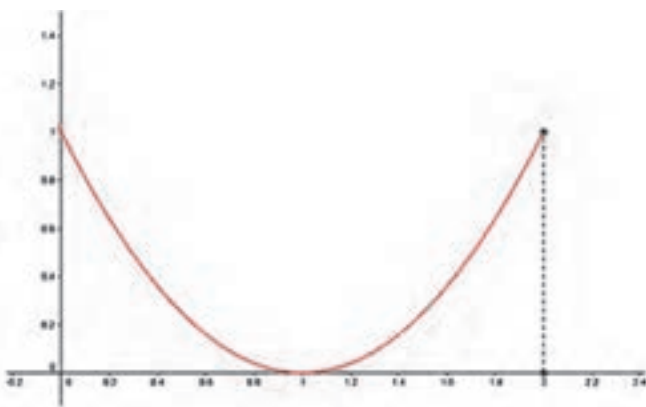
## مسئله‌ها

۱) تابع  $f$  را با قانون  $f(x) = (x-1)^2$  و دامنه  $[0, 2]$  در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، باز نمایی‌های چندگانه

$x$	۰	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	۱	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{4}$	۲
$f(x)$	۱	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	۰	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{9}{16}$	۱



از روی نمودار دیده می‌شود که با تغییر مقدار متغیر از ۰ به ۱ مقدار تابع کم می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود و همچنین با تغییر مقدار متغیر از ۱ به ۲ مقدار تابع زیاد می‌شود و به ۱ نزدیک می‌شود.

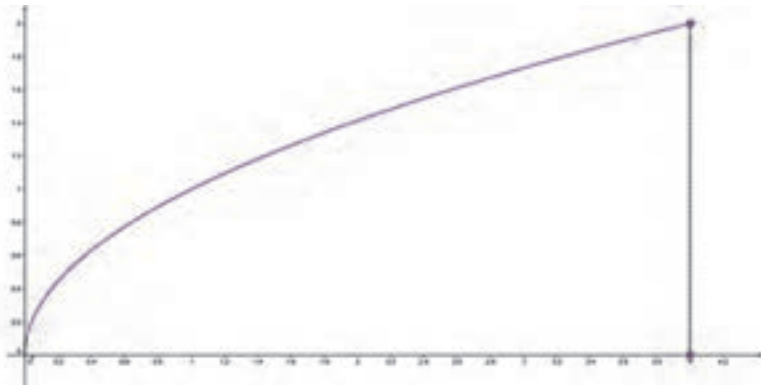
۱۲) تابع  $g$  را با قانون  $g(t) = \sqrt{t}$  و دامنه  $[0, 4]$  در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، باز‌نمایی‌های چندگانه

$t$	۰	۱	۲	۳	۴
$g(t)$	۰	۱	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	۲

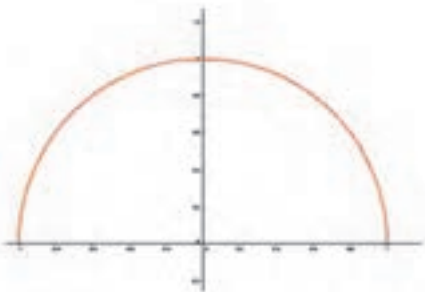
از روی نمودار دیده می‌شود که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه، مقدار تابع نیز بزرگ می‌شود.



۱۳) تابع  $f$  را با قانون  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  و دامنه  $[-1, 1]$  در نظر بگیرید. برای این تابع جدول مناسبی رسم کنید که چگونگی تغییرات آن را نشان دهد. سپس نمودار آن را رسم کنید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، باز‌نمایی‌های چندگانه



$x$	-۱	$-\frac{1}{2}$	۰	$\frac{1}{2}$	۱
$f(x)$	۰	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	۰

نمودار واقعاً مربوط به یک نیم‌دایره است ولی با رسم تقریبی می‌توان شبیه نیم‌دایره بودن آن را به‌دست آورد.

۴۴ در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که طول وتر آنها ۲ واحد بیشتر از طول یکی از اضلاع آن است، مساحت آنها تابعی از طول وتر است.  
الف) دامنه و قانون این تابع را به‌دست آورید.  
ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

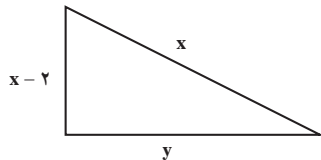
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، باز‌نمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

$$x^2 = (x-2)^2 + y^2 \rightarrow y = \sqrt{4x-4} \Rightarrow f(x) = s = \frac{(x-2)y}{2} = \frac{(x-2)\sqrt{4x-4}}{2}$$

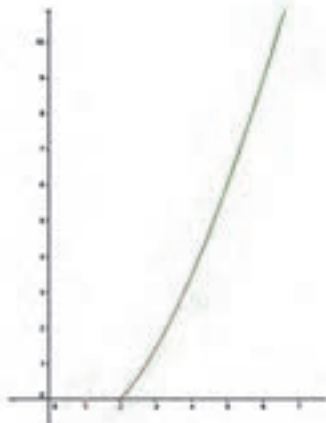
$$\Rightarrow S = (x-2)\sqrt{x-1}$$

دامنهٔ این تابع کلیه مقادیر ممکن برای طول وتر است که حداقل ۲ خواهد بود.

$$D_f = (2, +\infty)$$



$x$	۲	۳	۴	۵	.....	$+\infty$
$f(x)$	۰	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	۶	.....	$+\infty$



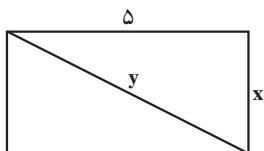


این جدول و نمودار نشان می‌دهند که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه‌اش، مقدار تابع نیز بزرگ می‌شود تا جایی که اگر مقدار متغیر بسیار بزرگ شود مقدار تابع نیز بسیار بزرگ و از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود که به اصطلاح گوییم  $f(x)$  به بی‌نهایت می‌رود. یعنی با بزرگ شدن وتر مساحت نیز بزرگ می‌شود.

۵) در مستطیل‌هایی که طول یک ضلع آن ۵ واحد است، طول قطر مستطیل تابعی از طول ضلع دیگر مستطیل است.  
الف) اگر مستطیل‌های با مساحت حداکثر  $100$  واحد را در نظر بگیریم، دامنه و قانون این تابع را مشخص کنید.  
ب) جدول مناسبی برای این تابع رسم کنید و به کمک آن نمودار تابع را رسم کنید و رفتار این تابع را توضیح دهید.

### مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، باز نمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)



الف) ابتدا قانون این تابع را به دست می‌آوریم.

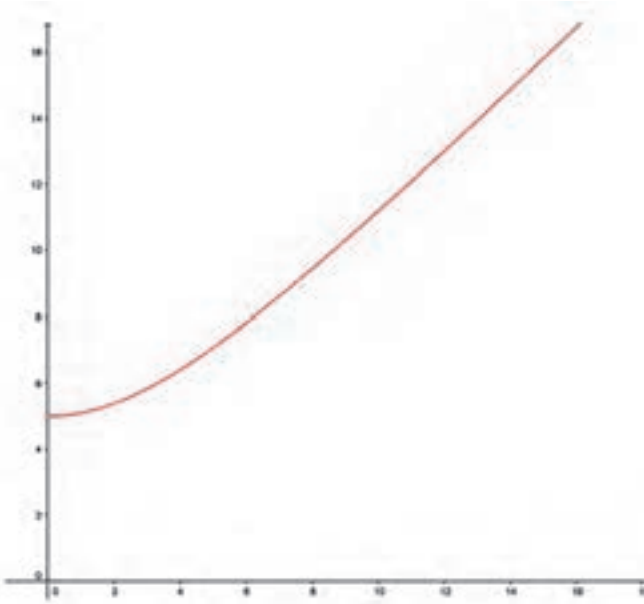
$$y^2 = x^2 + 25 \Rightarrow y = \sqrt{x^2 + 25} \Rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 25}$$

از آنجا که مستطیل‌های مورد نظر حداکثر  $100$  واحد مساحت دارند باید داشته باشیم:

$$S = 5x \leq 100 \Rightarrow x \leq 20 \Rightarrow 0 < x \leq 20$$

پس دامنه این تابع بازه  $(0, 20]$  است.  
(ب)

$x$	۰	۱	۴	۸	.....	۲۰
$f(x)$	۵	$\sqrt{26}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{89}$	.....	$\sqrt{425}$



این جدول و نمودار نشان می‌دهند که با بزرگ شدن مقدار متغیر در دامنه‌اش، مقدار تابع یعنی طول قطر نیز افزایش می‌یابد.

## بخش پنجم: نمودار برخی تابع‌های خاص

### اهداف بخش

- آشنایی با تابع‌های چندجمله‌ای و نمایش جبری و دامنه آنها
- تشخیص تغییرات نمودار تابع  $y = ax + b$  به ازای تغییرات  $a$  و  $b$  به کمک نرم‌افزار جئوجبرا
- آشنایی با نمودار تابع‌های درجه دوم به کمک نرم‌افزار جئوجبرا
- حل معادله درجه دوم به کمک نمودار تابع درجه دوم
- تشخیص تابع‌های مساوی

### واژه‌های کلیدی:

تابع چند جمله‌ای، تابع خطی، تابع ثابت، تابع درجه دوم، نمودار تابع

### نگاه کلی به بخش

پس از شناخت مفهوم تابع و نمایش‌های آن لازم است تابع‌هایی که در عمل بسیار با آنها برخورد می‌کنیم را بشناسیم تا در به‌کارگیری تابع‌ها مهارت کافی داشته باشیم. در این بخش به دلیل پرکاربرد بودن تابع‌های چندجمله‌ای، خطی، درجه دوم، ثابت در توصیف پدیده‌های طبیعی، چگونگی این تابع‌ها را از لحاظ نموداری و ضابطه بررسی می‌کنیم.

### ورود به مطلب:

برای شروع این بخش می‌توانیم با این مثال شروع کنیم که پس از شناخت موجوداتی به نام حیوان لازم است برای شناخت بهتر، آنها را دسته‌بندی کنیم و انواعی از آنها را که بیشتر با آنها برخورد می‌کنیم با جزئیات بیشتری بشناسیم. در مورد تابع‌ها که مفهوم کلی آنها را شناختیم باید انواعی از آنها را که بیشتر با آنها برخورد می‌کنیم دسته‌بندی کنیم و آنها را با جزئیات بیشتری بشناسیم.



### اهداف:

#### ■ پرورش تفکرواگرا

**مثال:**  $y = x^2 - 5x$  و  $y = x^2 + 5x - 1$

در ادامه به دسته خاصی از توابع چندجمله‌ای که توابع درجه اول یا همان توابع خطی هستند پرداخته می‌شود. هنرجویان قبلاً با این توابع به عنوان رابطه‌های خطی آشنا شده‌اند و در اینجا از نقطه نظر یک تابع به آنها نگاه خواهند کرد. از میان آنها تابع ثابت ممکن است چالش‌هایی به همراه داشته باشد که درباره آن بحث مستقلی انجام شده است.

### فعالیت آموزشی

در زیر پاره خط  $AB$  به طول  $a$  به موازات محور  $x$  رسم شده است. فاصله پاره خط  $AB$  تا محور  $x$ ها برابر  $1$  است. نقطه  $C$  به طول  $x$  را روی محور اعداد در نظر می‌گیریم. مساحت مثلث  $ABC$  تابعی از طول نقطه  $C$  است. این تابع را  $f$  بنامید.



- (۱) مقدارهای  $f(0)$ ،  $f(5)$  و  $f(-1)$  را تعیین کنید.
- (۲) جدول این تابع را رسم کنید؛ قانون آن را مشخص نمایید و نمودار آن را رسم کنید.

#### اهداف موضوعی:

- درک مفهوم تابع ثابت
- آشنایی با قانون توابع ثابت
- آشنایی با نمودار توابع ثابت

#### مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، ارتباطات (زبان ریاضی، بیان ایده‌ها)

$$f(-1) = f(5) = f(0) = \frac{a}{2} \quad (۱)$$

(۲) اگر طول نقطه  $C$  را  $x$  در نظر بگیریم داریم:

$x$	-۲	-۱	۰	۱	.....	۲۰
$f(x)$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2}$	-	$\frac{a}{2}$	.....	$\frac{a}{2}$

قانون این تابع به صورت  $f(x) = \frac{a}{2}$  می‌باشد. نمودار این تابع خطی افقی به فاصله  $\frac{a}{2}$  از محور طول‌ها است.

از طریق این فعالیت باید برای هنرجویان توضیح داده شود که مقدار این تابع در همه نقاط با هم مساوی است و این گونه توابع را تابع ثابت می‌نامند.

## فعالیت آموزشی

تعمیرات ۱)



با استفاده از جنوجیرا، نمودار تابع‌های خطی  $ax + b$  را به ازای مقادیر مختلفی از  $a$  و  $b$  رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (چگونگی استفاده از جنوجیرا در صفحه بعد توضیح داده شده است.)

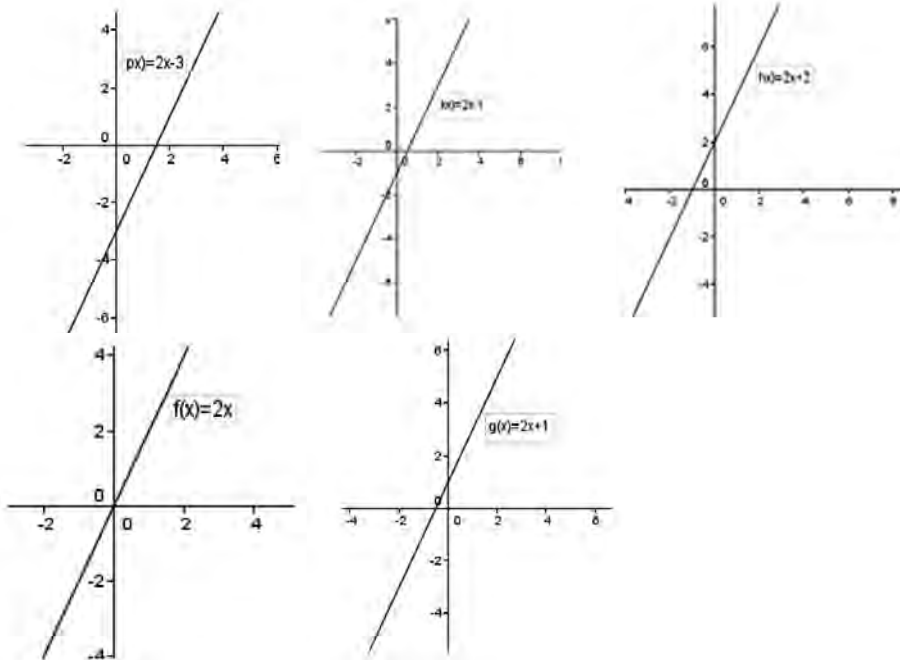
- ۱) با ثابت نگه داشتن  $a$  و تغییر مقادیر  $b$ ، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ وضعیت خط‌های به دست آمده، نسبت به هم چگونه است؟
- ۲) با تغییر مقادیر  $b$ ، نمودار تابع چگونه تغییر می‌کند؟ (مقادیر مثبت و منفی را برای  $b$  در نظر بگیرید.)
- ۳) علامت  $a$  چه تأثیری بر نمودار تابع‌های خطی دارد؟ وضعیت زاویه خط با محور طول‌ها را توصیف کنید.
- ۴) آیا هر خطی در صفحه، نمودار یک تابع خطی است؟

### اهداف موضوعی:

- آشنایی با نمودار توابع خطی در حالت‌های مختلف
- درک رابطه بین تغییرات  $a$  و تغییرات نمودار توابع  $y = ax + b$  با ثابت بودن  $b$
- درک رابطه بین تغییرات  $b$  و تغییرات نمودار توابع  $y = ax + b$  با ثابت بودن  $a$
- تشخیص تفاوت خط‌های عمود بر محور طول‌ها با سایر خط‌ها

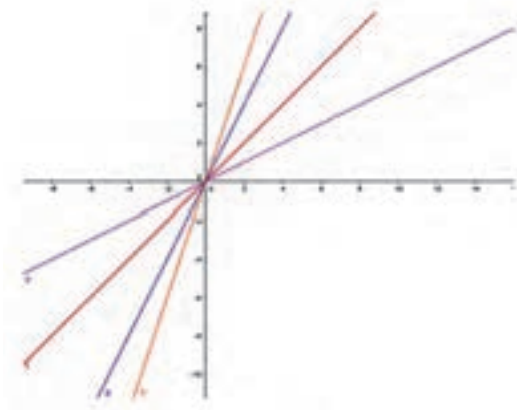
### مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، مقایسه کردن، ارتباطات کلامی، کار با نرم‌افزار

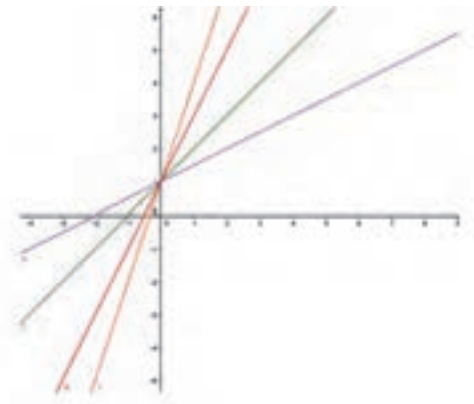


۱ نمودار توابع  $f(x) = 2x$  و  $g(x) = 2x + 1$  و  $h(x) = 2x + 2$  و  $k(x) = 2x - 1$  و  $l(x) = 2x - 3$  در صفحه قبل رسم شده‌اند: در این توابع مقدار  $a$  ثابت و مقدار  $b$  تغییر می‌کند. دیده می‌شود نمودار این توابع به موازات یکدیگر رسم شده‌اند. این خط‌ها همگی با هم موازیند و فقط محل تلاقی نمودار آنها با محور عرض‌ها تغییر می‌کند.

۲ نمودار تابع  $f(x) = ax$  به ازای مقادیر مختلف  $a$  در زیر رسم شده‌اند. دیده می‌شود که تمام این خط‌ها از مبدأ می‌گذرند و با تغییر  $a$  این خط‌ها حول مبدأ دوران می‌کنند و تقریباً کلیه خط‌های گذرنده از مبدأ را می‌سازند.



به‌عنوان مثالی دیگر، نمودار تابع  $f(x) = ax + 1$  به ازای مقادیر مختلف  $a$  در زیر رسم شده‌اند. دیده می‌شود که تمام این خط‌ها از نقطه  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  می‌گذرند و با تغییر  $a$  این خط‌ها حول این نقطه دوران می‌کنند و تقریباً کلیه خط‌های گذرنده از این نقطه را می‌سازند.



۲ اگر  $a$  مثبت باشد نمودار تابع با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه تند می‌سازد و اگر  $a$  منفی باشد خط نمودار تابع با جهت مثبت محور طول‌ها زاویه باز می‌سازد. صفر بودن  $a$  نیز باعث می‌شود خط نمودار تابع، با محور طول‌ها موازی شود.

۴ خیر، خط‌هایی که بر محور طول‌ها عمودند نمی‌توانند نمودار یک تابع باشند. دبیران در صورت داشتن وقت و آمادگی هنرجویان می‌توانند این مسئله که نمودار توابع با چه ویژگی مهمی تشخیص داده می‌شوند را مطرح کنند. نمودار یک تابع به گونه‌ای است که هر خط عمود بر محور طول‌ها حداکثر در یک نقطه آن شکل را قطع می‌کند، زیرا به ازای هر مقدار در دامنه تابع فقط یک مقدار برای تابع داریم. برعکس هر شکلی در صفحه با این ویژگی، حتماً نمودار یک تابع است که دامنه آن از تصویر عمودی آن شکل روی محور طول‌ها به دست می‌آید و به ازای هر مقدار در دامنه برای یافتن مقدار تابع یک خط عمود بر محور طول‌ها در آن نقطه رسم می‌کنیم و محل برخورد آن با شکل را می‌یابیم آن را روی محور عرض‌ها تصویر می‌کنیم تا مقدار تابع به دست آید. در ادامه توابع درجه دوم مطرح می‌شوند.

## فعالیت آموزشی

**فعالیت ۴**

به کمک جوجیرا نمودار تابع  $x^2 = |a|$  را رسم کنید و به سؤال‌های زیر پاسخ دهید. (در هر مرحله یک لغزنده تعریف کنید.)

۱) نمودار تابع‌های درجه دوم  $x^2 + c = |a|$  را به ازای مقادیر مختلف  $c$  در لغزنده  $c$  رسم کنید. وضعیت نمودار تابع  $x^2 = |a|$  را با نمودار تابع  $x^2 = |a| - c$  توصیف کنید.

۲) نمودار تابع‌های درجه دوم  $x^2 - b = |a|$  را به ازای مقادیر مختلف  $b$  در لغزنده  $b$  رسم کنید. وضعیت نمودار تابع  $x^2 = |a|$  را با نمودار تابع  $x^2 - b = |a|$  توصیف کنید.

۳) نمودار تابع‌های درجه دوم  $ax^2 = |a|$  را به ازای مقادیر مختلف مثبت برای  $a$  رسم کنید. با تغییر  $a$ ، وضعیت نمودار  $ax^2 = |a|$  چه تغییری نسبت به نمودار  $x^2 = |a|$  پیدا می‌کند؟

۴) با تغییر علامت  $a$  از مثبت به منفی، چه تغییری در نمودار ایجاد می‌شود؟

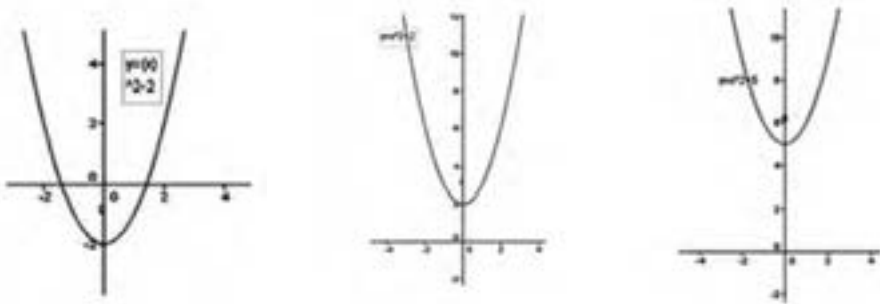
### اهداف موضوعی:

- تشخیص نمودار توابع درجه دوم
- تشخیص تأثیر تغییر ضرایب بر رفتار تابع

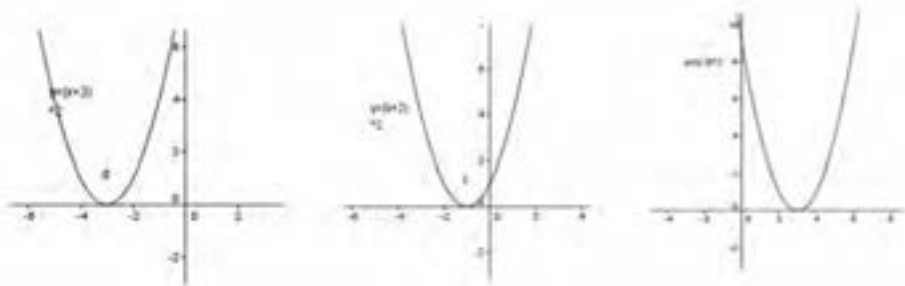
### مهارت‌ها و فرایندها:

- بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن، مقایسه کردن، کار با نرم‌افزار، ارتباطات کلامی

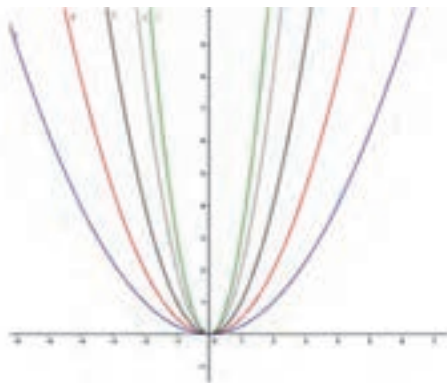
۱ با رسم نمودار تابع  $y = x^2 + C$  به ازای مقادیر مختلف  $C$  مشاهده می‌شود که نمودار تابع  $y = x^2$  در راستای محور عرض‌ها جا به جا می‌شود. این جا به جایی در صورتی که مقدار  $C$  مثبت باشد رو به بالا و در صورتی که  $C$  منفی باشد رو به پایین خواهد بود.



۲ با رسم نمودار تابع  $y = (x - b)^2$ ، نمودار تابع  $y = x^2$  در راستای محور طول‌ها جا به جا می‌شود. این جا به جایی در صورتی که مقدار  $b$  مثبت باشد رو به سمت راست و در صورتی که  $b$  منفی باشد رو به سمت چپ خواهد بود.

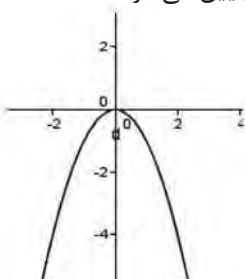
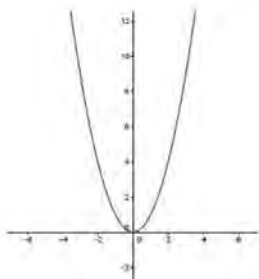


۳ با رسم نمودار تابع  $y = ax^2$  به ازای مقادیر مختلف  $a$  دهانه نمودار تابع  $y = x^2$  بازتر یا بسته‌تر می‌شود. هر چه مقدار  $a$  بزرگ‌تر شود دهانه نمودار بسته‌تر و هر چه مقدار  $a$  کوچک‌تر شود، دهانه نمودار بازتر می‌شود و همه نمودارها از مبدأ می‌گذرند.





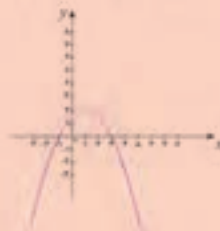
۴ دهانه نمودار تابع  $y = ax^2$  در صورتی که مقدار  $a$  مثبت باشد رو به بالا است و اگر  $a$  منفی باشد دهانه نمودار رو به پایین می‌شود.



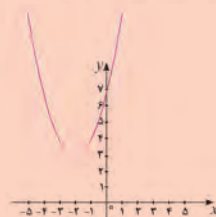
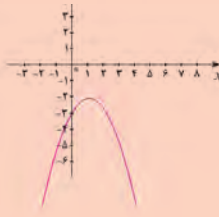
از این شکل یاد کنید



۱) اگر نمودار تابع درجه دوم  $y = a(x - h)^2 + c$  به شکل زیر باشد، علامت  $a$ ،  $h$  و  $c$  را تعیین کنید.



۲) در هر یک از حالات زیر که نمودار یک تابع درجه دوم  $y = a(x - h)^2 + c$  را نشان می‌دهد، علامت یا مقدار  $a$ ،  $h$  و  $c$  را تعیین کنید.



### اهداف:

تشخیص شکل کلی نمودار توابع درجه دوم از روی علامت و مقدار عددی  $a$  و  $b$  و  $c$  پرورش مهارت‌های نمایش مفهوم با ارائه‌های مختلف، برقراری پیوندها و اتصال‌ها (بین نمایش جبر و نمایش هندسی)

۱  $a$  منفی است زیرا دهانه نمودار رو به پایین است.  $b$  مثبت است زیرا نمودار به راست منتقل شده است.  $c$  مثبت است زیرا در صورت منفی بودن همه مقادیر تابع باید منفی شود در حالی که این تابع مقادیر مثبت هم دارد. از میزان انتقال به راست معلوم است که  $b=1$  و از میزان انتقال به بالا معلوم است که  $c=2$ .

۲ الف) بنا به دلایلی که در ۱ گفته شد:  $a$  مثبت و  $b$  منفی و  $c$  مثبت است.

ب)  $a$  منفی و  $b$  مثبت و  $c$  منفی است.

پ)  $a$  منفی و  $b$  مثبت و  $c$  صفر است.

ت)  $a$  مثبت و  $b$  مثبت و  $c$  منفی است.

در ادامه کاربردی از رسم نمودار توابع برای حل معادله‌ها مطرح شده است. این روش برای حل هر معادله‌ای به صورت  $f(x)=0$  قابل به کار بردن است. اما در اینجا صرفاً برای حل معادله‌های درجه دوم به کار گرفته شده است.

## فعالیت آموزشی

(۱) نمودار تابع  $x^2 - 2x + 3 = 0$  را با جنوجیرا رسم کنید.

(۲) نمودار این تابع در چه نقاطی محور طول‌ها را قطع می‌کند؟

(۳) جواب‌های معادله  $x^2 - 2x + 3 = 0$  چه مقادیری هستند؟

(۴) آیا بین جواب‌های این معادله و محل تقاطع نمودار آن تابع با محور طول‌ها رابطه‌ای وجود دارد؟

(۵) آیا این نتایج برای هر معادله درجه دوم دیگری هم برقرار است؟

فعالیت ۷

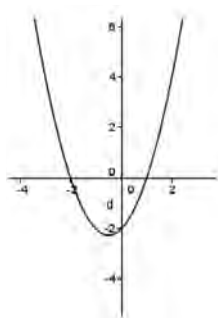
۱

### اهداف موضوعی:

حل معادله درجه دوم از طریق نمودار تابع درجه دوم

■ درک مفهوم جواب معادله

■ درک رابطه بین جواب‌های معادله و محل تقاطع نمودار تابع با محورها



### مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، بازنمایی چندگانه، ارتباطات کلامی، استدلال

کردن، تقسیم کردن

۱

۲ نقاط برخورد به طول  $-2$  و  $1$  هستند.

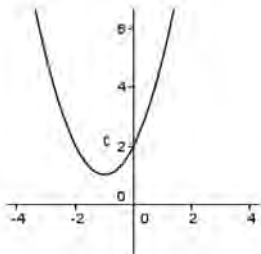
۳  $\Delta = b^2 - 4ac$  را به دست می آوریم  $\Delta = 9$  در نتیجه جواب های معادله به صورت  $x = -2$  و  $x = 1$  است.

۴ بله جواب های این معادله دقیقاً طول همان نقاط برخورد نمودار آن تابع با محور طول ها است.

۵ بله، زیرا محل برخورد نمودار یک تابع  $f$  با محور طول ها اگر در نقطه  $x$  صورت بگیرد این به معنای آن است که  $f(x) = 0$ . پس جواب های معادله  $f(x) = 0$  همان طول محل برخورد نمودار تابع  $f$  با محور طول ها است.

## مسئله ها

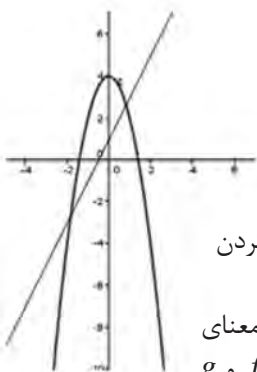
۱ نمودار تابع  $x^2 - 2x + 4$  را در دامنه  $[-4, 4]$  رسم کنید.



### مهارت ها و فرایندها:

■ بازنمایی های چندگانه، پیوندها و اتصال ها

۲ نمودارهای دو تابع  $1 + 2x$  و  $3 - 2x^2 + 4$  را با خروجی رسم کنید.



الف) این دو نمودار در چند نقطه همدیگر را قطع می کنند؟

ب) طول نقاط برخورد این دو نمودار، در چه معادله ای صدق می کنند؟

پ) محل برخورد این دو نمودار را از طریق حل یک معادله به دست آورید.

### مهارت ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی های چندگانه، پیوندها و اتصال ها، استدلال کردن

الف) در دو نقطه نمودارها همدیگر را قطع کرده اند.

ب) اگر  $x$  طول یک نقطه برخورد نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$  باشد این به معنای آن است که  $f(x) = g(x)$ . پس طول نقاط برخورد نمودارهای دو تابع  $f$  و  $g$

جواب های معادله  $f(x) = g(x)$  هستند. پس در اینجا معادله  $-2x^2 + 4 = 2x + 1$

طول نقاط برخورد نمودارهای توابع  $y = 2x + 1$  و  $y = -2x^2 + 4$  را به دست می دهد.

پ) معادله ای که جواب های آن طول نقاط برخورد را به دست می دهد به

شکل  $2x^2 + 2x - 3 = 0$  ساده می شود. پس به شکل زیر حل خواهد شد.

$$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 28 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{4} \Rightarrow x = \frac{-2 + \sqrt{28}}{4}, x = \frac{-2 - \sqrt{28}}{4}$$

۳) اگر تویی را به هوا پرتاب کنیم، ارتفاع آن از سطح زمین (بر حسب متر) تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) است. اگر ارتفاع توپ را با  $h$  و زمان را با  $t$  نشان دهیم، برای یک پرتاب خاص، قانون این تابع به صورت  $h = -5t^2 + 20t$  است.

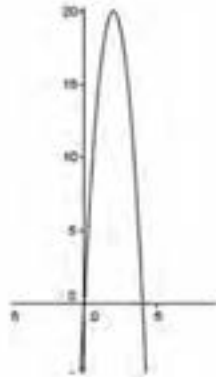
الف) دامنه این تابع را تعیین کنید.

ب) با رسم نمودار این تابع، تعیین کنید که این توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟

پ) در چه زمان‌هایی ارتفاع این توپ ۲ متر است؟ از لحاظ فیزیکی وضعیت تعداد جواب‌ها را تفسیر کنید.

## مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، بازنمایی‌های چندگانه، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن  
الف) این توپ از زمین به هوا می‌رود و دو باره به زمین برمی‌گردد. قانون این تابع فقط در این بازه زمانی که توپ از سطح زمین به هوا می‌رود و به سطح زمین بازمی‌گردد اعتبار دارد. لحظاتی که توپ در سطح زمین است همان جواب‌های معادله  $h = -5t^2 + 20t = 0$  است که ۰ و ۴ است. پس دامنه این تابع بازه  $[0, 4]$  است. ب) با جئوجیرا نمودار تابع  $h = -5t^2 + 20t$  را رسم می‌کنیم و دیده می‌شود که بیشترین مقدار ارتفاع توپ ۲۰ متر است.



پ) باید معادله  $2 = -5t^2 + 20t$  را حل کنیم. با حل جبری این معادله داریم:

$$t = \frac{-20 \pm \sqrt{360}}{-10} = \frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{5}$$

این معادله دو جواب در بازه  $[0, 4]$  دارد.

یعنی توپ در دو لحظه مختلف در ارتفاع ۲ متری قرار می‌گیرد، یکی هنگام بالا رفتن و یکی هنگام پایین آمدن.

مناسب است که این جواب‌ها را به طور نموداری با تقاطع نمودار بالا با خط افقی  $y = 2$  نیز به دست آوریم و تفسیر کنیم.

## تاریخ مفهوم تابع

تابع از اواخر قرن شانزدهم به دنیای ریاضی وارد شد. مفهوم تابع در تشخیص ارتباط بین مقادیر چند کمیت با هم است. تا زمانی که مسئله‌ای برای انسان پیش نیامده باشد که حل آن، نیازمند شناخت ارتباط بین کمیت‌ها باشد، نیازی به مفهوم تابع نبوده است. اولین مسائلی که نیازمند مفهوم تابع بود توسط گالیله پیش آورده شد که به مطالعه حرکت اجسام و سقوط آزاد اجسام پرداخت. در این مسئله یافتن ارتباط بین زمان و مکان اجسام مطرح بود که امروزه تابع حرکت جسم نام دارد. همچنین دکارت در اوایل قرن هفدهم با ساختن هندسه تحلیلی، برای توصیف خط‌ها و خم‌ها به ارتباط بین مؤلفه‌های طول و عرض نقاط این شکل‌ها رسید که بیان صریح آنها نیازمند مفهوم تابع بود.

ریاضی در طول تاریخ خود، همواره با فیزیک و مسائل مربوط به محیط پیرامونی همراه و عجین بوده است و تا شروع قرن بیستم هر ریاضیدانی مفاهیم ریاضی را در قالب مفاهیم فیزیکی یا هندسی دنیای پیرامون خود می‌دید. اولین جاهایی که مفهوم تابع رخ می‌دهند، ارتباط بین کمیت‌های متغیر فیزیکی است، به همین خاطر، نگاه اولیه به تابع به صورت ارتباط بین دو کمیت در حال تغییر است که متغیر اصلی را متغیر مستقل و کمیت وابسته به آن را متغیر تابع می‌نامند. در این نگاه، مفهوم تابع بسیار فیزیکی است و کمیتی در کار است که در حال تغییر کردن است و اصطلاح «متغیر» نیز از همین جا به وجود می‌آید.

رسیدن به مفهوم تابع به عنوان یک شیئی مستقل و نام و نشان‌دار که هیچ پیشینه‌ای در ذهن کسی ندارد، کار آسانی نیست و ریاضیدان‌ها باید بسیار کار کنند تا به تعریفی درخور دست پیدا کنند. عملاً این فعالیت ریاضیدان‌ها از دوره لایبنیتس و نیوتون تا اوایل قرن بیستم که تعریف امروزه تابع به وجود آمد حدوداً سه و نیم قرن ادامه یافت. در این مدت هر کس برای خود تعریفی و برداشتی از تابع داشت و پس از پالایش‌های بسیار، ما امروز تعریف شسته رفته‌ای از تابع در اختیار داریم.

در زمان گالیله و دکارت، تنها اشیای شناخته شده در ریاضی، اعداد، نقاط، خط، صفحه هندسی و اشیای ساخته شده از طریق آنها بوده‌اند. حتی چیزی به نام مجموعه اعداد به عنوان یک شیئی ریاضی مورد قبول نبود. روابط و اعمال بین اعداد، در بیان خواص و گزاره‌ها به کار می‌رفت ولی به عنوان شیئی مستقل دیده نمی‌شدند. مثلاً ما اشیای فیزیکی اطراف خود را به عنوان شیئی به رسمیت

می‌شناسیم ولی رابطه بالا یا پایین بودن دو شیئی نسبت به یکدیگر را به عنوان یک شیئی نمی‌شناسیم. تابع نیز از جنس رابطه است ولی نه رابطه‌ای بین دو عدد خاص بلکه رابطه‌ای بین دسته‌ای از اعداد با دسته‌ای از اعداد دیگر. چنین موجودی در آن زمان وجود نداشت و باید به طریقی به وجود می‌آمد.

در مورد برخی توابع خاص که در عمل با آنها برخورد می‌شد، قانونی که ارتباط بین دو کمیت را برقرار می‌ساخت وجود داشت و در تعریف اولیه از تابع، ریاضیدان‌ها می‌توانستند برای شناسایی تابع به همین قانون که با یک عبارت جبری و تحلیلی بیان می‌شد، اشاره کنند. چنین برداشتی از تابع را اولر در سال ۱۷۴۸ میلادی در یکی از کتاب‌هایش به شکل زیر ارائه کرد.

« یک تابع از یک متغیر، فرمولی جبری و تحلیلی است که از طریق اعمال محاسباتی دلخواه روی متغیر و اعداد، تشکیل شده است. »

توابعی که به این شکل به وجود می‌آیند را می‌توانیم توابع اولری بنامیم. اگرچه توابع اولری، همه توابعی را که ما می‌شناسیم در بر نمی‌گیرند ولی برای رفع نیازهای مرتبط با تابع در آن زمان کافی بوده‌اند. با کار روی توابع، این مفهوم توانست به عنوان یک شیئی مستقل و با نام و نشان ریاضی، هویت بیابد و پذیرفته شد که در مورد توابع، همانند اعداد می‌توان صحبت کرد و خواص آنها را مورد مطالعه قرار داد، به ویژه مفاهیم پیوستگی و مشتق‌پذیری در مورد آنها قابل طرح است.

در برخورد با مسائل دیگری که در آنها خود تابع به عنوان مجهول مطرح می‌شود، نیاز به توابعی احساس شد که ممکن بود تابع اولری نباشند. مثلاً دالامبر در ۱۷۴۶ شکل یک تار مرتعش که نمودار یک تابع است را مورد مطالعه قرار داد و نتیجه گرفت شکل تار مرتعش وابسته به شکل اولیه آن است. آیا شکل اولیه یک تار حتماً به صورت نمودار یک تابع اولری است؟ دالامبر خودش معتقد بود که شکل اولیه تار باید به صورت نمودار یک تابع با عبارت تحلیلی باشد، ولی اولر با این نظر مخالفت کرد و نهایتاً در ۱۷۵۵ تعریف خود از تابع را کلیت داد و در کتاب دیگر خود تابع را به صورت زیر تعریف کرد.

« اگر کمیتی به‌گونه‌ای وابسته به یک کمیت دیگر باشد، که تغییر کمیت دوم موجب تغییری در کمیت اول شود، کمیت اول را تابعی از کمیت دوم نامیم. این تعریف در کلی‌ترین حالت قابل به‌کار بردن است و شامل هر طریقی که مقدارهای کمیت دوم بر حسب مقدارهای کمیت اول مشخص شوند، می‌شود. بنابراین، اگر  $x$  مقدار کمیت متغیر را نشان دهد، هر کمیت دیگری که به هر شکلی توسط آن تعیین شود تابعی از  $x$  نامیده می‌شود.»

در این زمان تابع هویت مستقل خود را در افکار اکثر ریاضیدان‌ها یافته بود و نیازی نبود تا برای اشاره به آن حتماً عبارتی تحلیلی در کار باشد تا به وجود تابع اطمینان پیدا کنند و وجود رابطه‌ای تعیین کننده با هر نوع ماهیتی، برای قبول وجود یک تابع کافی بود. البته توافق همگانی نسبت به مفهوم تابع به سادگی قابل حصول نبود و هر ریاضیدانی نظرگاه خاص خود را داشت، زیرا توابع به شکل‌های گوناگونی در مسائل ظاهر می‌شدند و رویه واحدی برای برخورد با توابع وجود نداشت و هنوز معلوم نبود چه نگاهی به تابع ارزشمند و مناسب است.

یکی از تغییرات که در مفهوم تابع رخ داد، آزاد شدن آن از ارتباط بین تغییرات کمیت‌های فیزیکی است. تعریف فوریه از تابع به گونه‌ای است که به تغییرات یک متغیر به عنوان مقادیر عددی معمولی نگاه می‌کند که متغیر می‌تواند اختیار کند و مقادیر تابع نیز مقادیر عددی هستند که به ازای مقادیرهای در نظر گرفته شده برای متغیر با روشی معین که لزوماً تحت قانون ثابتی هم نیستند، به دست می‌آیند. در این نگاه لزومی ندارد که برای درک تابع، به مفاهیم فیزیکی و تغییراتی که در زمان رخ می‌دهند متوسل شویم و همان روش برای تعیین یک عدد از طریق یک عدد دیگر، تابع را مشخص می‌کند. دیریکله با کامل کردن کارهای فوریه در یافتن شرایط همگرایی سری‌های فوریه با تبعیت از فوریه تعریف تابع را در سال ۱۸۳۷ به شکل زیر ارائه می‌کند.

« $y$  تابعی از  $x$  است، هر گاه طبق قانونی به ازای هر مقدار  $x$  مقدار منحصر بفردی برای  $y$  نظیر شود.»

در آن زمان این تعریف بسیار کلی به نظر می‌آمد و ضرورت چنین تعریفی روشن نبود. این سؤال مطرح بود که آیا آنالیز و حسابان نیازی به این گونه توابع که معلوم نیست قانون آنها چگونه ساخته شده است، دارد؟ با رشد ریاضی و ایجاد شاخه آنالیز و پیدایش نظریه مجموعه‌ها و وارد شدن مسائل پیچیده‌تر، نیاز به تعمیم مفاهیم، موجب پیدایش فضاهای کلی‌تر مانند فضاهای متریک و توپولوژیک شد. بحث توابع روی این فضاها نشان داد، دامنه و بُرد توابع نقشی اساسی در خواص توابع بازی می‌کنند. در تعمیم تعریف تابع، کاراتئودری در ۱۹۱۷، مجموعه‌های غیر عددی را نیز به عنوان دامنه تابع معرفی کرد و نهایتاً بورباکی در ۱۹۳۹ تعریف تابع را به عنوان قانون نظیرسازی از اعضای یک مجموعه به مجموعه دیگر عرضه کرد که نهایتاً زیرمجموعه‌ای از مجموعه حاصلضرب را می‌سازد. این، تعریف رسمی تابع در ریاضیات امروزه است.

تعریف امروزه تابع در ریاضیات دانشگاهی بسیار مختصر و مفید و منطقی است و بر اساس مجموعه‌ها انجام می‌شود. ولی این تعریف مختصر و منطقی برای شروع

آموزش تابع مفید نیست، زیرا بر اساس دانش قبلی هنرجو بنا نمی‌شود و مفهوم واقعی تابع را که ارتباط بین دو کمیت است به خوبی نشان نمی‌دهد. آموزش صحیح یک مفهوم معمولاً از طریق تعریف منطقی صورت نمی‌گیرد و روش‌های مفهوم‌سازی باید به کار گرفته شوند. به همین علت در این کتاب هیچ‌گونه بحثی از تعریف منطقی تابع به صورت مجموعه زوج مرتبی دیده نمی‌شود.

پس از تبحر روی مفهوم تابع‌های با متغیر عددی و مقادیر عددی می‌توان از تابع‌های با دامنه‌های دیگر هم صحبت کرد. مثلاً تابع‌های با دامنه گسسته از انسان‌ها یا سیارات یا چیزهایی دیگر که در ارتباط با زندگی روزمره هم باشد و فایده‌ای در تعریف آنها دیده شود. گسترش مفهوم تابع بستگی به نیاز هنرجویان دارد که نهایتاً در کجاها با چه نوع تابع‌هایی روبرو شوند.

## منابع و مراجع

۱ STANDARDS & PRINUPIES FOR SCHOOL MATHE MATICS, NCTM

۲ ASSESSMENT & EVALUATION, NCTM

۳ تدریس ریاضی در دوره ابتدایی، گیل باتل، ترجمه شهرناز بخشعلی زاده، انتشارات سمت ۱۳۸۹.

۴ رویکرد اسلامی به برنامه‌ریزی درسی، دکتر ناصر بروجردیان (گروه ریاضی ۱۳۸۶).

۵ بررسی اثر آموزش مبتنی بر بازنمایی‌های چندگانه: زینب قربانی سخت، فرزانه نوروزی، شهرناز بخشعلی زاده.

۶ بررسی آموزش مبتنی بر برقراری ارتباطات و اتصالات: حمید دافعی، حمید صفدری، شهرناز بخشعلی زاده.

۷ بررسی تغییرات کتاب‌های درسی و روش تدریس معلمان: معینی، ابراهیم ریحانی، شهرناز بخشعلی زاده.

۱۲، ۱۳، ۱۴: پایان نامه‌های دوره کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید رجایی.

