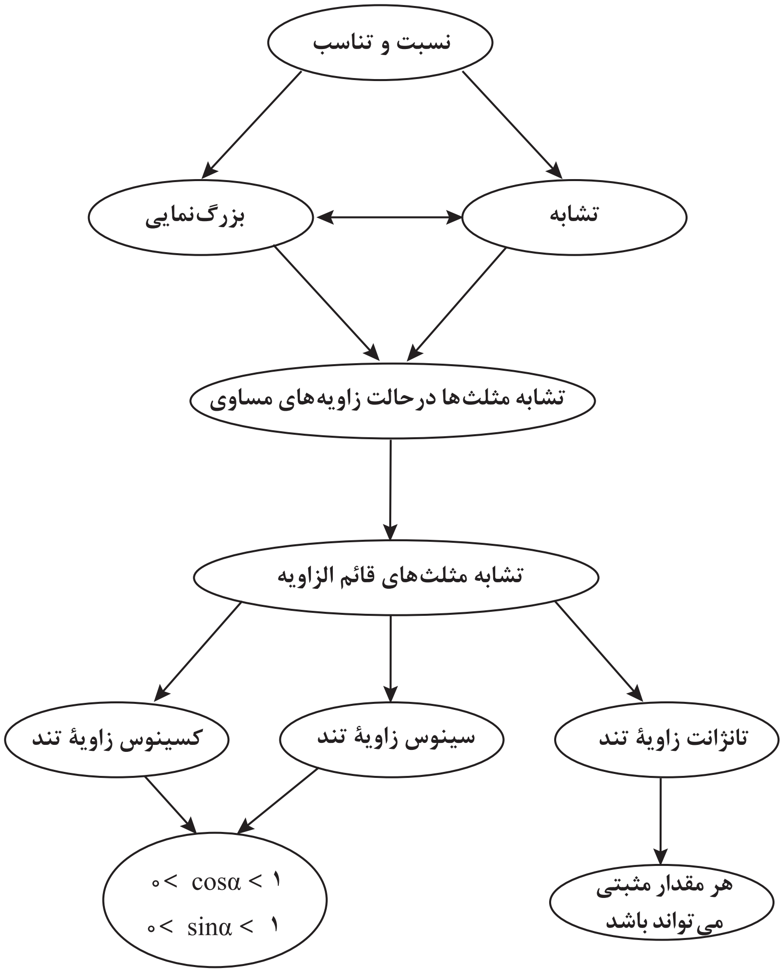
فصل ششم

نسبت‌های مثلثاتی

طرح کلی مفاهیم فصل ششم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی فصل

- درک مفهوم ضریب بزرگ‌نمایی k در دو شکل متشابه برای $k>1$ و $0<k<1$
- محاسبهٔ مقدار k با داشتن اندازهٔ دو شکل متشابه
- درک نسبت‌های مثلثاتی تانژانت ، سینوس و کسینوس یک زاویه تند به عنوان ویژگی زاویه
- شناسایی مقادیر ممکن برای نسبت‌های مثلثاتی زاویه تند
- درک رابطهٔ بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی با تغییرات زاویه

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- با داشتن اندازهٔ دو شکل متشابه، مقدار k را تعیین کند.
- نسبت‌های مثلثاتی تانژانت، سینوس و کسینوس یک زاویهٔ تند را با رسم مثلث قائم الزاویه محاسبه کند.
- با داشتن نسبت مثلثاتی، زاویهٔ متناظر با آن را از طریق رسم محاسبه کند.
- از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ها در حل مسائل استفاده کند.

پیش نیازهای فصل :

- آشنایی با دو مفهوم نسبت و تناسب
- آشنایی با مفهوم تشابه دو مثلث

ابزارهای کمک آموزشی :

خط‌کش، نقاله، گونیا، ماشین‌حساب و رایانه

	فرایند	توصیف فرایند	مثال
استاندارد های فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و با انتخاب مناسب آنها	استفاده از تشابه بین دو مثلث برای یافتن نسبت اضلاع متناظرشان و تساوی آنها استفاده از چوب و سایه چوب برای یافتن ارتفاع اهرام مصر
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	توضیح منوچهر به معلم خودش در مورد سؤال ایجاد شده درسینما (چگونگی بزرگی تصویر روی پرده سینما نسبت به فیلم) توضیح علی به معلم خودش در مورد یافتن طول نردبان بازشده در ماشین آتش‌نشانی
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	برای یافتن ارتفاع کوه از مفهوم تشابه و روابط اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه استفاده کند. برای یافتن طول نردبان جرثقیل آتش نشانی از رابطه بین نسبت مثلثاتی استفاده کند .
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	دلیل عدم تشابه دو شکل را بیان کند دلیل تغییرات نسبت های مثلثاتی را با تغییرات زاویه بیان کند
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	دلیل درستی یا نادرستی روابط را در مسائل آخر فصل بیان کند
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	طول سیم نگهدارنده دکل را به کمک مفهوم سینوس بیابد. طول ارتفاع انتهای نردبان را در سطح زمین به کمک سینوس بیابد.
	بازنمایی ها	ارائهٔ نمایش‌های مختلف یک مفهوم	در همهٔ قسمت‌های فصل وجود دارد
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	مقایسه نسبت‌های $\frac{CD}{CB}$, $\frac{CE}{CB}$, $\frac{CA}{CB}$ و ذکر مساوی بودن آنها به کمک تشابه یا با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع

بخش اول: تشابه

اهداف بخش

- درک مفهوم بزرگ‌نمایی (با ضریب $0<k<1$ و با ضریب $k>1$)
- آشنایی با تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها
- استفاده از مفهوم بزرگ‌نمایی و تشابه در حل مسائل

واژه‌های کلیدی:

تشابه، بزرگ‌نمایی

نگاه کلی به بخش

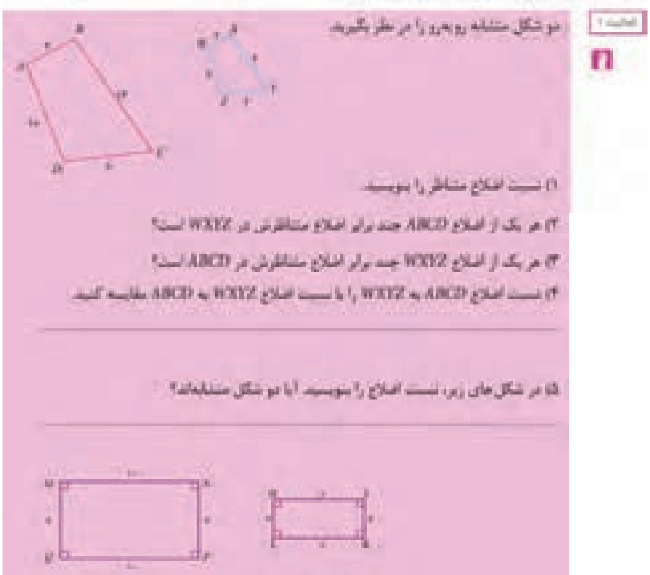
مطالب این بخش در ارتباط با تشابه دو شکل و مفهوم بزرگ‌نمایی است. برای رسیدن به مفهوم تشابه از مفهوم کمکی بزرگ‌نمایی استفاده شده است، ولی مفهوم اصلی، تشابه و حالت تشابه دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌های دو مثلث است. تشابه کاربردهای بسیار زیاد در زندگی روزمره مانند معماری، ماکت‌سازی، نقشه‌کشی، رسم فنی، بزرگ کردن و کوچک کردن شکل‌ها در رایانه، عکاسی، نجوم، مساحی، تصویربرداری پزشکی، ... دارد. به‌علت نیاز به این مفهوم در تعریف نسبت‌های مثلثاتی و به دلیل نبود قضیه حالت‌های تشابه در کتاب‌های درسی ریاضی سال‌های گذشته، ابتدا مفهوم تشابه از طریق مفهوم بزرگ‌نمایی یادآوری می‌شود. سپس رابطهٔ تالس برای متشابه بودن دو مثلث در حالت تساوی زاویه‌ها مطرح شده است.

ورود به مطلب:

بهتر است از مثال‌هایی که در اطراف خود می‌بینیم و اجسام متشابهی که دیده می‌شوند، شروع کنیم. مانند عکس منظره و خود منظره، نقشهٔ شهر و شهر، ماکت ساختمان و خود ساختمان. سپس مفهوم تشابه و نسبت تشابه یادآوری شود و کاربردهای آن در نقشه و ماکت و عکس و ... ذکر شود. بعد از این مقدمات می‌توانید به کتاب مراجعه کنید و شیوهٔ ساختن شکل‌های متشابه و ویژگی اساسی ثابت بودن نسبت طول پاره‌خط‌های متناظر را تذکر دهید. به عنوان مثال بهتر است در نقشهٔ بین دو شهر، دو نقطهٔ دلخواه را انتخاب نموده و با اندازه‌گیری مستقیم طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند و مقایسه با فاصلهٔ واقعی بین آن دو شهر و یافتن نسبت این دو عدد و ادامهٔ این کار حداقل برای دو

نقطهٔ دلخواه دیگر به این نسبت برسیم. همچنین در استفاده از ضریب بزرگ نمایی متوجه ضرورت بیان این مفهوم و نحوهٔ استفاده از آن می‌شویم. لطفاً به کتاب کار قسمت تشابه رجوع شود. (مثال‌های حل شده)

فعالیت آموزشی


دو شکل متشابه روبه‌رو را در نظر بگیرید.

۱) نسبت اضلاع متناظر را بنویسید.

۲) هر یک از اضلاع ABCD چند برابر اضلاع متناظرش در WXYZ است؟

۳) هر یک از اضلاع WXYZ چند برابر اضلاع متناظرش در ABCD است؟

۴) نسبت اضلاع ABCD به WXYZ را با نسبت اضلاع WXYZ به ABCD مقایسه کنید.

۵) در شکل‌های زیر، نسبت اضلاع را بنویسید. آیا دو شکل متشابه‌اند؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با مفهوم بزرگ‌نمایی و معرفی ضریب بزرگ‌نمایی
- محاسبهٔ ضریب بزرگ‌نمایی k در دو شکل متشابه
- تشخیص رابطهٔ بین مقدار k با بزرگ شدن یا کوچک شدن شکل

مهارت‌ها و فرایندها:

حل مسئله، استدلال کردن، مقایسه کردن

۱) $\frac{AB}{WX}=\frac{BC}{XY}=\frac{CD}{ZY}=\frac{AD}{WZ}=۲$

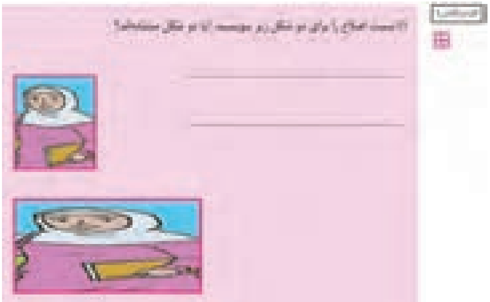
۲) ۲ برابر

۳) $\frac{۱}{۲}$ برابر

۴) معکوس یکدیگرند

۵) $$\frac{HL}{MQ}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{HJ}{MN}=\frac{۷}{۱۰}\neq\frac{JK}{NP}=\frac{۳}{۶}\neq\frac{LK}{QP}=\frac{۷}{۱۰}$$

خیر، متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان برابر نیست. کافی است نقاط دلخواه روی یکی از این عکس‌ها انتخاب کنیم و فاصلهٔ بین آنها را بیابیم و با فاصلهٔ نقاط نظیرشان در عکس دیگر مقایسه کنیم تا وجود تفاوت در نسبت‌ها را تشخیص دهیم.



اهداف:

- بررسی مفهوم تشابه از طریق مقایسهٔ نسبت اضلاع متناظر
- ساختن شکل متشابه از طریق دستگاه مختصات (طول و عرض نقاط)
- پرورش مهارت استدلال کردن و تفکر بصری

۱ خیر، زیرا ، نسبت طول اضلاع متناظر متفاوت است. کافی است چند نقطهٔ متناظر را انتخاب کنیم و فاصله‌های متناظر را اندازه‌گیری کنیم و نسبت آنها را به دست آوریم.

۲ الف) شکل ۱ ، زیرا ارتفاع شکل عوض نمی‌شود ولی طول آن سه برابر می‌شود.

ب) شکل ۲

پ) شکل ۳

توصیهٔ آموزشی:

به دبیران توصیه می شود در حین تدریس به موارد زیر اشاره نمایند.

- بعد از یافتن ضریب بزرگ نمایی، زمانی که k بین صفر و ۱ است ذکر کنیم که

استفاده از لفظ بزرگ نمایی لزوماً به معنی بزرگ شدن نیست بلکه می‌تواند شکل اولیه را کوچک‌تر کند و بستگی به k دارد.

■ در شکل پروانه‌ها بهتر است نقاط دلخواهی را روی شکل انتخاب کنید و با یافتن فاصلهٔ بین این نقاط و نقاط متناظرشان و همچنین یافتن زاویه‌های نظیر در شکل‌های (الف) و (ب) و (پ) به سؤال‌ها پاسخ داد.

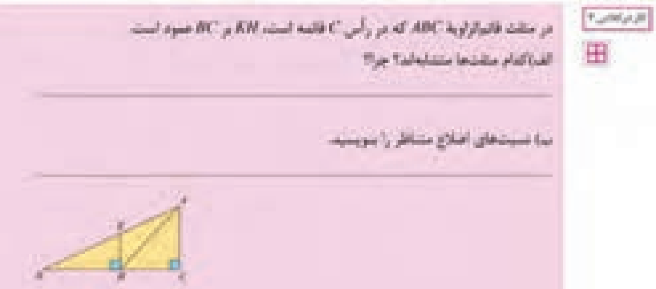
■ همچنین می‌توان با قرار دادن پروانه‌ها در مستطیل‌ها طول و عرض آنها را بررسی نمود.

در ادامه در زمینهٔ تاریخی با بیان یک مسئلهٔ واقعی (محاسبهٔ طول ارتفاع اهرام مصر) قضیهٔ تشابه مثلث‌ها از طریق تساوی زاویه‌ها به‌طور غیرمستقیم ارائه شده است . اثبات درستی این قضیه به‌علت طولانی بودن و دور شدن از هدف این فصل ارائه نشده است.

توجه شود که خورشید در فاصله‌ای بسیار دور قرار دارد و شعاع‌های نوری که به یک جسم تابیده می شود با هم موازی محسوب می‌شوند زیرا خطای عدم توازی این شعاع‌ها با دستگاه‌های اندازه‌گیری ما قابل تشخیص نیست. با استفاده از خطوط موازی و مورب می توان به سؤال گفته شده در قسمت تالس جواب داد . به‌جای مسئلهٔ تاریخی، می‌توان زمینه‌های دیگری مانند یافتن ارتفاع تیرک پرچم و.... را انتخاب نموده و برای یادگیری بیشتر در کلاس استفاده نمود.

نکته: توجه شود شرط تساوی زاویه‌ها برای برقراری تشابه بین چندضلعی‌های بیشتر از سه ضلع کافی نیست و برای متشابه بودن هر دو چندضلعی باید برابری نسبت اضلاع رأس‌های نظیر هم برقرار باشد.

به‌عنوان مثال در فعالیت ۱ با اینکه دو شکل مستطیل هستند و زاویه‌های برابر دارند ولی متشابه نیستند زیرا نسبت اضلاع نظیرشان مساوی نیست.


در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC که در رأس C قائمه است، KH بر BC عمود است

الف) کدام مثلث‌ها متشابه‌اند؟ چرا؟

ب) نسبت‌های اضلاع متناظر را بنویسید.

اهداف:

■ کسب مهارت تشخیص مثلث‌های متشابه

■ کسب مهارت تشخیص اضلاع متناظر در دو مثلث متشابه، پرورش مهارت استدلال کردن

الف) دومثلث ABC و KBH به‌دلیل داشتن زاویه‌های مساوی، متشابه‌اند و ضلع AB نظیر ضلع KB می‌باشد زیرا هردو روبروی زاویهٔ قائمه هستند.

ب) $$\frac{AB}{KB}=\frac{BC}{BH}=\frac{CA}{KH}$$

ممکن است هنرجویان در تشخیص اضلاع متناظر در شکل‌های متشابه دچار مشکل باشند. در مثلث‌های متشابه اضلاع متناظر آنهایی هستند که زاویهٔ روبروی آنها مساوی هستند.

توجه داشته باشید که در هر تشابهی که بین دو شکل برقرار می‌شود، ابتدا یک تناظر بین نقاط دو شکل برقرار می‌شود و تحت این تناظر است که مفهوم اضلاع متناظر و زاویه‌های متناظر مشخص می‌شوند. البته دو شکل دلخواه، ممکن است تحت تناظرهای متفاوتی با هم متشابه باشند.

در این بخش می‌توانید برای یادگیری عمیق‌تر و ارزیابی بیشتر هنرجویان از تمرین‌ها و مسائل بخش تشابه در کتاب کار استفاده نمایید.

مسیرهایی برای توسعه

الف) تحقیق کنید آیا برای تشابه دو مثلث قوانین دیگری وجود دارد؟ به تمرین ۱ در کتاب کار در بخش تشابه توجه شود.

ب) آیا می‌توانید قضایای دیگر تشابه دو مثلث را بیان کنید؟

پ) تحقیق کنید ضریب بزرگ‌نمایی منفی وجود دارد یا خیر؟ درصورت وجود، به چه معنا است؟

ت) آیا به کمک رایانه و فقط با کشیدن شکل از یک طرف و بزرگ نمودن آن به شکلی متشابه با آن شکل می‌رسید؟ چرا؟

بخش دوم: تانژانت یک زاویه

اهداف بخش

- درک مفهوم تانژانت یک زاویهٔ تند
- محاسبهٔ مقدار تقریبی تانژانت یک زاویهٔ تند
- استفاده از مفهوم تانژانت در حل مسائل واقعی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات تانژانت زاویه
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه

واژه‌های کلیدی:

تانژانت زاویهٔ تند، نسبت اضلاع

نگاه کلی به بخش:

این بخش با طرح مسئله‌ای واقعی در مورد ارتباط ابعاد تصویر تشکیل شده روی پردهٔ سینما و فاصلهٔ پرده از چشمهٔ نور آغاز می‌شود. سپس از طریق یک فعالیت هندسی، نسبت‌هایی یکسان تشکیل می‌شود که همگی با داشتن یک زاویهٔ تند به‌دست می‌آیند. این نسبت‌های یکسان در صفحات بعدی به‌عنوان تانژانت معرفی خواهد شد. علت یکسان شدن این نسبت‌ها، مفهوم تشابه است که در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفته است.

شیوهٔ تعریف، بنا کردن یک مثلث قائم‌الزاویه روی زاویهٔ داده شده است و تذکر این نکته ضروریست که طول اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی زاویه، تأثیری در تانژانت ندارد. با این شیوهٔ تعریف، مقدار تقریبی تانژانت یک زاویهٔ تند از طریق محاسبهٔ مستقیم و اندازه‌گیری اضلاع توسط هنرجو به‌دست می‌آید.

در ادامه، رابطهٔ بین تغییرات تانژانت و تغییرات زاویه از روی شکل بررسی می‌شود. همچنین مسئلهٔ یافتن زاویه‌ای که تانژانت آن داده شده است، در طی یک فعالیت به‌طور هندسی حل می‌شود. در پایان نحوهٔ کار با ماشین حساب برای محاسبهٔ تانژانت زوایای گوناگون بیان می‌شود.

ورود به مطلب:

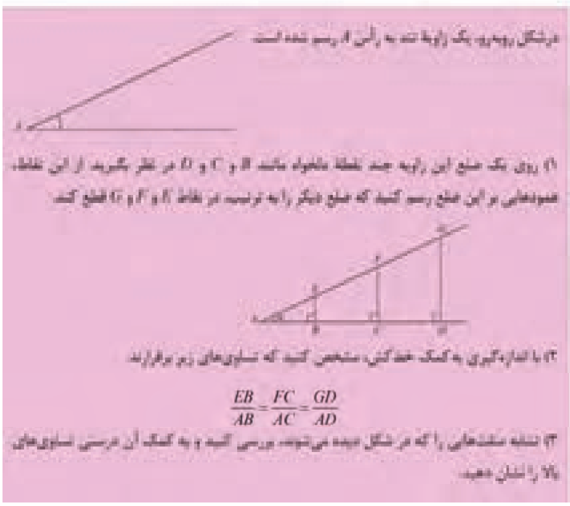
برای معرفی نسبت‌های مثلثاتی با طرح یک مسئلهٔ مربوط به زندگی پیرامونی شروع کنید و از تعریف مستقیم نسبت‌های مثلثاتی پرهیز کنید. هر مسئله‌ای که حل آن نیازمند یک نسبت مثلثاتی است می‌تواند به عنوان ورود به مفهوم استفاده شود. ولی هر چه مسئله ساده‌تر باشد و به فهم هنرجو نزدیک‌تر باشد، و مستقیم‌تر به نسبت مثلثاتی مربوط باشد، بهتر است. رسم شکل فرضی از مسئلهٔ واقعی که در آن اطلاعات مورد نیاز برای حل مسئله موجود می‌باشد، از راهبردهای حل مسئله است و این راهبرد در مسائل مربوط به نسبت‌های مثلثاتی بسیار مناسب است. محاسبهٔ ارتفاع برج‌های مهم شهر یا ساختمان‌های مرتفع یا ارتفاع نقاط طبیعی مثل کوه‌ها و عرض رودخانه‌ها و .... می‌تواند موجب جلب توجه هنرجویان شود.

توصیهٔ آموزشی:

درصورت نیاز به ارزشیابی تکوینی به فعالیت جایگزین توجه کنید. (کتاب کار فعالیت ابتدای بخش تانژانت)

فعالیت آموزشی

فعالیت ۲



در شکل روبه‌رو یک زاویهٔ تند به رأس A رسم شده است.

۱) روی یک ضلع این زاویه چند نقطهٔ دلخواه مانند B و C و D در نظر بگیرید. از این نقاط، عمودهایی بر این ضلع رسم کنید که ضلع دیگر زاویه را به ترتیب در نقاط E و F و G قطع کند.

۲) با اندازه‌گیری به کمک خط‌کش مشخص کنید که تساوی‌های زیر برقرارند.

$$\frac{EB}{AB}=\frac{FC}{AC}=\frac{GD}{AD}$$

۳) تشابه مثلث‌هایی را که در شکل دیده می‌شوند بررسی کنید و به کمک آن درستی تساوی‌های بالا را نشان دهید.

اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت اضلاع ضلع مقابل به زاویهٔ تند به ضلع مجاور با آن در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

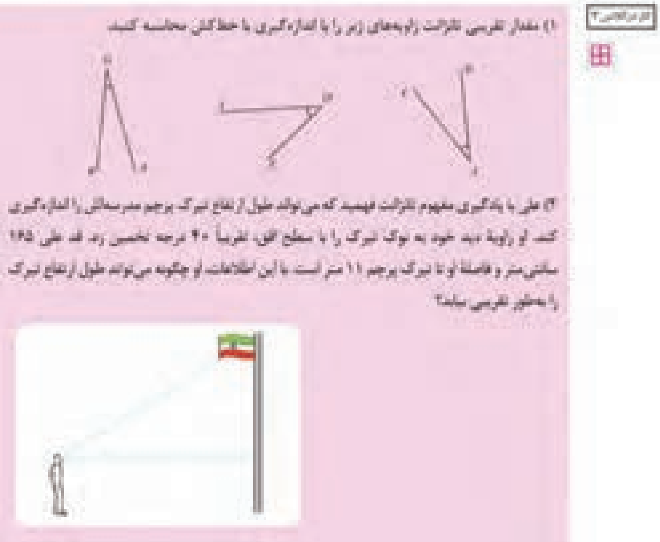
۱ لازم است هنرجو در رسم خطوط عمود بر هم توانایی استفاده از خط‌کش و گونیا را داشته باشد.

۲ با اندازه‌گیری پاره‌خط‌های ذکر شده به نسبت‌های تقریباً مساوی در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که در زاویهٔ A مشترکند می‌رسیم. بهتر است هنرجویان با خط‌کش این کار را انجام داده و نتیجه‌گیری کنند. البته تساوی‌های به‌دست آمده تقریبی خواهند بود.

۳ با استفاده از زاویه‌های مثلث در مثلث‌های قائم‌الزاویه، دیده می‌شود که طبق نتایج بخش قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه (در شکل) متشابه‌اند (زیرا همگی دارای یک زاویهٔ راست بوده و در زاویهٔ تند A مشترکند). بنابراین می‌توانیم نسبت اضلاع متناظر را بنویسیم و با طرفین وسطین و نوشتن نسبت جدید، نتیجه بگیریم که:

$$\frac{EB}{AE}=\frac{FC}{AF}=\frac{GD}{AG}$$

این تساوی‌ها مبنای اصلی تعریف نسبت مثلثاتی تانژانت هستند.


کار در کلاس ۲

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های زیر را با اندازه‌گیری با خط‌کش محاسبه کنید.

۲) علی با یادگیری مفهوم تانژانت فهمید که می‌تواند طول ارتفاع تیرک پرچم مدرسه‌اش را اندازه‌گیری کند. او زاویهٔ دید خود به نوک تیرک را با سطح افق، تقریباً ۴۰ درجه تخمین زد. قد علی ۱۶۵ سانتی‌متر و فاصلهٔ او تا تیرک پرچم ۱۱ متر است. با این اطلاعات او چگونه می‌تواند طول ارتفاع تیرک را بطور تقریبی بیابد؟

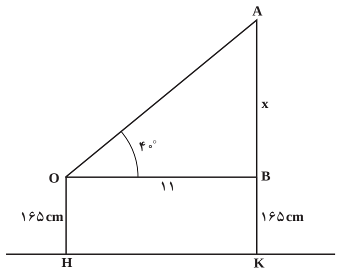
اهداف:

■ کسب مهارت در محاسبهٔ تقریبی تانژانت یک زاویه، به‌کارگیری تانژانت در حل مسائل، برقراری پیوند و اتصال با مسائل زندگی روزمره

۱ هدف این تمرین، یافتن مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های دلخواه داده شده

در حالت‌های مختلف است. برای این کار هنرجو باید برای هر کدام یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب بسازد. کافی است از نقطه‌ای روی یکی از اضلاع زاویه‌های داده شده بر ضلع دیگر عمود کند. سپس با اندازه‌گیری اضلاع روبرو به زاویه و مجاور به زاویه و تقسیم آنها بر هم مقدار تقریبی تانژانت زاویه را محاسبه کند.

۲ در این سؤال هنرجو در یک مسئلهٔ محیط پیرامونی خود قرار می‌گیرد. برای حل به شکل زیر توجه کنید.



$OB=HK=۱۱m$

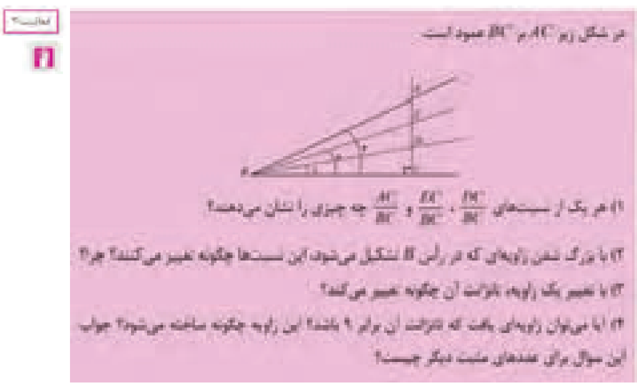
$$=\tan ۴۰^\circ=\frac{x}{۱۱}$$

$$\Rightarrow x=۱۱\tan ۴۰^\circ \approx ۹/۲۳$$

$\Rightarrow$ طول ارتفاع تیرک $=x+BK=۱۱\tan ۴۰^\circ+۱/۶۵\approx ۱۰/۸۸$

در ادامه سؤالی دربارهٔ مقادیر ممکن برای تانژانت یک زاویه مطرح می‌شود که در طی یک فعالیت جواب آن به‌دست می‌آید.

فعالیت آموزشی


در شکل زیر [illegible] عمود است.

۱) هر یک از نسبت‌های [illegible] چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲) با بزرگ شدن زاویه‌ای که در رأس B تشکیل می‌شود این نسبت‌ها چگونه تغییر می‌کنند؟ چرا؟

۳) با تغییر یک زاویه، تانژانت آن چگونه تغییر می‌کند؟

۴) آیا می‌توان زاویه‌ای یافت که تانژانت آن برابر ۹ باشد؟ این زاویه چگونه ساخته می‌شود؟ جواب این سؤال برای عددهای مثبت دیگر چیست؟

اهداف موضوعی:

- درک رابطهٔ بین تغییرات زاویه و تانژانت آن زاویه

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری، یافتن زاویه با داشتن تانژانت آن زاویه، تعمیم دادن

۱ در شکل صفحهٔ قبل، تمام مثلث‌های قائم‌الزاویه در ضلع CB مشترکند ولی زاویه‌های تند آنها در رأس B تغییر می‌کند. این نسبت‌ها تانژانت زاویه‌های تندی هستندکه در رأس B ساخته شده‌اند. زیرا همگی این نسبت‌ها به‌صورت نسبت طول ضلع مقابل به این زاویه‌ها به ضلع مجاور این زاویه‌ها هستند.

نسبت‌های $\frac{CD}{CB}$ و $\frac{CE}{CB}$ و $\frac{CA}{CB}$ به‌ترتیب تانژانت زاویه‌های $B_۱$ و $B_۲$ و $B_۳$ می باشند.

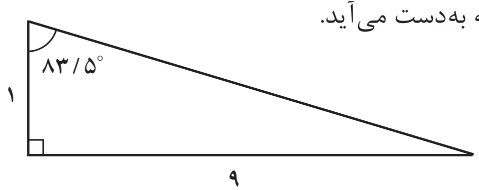
$$\tan B_۳ = \frac{AC}{BC} \ , \ \tan B_۲ = \frac{EC}{BC} \ , \ \tan B_۱ = \frac{DC}{BC}$$

۲ چون BC ثابت و DC<EC<AC پس $\frac{DC}{BC} < \frac{EC}{BC} < \frac{AC}{BC}$ یعنی با بزرگ شدن زاویه در رأس B این نسبت‌ها هم بزرگ‌تر می‌شوند.

۳ از آنجا که نسبت‌های بند قبل همان تانژانت آن زاویه‌ها بودند نتیجه می‌شود: هرچه زاویه تند بزرگ‌تر شود تانژانت آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و اگر زاویه تند کوچک‌تر شود تانژانت آن کوچک‌تر می‌شود. یعنی

$$\tan B_۳ > \tan B_۲ > \tan B_۱$$

۴ بله، کافی است مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۱ و ۹ باشد در این صورت زاویهٔ روبرو به ضلع به طول ۹ جواب مسئله است. زیرا در محاسبهٔ تانژانت این زاویه نسبت $\frac{۹}{۱}$ حساب می‌شودکه ۹ نمایش طول ضلع روبرو به زاویه و ۱ نمایش طول ضلع مجاور به آن زاویه است. با اندازه‌گیری این زاویه با نقاله مقدار تقریبی ۸۳/۵ درجه به‌دست می‌آید.



اگر به جای عدد ۹ از هر عدد مثبت دیگری هم استفاده کنیم، می‌توانیم عملیات بالا را تکرار کنیم و هر عدد مثبتی تانژانت زاویه‌ای خواهد بود.

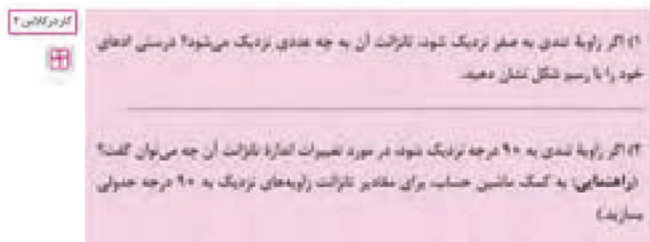
اشتباهات ممکن

■ ممکن است با توجه به انتخاب ضلعی به طول واحد در حل سؤال ۴ در این فعالیت این حس در هنرجو ایجاد شود که همیشه ضلع مقابل به زاویهٔ تند، همان تانژانت آن زاویه است. بهتر است در اینجا ضمن تذکر این مورد مثال‌های دیگری زده شود که لزوماً از ضلعی به طول واحد استفاده نشود. مثلاً از اعدادی به عنوان طول ضلع استفاده کرد که نسبت آنها ۹ شود.

■ به هنرجویان توضیح داده شود که نسبت مثلثاتی یک زاویه مانند $\tan ۴۰^\circ$ یک عدد است و منظور حاصل‌ضرب یک عدد در یک عبارت نیست. (به کتاب کار بخش تانژانت یک زاویه در تمرین ۲ توجه شود)

استفاده از ابزار:

برای یافتن مقدار تانژانت زاویه‌ها می‌توان از ماشین‌های حساب علمی کمک گرفت. توجه داشته باشید که در استفاده از ماشین حساب واحد اندازه‌گیری زاویه به درستی انتخاب شده باشد چون در هر ماشین حسابی می‌توان واحد اندازه‌گیری زاویه را درجه، رادیان، یا گراد انتخاب کرد. روش استفاده به صورت تصویری توضیح داده شده است .


کار در کلاس ۴

۱) اگر زاویهٔ تندی به صفر نزدیک شود، تانژانت آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟ درستی ادعای خود را با رسم شکل نشان دهید.

۲) اگر زاویهٔ تندی به ۹۰ درجه نزدیک شود در مورد تغییرات اندازهٔ تانژانت آن چه می‌توان گفت؟ (راهنمایی: به کمک ماشین حساب برای مقادیر تانژانت زاویه‌های نزدیک به ۹۰ درجه جدولی بسازید.)

اهداف:

■ درک مفهوم تانژانت به روش هندسی

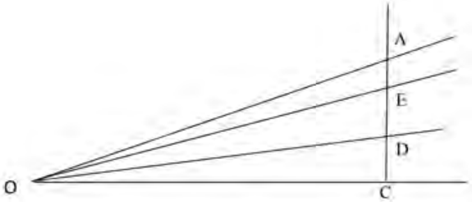
■ به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی با تقریب اعشاری مناسب

■ پرورش مهارت استدلال کردن، نمایش یک مفهوم با بازنمایی‌های مختلف، کار با ماشین حساب

۱ در شکل صفحهٔ بعد دیده می‌شود که با نزدیک شدن اندازهٔ زاویه به صفر تانژانت

آن نیز به صفر نزدیک می‌شود. زیرا در نسبتی که تانژانت را می‌سازد، مخرج ثابت است ولی صورت از هر عدد مثبت دلخواهی کوچک‌تر می‌شود و این به معنای نزدیک شدن تانژانت به صفر است.

۲ هرچه زاویه بزرگ‌تر شود و به ۹۰ درجه نزدیک شود، تانژانت نیز بزرگ‌تر می‌شود و از هر عدد دلخواهی بزرگ‌تر می‌شود. زیرا مخرج ثابت است ولی صورت از هر عددی بزرگ‌تر می‌شود. در این وضعیت اصطلاحاً می‌گویند مقدار تانژانت به بی‌نهایت می‌رود. با ماشین حساب نیز می‌توان به این مطلب رسید.



$\tan ۸۰^\circ \approx ۵/۶۷$	$\tan ۸۵^\circ \approx ۱۱/۴۳$	$\tan ۸۹/۵^\circ \approx ۱۱۴/۵۸$
$\tan ۸۱^\circ \approx ۶/۳۱$	$\tan ۸۶^\circ \approx ۱۴/۳$	$\tan ۸۹/۷^\circ \approx ۱۹۰/۹۸$
$\tan ۸۲^\circ \approx ۷/۱۱$	$\tan ۸۷^\circ \approx ۱۹/۰۸$	$\tan ۸۹/۹^\circ \approx ۵۷۲/۹۵$
$\tan ۸۳^\circ \approx ۸/۱۴$	$\tan ۸۸^\circ \approx ۲۸/۶۳$	$\tan ۸۹/۹۵^\circ \approx ۱۱۴۵/۹۱$
$\tan ۸۴^\circ \approx ۹/۵۱$	$\tan ۸۹^\circ \approx ۵۷/۲۸$	

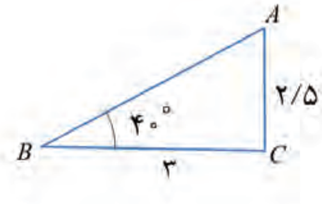
مسئله‌ها

۱) مقدار تقریبی تانژانت زاویه‌های ۴۰ و ۵۰ درجه را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

کافی است به کمک نقاله زاویه ۴۰ درجه رسم کنید و با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های تند آن ۴۰ درجه است و با اندازه‌گیری مستقیم اضلاع روبرو و مجاور به این زاویه، نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور این زاویه را که جواب مسئله خواهد بود، به‌دست آورید. همین عملیات را برای زاویهٔ ۵۰ درجه تکرار کنید.



$$\tan ۴۰^\circ \approx \frac{۲/۵}{۳} \approx ۰/۸۳$$

۲) تانژانت چه زاویه‌ای برابر ۸ خواهد شد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله

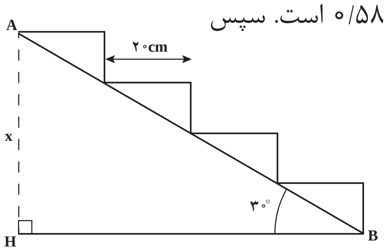
مشابه بند (۴) فعالیت ۴ یا مثال ارائه شده می‌توان عمل کرد. (این زاویه تقریباً ۸۲/۵ درجه است.)

۳) با توجه به شکل روبه‌رو ارتفاع نقطهٔ A از زمین را بیابید (عرض همهٔ پله‌ها ۲۰cm است).

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، تفکر بصری

ابتدا تانژانت زاویهٔ ۳۰ درجه را می‌یابیم که تقریباً مساوی ۰/۵۸ است. سپس



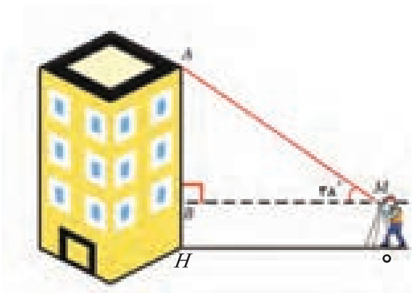
BH=۴×۲۰=۸۰cm

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow AH = x = ۸۰ \times ۰/۵۸ = ۴۶/۴$$

۴) برای محاسبهٔ ارتفاع ساختمانی، دوربین زاویه‌یاب را در یک سطح افقی در نقطهٔ M به فاصلهٔ ۱۵ متری از ساختمان (نقطهٔ O) مستقر کرده‌ایم و به نقطهٔ بالای ساختمان نشانه می‌رویم. زاویه دید برابر ۳۸ درجه به‌دست آمده است. اگر ارتفاع دوربین از زمین یک متر و ۵۴ سانتی‌متر باشد، ارتفاع ساختمان را به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری



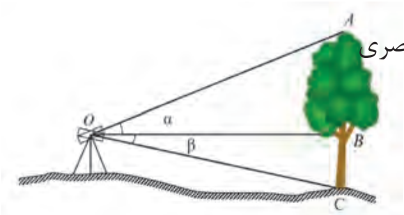
$$\left.\begin{array}{l} BH = OM = ۱۵۴cm = ۱/۵۴m \\ OH = ۱۵m \\ \tan\alpha = \dfrac{AB}{BM} \Rightarrow AB = ۱۵\tan ۳۸^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

ارتفاع ساختمان =AH=AB+BH≈۱۳/۲۵ متر

۵) به کمک دوربین زاویه‌یاب، زاویه‌های α و β به ترتیب ۲۳ درجه و ۱۲ درجه به‌دست آمده‌اند و فاصلهٔ افقی دستگاه تا درخت ۱۸ متر است. با توجه به شکل، ارتفاع درخت را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

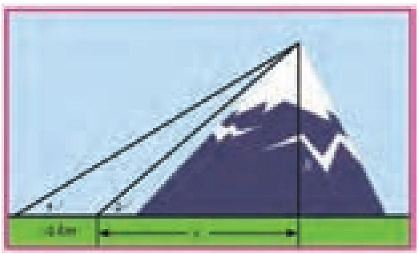


در این دو مثلث $\hat{B}=۹۰^\circ$ و $OB=۱۸m$ و $\beta=۱۲^\circ$ و $\alpha=۲۳^\circ$ بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} \tan\alpha=\dfrac{AB}{OB}\rightarrow AB=OB\tan\alpha=۱۸\tan ۲۳^\circ \\ \tan\beta=\dfrac{BC}{OB}\rightarrow BC=OB\tan\beta=۱۸\tan ۱۲^\circ \end{array}\right\}\Rightarrow$$

ارتفاع درخت $=AB+BC\approx ۷/۶۴+۳/۸۳=۱۱/۴۷$

۶) یک مهندس نقشه‌بردار برای محاسبهٔ ارتفاع یک کوه در نقطه‌ای می‌ایستد و مشاهده می‌کند که در آن نقطه نوک کوه با زاویهٔ ۵۰ درجه نسبت به افق دیده می‌شود. پس از آنکه نیم‌کیلومتر از کوه دور می‌شود مشاهده می‌کند که نوک کوه با زاویهٔ ۴۰ درجه دیده می‌شود. ارتفاع کوه چقدر است؟



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

$$\left.\begin{array}{l} \tan ۴۰^\circ=\dfrac{h}{۰/۵+x} \\ \tan ۵۰^\circ=\dfrac{h}{x}\Rightarrow x=\dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ} \end{array}\right\}\Rightarrow \tan ۴۰^\circ=\dfrac{h}{۰/۵+\dfrac{h}{\tan ۵۰^\circ}}\Rightarrow h\approx ۱/۴۳$$

بخش سوم: سینوس یک زاویه

اهداف بخش

- درک مفهوم سینوس یک زاویهٔ تند
- محاسبهٔ مقدار تقریبی سینوس یک زاویهٔ تند
- استفاده از سینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- درک رابطه بین تغییرات زاویه با تغییرات سینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویهٔ تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

واژه‌های کلیدی :

سینوس زاویهٔ تند، نسبت اضلاع

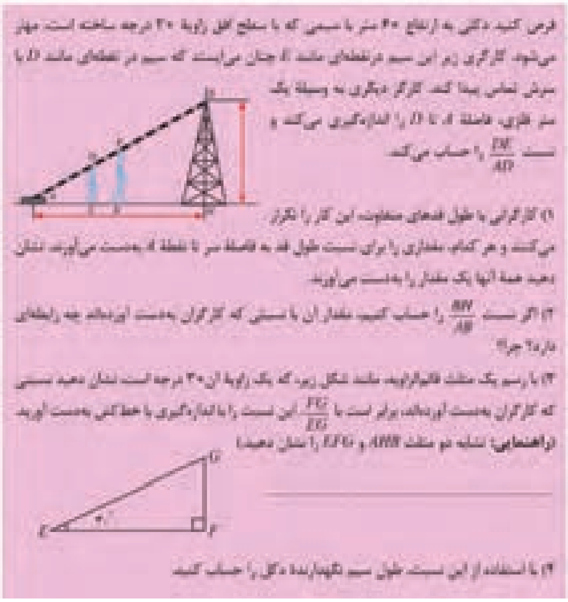
نگاه کلی به بخش:

روش آموزشی این بخش طرح مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن استفاده از نسبت مثلثاتی سینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم سینوس ساخته می‌شود. ویژگی‌های سینوس یک زاویه تند و یافتن سینوس یک زاویهٔ تند از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن سینوس زاویه‌های تند ارائه می‌شود.

ورود به مطلب:

دبیر با هر مسئله‌ای شبیه مسئله‌ای که در این بخش مطرح شده است می‌تواند آموزش را شروع کند و انگیزهٔ تعریف سینوس را ایجاد کند. فعالیت ۶ نمونه‌ای از حل مسئله‌ای است که در آن مفهوم سینوس وجود دارد و می‌توان از طریق آن مفهوم سینوس را تعریف کرد.

فعالیت آموزشی


فعالیت ۲

فرض کنید دکلی به ارتفاع ۴۰ متر با سیمی که با سطح افق زاویهٔ ۳۰ درجه ساخته است مهار می‌شود. کارگری زیر این سیم در نقطه‌ای مانند A چنان می‌ایستد که سرش در نقطه‌ای مانند D با سیم تماس پیدا کند. کارگر دیگری به وسیلهٔ یک متر فلزی، فاصلهٔ A تا D را اندازه‌گیری می‌کند و نسبت $\frac{DE}{AD}$ را حساب می‌کند.

۱) کارگران با طول قدهای متفاوت این کار را تکرار می‌کنند و هر کدام مقداری را برای نسبت طول قد به فاصلهٔ سر تا نقطهٔ A به‌دست می‌آورند. نشان دهید همهٔ آنها یک مقدار را به‌دست می‌آورند.

۲) اگر نسبت $\frac{BH}{AB}$ را حساب کنید مقدار آن با نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند چه رابطه‌ای دارد؟ چرا؟

۳) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه مانند شکل زیر، که یک زاویهٔ آن ۳۰ درجه است نشان دهید نسبتی که کارگران به‌دست آورده‌اند برابر است با $\frac{FG}{EG}$. این نسبت را با اندازه‌گیری با خط‌کش به‌دست آورید.
(راهنمایی: تشابه دو مثلث ABH و EFG را نشان دهید.)

۴) با استفاده از این نسبت طول سیم نگهدارندهٔ دکل را حساب کنید.

اهداف موضوعی:

■ درک تساوی نسبت ضلع مقابل به زاویهٔ تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند.

مهارت‌ها و فرایندها:

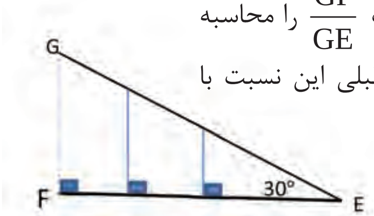
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

ابزار مورد نیاز :

خط‌کش و نقاله برای اندازه‌گیری مستقیم

۱ به دلیل تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه EDA و KFA (به‌دلیل زاویهٔ مشترک $\angle A$ و $\angle E=\angle K=90^\circ$) خواهیم داشت $\frac{ED}{DA}=\frac{KF}{FA}$

۲ به‌دلیل تشابه دو مثلث ABH و ADE (به‌دلیل زاویهٔ مشترک $\angle A$ و $\angle H=\angle E=\angle K=90^\circ$) داریم $\frac{BH}{AB}=\frac{FK}{AF}=\frac{DE}{AD}$ یعنی نسبت $\frac{BH}{AB}$ هم با نسبت‌های قبل مساوی است.

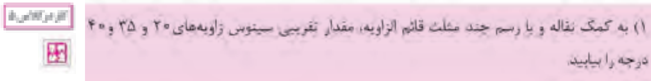


۳ طول GF و GE را به‌کمک خط‌کش اندازه گرفته و نسبت $\frac{GF}{GE}$ را محاسبه می‌کنیم $\frac{FG}{EG}=\frac{۱}{۲}$. به‌خاطر تشابه این مثلث و مثلث‌های قبلی این نسبت با نسبت‌های قبلی مساوی است.

۴ به کمک بندهای (۱) و (۲) و (۳) می‌توان مسئله را حل کرد.

$$\frac{BH}{AB}=\frac{\text{طول ارتفاع دکل}}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۶۰\,m}{\text{طول سیم نگهدارنده}} \Rightarrow \text{طول سیم نگهدارنده}=۱۲۰\ \text{متر}$$

در ادامه مفهوم سینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.


۱) به کمک نقاله و با رسم چند مثلث قائم الزاویه، مقدار تقریبی سینوس زاویه‌های ۲۰ و ۳۵ و ۴۰ درجه را بیابید

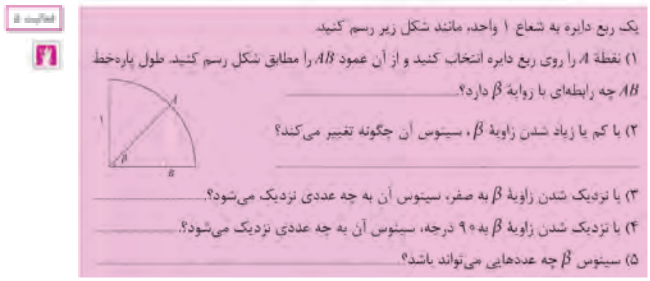
اهداف:

- کسب مهارت حل مسئله، یافتن مقدار تقریبی سینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم

مثلاً برای زاویهٔ ۲۰ درجه، ابتدا به کمک نقاله یک زاویهٔ ۲۰ درجه رسم می‌کنیم. سپس با رسم خطی عمود بر یکی از دو ضلع زاویه از نقطه‌ای روی ضلع دیگر زاویه، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم. طول ضلع مقابل به زاویه ۲۰ درجه و وتر مثلث را اندازه‌گیری می‌کنیم و با محاسبهٔ نسبت آنها، سینوس زاویه را محاسبه می‌کنیم. به همین ترتیب در مورد بقیهٔ زاویه‌ها عمل می‌کنیم.

$\sin ۲۰^\circ \approx ۰/۳۴$ و $\sin ۳۵^\circ \approx ۰/۵۷$ و $\sin ۴۰^\circ \approx ۰/۶۴$

فعالیت آموزشی


یک ربع دایره به شعاع ۱ واحد، مانند شکل زیر رسم کنید.
۱) نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید و از آن عمود AB را مطابق شکل رسم کنید. طول پاره‌خط AB چه رابطه‌ای با زاویهٔ β دارد؟
۲) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ β، سینوس آن چگونه تغییر می‌کند؟
۳) با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟
۴) با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰ درجه، سینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟
۵) سینوس β چه عددهایی می‌تواند باشد؟

اهداف موضوعی:

- درک رابطهٔ بین تغییرات یک زاویهٔ تند و سینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن

برای سینوس یک زاویهٔ تند، درک حدی از مقادیر سینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و ۹۰ درجه

مهارت‌ها و فرایندها:

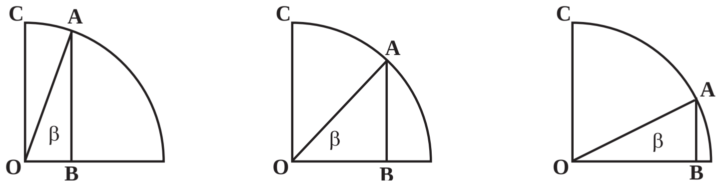
■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری

۱ با توجه به تعریف سینوس یک زاویهٔ تند در مثلث‌های قائم‌الزاویه چون مثلث OAB در رأس B قائمه است پس سینوس زاویهٔ β عبارت است از $\frac{BA}{AO}$ ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، پس $\sin\beta=BA$

اشتباهات ممکن:

در این قسمت انتخاب ضلع مقابل به زاویه همان سینوس زاویه می‌باشد. بهتر است مثال‌هایی زده شود تا معلوم شود این اتفاق همیشه نمی‌افتد و فقط در این مثال که طول وتر ۱ است این وضعیت رخ داده است.

۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویهٔ β طول پاره خط BA بزرگ می‌شود. بنابراین سینوس آن نیز بزرگ‌تر می‌شود و با کم شدن زاویه، سینوس آن کمتر می‌شود. در شکل‌های زیر از چپ به‌راست به‌صورت شهودی مشاهده می‌کنید که با کوچک شدن زاویه، طول BA یعنی مقدار سینوس زاویهٔ β نیز کم می‌شود.



۳ با نزدیک شدن زاویهٔ β به صفر طول AB یعنی سینوس زاویهٔ β از هر عدد مثبتی کوچک‌تر می‌شود و به صفر نزدیک می‌شود.

۴ با نزدیک شدن زاویهٔ β به ۹۰° دیده می‌شود BA به CO نزدیک می‌شود. بنابراین $\sin\beta$ به عدد ۱ نزدیک می‌شود.

۵ چون در مثلث قائم‌الزاویه هر ضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچک‌تر است پس $BA<AO=۱$ بنابراین $\sin\beta<۱$ و چون $\sin\beta$ طول پاره خط BA است پس $\sin\beta>۰$ یعنی $۰<\sin\beta<۱$ یعنی سینوس زاویهٔ تند β عددی بین ۰ و ۱ است.

ممکن است در نمادگذاری نسبت‌های مثلثاتی هنرجویان عبارت $\sin\alpha$ را همانند ضرب عبارت $\sin$ در α فرض کنند و نتیجه بگیرند $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha$ در مثال‌های عددی می‌توان نادرستی این تصور را نشان داد. در این بخش سؤال‌هایی پرسیده شده است تا بدفهمی هنرجویان را در این مورد کاهش دهد. هدف از این سؤال‌ها آن است که هنرجو بداند در رابطه‌هایی مانند $\frac{\sin ۲\alpha}{۲\sin\alpha}$، ضریب α در صورت با عدد (۲ در مخرج) ضریب عددی قابل ساده شدن نیست. برای بررسی این وضعیت‌ها می‌توان سؤال‌هایی مانند سؤال زیر به هنرجویان داد.

۱ درستی یا نادرستی رابطه‌های زیر را با محاسبه عددی تعیین کنید

$$\frac{\sin ۶۰^\circ}{۲\sin ۳۰^\circ} = \sin ۳۰^\circ$$

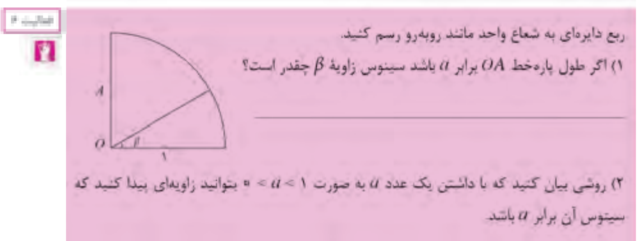
$$۲\sin ۲۰^\circ = \sin ۴۰^\circ$$

در مسئلهٔ زیر هدف تأکید بر مقادیر ممکن برای سینوس یک زاویهٔ تند که باید بین ۰ و ۱ باشد است.

۲ آیا زاویهٔ تندی وجود دارد که سینوس آن $\frac{۴}{۳}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $\frac{۴}{۳} > ۱$ و همیشه سینوس یک زاویه تند بین ۰ و ۱ است. هنرجویان ممکن است از دلایل دیگری مانند اینکه سینوس یک زاویه برابر است با اندازه ضلع مقابل به آن زاویه به اندازه وتر و اشاره به این نکته که در مثلث قائم‌الزاویه اضلاع زاویه قائم همواره از وتر کوچک‌تر هستند پس سینوس همواره کسری کوچک‌تر از واحد است نیز استفاده نمایند.

فعالیت آموزشی


ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند روبه‌رو رسم کنید.

۱) اگر طول پاره‌خط OA برابر a باشد سینوس زاویهٔ β چقدر است؟

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد a به صورت $۰ < a < ۱$ بتوانید زاویه‌ای پیدا کنید که سینوس آن برابر a باشد.

اهداف:

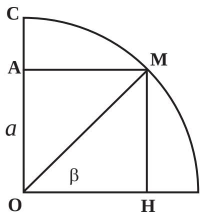
کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که سینوس آن معلوم است از طریق رسم.

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، ارتباطات کلامی، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تعمیم دادن

۱ طبق فعالیت قبل $MH = \sin\beta$ پس $a = \sin\beta$

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد مانند زیر رسم کنید روی شعاع قائم آن به اندازهٔ a جدا کنید، $AO = a$ از A عمودی بر AO رسم کنید تا ربع دایره را در M قطع کند. زاویه‌ای که پاره‌خط OM با شعاع افقی نیم‌دایره می‌سازد، جواب است.



$OA = MH = \sin\beta$

حال به کمک نقاله می‌توان اندازهٔ زاویهٔ β را اندازه گرفت.

نتیجه از دو بند (۱) و (۲) : سینوس هر زاویه عددی بین ۰ و ۱ است و هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند سینوس یک زاویهٔ تند باشد.

مسئله‌ها

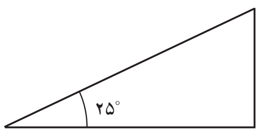
۱- الف) سینوس زاویهٔ ۲۵ درجه را با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب به طور تقریبی محاسبه کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ابتدا مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که یک زاویهٔ تند آن ۲۵ درجه باشد سپس وتر و طول ضلع روبرو به این زاویه را با خط کش اندازه‌گیری می‌کنیم و نسبت ضلع روبرو به این زاویه به وتر، سینوس ۲۵ درجه می‌باشد. پس:

$\sin ۲۵^\circ \approx ۰/۴۲$



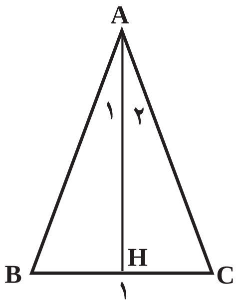
ب) یک مثلث متساوی‌الساقین رسم کنید که زاویهٔ رأس آن ۵۰ درجه باشد. اگر قاعدهٔ این مثلث ۱۰ سانتی‌متر باشد، طول ساق آن را تعیین کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

ارتفاع این مثلث را از رأس آن رسم می‌کنیم. چون در مثلث متساوی‌الساقین

میانه و عمود منصف و ارتفاع و نیمساز رسم شده از رأس بر هم منطبق‌اند داریم:
$\angle A_۱ = \angle A_۲ = ۲۵^\circ$ و ۵= HB=CH در مثلث قائم‌الزاویهٔ BHA یا CHA،
$\angle HAB = ۲۵^\circ$ و



$$\sin ۲۵^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۵}{AB} \Rightarrow AB = \frac{۵}{\sin ۲۵^\circ} \approx ۱۱/۸۳$$

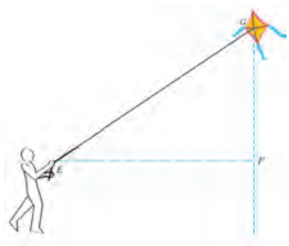
۲) سینوس چه زاویه‌ای برابر ۰/۸ است؟

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله

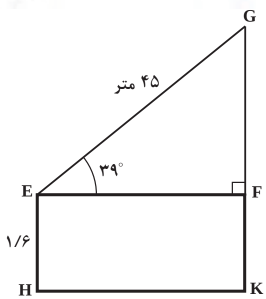
می‌توانیم مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنیم که طول وتر آن ۱۰ واحد و یکی از ضلع‌های دیگرش ۸ واحد باشد. زاویه روبه‌رو به ضلع به طول ۸ جواب است. این زاویه را با نقاله اندازه می‌گیریم که تقریباً ۵۳ درجه است.

۳) رضا بادبادکی را به هوا فرستاده است. فرض کنید ۴۵ متر نخ بادبادک او رها شده است. طبق شکل، زاویهٔ نخ با سطح افق ۳۹ درجه و فاصلهٔ دست رضا از سطح زمین، یک متر و شصت سانتی‌متر است. ارتفاع بادبادک از سطح زمین چقدر است؟



مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها



$$\sin ۳۹^\circ = \frac{GF}{۴۵} \Rightarrow GF \approx ۲۸/۳۲$$

$\Rightarrow$ ارتفاع بادبادک $= GF + FK \approx ۲۸/۳۲ + ۱/۶ = ۲۹/۹۲$

بخش چهارم: کسینوس یک زاویه تند

اهداف بخش

- درک مفهوم کسینوس یک زاویهٔ تند
- استفاده از کسینوس یک زاویه در حل مسائل پیرامونی
- محاسبهٔ مقدار تقریبی کسینوس یک زاویهٔ تند
- درک رابطه بین تغییرات یک زاویه با تغییرات کسینوس زاویه
- تشخیص مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویهٔ تند
- کسب مهارت پیدا کردن زاویه با داشتن سینوس آن زاویه

واژه‌های کلیدی:

کسینوس زاویهٔ تند، نسبت اضلاع

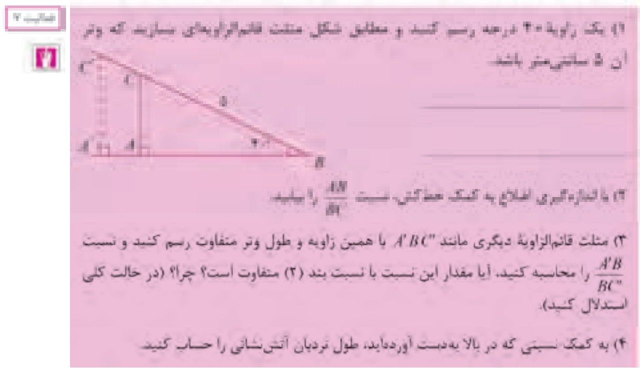
نگاه کلی به بخش:

روش آموزشی این بخش طرح یک مسئله و انجام یک فعالیت برای حل آن مسئله است. با انجام این فعالیت، مفید بودن مفهوم نسبت مثلثاتی کسینوس مطرح می‌شود و در انتها مفهوم کسینوس تعریف می‌شود. ویژگی‌های کسینوس یک زاویه و یافتن کسینوس یک زاویه از طریق اندازه‌گیری مستقیم اضلاع به طور تقریبی و مقادیر ممکن تقریبی کسینوس زاویه‌های تند بیان می‌شود. در پایان با داشتن مقدار کسینوس یک زاویه، چگونگی محاسبهٔ آن زاویه بررسی می‌شود.

ورود به مطلب:

این مفهوم شبیه مفهوم سینوس است و با همان روش قابل آموزش است. در اینجا نیز می‌توانید مسئلهٔ مناسبی بیابید که مفهوم کسینوس در آن وجود داشته باشد و با حل آن مسئله به‌طور ضمنی مفهوم کسینوس را ارائه کنید. یا طبق روند کتاب و با مسئله‌ای که در کتاب مطرح شده است آموزش را شروع کنید.

فعالیت آموزشی


فعالیت ۲

۱) یک زاویهٔ ۴۰ درجه رسم کنید و مطابق شکل مثلث قائم‌الزاویه‌ای بسازید که وتر آن ۵ سانتی‌متر باشد.

۲) با اندازه‌گیری اضلاع به کمک خط‌کش، نسبت $\frac{AB}{BC}$ را بیابید.

۳) مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری مانند $A'BC''$ با همین زاویه و طول وتر متفاوت رسم کنید و نسبت $\frac{A'B}{BC''}$ را محاسبه کنید، آیا مقدار این نسبت با نسبت بند (۲) متفاوت است؟ چرا؟ (در حالت کلی استدلال کنید).

۴) به کمک نسبتی که در بالا به‌دست آورده‌اید، طول نردبان آتش‌نشانی را حساب کنید.

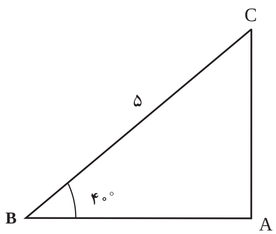
اهداف موضوعی:

- درک تساوی نسبت ضلع مجاور به زاویهٔ تند به وتر در مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ ساخته شده روی اضلاع یک زاویهٔ تند

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، اثبات کردن

۱ در این بند هنرجو باید توانایی رسم داشته باشد و به‌کمک خط‌کش و پرگار و نقاله مثلث خواسته شده را رسم کند.

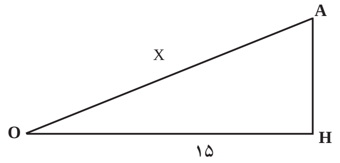


۲ به کمک خط‌کش AB و BC را اندازه‌گیری می‌کنیم. $AB \approx ۳/۸$ و $BC = ۵$

در نتیجه $\frac{AB}{BC} \approx ۰/۷۶$

۳ $\frac{A'B}{BC'} \approx ۰/۷۶$ خیر، زیرا دو مثلث رسم شده، دو مثلث قائم‌الزاویه با زاویه تند مساوی ۴۰ درجه می‌باشند و چون هر کدام یک زاویهٔ ۹۰ درجه نیز دارند با هم متشابه‌اند و اگر نسبت اضلاع متناظر را در این مثلث‌های متشابه بنویسیم با هم مساوی‌اند.

۴ مثلثی که در مسئله آتش‌نشانی رسم کردیم با مثلثی که در بند (۲) رسم کردیم متشابه‌اند (به خاطر بند ۳) . با نوشتن نسبت اضلاع متناظر داریم:



$$\frac{\text{۱۵ متر}}{\text{طول نردبان}} = \frac{OH}{OA} = \frac{AB}{BC} \approx ۰/۷۶ \Rightarrow \text{طول نردبان} \approx \frac{۱۵}{۰/۷۶} = ۱۹/۷ \text{ متر}$$

در ادامه این بخش، مفهوم کسینوس به‌طور رسمی تعریف می‌شود و مثال‌هایی ارائه می‌شود.


کار در کلاس ۶

۱) یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین رسم کنید.

الف) نشان دهید زاویه‌های تند این مثلث ۴۵ درجه‌اند.

ب) اگر طول ساق‌ها را به اندازهٔ یک واحد در نظر بگیریم، طول وتر این مثلث چقدر است؟

پ) با استفاده از محاسبات بالا، سینوس و کسینوس و تانژانت زاویهٔ ۴۵ درجه را به‌دست آورید.

۲) مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع ۱ واحد را در نظر بگیرید و یکی از ارتفاع‌های آن را رسم کنید.

الف) طول ضلع‌ها و زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ رسم شده را حساب کنید.

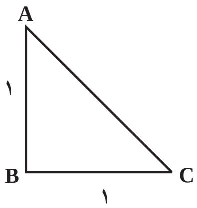
ب) با استفاده از محاسبات انجام شده سینوس، کسینوس و تانژانت زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه را به‌دست آورید.

۳) به کمک دو سوال بالا، جدول روبه‌رو را کامل کنید.

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
سینوس			
کسینوس			
تانژانت			

اهداف:

- کسب مهارت حل مسئله، محاسبهٔ مقدار دقیق کسینوس زاویه‌های خاص ۳۰ و ۴۵ و ۶۰ درجه، استدلال کردن



۱) **الف:** چون دو ضلع این مثلث با هم مساوی‌اند $\angle A = \angle C$ و چون مجموع آنها ۹۰ درجه است، هردو زاویه ۴۵ درجه هستند.

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle C \\ \angle A + \angle B + \angle C = ۱۸۰^\circ , \angle B = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle C = ۴۵^\circ$$

۱) ب:

اگر یکی از ضلع‌های آن ۱ باشد ضلع دیگرش هم ۱ است و با استفاده از قضیه فیثاغورس می‌توان طول وتر این مثلث را یافت.

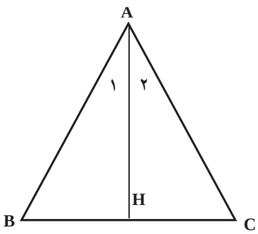
$$AC^{۲}=AB^{۲}+BC^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲}=۲\Rightarrow AC=\sqrt{۲}$$

۱) پ:

$$\sin\angle A=\sin ۴۵^{\circ}=\frac{BC}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad \cos\angle A=\cos ۴۵^{\circ}=\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\tan ۴۵^{\circ}=\tan\angle A=\frac{BC}{AB}=\frac{۱}{۱}=۱$$

۲)



الف: می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع همهٔ ضلع‌ها و زاویه‌ها مساوی‌اند. در نتیجه:

$\angle A=\angle B=\angle C=۶۰^{\circ}$ از طرفی ارتفاع و نیمساز و میانه و عمودمنصف رسم شده از همهٔ رأس‌ها یکسان هستند، پس

$$HB=CH=\frac{CB}{۲}=\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \angle HAB=\angle HAC=۳۰^{\circ}=\frac{\angle A}{۲}$$

در مثلث قائم الزاویهٔ ABH به کمک رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^{۲}=AH^{۲}+BH^{۲}\Rightarrow ۱^{۲}=AH^{۲}+(\frac{۱}{۲})^{۲}\Rightarrow AH=\sqrt{\frac{۳}{۴}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(ب)

$$\cos ۳۰^{\circ}=\frac{AH}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \quad \text{و} \quad \sin ۳۰^{\circ}=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۳۰^{\circ}=\frac{BH}{AH}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cos ۶۰^{\circ}=\frac{BH}{AB}=\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}=\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \sin ۶۰^{\circ}=\frac{AH}{AB}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۶۰^{\circ}=\frac{AH}{BH}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۳}$$

این محاسبه‌ها را در جدول زیر خلاصه می‌کنیم.

۶۰ درجه	۴۵ درجه	۳۰ درجه	نسبت‌های مثلثاتی
$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	سینوس
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	کسینوس
$\sqrt{۳}$	۱	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	تانژانت

فعالیت آموزشی

فعالیت ۸

یک ربع دایره به شعاع واحد، مانند شکل زیر، رسم کنید.

نقطهٔ A را روی ربع دایره انتخاب کنید. طول پاره‌خط OB چه رابطه‌ای با زاویهٔ α دارد؟

۱) با کم یا زیاد شدن زاویهٔ α، کسینوس آن چه تغییری می‌کند؟

۳) کسینوس زاویهٔ α چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۴) با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) با نزدیک شدن زاویهٔ α به ۹۰ درجه، کسینوس آن به چه عددی نزدیک می‌شود؟

اهداف موضوعی:

■ درک رابطهٔ بین تغییرات یک زاویه با کسینوس آن زاویه، درک مقادیر ممکن برای کسینوس یک زاویهٔ تند، درک حدی از مقادیر کسینوس در نزدیکی زاویه‌های صفر و ۹۰ درجه

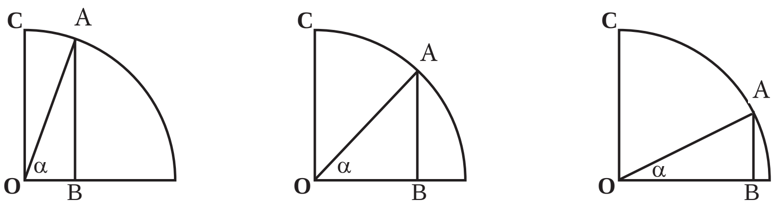
مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، تفکر بصری

۱ با توجه به تعریف کسینوس یک زاویهٔ تند در مثلث‌های قائم الزاویه، چون مثلث در رأس B قائمه است، کسینوس زاویه α عبارت است از $\frac{BO}{AO}$ ولی چون وتر این مثلث که همان شعاع ربع دایره (۱ واحد) است، $OB=\cos\alpha$.

در کلاس توضیح دهید که **فقط در این شکل که طول وتر ۱ واحد است**، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد.

۲ با توجه به شکل دیده می‌شود که با زیاد شدن زاویهٔ α طول پاره‌خط BO کوچک می‌شود. بنابراین کسینوس α کوچک‌تر می‌شود و با کم شدن α کسینوس α بزرگ‌تر می‌شود. در شکل‌های زیر این مطلب را به‌صورت شهودی مشاهده می‌کنید.



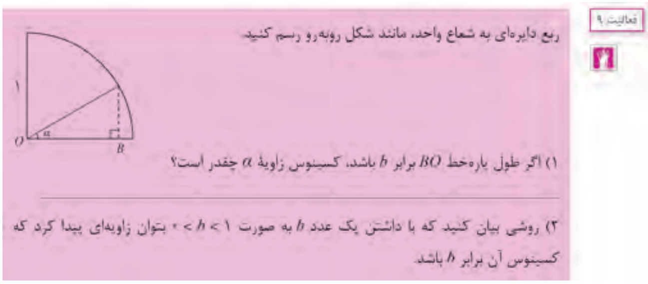
۳ چون در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع زاویهٔ قائمه از وتر کوچک‌تر است داریم: $BO<AO=۱$. بنابراین $\cos\alpha<۱$ و چون $\cos\alpha$ طول پاره‌خط BO است داریم: $\cos\alpha>۰$. پس: $۰<\cos\alpha<۱$ یعنی کسینوس زاویهٔ تند α عددی بین ۰ و ۱ است.

۴ با نزدیک شدن زاویهٔ α به صفر طول OB بزرگ می‌شود و به شعاع افقی نزدیک می‌شود یعنی $\cos\alpha$ به عدد یک نزدیک می‌شود.

۵ با نزدیک شدن زاویهٔ α به ۹۰° دیده می‌شود BO کوچک می‌شود. یعنی کسینوس زاویهٔ α از هر عدد مثبتی کوچک‌تر شده و به صفر نزدیک می‌شود.

مناسب است که تذکر داده شودکه فقط در این شکل که طول وتر ۱ است، ضلع مجاور، کسینوس زاویه را نشان می‌دهد. بهتر است مثالی زده شود که وتر در آن ۱ نباشد. (به مثال ابتدای بخش کسینوس در کتاب کار توجه شود)

فعالیت آموزشی


فعالیت ۹

ربع دایره‌ای به شعاع واحد، مانند شکل روبه‌رو رسم کنید.

۱) اگر طول پاره‌خط BO برابر b باشد، کسینوس زاویهٔ α چقدر است؟

۲) روشی بیان کنید که با داشتن یک عدد b به صورت $۰ < b < ۱$ بتوان زاویه‌ای پیدا کرد که کسینوس آن برابر b باشد.

اهداف موضوعی:

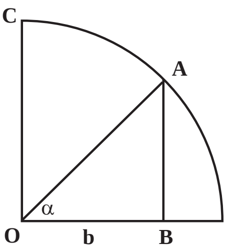
- کسب مهارت محاسبه زاویه‌ای که کسینوس آن معلوم است از طریق رسم

مهارت‌ها و فرایندها :

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارتباطات کلامی، تعمیم دادن

۱ با توجه به واحد بودن طول وتر در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم: $\cos\alpha=OB=b$.

۲ ربع دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنید. سپس روی شعاع افقی آن به اندازهٔ b جدا کنید که $b=BO$. از B عمودی بر BO رسم کنید تا ربع دایره را در A قطع کند. زاویهٔ AOB جواب مسئله است زیرا $\cos\alpha=OB=b$



سپس به کمک نقاله می‌توان اندازهٔ آن زاویه را محاسبه نمود.

این فعالیت نشان می‌دهد که هر عدد بین ۰ و ۱ می‌تواند برابر کسینوس زاویه‌ای باشد.

دقت شود در این بخش به بدفهمی و نامثال‌های کسینوس نیز پرداخته شود تا احتمال اشتباه هنرجو به حداقل برسد. مثلاً کدام یک از رابطه‌های زیر درست یا نادرست‌اند (به کمک محاسبه)

۱) $\dfrac{\cos ۶۰^\circ}{۲\cos ۳۰^\circ}=\cos ۳۰^\circ$

۲) $\cos ۸۰^\circ=۲\cos ۴۰^\circ$

۲ آیا زاویهٔ تندی وجود دارد که کسینوس آن $\frac{۴}{۳}$ باشد؟ چرا؟

پاسخ این مسئله خیر است زیرا $\frac{۴}{۳}>۱$ درحالی که همیشه کسینوس یک زاویه تند بین ۰ و ۱ است.

مسیرهایی برای توسعه:

۱ تحقیق توسط هنرجویان برای بررسی درستی رابطه‌های زیر (قرارداد $(\sin\alpha)^{۲}=\sin^{۲}\alpha$ بیان شود):

الف) $\sin^{۲}\alpha+\cos^{۲}\alpha=۱$

ب) $\cos^{۲}\alpha=\dfrac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha}$

پ) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

مسئله‌ها

۱) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، کسینوس زاویه‌های ۱۵ و ۷۵ درجه را حساب کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

به کمک خط‌کش و نقاله قبلاً توضیح کامل داده شده است.

$$\cos۱۵^{\circ}\approx ۰/۹۶,\cos۷۵^{\circ}\approx ۰/۲۶$$

۲) زمین بزرگی به شکل مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ ۱۰۰ متر و با زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ ۵۰ درجه است.

الف) با رسم یک مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسب، از طریق اندازه‌گیری با خط‌کش، کسینوس زاویهٔ ۵۰ درجه را به طور تقریبی محاسبه کنید.

ب) طول اضلاع زمین مثلث شکل را بیابید.

پ) مساحت زمین را بیابید.

مهارت‌ها و فرایندها:

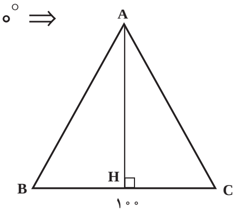
■ حل مسئله

الف) همانند سؤال ۱ عمل می‌کنیم که نتیجه می‌شود $\cos۵۰^{\circ}\approx ۰/۶۴$

ب) شکل زمین را مانند زیر رسم می‌کنیم. از A ارتفاع وارد بر ضلع BC را رسم می‌کنیم در مثلث قائم‌الزاویهٔ HBA:

$$BH=\frac{BC}{۲}=۵۰m\Rightarrow \cos\angle B=\frac{BH}{AB}$$ و $$\angle B=۵۰^{\circ}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC=AB=\frac{۵۰}{\cos۵۰^{\circ}}\approx\frac{۵۰}{۰/۶۴}=۷۸/۱۲۵$$

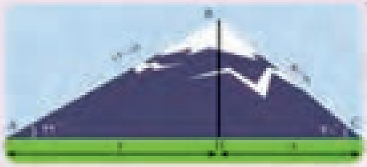


پ) از رابطهٔ فیثاغورس داریم :

$$AB^{۲} = AH^{۲} + BH^{۲} \Rightarrow AH = \sqrt{AB^{۲} - BH^{۲}} = \sqrt{(۷۸/۱۲۵)^{۲} - ۵۰^{۲}} \approx ۶۰$$

$$S = \frac{AH \times BC}{۲} \approx \frac{۶۰ \times ۱۰۰}{۲} = ۳۰۰۰$$

۳) حسن و علی در یک روز تعطیل می‌خواهند از دو نقطهٔ متفاوت و هم‌سطح در دو مسیر مختلف از پای کوه تا قلهٔ آن بروند. علی با زاویهٔ ۳۲ درجه و حسن با زاویهٔ ۴۰ درجه از کوه بالا می‌روند. علی پس از طی ۱۲۰۰ متر و حسن پس از طی ۸۰۰ متر به قلهٔ کوه می‌رسند. فاصلهٔ علی و حسن را در پای کوه محاسبه کنید.



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

ابتدا به کمک مثلث قائم‌الزاویه مناسب مقدار کسینوس زوایه‌های ۳۲ و ۴۰ درجه را می‌یابیم. سپس با استفاده از تعریف کسینوس مقدار x و y را یافته و با هم جمع می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۳۲^{\circ} = \dfrac{y}{۱۲۰۰} \\ \cos ۳۲^{\circ} \approx ۰/۸۵ \end{array}\right\} \Rightarrow y = ۱۲۰۰ \cos ۳۲^{\circ} \approx ۱۲۰۰ \times ۰/۸۵ = ۱۰۲۰m$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos ۴۰^{\circ} = \dfrac{x}{۸۰۰} \\ \cos ۴۰^{\circ} \approx ۰/۷۷ \end{array}\right\} \Rightarrow x = ۸۰۰ \cos ۴۰^{\circ} \approx ۸۰۰ \times ۰/۷۷ = ۶۱۶m$$

$$x + y = ۱۶۳۶m$$

۴) درستی یا نادرستی روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $\cos ۲۰^{\circ} < \cos ۴۰^{\circ}$

ب) $\tan ۲۰^{\circ} < \tan ۳۰^{\circ}$

پ) $\sin ۴۰^{\circ} < \sin ۲۰^{\circ}$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ مقایسه کردن، استدلال کردن

هدف این سؤال استفاده از اطلاعات هنرجو پس از یادگیری نسبت‌های مثلثاتی و تعیین رابطهٔ بین تغییرات نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه با تغییرات آن زاویه است.

الف) نادرست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود، کسینوس آن کوچک می‌شود.
ب) درست است زیرا هر چه زاویه تند بزرگ شود تانژانت آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.
پ) نادرست است زیرا هرچه زاویه تند بزرگ شود سینوس آن زاویه نیز بزرگ می‌شود.

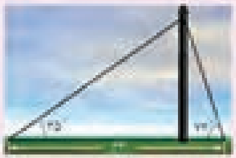
۵) مقدار عددی عبارت‌های زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{\sin ۶۰^\circ+\tan ۴۵^\circ-\cos ۳۰^\circ}{۱+\sin ۳۰^\circ} \quad \text{و} \quad B=\frac{\tan ۶۰^\circ+۲\cos ۳۰^\circ-۲\sqrt{۳}}{۱+\sin ۶۰^\circ}$$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$B=\frac{\sqrt{۳}+۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۲\sqrt{۳}}{۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۰ \quad \text{و} \quad A=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}+۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱+\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۳}$$



۶) دو کابل فلزی یک برج مخابراتی را نگه داشته‌اند. زاویهٔ بین زمین و کابل‌ها به ترتیب ۳۵ و ۷۲ درجه و فاصلهٔ بین محل اتصال دو کابل در زمین، ۳۳ متر است. طول هر یک از این کابل‌ها چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، حل مسئله، تفکر بصری

$$\cos ۳۵^\circ=\frac{m}{x}\Rightarrow m=x\cos ۳۵^\circ \text{ ، } \cos ۷۲^\circ=\frac{n}{y}\Rightarrow n=y\cos ۷۲^\circ$$

$$,\begin{cases} x\cos ۳۵^\circ+y\cos ۷۲^\circ=m+n=۳۳ \\ x\sin ۳۵^\circ=h=y\sin ۷۲^\circ\Rightarrow x=\dfrac{y\sin ۷۲^\circ}{\sin ۳۵^\circ} \end{cases} \Rightarrow y\approx ۱۹/۷ \ , \quad x\approx ۳۲/۷$$

۷) با انجام محاسبات عددی، درستی روابط زیر را بررسی کنید:

الف) $\cos ۶۰^\circ=۲\cos ۳۰^\circ$ ب) $\sin ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ$
پ) $\cos ۶۰^\circ<۲\sin ۳۰^\circ\cos ۳۰^\circ$ ت) $\tan ۶۰^\circ+\tan ۳۰^\circ=\frac{۲}{\sin ۶۰^\circ}$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات، استدلال کردن، مقایسه کردن

با جایگذاری مقادیر نسبت‌های مثلثاتی می‌توان درستی یا نادرستی آنها را تعیین کرد.

الف) نادرست زیرا $\frac{۱}{۲}\neq ۲\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

ب) درست $\frac{\sqrt{۳}}{۲} < ۲(\frac{۱}{۲}) = ۱$

پ) درست زیرا $\frac{۱}{۲} < ۲(\frac{۱}{۲})(\frac{\sqrt{۳}}{۲})$

ت) درست زیرا $\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۲}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$

۸) سمت راست تساوی‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $A = \sin ۳۰^\circ + \cos ۳۰^\circ$

ب) $B = \frac{۲\cos ۳۰^\circ - ۲\sin ۳۰^\circ}{۲\tan ۴۵^\circ + ۳\cos ۶۰^\circ}$

پ) $C = ۱ - ۲ \sin ۳۰^\circ$

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، انجام محاسبات

$$A = \frac{۱}{۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}$$

$$B = \frac{۲\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۲(\frac{۱}{۲})}{۲(۱) + ۳(\frac{۱}{۲})} = \frac{۲(\sqrt{۳} - ۱)}{۷}$$

$$C = ۱ - ۲(\frac{۱}{۲}) = ۰$$

تاریخچه و توسعه مثلثات

مثلثات از درون هندسه بیرون آمد و بیش از همه، ریاضیدانان ایرانی روی آن کار کردند. بررسی‌های اخترشناسی در بابل قدیم و یونان، ریاضیدانان را به سمت موضوع‌هایی کشانید که می‌توان آنها را پیش درآمد مثلثات دانست. نخستین تابع‌های مثلثاتی را باید جدول وترها برحسب کمان آنها دانست که برای محاسبه‌های اخترشناسی لازم بود و در دو سدهٔ پیش از میلاد به‌وجود آمد.
برای نخستین بار دانشمندان هندی در فاصلهٔ زمانی از سدهٔ پنجم تا دوازدهم میلادی از «نیم‌وتر» به‌جای وتر استفاده کردند که متناظر با مفهوم سینوس امروزی است. آنها نیم‌وتر را «اردهاجیا» (یا «جیاردها») می‌گفتند که از لحاظ لغوی به معنای نصف وتر است. به‌تدریج اردهاجیا را کوتاه کردند و «جیا» نامیدند.
به جز این، هندی‌ها از یک منهای کسینوس x هم استفاده می‌کردند و آن را «کوماجیا» می‌نامیدند و مقدار $\cos x$ را «کوتی جیا» می‌گفتند.
«ابوالوفای بوزجانی» (۹۴۰ تا ۹۸۸ میلادی) ریاضیدان ایرانی (ویرانه‌های بوزجان نزدیک تربت‌جام است)، تانژانت را به نام «ظل» وارد مثلثات کرد و جدولی را تنظیم کرد که نیم درجه، نیم درجه مقدار سینوس‌ها را تعیین می‌کرد. دستورهای $\sin(a+b)$ و $\sin(a-b)$ را کشف کرد و برخی از مسئله‌های مثلثات کروی را حل نمود.
اما گام اصلی را نصیرالدین طوسی برداشت. تألیف او به نام «کشف القناع فی اسرار شکل القطاع» در واقع نخستین کتاب درباره مثلثات است. نقش طوسی را در مثلثات، باید شبیه نقش اقلیدس در هندسه دانست. زیرا او توانست مجموعهٔ آنچه را که پیش از او وجود داشت، به صورت دانشی مستقل و منظم درآورد. ترجمه‌ای از کتاب طوسی در سال ۱۹۸۱ به زبان فرانسوی انجام گرفت و تا مدتها به‌عنوان کتاب درسی، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان در اروپای غربی بود.
از نام‌گذاری «مثلثات» می‌توان حدس زد که این شاخه از ریاضیات دست کم در آغاز پیدایش خود به‌نحوی با مثلث و مسئله‌های مربوط به مثلث بستگی داشته است. در واقع پیدایش و پیشرفت مثلثات را باید نتیجه‌ای از تلاش‌های ریاضیدانان برای رفع دشواری‌های مربوط به محاسبه‌هایی دانست که در هندسه روبروی دانشمندان بوده است.
بعد از طوسی، جمشید کاشانی ریاضیدان ایرانی زمان تیموریان با استفاده از روش زیبایی که برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم پیدا کرده بود، توانست راهی برای محاسبهٔ سینوس کمان یک درجه با هر دقت دلخواه پیدا کند. پیشرفت بعدی دانش مثلثات

از سدهٔ پانزدهم میلادی و در اروپای غربی انجام گرفت. یک نمونه از مواردی که ایرانی بودن این دانش را تا حدودی نشان می‌دهد از این قرار است: ریاضیدانان ایرانی از واژهٔ «جیب» (واژهٔ عربی به معنی «گریبان») برای سینوس و از واژهٔ «جیب تمام» برای کسینوس استفاده می‌کردند. وقتی نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی به ویژه خوارزمی به زبان لاتین و زبان‌های اروپایی ترجمه شد، معنای واژهٔ «جیب» را در زبان خود به‌جای آن گذاشتند: سینوس. این واژه در زبان فرانسوی همان معنای جیب عربی را دارد. نخستین ترجمه از نوشته‌های ریاضیدانان ایرانی که در آن صحبت از نسبت‌های مثلثاتی شده است، ترجمه‌ای بود که در سدهٔ دوازدهم میلادی به وسیلهٔ گرادوس کره مونه سیس ایتالیایی از عربی به لاتینی انجام گرفت و در آن واژهٔ سینوس را به کار برد. اما دربارهٔ ریشهٔ واژهٔ «جیب» دو دیدگاه وجود دارد: «جیا» در زبان سانسکریت به معنای وتر و گاهی نیم وتر است. نخستین کتابی که به وسیلهٔ فزازی (یک ریاضیدان ایرانی) به دستور منصور خلیفهٔ عباسی به زبان عربی ترجمه شد، کتابی از نوشته‌های دانشمندان هندی درباره اخترشناسی بود. مترجم برای حرمت گذاشتن به نویسندگان کتاب، «جیا» را تغییر نمی‌دهد و تنها برای اینکه در عربی بی معنا نباشد، آن را به صورت «جیب» در می‌آورد. دیدگاه دوم که منطقی‌تر به نظر می آید این است که در ترجمه از واژهٔ فارسی «جیپ»- بر وزن سیب- استفاده شد که به معنی «تکهٔ چوب عمود» یا «دیرک» است. نسخه‌نویسان بعدی که فارسی را فراموش کرده بودند و معنای «جیپ» را نمی‌دانستند، آن را جیب خواندند که در عربی معنایی داشته باشد.

در کتاب، نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های تند به صورت نسبت اضلاع در یک مثلث قائم‌الزاویه تعریف شده‌اند، ولی با رسم یک نیم‌دایره، اگر از واحد گرادیان برای اندازهٔ زاویه استفاده کنیم، خواهیم دید نسبت‌هایِ مثلثاتی در ارتباط با طول کمان‌های دایره و طول وتر این کمان‌ها است. مثلاً سینوس یک زاویه برابر نصف طول وتر کمان آن زاویه بر حسب رادیان است. با این نگاه، که نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه را با ارتباط بخشیدن به طول کمان و طول وتر کمان ببینیم می توان نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دلخواه را هم تعریف کرد.

مثلاً، با رسم یک ربع دایرهٔ به شعاع واحد در صفحهٔ تحلیلی مشاهده می‌شود که سینوس و کسینوس هر زاویهٔ تندی متناظر مختصات نقطه‌ای روی این نیم‌دایره است که آن زاویه را نشان می‌دهد. می‌توانیم این مطلب را برای بقیهٔ زاویه‌ها نیز تعمیم دهیم و مختصات هر نقطه‌ای روی دایره را به صورت سینوس و کسینوس زاویهٔ متناظر با آن نقطه تعریف کرد.