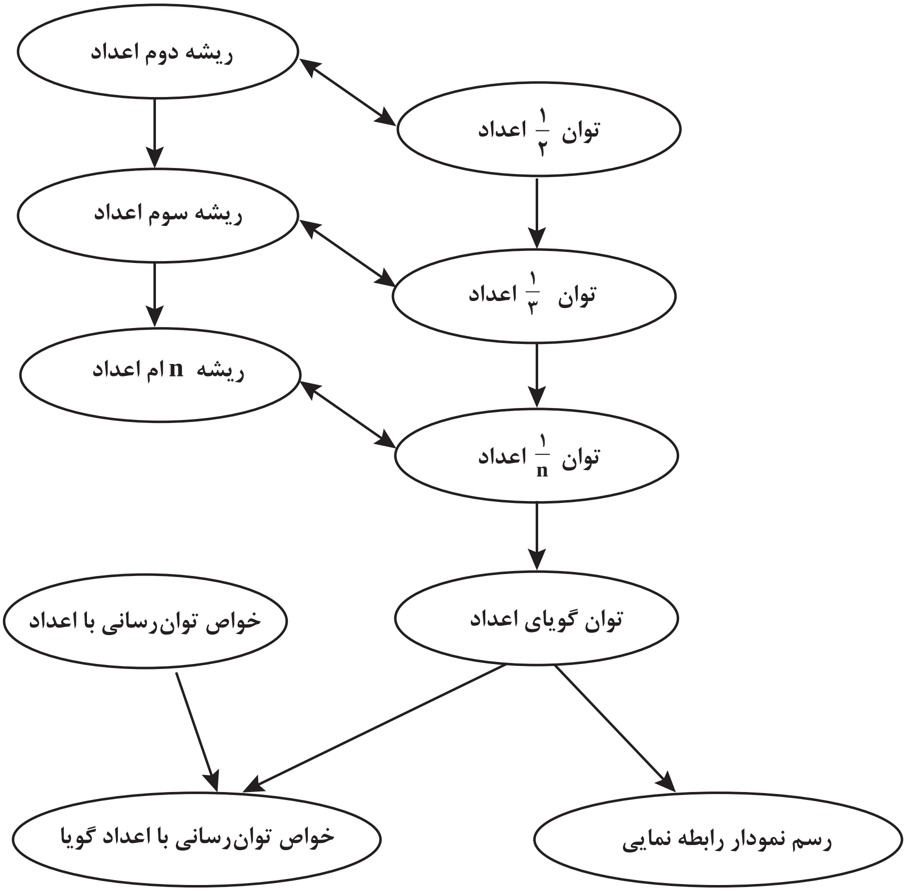
فصل پنجم

توان‌رسانی به توان عددهای گویا

طرح کلی فصل پنجم (نقشه مفهومی)



اهداف کلی فصل

- درک مفهوم توان‌های گویای اعداد
- درک ارتباط بین توان‌رسانی به توان عددهای گویا و ریشه‌گیری.
- درک مفهوم ریشه k ام عددهای حقیقی و نمایش رادیکالی آنها.
- تعمیم خواص توان‌رسانی به توان عددهای صحیح به خواص توان‌رسانی به توان عددهای گویا.
- درک تقریب اعشاری ریشه‌های یک عدد.
- توجه به اهمیت توان‌رسانی به توان عددهای گویا در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان

هنرجویان باید قادر باشند:

- اعداد با توان‌های کسری را به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی را به صورت توانِ کسری نمایش دهند.
- با استفاده از ماشین حساب تقریب اعشاریِ هر عددِ با توان گویا را پیدا کنند.
- ریشه‌های یک عدد طبیعی را با استفاده از تجزیه به عوامل اول پیدا کنند.
- از توان‌های گویا در مدل‌سازی ریاضیِ پدیده‌های طبیعی استفاده کنند.
- از خواص توان‌رسانی به توان عددهای گویا برای انجام عملیات جبری (ضرب و تقسیم و توان‌رسانی) روی اعداد توان‌دار استفاده کنند.
- از فناوری (ماشین حساب) برای درک و بررسی وضعیت‌ها استفاده کنند.

پیش نیازها :

- آشنایی با ریشهٔ دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با توان‌رسانی به توان اعداد صحیح و خواص آن.
- توانایی رسم نمودار با نقطه‌یابی.
- توانایی تجزیه یک عدد طبیعی به عامل‌های اول.

نگاه کلی به فصل:

در مدل‌سازی برخی پدیده‌های طبیعی مانند رشد و زوال در زیست‌شناسی، محاسبه انواع سودهای مرکب در علم اقتصاد به مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد

گویا و حقیقی مواجه می‌شویم. هدف این فصل، آموزش مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد گویا است. توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی فرایند دیگری لازم دارد که در ارتباط با حدگیری است و نمی‌توانیم وارد آن شویم. اما به طور شهودی می‌توان انتظار داشت که هنرجویان توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی را هم می‌پذیرند.

فرایند آموزش مفهوم توان‌رسانی اعداد که در سال‌های گذشته دیدیم، با تعریف توان‌های طبیعی اعداد شروع می‌شود و با تعمیم آن به توان‌های صحیح ادامه می‌یابد. در این فصل با گسترده‌تر شدن دامنه تعمیم به توان‌رسانی با اعداد گویا خواهیم رسید و زمینه برای معرفی توابع نمایی آماده خواهد شد. نموداری که در آخر این فصل آمده، نمایش برخی از توان‌های یک عدد در یک دستگاه مختصات می‌باشد که نقاطی از نمودار یک تابع نمایی است. با وصل این نقاط به یکدیگر می‌توان نموداری از یک تابع نمایی را مشاهده کرد و توجه هنرجویان علاقمند و قوی‌تر را به توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی (که البته از اهداف کتاب نیست) معطوف کرد.

روش آموزشی این فصل برای درک مفهوم توان‌رسانی به توان اعداد گویا درگیر شدن مستقیم با مسئلهٔ رشد در زیست‌شناسی است. در این فصل، مسئله‌ای در ارتباط با رشد باکتری‌ها و مقدار باکتری‌ها در لحظات گوناگون مطرح شده است. حل این مسئله نیازمند مدل‌سازی است و به کمک الگویابی به عددی با توان کسری می‌رسیم. با این روش نیاز به معرفی توان‌های کسری (گویا) از اعداد مشخص می‌شود.

توان‌رسانی به توان اعداد گویا و ریشه‌گیری در ارتباط با یکدیگرند. برای محاسبهٔ مقدار توان‌های کسری یا ریشه‌گیری از اعداد، فقط روش تجزیه عدد به عوامل اول مورد نظر است در غیر این صورت (یعنی وقتی عدد مربع یا مکعب یا ... نیست) برای محاسبهٔ ریشه (یا توان کسری) از ماشین حساب استفاده شود. آموزش نحوهٔ استفاده از ماشین حساب جهت نمایش تقریب اعشاری توان‌های گویا و درک بهتر مقدار این اعداد در این فصل مطرح شده است. ذکر این نکته برای هنرجویان ضروری است که تقریب‌های اعشاری از توان‌های گویا هیچ‌کدام نمایش دهنده مقدار دقیق این اعداد نیستند (مگر در مواقعی که عدد دقیقاً توان n ام یک عدد آشنای دیگر باشد) و مقدار دقیق آن صرفاً با نمادهای رادیکالی (یا به صورت عددی توان‌دار با توان گویا) نمایش داده می‌شوند.

	فرایند	توضیح فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متون ورودی
		شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسئله و با انتخاب مناسب آنها	ـ استفاده از الگویابی برای تعریف ریشه kام هرعدد حقیقی (فعالیت ۶)
	ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ـ انتقال تفکرات محمد به معلم علوم (در مکالمه محمد و معلم) و سازماندهی آن (کار در کلاس ۳ سؤال آخر)
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ استفاده از زبان ریاضی برای بیان «توان $\frac{۱}{۳}$ هر عدد برابر با ریشه سوم آن عدد است (تعریف صفحه ۹۴ کتاب درسی)
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـدلیل تساوی $\sqrt{۲}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ (فعالیت ۱) ـ دلیل تساوی $\sqrt[۳]{۲}$ و $۲^{\frac{۱}{۳}}$ (فعالیت ۲) ـ سؤال ۱ (کار در کلاس بعد از فعالیت ۳)
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـتکثیر باکتری‌ها و محاسبه وزن آنها (ارتباط ریاضی با زیست‌شناسی)
		تشخیص چگونگی ارتباط بین مفاهیم ریاضی	ـ ارتباط توان‌رسانی با اعداد گویا و ریشه‌گیری (در حوزه اعداد) ـ نمایش عدد با توان $\frac{۱}{۲}$ به صورت طول یک پاره‌خط (مثال دوم بعد از فعالیت ۱) ـ نمایش عدد با توان $\frac{۱}{۳}$ به‌صورت طول یک پاره‌خط (مثال دوم بعد از فعالیت ۲)
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ نمایش توان‌های گویا روی محورهای مختصات (کار در کلاس ۷ و مسئله۸ آخر فصل) ـ استفاده از دیاگرام در فعالیت‌های ۱ و ۲ برای درک مقدار رادیکالی وزن و ارتباط آن با نمایش وزن به صورت یک عدد با توان $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$.
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ بیان ارتباط بین تعداد باکتری‌ها و زمان گذشته از شروع تکثیر (در مکالمه محمد و معلم) ـ مقایسه ریشه‌های چهارم یک عدد (فعالیت ۴ قسمت ۶) ـمقایسه نمایش یک عدد با توان گویا و نمایش رادیکالی آن با استفاده از نمایش اعشاری آنها (استفاده از ابزار بعد از فعالیت ۲ و بعد از فعالیت ۶) ـ تعمیم ریشه ۲ و ۳ اعداد به ریشه ۴ و ۵ و k (فعالیت ۳) ـ تعمیم $۲^{\frac{۱}{۲}}$ به $a^{\frac{۱}{۲}}$ و $۲^{\frac{۱}{۳}}$ به $a^{\frac{۱}{۳}}$ (متن بعد از فعالیت ۲). ـ تعمیم خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح به خواص توان‌رسانی با اعداد گویا

بخش اول: مفهوم توان‌رسانی به توان عددهای گویا

اهداف بخش

- درک مفهوم توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ از اعداد
- درک ارتباط بین توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و رادیکال‌های با فرجه ۲ و ۳
- نمایش اعدادِ با توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی با فرجه ۲ و ۳ به صورت توانِ کسری
- استفاده از اعداد توان‌دارِ با توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ درمدل‌سازی پدیده‌های طبیعی
- استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ تقریب اعشاری اعدادِ باتوان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$

واژه‌های کلیدی:

توان‌رسانی با اعداد گویا، ریشه‌گیری.

نگاه کلی به بخش :

در این بخش ابتدا با مدل‌سازی به کمک الگویابی، مسئلهٔ تکثیر باکتری‌ها را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. از این طریق مفهوم توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ اعداد به طور طبیعی مطرح می‌شوند. سپس جهت درک ارتباط بین یک عدد توان‌دار با توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ و ریشه‌گیری، دو فعالیت مطرح شده است. دیاگرامی‌که در هر دو فعالیت آمده است، برای محاسبهٔ وزن باکتری‌ها از دو مسیر مختلف می‌باشد. از این طریق، درکی از نمایش وزن باکتری‌ها به صورت یک عدد رادیکالی ایجاد شود.

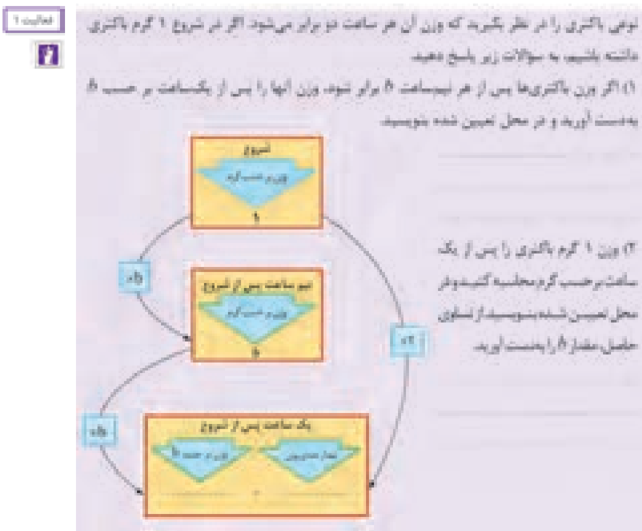
مثال‌های این بخش برای تقویت مهارت تبدیل اعداد با توان $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ به اعداد رادیکالی و ارائه تعبیر هندسی آنها مطرح شده است.

ورود به مطلب :

برای ورود به مطلب در صورتی که هنرجویان آمادگی داشته باشند، معلم می‌تواند با استفاده از مکالمهٔ ابتدای فصل سؤال‌های مناسبی را در کلاس مطرح کند و فضای آموزشی را به مباحثه‌ای هدایت نماید که تمامی‌هنرجویان در رسیدن به اهداف مکالمه مطرح شده، مشارکت داشته باشند. در غیر این صورت معلم می‌تواند از هنرجویان بخواهد مکالمهٔ بین معلم و محمد را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت ۱ آمادگی داشته باشند.

اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند و در صورتی که دبیر لازم بداند می‌تواند در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در هر ساعت ۴ برابر می‌شود استفاده کرده و از هنرجویان بخواهد وزن آنها را پس از نیم‌ساعت حساب کنند و سپس باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از هر ساعت ۲ برابر می‌شود را مطرح کند زیرا درک فعالیت با استفاده از اعدادی که مربع کامل هستند، ساده‌تر است.

فعالیت آموزشی



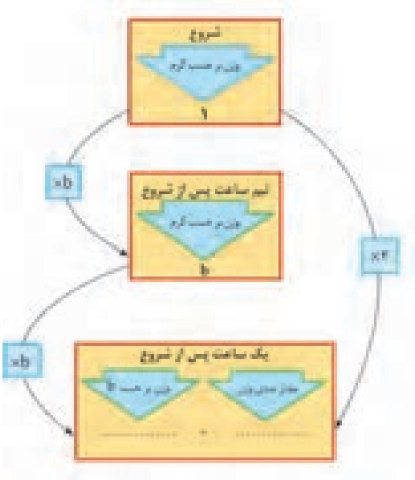
اهداف موضوعی:

■ درک ارتباط بین $\sqrt{۲}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ در یک زمینهٔ واقعی.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ پیوندها و اتصال‌ها، مدل‌سازی یک پدیده

ارتباط بین $\sqrt{۲}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ در حوزهٔ اعداد، ارتباط بین وزن باکتری‌ها و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ (ارتباط ریاضی و زیست‌شناسی)



حل فعالیت :

۱ نمودار تکمیل شده :

۲ $b^{۲} = ۲ \Rightarrow b = \sqrt{۲}$

کار در کلاس ۱

۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۴۹^{\frac{۱}{۲}} =$

$(\frac{۱}{۲۵})^{\frac{۱}{۲}} =$

$(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}} =$

۲) طول ضلع مربعی را که مساحت آن ۹ سانتی‌مترمربع است، به‌صورت یک عدد توان‌دار نمایش دهید و آن را ساده کنید.

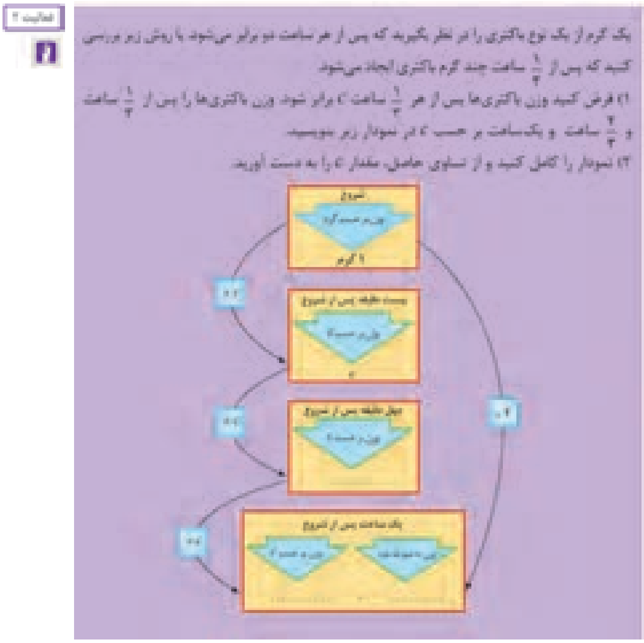
اهداف :

■ کسب مهارت در نمایش رادیکالی اعدادِ با توانِ $\frac{۱}{۲}$ و محاسبهٔ حاصل آنها.

۱ الف) $۴۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۴۹} = ۷$ ب) $\left(\frac{۱}{۲۵}\right)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۲۵}} = \frac{۱}{۵}$ ج) $(۰/۰۱)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۰/۰۱} = ۰/۱$

۲ $S^{\frac{۱}{۲}} = ۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$

فعالیت آموزشی


یک گرم از یک نوع باکتری را در نظر بگیرید که پس از هر ساعت دو برابر می‌شود. با روش زیر بررسی کنید که پس از $\frac{1}{3}$ ساعت چند گرم باکتری ایجاد می‌شود.

۱) فرض کنید وزن باکتری‌ها پس از هر $\frac{1}{3}$ ساعت c برابر شود. وزن باکتری‌ها را پس از $\frac{1}{3}$ ساعت و $\frac{2}{3}$ ساعت و یک‌ساعت بر حسب c در نمودار زیر بنویسید.

۲) نمودار را کامل کنید و از تساوی حاصل، مقدار c را به دست آورید.

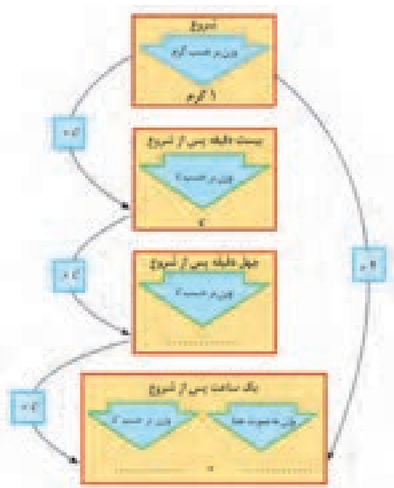
اهداف موضوعی :

■ درک ارتباط بین $\sqrt[3]{2}$ و $2^{\frac{1}{3}}$ در یک زمینهٔ واقعی.

مهارت‌ها و فرایندها:

پیوندها و اتصال‌ها، مدل‌سازی یک پدیده

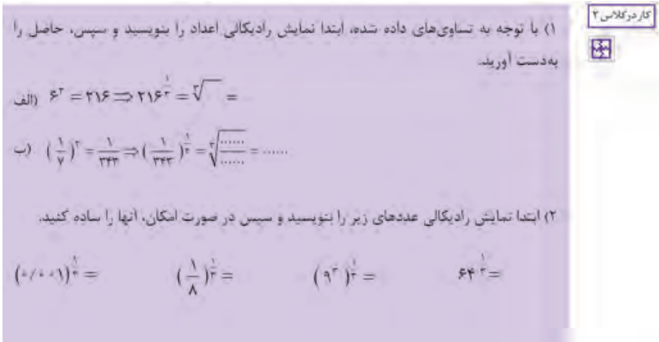
۱ نمودار تکمیل شده :



۲ برای محاسبهٔ مقدار c داریم: $c^3 = 2 \Rightarrow c = \sqrt[3]{2}$

در این فعالیت اگر هنرجویان آمادگی لازم را نداشته باشند، می‌توان در شروع باکتری‌هایی را که وزن آنها در

هر ساعت ۸ برابر می‌شود را در نظر گرفت و از هنرجویان خواست وزن آنها را پس از ۲۰ دقیقه و ۴۰ دقیقه حساب کنند و سپس به باکتری‌هایی که در کتاب مطرح شده رسید.



کار در کلاس ۲

۱) با توجه به تساوی‌های داده شده، ابتدا نمایش رادیکالی اعداد را بنویسید و سپس، حاصل را به‌دست آورید.

الف) $۶^۳ = ۲۱۶ \Rightarrow ۲۱۶^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\quad} =$

ب) $\left(\frac{۱}{۷}\right)^۳ = \frac{۱}{۳۴۳} \Rightarrow \left(\frac{۱}{۳۴۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}} = \cdots\cdots$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان، آنها را ساده کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (۹^۳)^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}} =$ $\quad (۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}} =$

اهداف:

■ کسب مهارت در نمایش رادیکالی اعداد با توان $\frac{۱}{۳}$ و محاسبهٔ حاصل آنها، پرورش مهارت برقراری پیوند و اتصال بین مفاهیم ریاضی

۱

الف) $۲۱۶^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۲۱۶} = ۶$

ب) $\left(\frac{۱}{۳۴۳}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۳۴۳}} = \frac{۱}{۷}$

۲

$(۷۲۹)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۷۲۹} = ۹$ $\qquad ۶۴^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

$(۰/۰۰۱)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۰/۰۰۱} = ۰/۱$ $\qquad \left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}} = \frac{۱}{۲}$

تذکر : اعدادی که در تمرین ۲ کار درکلاس آمده از انواع کسری، اعشاری و صحیح انتخاب شده و دبیران می‌توانند طبق نظر خود اعداد دیگری را انتخاب کنند و از هنرجویان بخواهند تا آنها را حل کنند.

استفاده از ماشین حساب

یک گرم از باکتری‌هایی را که وزن آنها پس از یکساعت دو برابر می‌شوند در نظر بگیرید. با استفاده از ماشین حساب وزن آنها را در هر یک از دو حالت زیر بر حسب گرم با تقریب اعشاری تا دو رقم اعشار نشان دهید(توجه کنید، اگر از ماشین حساب‌های مختلف استفاده می‌کنید، ممکن است ترتیب فشاردادن کلیدها متفاوت باشد)

الف) پس از نیم‌ساعت

محاسبه از طریق توان‌رسانی:

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

ب) پس از ۲۰ دقیقه

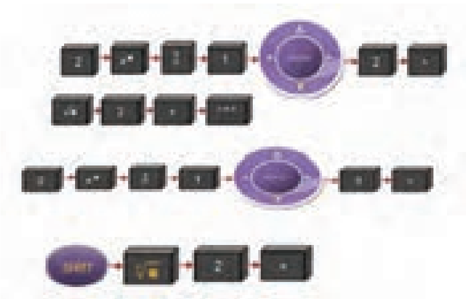
محاسبه از طریق توان‌رسانی:

محاسبه از طریق ریشه‌گیری:

استفاده از ابزار :

اهداف :

- آشنایی با تقریب اعشاریِ ریشه‌های دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با تقریب اعشاریِ توان‌های $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$ اعداد.
- استفاده از تقریب اعشاری برای مقایسهٔ نمایش یک عدد باتوان ($\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{۳}$) و نمایش رادیکالی آن اعداد.
- تقویت مهارت استفاده از ماشین‌حساب برای محاسبهٔ تقریب اعشاری ریشه‌های دوم و سوم و توان‌های $\frac{۱}{۲}$و $\frac{۱}{۳}$ اعداد.
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد



الف) $۲^{\frac{۱}{۲}} \approx ۱/۴۱$ و $\sqrt{۲} \approx ۱/۴۱$

ب) $۲^{\frac{۱}{۳}} \approx ۱/۲۶$ و $\sqrt[۳]{۲} \approx ۱/۲۶$

مسئله‌ها

۱) نقطه چین‌ها را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

$$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱ \Rightarrow ۱۳۳۱^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{\quad} =$$

$$۱۷^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow ۲۸۹^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{\quad} =$$

مهارت‌ها و فرایندها:

- پیوندها و اتصال‌ها

$$۱۱^{۳} = ۱۳۳۱ \Rightarrow (۱۳۳۱)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱۳۳۱} = ۱۱$$

$$۱۷^{۲} = ۲۸۹ \Rightarrow (۲۸۹)^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{۲۸۹} = ۱۷$$

۴) مقادیر خواسته شده را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار با توان گویا بنویسید و سپس عبارت رادیکالی متناظر آن را نوشته و با استفاده از ماشین حساب حاصل را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

الف) مقدار x

ب) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت دو برابر می‌شود. اگر با دو گرم باکتری شروع کنیم پس از نیم ساعت چقدر باکتری داریم؟ مقدار باکتری‌ها پس از بیست دقیقه چقدر است؟

پ) قطر یک مربع به ضلع ۴ را پیدا کنید.

مهارت‌ها وفرایندها :

- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

الف) مقدار x :

$$x^{۲} = ۶^{۲} - ۳^{۲} = ۲۷ \rightarrow x = ۲۷^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۲۷} \approx ۵/۲$$

ب) وزن باکتری‌ها پس از نیم ساعت:

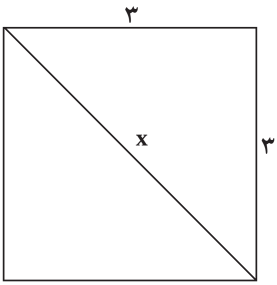
$$۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۲]{۴} = ۲$$

وزن باکتری‌ها پس از بیست دقیقه :

$$۴^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۴} \approx ۱/۵۸$$

پ) قطر یک مربع به ضلع ۳ :

$$x^{۲} = ۳^{۲} + ۳^{۲} = ۱۸ \Rightarrow x = ۱۸^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱۸} \approx ۴/۲۴$$



۳) بخشی از راه حل احمد برای یافتن ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $۲x^{۲} - ۳x - ۲ = ۰$ به صورت زیر است:

$$x = \frac{۳ \pm \left((-۳)^{۲} - ۴ \times ۲ \times (-۲)\right)^{\frac{۱}{۲}}}{۲ \times ۲} = \ldots$$

درستی یا نادرستی راه حل را بررسی کرده و در صورت درستی با ادامهٔ راه حل و درصورت نادرستی با نوشتن راه حل درست، ریشه‌های معادله را به‌دست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، ارزیابی کردن.

راه حل احمد درست است و ادامه آن به صورت زیر است:

$$x = \frac{۳ \pm ۲۵^{\frac{۱}{۲}}}{۴} = \frac{۳ \pm ۵}{۴} = -\frac{۱}{۲}\ ,\ ۲$$

۴) دارایی‌های یک شرکت در هر سال، ۱۵۰ درصد سال قبل است. دارایی این شرکت طی ده سال به صورت زیر گزارش شده است :

بدو تأسیس: ۱ میلیارد ریال، پایان سال اول: ۱/۵ میلیارد ریال، پایان سال دوم: ۲/۲۵ میلیارد ریال و ...

الف) دارایی شرکت در پایان سال‌های دوم، چهارم و دهم را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

ب) رابطه‌ای بنویسید که دارایی در پایان سال n ام را به صورت یک عبارت توان‌دار بر حسب n نمایش دهد.

پ) اگر روند رشد دارایی‌ها در هر ماه نیز طبق رابطهٔ قسمت قبل باشد، دارایی شرکت را پس از ۴ ماه و ۶ ماه، به صورت یک عدد توان‌دار و یک عبارت رادیکالی نمایش دهید و با ماشین حساب مقدار آن را به صورت یک عدد اعشاری نمایش دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ مدل‌سازی، حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، الگویابی، تعمیم دادن، مهارت به کارگیری فناوری

چون دارایی ها در هر سال ۱۵۰ درصد سال قبل است بنابر این هر سال ۱/۵ برابر خواهد شد: (اعداد بر حسب میلیارد ریال می باشند)

الف) پایان سال اول: $۱/۵ \times ۱ = ۱/۵$ پایان سال دوم: $۱/۵ \times ۱/۵ = ۱/۵^{۲}$

پایان سال سوم: $۱/۵ \times ۱/۵^{۲} = ۱/۵^{۳}$ پایان سال چهارم: $۱/۵ \times ۱/۵^{۳} = ۱/۵^{۴}$

با توجه به رابطهٔ بین عدد سال و توان ۱/۵ می توان میزان دارایی در پایان سال دهم را به صورت زیر نوشت: پایان سال دهم: $۱/۵^{۱۰}$

ب) با تعمیم رابطهٔ قسمت قبل به سال n اُم داریم : پایان سال n ام: $۱/۵^{n}$

پ) پایان ۴ ماه (معادل $\frac{۴}{۱۲}$ یا $\frac{۱}{۳}$ سال) $۱/۵^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱/۵} \approx ۱/۱۴$

پایان ۶ ماه (معادل $\frac{۶}{۱۲}$ یا $\frac{۱}{۲}$ سال) $۱/۵^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۱/۵} \approx ۱/۲۲$

بخش دوم: ریشه‌گیری عددهای حقیقی

اهداف بخش

- درک مفهوم ریشه‌های دوم و سوم اعداد و تعمیم آن به ریشهٔ k ام.
- نمایش ریشه‌های دوم و سوم اعداد به‌صورت رادیکالی تعمیم تعریف $a^{\frac{1}{2}}$ به $a^{\frac{1}{n}}$ و نمایش رادیکالی آن.
- محاسبهٔ ریشه‌های k ام یک عدد طبیعی به کمک تجزیه به عوامل اول.
- تعمیم خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح به توان‌رسانی با اعداد گویا.

پیش نیازهای بخش:

- آشنایی با ریشهٔ دوم و سوم اعداد.
- آشنایی با توان‌رسانی به توان اعداد صحیح.

واژه‌های کلیدی:

ریشه‌گیری، توان‌رسانی با اعداد گویا.

نگاه کلی به بخش :

در این بخش ابتدا با طرح یک سؤال لزوم معرفی ریشه‌های چهارم و بالاتر یک عدد مطرح می‌شود سپس با معرفی ریشهٔ k ام، تعداد ریشه‌های زوج و فرد یک عدد بررسی می‌شود. نمایش رادیکالی ریشهٔ یک عدد و اینکه چه اعدادی درچه حالت‌هایی دارای ریشه نیستند نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در ادامه معرفی توان $\frac{1}{n}$ یک عدد به عنوان تعمیم توان‌های $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ انجام می‌شود. همچنین با بیان خواص توان‌رسانی به توان اعداد گویا (که تعمیمی از خواص توان‌رسانی با اعداد صحیح می‌باشد) توان $\frac{1}{n}$ اعداد به توان‌های گویا تعمیم داده می‌شود. در دو قسمت از این بخش کار با ابزار پیشنهاد شده است که برای ارتقای مهارت استفاده از ماشین حساب برای پیدا کردن تقریب اعشاری اعدادِ با

توان گویا و اعدادِ رادیکالی می‌باشد. با پیدا کردن تقریب اعشاری اعدادی که به صورت‌های مختلف نمایش داده شده‌اند تساوی آنها به کمک ماشین حساب نیز بررسی می‌شود.

ورود به مطلب :

برای ورود به مطلب معلم می‌تواند با ارائه سؤالی نظیر سؤال ابتدای بخش انگیزه لازم برای جلب توجه دانش‌آموزان را به وجود آورد. سپس از دانش‌آموزان بخواهید تا فعالیت ۳ را انجام دهند.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۳

در هر قسمت، ابتدا جمله‌ها را کامل کنید، سپس به سؤال پاسخ دهید.

۱) یک ریشهٔ دوم عدد ۲۵ عدد ... است؛ زیرا (...^{2} = ۲۵)

۲) ریشه‌های دوم یک عدد را تعریف کنید.

۳) یک ریشهٔ سوم عدد ۸ عدد ... است؛ زیرا (...^{3} = ۸)

۴) ریشه‌های سوم یک عدد را تعریف کنید.

۵) برای ریشه‌های چهارم یک عدد، چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ چهارم مثالی بزنید.

۶) برای ریشه‌های پنجم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟ از ریشهٔ پنجم مثالی بزنید.

۷) برای ریشه‌های kاُم یک عدد چه تعریفی را پیشنهاد می‌کنید؟

۸) اگر $a = b^k$ آنگاه ...... یک ریشهٔ ...... عدد ...... است.

اهداف موضوعی:

■ آشنایی با ریشهٔ k ام یک عدد.

مهارت‌ها و فرایندها:

تعمیم تعریف ریشهٔ دوم و سوم به ریشهٔ چهارم و پنجم و k ام اعداد، بازیابی اطلاعات، فرضیه‌سازی

۱ قسمت اول : ۵ یا ۵- قسمت دوم : $(-۵)^۲ = ۵^۲ = ۲۵$

۲ عدد b ریشهٔ دوم عدد a است هرگاه : $b^۲ = a$

۳ قسمت اول : ۲ قسمت دوم : $۲^۳ = ۸$

۴ عدد b ریشهٔ سوم عدد a است هرگاه : $b^۳ = a$

۵ عدد b ریشهٔ چهارم عدد a است هرگاه : $b^۴ = a$ مثال از ریشهٔ چهارم: عدد ۳ ریشه چهارم ۸۱ است زیرا $۳^۴ = ۸۱$

۶ عدد b ریشهٔ پنجم عدد a است هرگاه: $b^۵ = a$ مثال از ریشهٔ پنجم : عدد ۲ ریشهٔ پنجم ۳۲ است زیرا $۲^۵ = ۳۲$

۷ عدد b ریشهٔ kام عدد a است هرگاه : $b^k = a$

۸ عدد b یک ریشهٔ k ام عدد a است هرگاه $b^k = a$

کار در کلاس ۲

۱) به جای نقطه‌چین‌ها، عددهای مناسب قرار دهید.

الف) از آنجا که $۳^۵ = ۲۴۳$ ، عدد ...... یک ریشهٔ پنجم عدد ...... است.

ب) با توجه به تساوی، $(-۵)^۶ =$ عدد ...... یک ریشهٔ ششم عدد ...... است.

پ) تساوی $\frac{۱}{۸} = \left(\frac{۱}{۲}\right)$ نشان می‌دهد که عدد $\frac{۱}{۲}$ یک ریشهٔ ...... عدد ...... است.

۲) یک ریشهٔ چهارم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۶۲۵ ب) $\frac{۱}{۸۱}$ ج) ۰/۰۰۰۱

۳) یک ریشهٔ پنجم از اعداد زیر را بنویسید.

الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۳۲}$ ج) ۳×۸۱

۴) برای پیدا کردن ریشه‌های چهارم و پنجم یک عدد، چه پیشنهادی دارید؟

اهداف:

- کسب مهارت یافتن ریشه‌های چهارم و پنجم، فرضیه‌سازی

الف) قسمت اول : ۳ قسمت دوم : ۲۴۳.

ب) قسمت اول : ۱۵۶۲۵ قسمت دوم : ۵ قسمت سوم : ۱۵۶۲۵

ج) تساوی $\frac{۱}{۸} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۳$ نشان می‌دهد عدد $\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ سوم عدد $\frac{۱}{۸}$ است.

۲ـ الف) ۵ یا ۵- ب) $\frac{۱}{۳}$ یا $-\frac{۱}{۳}$ ج) ۰/۱ یا ۰/۱-

۳ـ الف) ۱ ب) $-\frac{۱}{۲}$ ج) ۳

دبیران می‌توانند با ذکر مثال‌های بیشتر از اعداد اعشاری، کسری، صحیح یا اعداد توان‌دار درک بهتری از توان‌های کسری در هنرجویان به وجود آورند. البته لازم به ذکر است که عدد داده شده باید توان چهارم یا پنجمِ یک عدد آشنا باشد تا محاسبهٔ مقدار آن بدون استفاده از ماشین حساب امکان‌پذیر باشد.

۴ـ آنها را به عوامل اول تجزیه کرده و به صورت حاصل ضرب توان‌های اعداد اول می‌نویسیم. سپس با توجه به توان‌های آنها و تعریف ریشه، ریشهٔ چهارم و پنجم را به‌دست می‌آوریم. (نمونهٔ این روش با توجه به توانایی تجزیهٔ هنرجویان در این پایه و بر پایهٔ اطلاعات قبلی آنها، در قالب فعالیت و سؤال در کتاب کار آمده است.)

فعالیت آموزشی

فعالیت ۴

۱) جدول زیر را کامل کنید.

عدد	-۳	-۱	$-\frac{۴}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	۱	۲	...	...
توان چهارم		...	$\frac{۱۶}{۸۱}$	...	...	...	...	...	...

۲) آیا در سطر دوم جدول، عدد منفی دیده می‌شود؟ چرا ؟

۳) توان چهارم اعداد قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۴) آیا یک عدد منفی می‌تواند ریشهٔ چهارم داشته باشد؟ چرا؟

۵) با استفاده از جدول، ریشه‌های چهارم اعداد ۱ و $\frac{۱۶}{۸۱}$ را بنویسید.

۶) با توجه به پاسخ‌های به دست آمده در مورد تعداد ریشه‌های چهارم عدد مثبت a چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ این ریشه‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۷) آیا این نتیجه در مورد ریشه‌های زوج دیگر نیز درست است؟ با مثال نشان دهید.

اهداف موضوعی :

- تعیین تعداد ریشه‌های زوج یک عدد مثبت.
- درک عدم وجود ریشهٔ زوجِ اعداد منفی.

مهارت‌ها و فرایندها:

- الگویابی، تعمیم دادن، استدلال کردن، مقایسه کردن

۱ جدول کامل شده :

عدد	...	...	۲	۱	$\frac{۲}{۳}$	۰	$-\frac{۲}{۳}$	۱-	۲-
توان چهارم	...	...	۱۶	۱	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۰	$\frac{۱۶}{۸۱}$	۱	۱۶

۲ خیر زیرا هر عددی (مثبت یا منفی) اگر به توان یک عدد زوج برسد علامت آن همواره مثبت است.

۳ با هم مساویند.

۴ خیر زیرا توان چهارم هیچ عددی منفی نیست.

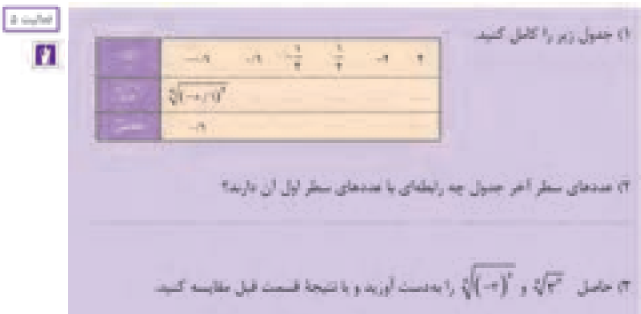
۵ ریشه‌های چهارم ۱ عدد ۱ و ۱- است و ریشه‌های چهارم عدد $\frac{۱۶}{۸۱}$ اعداد $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ هستند.

۶ عدد مثبتِ a دوریشهٔ چهارم دارد که قرینه هستند.

۷ بله مثلاً عدد ۶۴ دو ریشهٔ ششم دارد که عبارت‌اند از ۲ و ۲- زیرا ۶۴ $=۲^۶=(-۲)^۶$

دبیران در صورت نیاز می‌توانند در قسمت ۷ با انتخاب اعداد اعشاری یا اعداد بیشتر زمینه مساعدتری را برای رسیدن به نتیجهٔ فعالیت توسط هنرجو فراهم کنند.

فعالیت آموزشی



هدف موضوعی:

■ پیدا کردن ریشهٔ ششم یک عدد

مهارت‌ها و فرایندها:

■ الگویابی، مقایسه کردن

۱

a	$-۰/۱$	$۰/۱$	$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	-۲	۲
$\sqrt{\ }$	$\sqrt[۴]{(-۰/۱)^۴}$	$\sqrt[۴]{۰/۱^۴}$	$\sqrt[۴]{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۴}$	$\sqrt[۴]{\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۴}$	$\sqrt[۴]{(-۲)^۴}$	$\sqrt[۴]{۲^۴}$
حاصل	$۰/۱$	$۰/۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۲	۲

۲ اعداد سطر آخر قدر مطلق اعداد سطر اول هستند.

۳ $\sqrt[۶]{۳^۶}=\sqrt[۶]{۷۲۹}=۳$ و $\sqrt[۶]{(-۳)^۶}=\sqrt[۶]{۷۲۹}=۳$ در این حالت نیز حاصل عدد مثبت ۳ است.

در کار کردن با قدر مطلق بدفهمی‌هایی وجود دارد که برخی از آنها به شکل زیر است: برای محاسبهٔ درست |a| به هنرجویان متذکر شوید که با توجه به علامت a حاصل |a| را بنویسند. یعنی برای آنها یاد آوری کنید که |a| در صورت مثبت بودن a با خود a برابر است و |a| در صورت منفی بودن a با a - برابر است. اغلب، وقتی از پارامتری داخل علامت قدر مطلق استفاده می‌کنیم هنرجویان مقدار آن پارامتر را مثبت در نظر می‌گیرند. مثلاً در پرسش زیر که از برخی دانش‌آموزان پرسیده شده است:

آیا ممکن است که |a|=-a

دانش‌آموزانی بوده‌اند که جواب منفی داده‌اند و این ناشی از تصور اشتباهی است که علامت a را مثبت فرض می‌کنند. توصیه می‌شود برای محاسبهٔ حاصل قدر مطلق مخصوصاً وقتی عبارات متعددی (که شامل رادیکال یا کسر و یا ... است) داخل علامت قدر مطلق می‌باشد علامت عبارت داخل قدر مطلق را به‌دست آورند (اگر شامل عبارت رادیکالی یا کسری هستند آنها را با تقریب اعشاری مناسب تقریب بزنند) و سپس با استفاده از تعریف قدر مطلق، حاصل را به‌دست آورند. مثلاً برای حذف علامت قدر مطلق در عبارت : $\left|\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right|$ اگر هنرجو بداند $\sqrt{۳}$ از $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر است متوجه می‌شود علامت $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ منفی است بنابراین حاصل قدر مطلق به صورت زیر است.

$$\left|\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\right|=-(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})=(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

در غیر این صورت با ملاحظه مقدار تقریبی $\sqrt{۲} \approx ۱/۴۱$ و $\sqrt{۳} \approx ۱/۷۳$ ملاحظه می‌کند:

$$\sqrt{۲} - \sqrt{۳} \approx ۱/۴۱ - ۱/۷۳ = -۰/۳۲$$

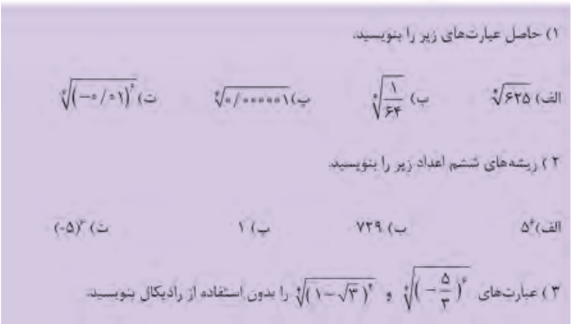
یعنی حاصل منفی است و سپس از تعریف استفاده می‌کند.

گاهی هنرجویان درساده کردن عباراتی به صورت $\sqrt[۲]{a^۲}$ دچار اشتباه می‌شوند. به سؤال زیر، که در یک آزمون برای تحقیق در مورد بدفهمی‌های قدر مطلق مطرح شده است، دقت کنید :

ساده شدهٔ عبارت $\sqrt{(-۸)^۲}$ کدام است ؟

الف) ۸ ب) ۸- ج) ۸- و ۸ د) ۴ هـ) ۴ و ۴-

این سؤال برای دو سری از دانش‌آموزانی که مباحث مقدماتی حساب دیفرانسیل و انتگرال به آنها تدریس می‌شده داده شده است، پاسخ صحیح به این سؤال از ۴۵/۵۱ درصد تا ۵۷/۳۵ درصد بوده است. یکی از دلایل این بدفهمی‌تصور یکی بودن این سؤال با جواب‌های معادلهٔ $x^۲ = a^۲$ است که این جواب‌ها $x=\pm a$ می‌باشد.


۱) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{۶۲۵}$ ب) $\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}}$ پ) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۶]{(-۰/۰۱)^۶}$

۲) ریشه‌های ششم اعداد زیر را بنویسید.

الف) $۵^۶$ ب) ۷۲۹ پ) ۱ ت) $(-۵)^۶$

۳) عبارت‌های $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۶}$ و $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^۴}$ را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

اهداف :

- کسب مهارت در محاسبهٔ ریشهٔ زوج برخی اعداد.

۱ الف) $\sqrt[۴]{۶۲۵} = ۵$ ب) $\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}} = \frac{۱}{۲}$

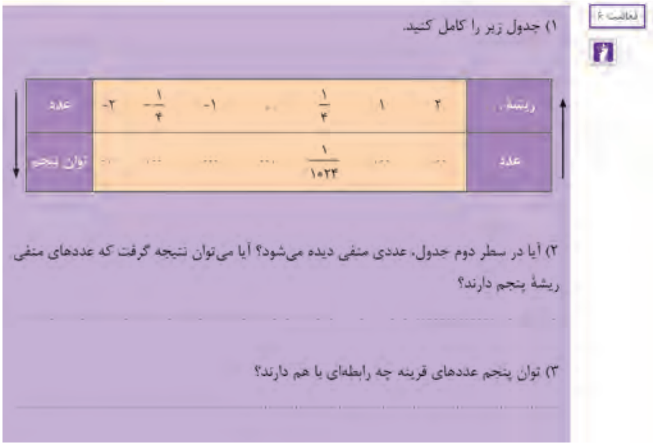
پ) $\sqrt[۶]{۰/۰۰۰۰۰۱} = ۰/۱$ ت) $\sqrt[۶]{(-۰/۰۱)^۶} = ۰/۱$

۲ الف) $\sqrt[۶]{۵^۶} = ۵$ ب) $\sqrt[۶]{۷۲۹} = ۳$

پ) $\sqrt[۶]{۱} = ۱$ ت) $\sqrt[۶]{(-۵)^۶} = ۵$

۳ $\sqrt[۶]{\left(-\frac{۵}{۳}\right)^۶} = \left|-\frac{۵}{۳}\right| = \frac{۵}{۳}$ و $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^۴} = \left|۱-\sqrt{۳}\right| = \sqrt{۳} - ۱$

فعالیت آموزشی


فعالیت ۶

۱) جدول زیر را کامل کنید.

ریشهٔ پنجم	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۴}$	-۲	عدد
عدد	...	...	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	...	...	...	...	توان پنجم

۲) آیا در سطر دوم جدول، عددی منفی دیده می‌شود؟ آیا می‌توان نتیجه گرفت که عددهای منفی ریشهٔ پنجم دارند؟

۳) توان پنجم عددهای قرینه چه رابطه‌ای با هم دارند؟

اهداف موضوعی:

- درک وجود ریشهٔ فرد برای هر عدد حقیقی (با علامت مثبت یا منفی)
- تعیین تعداد ریشه‌های فرد یک عدد.

مهارت‌ها و فرایندها:

استدلال کردن، الگویابی

۱ جدول زیر را کامل کنید.

ریشه پنجم	۲	۱	$\frac{۱}{۴}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۴}$	-۲	عدد
عدد	۳۲	۱	$\frac{۱}{۱۰۲۴}$	۰	-۱	$-\frac{۱}{۱۰۲۴}$	-۳۲	توان پنجم

۲ **قسمت اول :** بله در سطر دوم جدول عدد منفی وجود دارد.

قسمت دوم : بله می‌توان نتیجه گرفت اعداد منفی ریشهٔ پنجم دارند.

۳ توان پنجم دو عدد قرینه، قرینهٔ هم هستند.

کار در کلاس

حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید.

الف) $\sqrt[۵]{۱۱^۵}$ ب) $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۴۳}}$ پ) $\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۱}$ ت) $\sqrt[۷]{(-۳)^۷}$

اهداف:

■ تمرین در محاسبهٔ ریشهٔ پنجم برخی اعداد.

الف) $\sqrt[۵]{۱۱^۵}=۱۱$ ب) $\sqrt[۵]{\frac{۱}{۲۴۳}}=\frac{۱}{۳}$

پ) $\sqrt[۵]{-۰/۰۰۰۰۱}=-۰/۱$ ت) $\sqrt[۷]{(-۳)^۷}=-۳$

کار در کلاس

ابتدا نمایش رادیکالی عددهای زیر را نوشته و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) $(۳^۸)^{\frac{۱}{۸}}$ ب) $(\frac{۱}{۳۲})^{\frac{۱}{۵}}$ پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}$

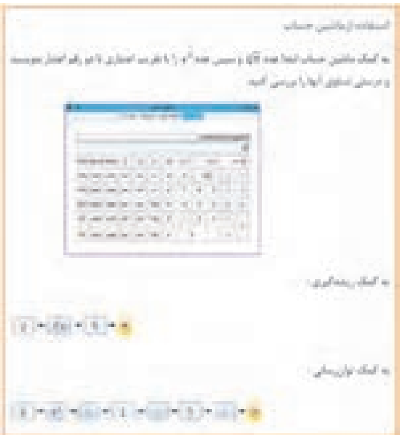
اهداف :

■ تمرین در نمایش رادیکالی اعداد با توان گویا

الف) $(۳^۸)^{\frac{۱}{۸}}=\sqrt[۸]{۳^۸}=۳$ ب) $\left(\frac{۱}{۳۲}\right)^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{\frac{۱}{۳۲}}=\frac{۱}{۲}$

پ) $(۰/۰۰۰۰۱)^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۰/۰۰۰۰۱}=۰/۱$ ت) $۲۴۳^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۲۴۳}=۳$

استفاده از ابزار :



اهداف :

■ آشنایی با تقریب اعشاری ریشه‌های اعداد.

■ آشنایی با تقریب اعشاری توانِ $\frac{۱}{n}$ اعداد.

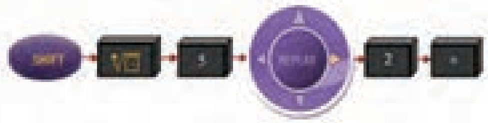
■ تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای یافتن تقریب اعشاریِ ریشه‌های یک عدد .

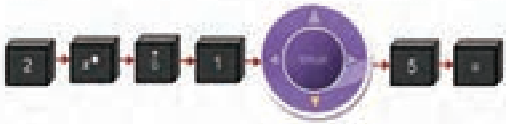
■ تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای یافتن تقریب اعشاریِ توان $\frac{۱}{n}$ اعداد.

■ بررسی تساویِ نمایش‌های یک عدد (نمایش به صورتِ یک عدد باتوان $\frac{۱}{n}$ و نمایش رادیکالی آن عدد) با استفاده از تقریب اعشاری آنها

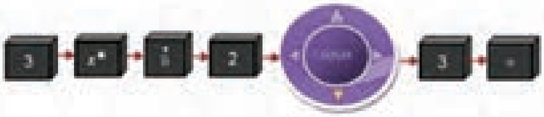
■ تقویت مهارت گرد کردن تقریب اعشاری اعداد.

$\sqrt[۵]{۲}\approx ۱/۱۵$ و $۲^{\frac{۱}{۵}}\approx ۱/۱۵$





می‌توانید نمایش اعشاری اعداد دیگر را نیز از هنرجویان بخواهید و برای تأکید بیشتر بر تقریب اعشاری می‌توان از هنرجویان خواست به جای نمایش تا دو رقم اعشار نمایش تا سه یا چهار رقم اعشار را نیز نوشته و مقایسه را با تقریب‌های دقیق‌تر انجام دهند.



یکی از اشتباهات رایج که معمولاً به دلیل عدم توجه به ترتیب عملیات اتفاق می‌افتد، یکسان گرفتن دو عبارت $(a^m)^n$ و $(a^n)^m$ می‌باشد در حالی که مثلاً به ازای $n=\frac{۱}{۳}$ و $m=۲$ و $a=-۱$ عبارت اول تعریف می‌شود ولی عبارت دوم تعریف نمی‌شود. می‌توان برای آگاهی هنرجویان فعالیتی را طراحی کرد تا با تأکید بر ترتیب عملیات، مشخص کرد که به ازای چه مقادیری از n و m و a این دو عبارت معنادار هستند و به ازای چه مقادیری معنادار نیستند.

تا اینجا توان‌رسانی به توان اعداد گویای به صورت $\frac{۱}{n}$ آموزش داده شده است. برای تکمیل بحث و رسیدن به توان‌رسانی به توان یک عدد گویای دلخواه، برای پرهیز از مشکل شدن درس، از ارائهٔ تعریف رسمی‌خودداری شده است و به جای آن با ارائه مثال این تعریف انجام شده است. از طریق این مثال‌ها هنرجو می‌تواند توان‌رسانی‌های دیگر را هم انجام دهد.

در صورت آمادگی کلاس و مشکل نشدن مبحث، شما می‌توانید تعریف رسمی توان‌رسانی به توان یک عدد گویای دلخواه را پس از ارائه مثال‌ها، به صورت زیر برای هنرجویان بیان کنید.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (۰ < a)$$

استفاده از ابزار :

اهداف :

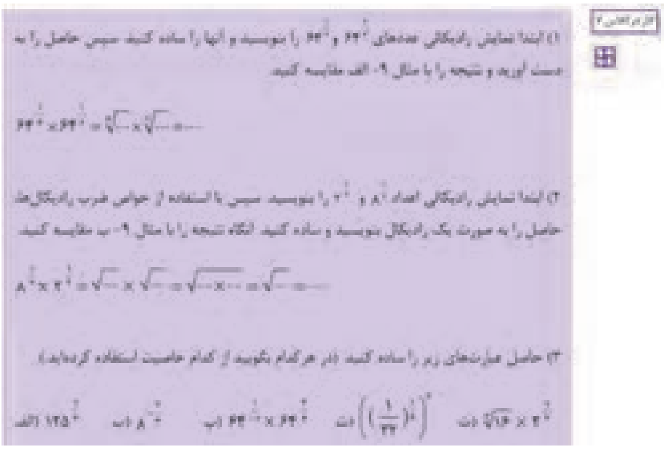
- آشنایی با تقریب اعشاری توان‌های گویای اعداد.
- بررسی درستی خواص توان‌رسانی اعداد با استفاده از تقریب اعشاری آنها
- تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ تقریب اعشاری توان‌های گویای اعداد.

$$۳^{\frac{۲}{۳}} \approx ۲/۰۸ \quad \text{و} \quad \left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} \approx ۲/۰۸$$

درصورتی که کلاس آمادگی لازم را دارد معلم می‌تواند برای محاسبهٔ $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲}$ ابتدا $۳^{\frac{۱}{۳}}$ را محاسبه کرده سپس نمایش اعشاری آن را تا دو رقم اعشار در نظر

گرفته و به توان ۲ برساند و در مورد اختلاف دو مقدار (که ناشی از گرد کردن $۳^{\frac{۱}{۳}}$ می‌باشد) با هنرجویان بحث کند: (یعنی : $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} \approx (۱/۴۴)^{۲} = ۲/۰۷۳۶$)

همچنین می‌توان از هنرجویان خواست برای محاسبهٔ $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲}$ ابتدا نمایش اعشاری $۳^{\frac{۱}{۳}}$ را تا سه یا چهار رقم اعشار بنویسند و سپس حاصل را به توان ۲ برسانند و نتیجهٔ حاصل را با نتیجهٔ قبلی مقایسه نمایند تا به نقش دقت تقریب اعداد اولیه، دردقت نتایج پی‌ببرند. (یعنی : $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} \approx (۱/۴۴۲۲)^{۲} = ۲/۰۷۹۹$)


۱) ابتدا نمایش رادیکالی عددهای $۶۴^{\frac{۱}{۳}}$ و $۶۴^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید و آنها را ساده کنید سپس حاصل را به دست آورید و نتیجه را با مثال ۹- الف مقایسه کنید.

$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{...} \times \sqrt{...} = ...$

۲) ابتدا نمایش رادیکالی اعداد $۸^{\frac{۱}{۲}}$ و $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را بنویسید. سپس با استفاده از خواص ضرب رادیکال‌ها حاصل را به صورت یک رادیکال بنویسید و ساده کنید. آنگاه نتیجه را با مثال ۹- ب مقایسه کنید.

$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{...} \times \sqrt{...} = \sqrt{... \times ...} = \sqrt{...} = ...$

۳) حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید. (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید.)

اهداف :

- بررسی خواص توان‌رسانی با اعداد گویا با استفاده از خواص رادیکال‌ها
- پرورش مهارت مقایسه کردن، استدلال کردن

۱ همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹ـ الف مساوی است.

$$۶۴^{\frac{۱}{۳}} \times ۶۴^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt[۳]{۶۴} \times \sqrt[۲]{۶۴} = ۴ \times ۸ = ۳۲$$

۲ همان‌طور که دیده می‌شود نتیجه با مثال ۹ـ ب یکسان است.

$$۸^{\frac{۱}{۲}} \times ۲^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۸} \times \sqrt{۲} = \sqrt{۸ \times ۲} = \sqrt{۱۶} = ۴$$

۳ حاصل عبارات زیر را ساده کنید. (در هر کدام بگویید از کدام خاصیت استفاده کرده‌اید)

الف) $125^{\frac{2}{3}}=\left(125^{\frac{1}{3}}\right)^{2}=(\sqrt[3]{125})^{2}=5^{2}=25$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $\left(a^{m}\right)^{n}=a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ب) $8^{-\frac{2}{3}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}=(\sqrt[3]{8})^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{2^{2}}=\frac{1}{4}$

خواص توان‌رسانی (خاصیت a^{mn} $\left(a^{m}\right)$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

پ) $64^{\frac{1}{12}}\times 64^{\frac{3}{4}}=64^{\frac{1}{12}+\frac{3}{4}}=64^{\frac{10}{12}}=64^{\frac{5}{6}}=\left(64^{\frac{1}{6}}\right)^{5}=(\sqrt[6]{64})^{5}=2^{5}=32$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $a^{m}\times a^{n}=a^{m+n}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ت) $\left(\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^{3}=\left(\sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right)^{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{8}$

خواص توان‌رسانی (خاصیت $(a^{m})^{n}=a^{mn}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد

ث) $\sqrt[3]{16}\times 2^{\frac{2}{3}}=16^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=(4^{2})^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{2}=(\sqrt[3]{8})^{2}=2^{2}=4$

برای رسیدن به پاسخ از نمایش رادیکالی یک عدد به نمایش آن عدد به‌صورت یک عدد توان‌دار، خواص توان‌رسانی (خاصیت $(a^{m})^{n}=a^{mn}$ و $a^{m}\times b^{m}=(ab)^{m}$)، نمایش رادیکالی یک عدد با توان گویا ، محاسبهٔ ریشهٔ یک عدد ، استفاده شده است.

کار در کلاس

در جدول زیر، برخی از توان‌های عدد $\frac{۱}{۴}$ را می‌بینید:

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$	۱۶			۲	۱			

۱) جدول را کامل کنید.

۲) مقادیر x را روی محور x ها و مقادیر $\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$ را روی محور y ها مشخص کرده و این نقاط را به یکدیگر متصل کنید.

۳) آیا نمودار $\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$، یک خط راست است؟

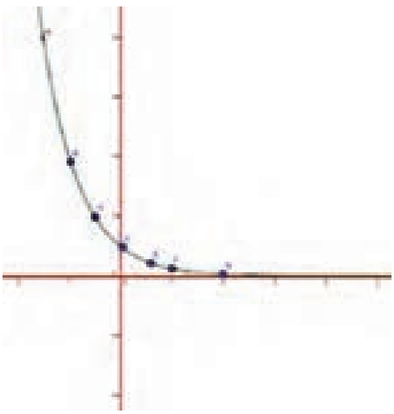
اهداف:

- آشنایی با نمودار رابطه $y=a^x$ در حالت $a=\frac{۱}{۴}$
- پرورش مهارت‌های حل مسئله، ارائه بازنمایی‌های چندگانه، استدلال کردن.

۱ جدول تکمیل شده:

x	-۲	$-\frac{۳}{۲}$	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۳}{۲}$
$\left(\frac{۱}{۴}\right)^x$	۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$

۲



۳ خیر نمودار مربوط به یک خط راست نیست.

می‌توان از هنرجویان خواست با مقایسهٔ نمودار ارائه شده در متن درس و نمودار مربوط به سؤال کار در کلاس، تفاوت‌ها و شباهت‌های این دو نمودار را بیان کنند

و تفسیر کنند. (افزایشی یا کاهشی بودن، علامتِ اعداد سطر دوم این دو جدول که همگی مثبت هستند و ..) در مثال قبل از کار در کلاس نیز با استفاده از نمودار می‌توان تعبیری از توان‌های حقیقی یک عدد (مثلاً $2^{\sqrt{2}}$) را به هنرجویان قوی‌تر ارائه داد.

مسئله‌ها

۱) به جای نقطه‌چین‌ها عبارت مناسب قرار دهید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ یافتن ریشه‌های یک عدد

الف) $7^2 = 49 \Rightarrow (49)^{\cdots} = \sqrt[\cdots]{\cdots} =$

$$7^2 = 49 \Rightarrow (49)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{49} = 7$$

ب) $17^3 = 4913 \Rightarrow 4913^{\cdots} = \sqrt[\cdots]{\cdots} =$

$$17^3 = 4913 \Rightarrow (4913)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4913} = 17$$

پ) $13^4 = 28561 \Rightarrow 28561^{\cdots} = \sqrt[\cdots]{\cdots} =$

$$13^4 = 28561 \Rightarrow (28561)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{28561} = 13$$

ت) $15^{-4} = (\frac{1}{15})^4 = \frac{1}{50625} \Rightarrow (\frac{1}{50625})^{\cdots} = \sqrt[\cdots]{\cdots} = \cdots$

$$15^{-4} = \frac{1}{50625} \Rightarrow (\frac{1}{50625})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{50625}} = \frac{1}{15}$$

ث) $(\frac{1}{3})^9 = \cdots \Rightarrow (\cdots)^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{\cdots} = \cdots$

$$(\frac{1}{3})^9 = \frac{1}{19683} \Rightarrow (\frac{1}{19683})^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{\frac{1}{19683}} = \frac{1}{3}$$

ج) $5^6 = 15625 \Rightarrow (15625)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{15625} = \cdots$

$$5^6 = 15625 \Rightarrow (15625)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{15625} = 5$$

ج) $(۰/۳)^۵ = ۰/۰۰۲۴۳ \Rightarrow (۰/۰۰۲۴۳)^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{\ldots} = \ldots$

$$(۰/۳)^۵ = ۰/۰۰۲۴۳ \Rightarrow (۰/۰۰۲۴۳)^{\frac{۱}{۵}} = \sqrt[۵]{۰/۰۰۲۴۳} = ۰/۳$$

۴- در هر کدام از قسمت‌های زیر، مسئله‌ای در زمینهٔ بیان شده طرح کنید که جواب آن، عدد توان‌دار داده شده باشد:

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}$ (تکثیر باکتری‌ها)

ب) $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$ (زمینهٔ هندسی)

مهارت‌ها و فرایندها :

■ طرح مسئلهٔ نیمه ساختار یافته

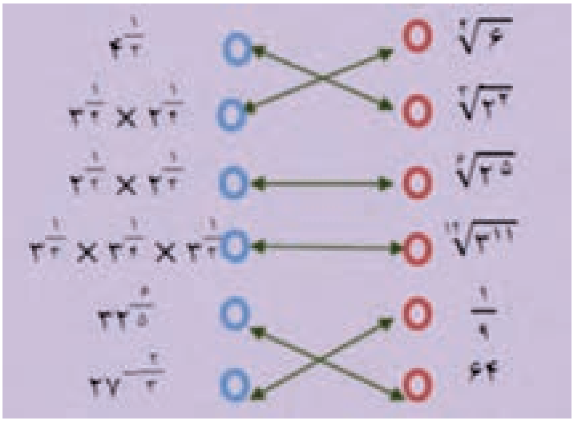
الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}$: (تکثیر باکتری‌ها) باکتری‌هایی را در نظر می‌گیریم که وزن آنها پس از یک ساعت ۴ برابر می‌شوند اگر با ۱ گرم باکتری شروع کنیم وزن آنها پس از ۱۵ دقیقه $۴^{\frac{۱}{۴}}$ خواهد بود.

ب) $۲۷^{\frac{۱}{۳}}$**:** (زمینه هندسی) طول ضلع مکعبی با حجم ۲۷ واحد مکعب.

۳- هریک از عددها را به عدد مساوی آن در ستون مقابل وصل کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ مقایسه کردن

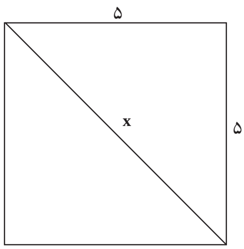


مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

۴) پاسخ هر یک از پرسش‌های زیر را به دو صورت عدد توان‌دار و عبارت رادیکالی نمایش دهید و در صورت امکان، ساده کنید.

الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟



الف) قطر یک مربع به طول ضلع ۵ چقدر است؟

$$x^{۲} = ۵^{۲} + ۵^{۲} = ۵۰ \Rightarrow x = ۵۰^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۵۰} \approx ۷/۰۷$$

ب) وزن ۱ گرم از نوعی باکتری در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. وزن باکتری پس از ۲۰ دقیقه چقدر می‌شود؟

ب) وزن ۱ گرم از یک نوع باکتری که در هر ساعت ۸ برابر می‌شود. پس از گذشت ۲۰ دقیقه :

$$۸^{\frac{۲۰}{۶۰}} = ۸^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$$

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب چقدر است؟

پ) طول ضلع مکعبی با حجم ۱۰۰۰ متر مکعب : $۱۰۰۰^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۱۰۰۰} = ۱۰$

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۶ و ۹ سانتی‌متر چقدر است؟

ت) طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع زاویهٔ قائمه ۶ و ۹ برابر است با:

$a^{۲} = ۶^{۲} + ۹^{۲} \Rightarrow a^{۲} = ۱۱۷ \quad \Rightarrow \quad a = \pm\sqrt{۱۱۷} \approx \pm ۱۰/۸$ که فقط ۱۰/۸ قابل قبول است.

۵) ابتدا نمایش رادیکالی عبارت‌های زیر را بنویسید و سپس در صورت امکان آنها را ساده کنید.

الف) ریشه‌های دوم عدد ۱۲۱

ب) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲

پ) ریشهٔ پنجم عدد ۳۲-

ت) ریشه‌های ششم عدد $\frac{۱}{۶۴}$

ث) توان $\frac{۱}{۳}$ عدد ۲۷

ج) توان $\frac{۱}{۵}$ عدد ۳۲

مهارت‌ها و فرایندها :

■ محاسبهٔ توان‌های گویای یک عدد

الف) $\pm\sqrt{۱۲۱}=\pm ۱۱$

ب) $\sqrt[۵]{۳۲}=۲$

پ) $\sqrt[۵]{-۳۲}=-۲$

ت) $\pm\sqrt[۶]{\frac{۱}{۶۴}}=\pm\frac{۱}{۲}$

ث) $۲۷^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{۲۷}=۳$

ج) $۳۲^{\frac{۱}{۵}}=\sqrt[۵]{۳۲}=۲$

۶) حاصل هر کدام از عبارت‌های زیر را ابتدا به صورت یک عدد توان‌دار و سپس، به صورت عبارت رادیکالی بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}\times ۴^{\frac{۱}{۳}}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}}\times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}$

پ) $(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۴}}\times(\frac{۱}{۸})^{\frac{۱}{۱۲}}$

ت) $۵^{[illegible]}\times ۲۵^{[illegible]}$

ث) $(۳^{[illegible]})^{[illegible]}$

ج) $(۳۲^{[illegible]})^{[illegible]}$

مهارت‌ها و فرایندها :

■ ساده کردن توان‌های گویا

الف) $۴^{\frac{۱}{۴}}\times ۴^{\frac{۱}{۳}}=۴^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}}=۴^{\frac{۷}{۱۲}}=\sqrt[۱۲]{۴^{۷}}=\sqrt[۱۲]{۱۶۳۸۴}$

ب) $۶۴^{-\frac{۱}{۲}}\times ۶۴^{-\frac{۱}{۳}}=۶۴^{-\frac{۱}{۲}+(-\frac{۱}{۳})}=۶۴^{-\frac{۵}{۶}}=\frac{۱}{۶۴^{\frac{۵}{۶}}}=\frac{۱}{\left(۶۴^{\frac{۱}{۶}}\right)^{۵}}=\frac{۱}{(\sqrt[۶]{۶۴})^{۵}}=\frac{۱}{۲^{۵}}=\frac{۱}{۳۲}$

پ) $\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۴}}\times\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۱۲}}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲}}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۴}{۱۲}}=\left(\frac{۱}{۸}\right)^{\frac{۱}{۳}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}=\frac{۱}{۲}$

ت) $۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۲۵^{\frac{۱}{۳}} = ۵^{\frac{۱}{۳}} \times (۵^{۲})^{\frac{۱}{۳}} = ۵^{\frac{۱}{۳}} \times ۵^{\frac{۲}{۳}} = ۵^{\frac{۳}{۳}} = ۵$

ث) $\left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} = ۳^{\frac{۲}{۳}} = \left(۳^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۲} = (\sqrt[۳]{۳})^{۲} = \sqrt[۳]{۹}$

ج) $(۲۷^{-۲})^{\frac{۱}{۶}} = ۲۷^{-\frac{۲}{۶}} = ۲۷^{-\frac{۱}{۳}} = \frac{۱}{۲۷^{\frac{۱}{۳}}} = \frac{۱}{\sqrt[۳]{۲۷}} = \frac{۱}{۳}$

۷) عبارت‌های زیر را بدون استفاده از رادیکال بنویسید.

الف) $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^{۴}}$ ب) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۳}}$

مهارت ها و فرایندها :

■ ریشه‌گیری از عبارت توان‌دار

الف) $\sqrt[۴]{(۱-\sqrt{۳})^{۴}} = \left|۱-\sqrt{۳}\right| = \sqrt{۳}-۱$ ب) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})^{۳}} = \sqrt{۲}-\sqrt{۳}$

۸) با کامل کردن جدول زیر، نقاط آن را روی محورهای مختصات مشخص کنید و نقاط را به هم وصل کنید.

(برای محاسبهٔ توان های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

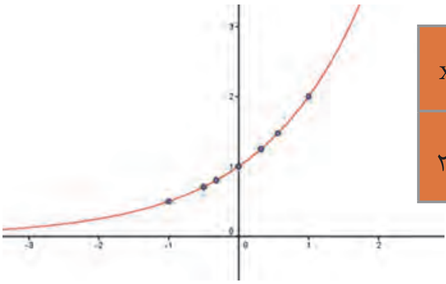
x	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱
۲^{x}	...	...	...	...	...	...	...

مهارت ها و فرایندها :

توان‌رسانی، کار با ماشین‌حساب

از هنرجویان بخواهید توان‌های اعداد دیگر را نیز رسم کرده و نمودارها را با نمودار ارائه شده در فصل، مقایسه کنند (مثلاً نمودار $\left(\frac{۱}{۲}\right)^{x}$)

(برای محاسبهٔ توان‌های گویا می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)



x	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	۱
۲^{x}	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{\sqrt{۲}}$	$\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$	۱	$\sqrt[۳]{۲}$	$\sqrt[۲]{۲}$	۲

در تعریف توان رسانی به توان اعداد گویا، ایده اصلی آن است که خواص اساسی توان رسانی که در زیر می‌آید برقرار بمانند.

$$a^{m+n}=a^m a^n \quad , \quad (a^m)^n=a^{mn} \quad , \quad (ab)^n=a^n b^n$$

مثلاً، اگر بخواهیم $a^{\frac{1}{n}}$ را تعریف کنیم، این عدد باید به گونه‌ای تعریف شود که داشته باشیم:

$$(a^{\frac{1}{n}})^n=a^{\frac{n}{n}}=a^1=a$$

این تساوی نشان می‌دهد که $a^{\frac{1}{n}}$ باید ریشهٔ nام a باشد. از آنجا که اعداد منفی ریشهٔ زوج ندارند ناچاریم که در حالت nهای زوج، a را مثبت در نظر بگیریم و طبق قرارداد آن ریشهٔ nام a که مثبت است را به عنوان $a^{\frac{1}{n}}$ تعریف می‌کنیم، یعنی $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$. در گسترش این تعریف به اعداد گویای دلخواه $\frac{m}{n}$ برای حفظ خواص اساسی توان رسانی $a^{\frac{m}{n}}$ را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{1}{n}\times m}=(a^{\frac{1}{n}})^m=(\sqrt[n]{a})^m.$$

از آنجا که یک عدد گویا را به شکل‌های مختلف می‌توان نوشت، باید ثابت شود در تعریف بالا نوع نوشتن عدد گویا تأثیری بر نتیجه ندارد. یعنی اگر داشته باشیم $\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ باید بتوانیم ثابت کنیم $(\sqrt[n]{a})^m=(\sqrt[n']{a})^{m'}$. در حالتی که a مثبت باشد اثبات این تساوی امکان‌پذیر است ولی در حالتی که a منفی باشد این تساوی ممکن است بی‌معنا شود زیرا ممکن است مجبور باشیم از یک عدد منفی ریشهٔ زوج بگیریم. مثلاً در توان رسانی عدد ۱- به توان $\frac{1}{3}$ داریم $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ ولی عبارت $(-1)^{\frac{1}{3}}=(-1)^{\frac{2}{6}}=(\sqrt[6]{-1})^2$ بی‌معناست.

برای آنکه بدون هیچ محدودیتی بتوانیم توان رسانی به توان اعداد گویا را انجام دهیم و از خواص اساسی توان رسانی استفاده کنیم، قرارداد جهانی بر این است که در توان رسانی به توان اعداد گویا پایه همواره مثبت است و توان رسانی اعداد منفی به توان اعداد گویا (غیر صحیح) تعریف نمی‌شود.

با این قرارداد، تعریف انجام شده مشکلی در برندارد و خواص اساسی توان رسانی به توان اعداد گویا برقرار خواهند بود، یعنی برای اعداد حقیقی مثبت a و b و اعداد

گویای r و s داریم:

$$a^{r\ s}=a^{r}a^{s} \quad , \quad (a^{r})^{s}=a^{rs} \quad , \quad (ab)^{r}=a^{r}b^{r}$$

مفهوم توان رسانی به توان اعداد حقیقی هم قابل تعریف است. از آنجا که شناخت ما از اعداد حقیقی از طریق تقریبات گویای این اعداد است، برای هر عدد حقیقی مانند c فرض کنید که $\{r_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا باشد که c را تقریب می‌زند، به عبارت دیگر این دنباله از اعداد گویا به c همگراست. فرض کنیدa عدد حقیقی مثبتی باشد، برای تعریف a^{c} مقادیر a^{r_n}ها را حساب می‌کنیم. ثابت می‌شود اعداد a^{r_n} عدد حقیقی خاصی را تقریب می‌زنند (یعنی به عدد حقیقی خاصی همگرا هستند)، آن عدد را طبق تعریف a^{c} می‌نامیم. مثلاً برای یافتن $۵^{\sqrt{۲}}$ ابتدا دنباله تقریبات اعشاری $\sqrt{۲}$ را به صورت $\{r_n\}$ در نظر می‌گیریم و مقادیر ۵^{r_n}را محاسبه می‌کنیم. این مقادیر با بزرگ شدن n به $۵^{\sqrt{۲}}$ نزدیک می‌شوند. برای n به اندازه کافی بزرگ ۵^{r_n} تقریبات اعشاری $۵^{\sqrt{۲}}$ را تا هر مقدار که خواسته باشیم نشان خواهد داد.

با این تعریف، خواص اساسی توان رسانی برای توان‌های اعداد حقیقی به همان شکل برقرار خواهند بود.