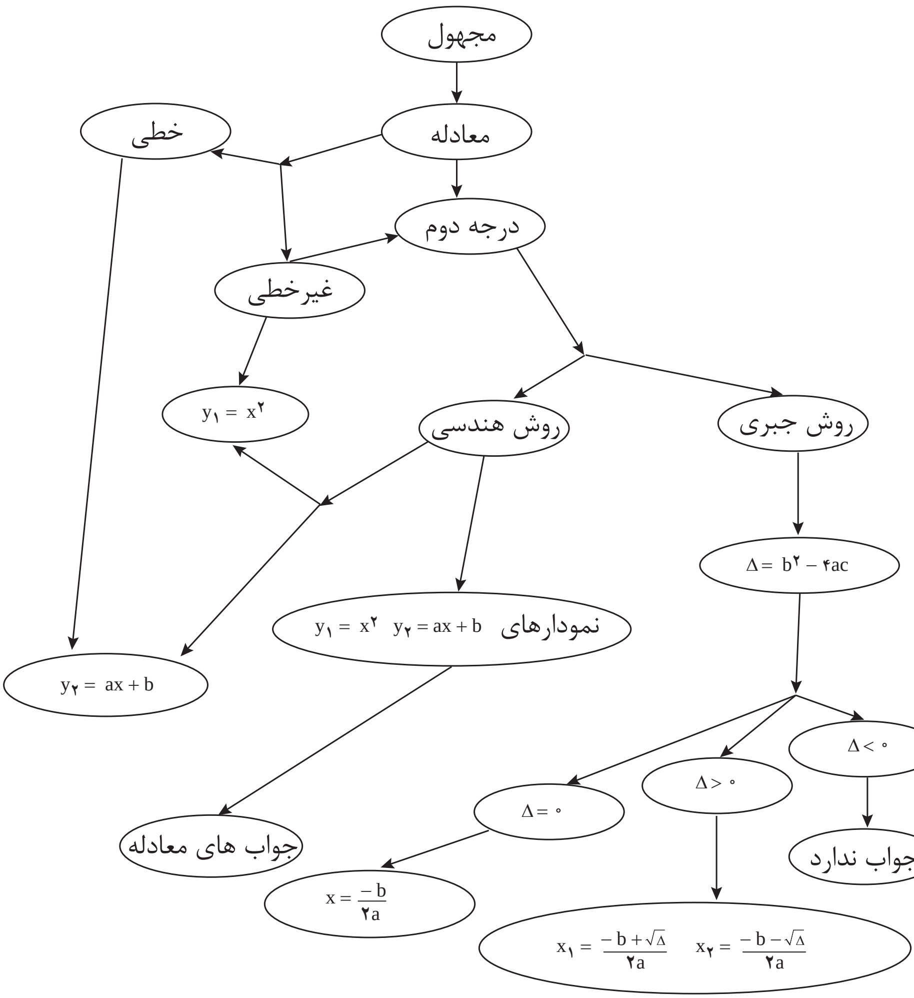
فصل چهارم

معادلهٔ درجهٔ دوم

طرح کلی مفاهیم فصل چهارم (نقشهٔ مفهومی)



	فرایند	توضیح فرایند	مثال
استانداردهای فرایندی	حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متن ورودی
		شناخت و به کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل کردن مسائل و یا انتخاب مناسب آنها	ـ روش حل هندسی و یافتن نقطهٔ تلاقی تقریبی ـ روش حل جبری (Δ) و یافتن جواب‌های معادله در صورت وجود
	ارتباط کلامی	سازماندهی تفکرات ریاضی خود و انتقال آن به دیگران	ـ بحث بین مادر زهرا و مشاور مالی او در رسیدن به معادلهٔ درجهٔ دوم
		استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ برای یافتن نقطهٔ برخورد دو منحنی مسائل فعالیت ۳ و کار در کلاس بعد از آن را به زبان ریاضی بنویسد و مفهوم نقطهٔ تلاقی را بیان کند.
	استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ بیان دلیل برای تشخیص معادلهٔ درجهٔ دوم ـ بیان دلیل برای تشخیص و شناسایی بین رابطه‌های خطی و غیرخطی ـ دلیل درستی یا نادرستی رابطه‌ها را در مسائل آخر فصل بیان کند. ـ بیان دلیل برای تشخیص جواب معادله از طریق هندسی ـ بیان دلیل برای تشخیص تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم
	پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری مفاهیم ریاضی در خارج از ریاضی	ـ مسئلهٔ کارگاه میز تحریر و مدل‌سازی ریاضی آن، و حل مسئله ـ مسئلهٔ کارگاه صنایع دستی و مدل‌سازی ریاضی آن، و حل مسئله
		تشخیص چگونگی ارتباطات بین مفاهیم ریاضی	ـ روش‌های حل معادلهٔ درجهٔ دوم به دو صورت هندسی وجبری ـ نقطه تلاقی دو منحنی و ارتباط آن با جواب معادلهٔ برخورد دو منحنی
	بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	حل معادلهٔ درجهٔ دوم به روش هندسی (مثال ۳)
	سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ توانایی مقایسهٔ جواب معادله $x^2 = ax + b$ و نقطهٔ تلاقی نمودارهای $y = ax + b$ و $y = x^2$ ـ یافتن اختلاف بین دو رابطهٔ خطی و غیرخطی

اهداف کلی فصل

- آشنایی با معادلهٔ درجهٔ دوم
- استفاده از معادلهٔ درجهٔ دوم برای مدل‌سازی پدیده‌ها
- آشنایی با رابطهٔ غیر خطی و تفاوت آن با رابطهٔ خطی
- درک مفهوم جواب یک معادله
- آشنایی با روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم و یافتن ریشه‌ها به‌صورت تقریبی در صورت وجود
- آشنایی با روش جبری حل معادلهٔ درجهٔ دوم

عملکرد مورد انتظار از هنرجویان:

هنرجویان باید قادر باشند:

- از معادله‌های درجهٔ دوم در حل مسائل زندگی روزمره استفاده کنند.
- توانایی رسم نمودار معادله‌های $y = x^2$ و $y = ax+b$ را داشته باشند.
- معادله‌های درجهٔ دوم را با روش‌های جبری و هندسی حل کنند.

پیش نیازها:

- آشنایی با معادلهٔ درجهٔ اول و عملیات جبری ساده روی آنها و حل آنها
- آشنایی با چندجمله‌ای‌ها و یافتن مقدار آنها به‌ازای مقدار عددی برای متغیر
- تعیین مختصات نقطهٔ مشخص شده در صفحهٔ مختصات و برعکس
- آشنایی با رسم رابطه‌های خطی

نگاه کلی به فصل :

معادله‌ها و حل آنها بخش مهمی از ریاضی را تشکیل می‌دهند. در مدل‌سازی پدیده‌های واقعی، همواره به معادله‌هایی برخورد می‌کنیم که معادله‌های درجهٔ دوم یکی از انواع سادهٔ آن است.

این فصل با طرح یک مسئله آغاز می‌شود تا معادله‌های درجهٔ دوم در یک زمینهٔ واقعی ساخته شوند. هدف بعدی، آشنایی با شیوه‌های حل معادله‌های درجه دوم است. برای بیان روش هندسی در حل معادله‌های درجهٔ دوم لازم است رابطه‌های غیرخطی را بشناسیم. به همین دلیل بخش بعدی دربارهٔ رابطه‌های غیرخطی است. شناخت رابطه‌های خطی و معادلهٔ درجهٔ اول در سال‌های قبل انجام شده است و

در این فصل با چند رابطه غیرخطی آشنا می‌شویم که نوع خاصی از آن، رابطه‌های درجهٔ دوم است.

روش هندسی حل معادله‌های درجهٔ دوم نیازمند درک مفهوم نقطهٔ تلاقی نمودار رابطه‌ها است. به همین دلیل، ابتدا نقاط تلاقی دو خط در یک مسئله واقعی بررسی شده و نقطهٔ تلاقی و مفهوم آن معرفی شده است. سپس روش‌های حل معادله‌های درجهٔ دوم و یافتن جواب‌های آن در صورت وجود مطرح می‌شود. در این فصل دو روش هندسی و جبری حل معادله‌های درجهٔ دوم ارائه می‌شوند.

بخش اول: معادله‌های درجهٔ دوم

اهداف بخش

- آشنایی بامعادله‌های درجهٔ دوم و تشخیص آن از بین چند معادله
- درک مفهوم جواب معادله‌های درجهٔ دوم
- استفاده از معادله‌های درجهٔ دوم در مدل‌سازی پدیده‌ها

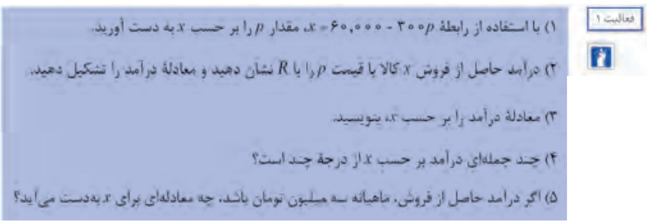
واژه های کلیدی:

معادلهٔ درجهٔ دوم، جواب معادله

نگاه کلی به بخش :

در این بخش با طرح یک وضعیت مسئله‌گونه در زندگی روزمره و سعی در حل آن به یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم. مهم‌ترین فعالیت آموزشی این بخش مدل‌سازی ریاضی برای رسیدن به معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد تا این معادله‌ها به طور طبیعی مطرح شوند. همچنین مفهوم جواب این معادله‌ها طرح می‌شوند زیرا جواب اصلی موقعیت‌های مسئله‌گونه در بین جواب‌های این معادله‌ها است.

فعالیت آموزشی



فعالیت ۱

۱) با استفاده از رابطهٔ $x = ۶۰,۰۰۰ - ۳۰۰p$، مقدار p را بر حسب x به دست آورید.

۲) درآمد حاصل از فروش x کالا با قیمت p را با R نشان دهید و معادلهٔ درآمد را تشکیل دهید.

۳) معادلهٔ درآمد را بر حسب x، بنویسید.

۴) چند جمله‌ای درآمد بر حسب x از درجهٔ چند است؟

۵) اگر درآمد حاصل از فروش، ماهیانه سه میلیون تومان باشد، چه معادله‌ای برای x به‌دست می‌آید؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با معادله‌های درجهٔ دوم

مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی وضعیت‌های واقعی با معادله، استدلال، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت تفکر، پیوندها و اتصال‌ها

۱ $p=\dfrac{۶۰۰۰۰-x}{۳۰۰}$

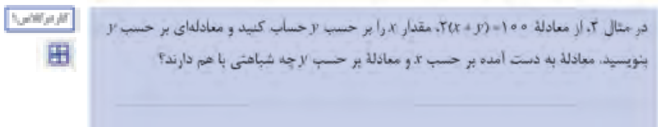
۲ $R = p.x$

۳ $R=(\dfrac{۶۰۰۰۰-x}{۳۰۰})x=\dfrac{۶۰۰۰۰x-x^۲}{۳۰۰}$

۴ از درجهٔ ۲ است.

۵ $\dfrac{۶۰۰۰۰x-x^۲}{۳۰۰}=۳۰۰۰۰۰۰\Rightarrow x^۲-۶۰۰۰۰x+۹۰۰۰۰۰۰۰۰=۰$

در ادامه تعریف معادله‌های درجهٔ دوم ارائه شده است و مثال‌هایی از آن در زمینهٔ ریاضی و زمینهٔ واقعی آمده است.


در مثال ۲، از معادلهٔ $۲(x+y)=۱۰۰$، مقدار x را بر حسب y حساب کنید و معادله‌ای بر حسب y بنویسید. معادلهٔ به دست آمده بر حسب x و معادلهٔ بر حسب y چه شباهتی با هم دارند؟

اهداف:

■ تقویت مهارت تشکیل معادلهٔ درجهٔ دوم، پرورش مهارت مقایسه کردن و مدل‌سازی قبل از انجام محاسبه، مناسب است کنجکاوی هنرجو دربارهٔ مثال قبل برانگیخته شود که اگر معادله را بر حسب متغیر دیگر می‌نوشتیم چه اتفاقی می‌افتاد. سپس محاسبه را انجام دهیم.

$$۲(x+y)=۱۰۰\Rightarrow x+y=۵۰\Rightarrow x=۵۰-y$$
$$xy=۶۰۰\Rightarrow(۵۰-y)y=۶۰۰\Rightarrow y^۲-۵۰y+۶۰۰=۰$$

متوجه می‌شویم که ضرایب عددی معادلهٔ درجهٔ دوم پدید آمده در مثال ۲ با کار در کلاس یکسان است و فقط نام متغیر عوض می‌شود. آیا می‌توانید دلیل این یکسانی دو معادله را توضیح دهید؟

بخش دوم: رابطه‌های غیرخطی

اهداف بخش

- آشنایی با رابطهٔ غیرخطی
- شناخت تفاوت بین رابطه‌های خطی و غیرخطی
- درک مفهوم نقطهٔ برخورد دو خط
- آشنایی با روش رسم نمودار رابطهٔ $y = x^۲$ از طریق جایگذاری عدد به جای متغیر آن (نقطه یابی)

واژه‌های کلیدی:

رابطهٔ غیرخطی، نقطهٔ برخورد دو خط

نگاه کلی به بخش :

ابتدا ویژگی اساسی رابطه‌های خطی مطرح می‌شود. سپس رابطه‌هایی آشنا در زمینهٔ زندگی روزمره مطرح می‌شوند که این ویژگی را ندارند و از این طریق رابطه‌های غیرخطی مطرح می‌شوند. سپس با انجام فعالیت‌هایی که طرح شده‌اند هنرجویان با رابطه‌های غیر خطی آشنایی بیشتری می‌یابند و نمودار این رابطه‌ها را نیز به دست می‌آورند. به طور خاص نمودار رابطه $y = x^۲$ به‌طور دقیق‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین در یک فعالیت مفهوم نقاط برخورد نمودار رابطه‌ها در این بخش آموزش داده می‌شود.

ورود به مطلب:

در فصل‌های قبل با رابطه‌های خطی برای مدل‌سازی کمیت‌های متناسب بسیار کار شده‌است. با داشتن چنین زمینه‌ای می‌توانید این سؤال را مطرح کنید که آیا همهٔ کمیت‌های مرتبط متناسب هستند؟ می‌توانید از رابطه‌هایی که برای هنرجویان آشنا هستند استفاده کنید. البته لازم است در ضمن طرح این سؤال یا پیشاپیش ویژگی اساسی رابطه‌های خطی را به دست آورید و این ویژگی را در مورد رابطه‌های آشنا بررسی کنید.

فعالیت آموزشی

فعالیت ۲

رابطهٔ طول ضلع یک مربع با محیط آن و رابطهٔ طول ضلع یک مربع با مساحت آن را در نظر بگیرید. طول ضلع مربع را با x، محیط آن را با P و مساحت آن را با S نشان دهید.

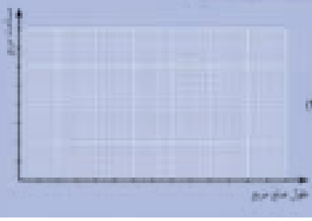
۱) رابطهٔ P و x و همچنین رابطهٔ S و x را با دو معادله بنویسید.

۲) جدول زیر را کامل کنید.

x (طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	...	...	...	...	...
S (مساحت مربع)	...	...	...	...	...

۳) نقاط به دست آمده در جدول را در دو دستگاه محورهای مختصات زیر نشان دهید.

شکل (۱)



شکل (۲)

۴) جدولی رسم کنید که میزان افزایش محیط و مساحت مربع را وقتی طول ضلع آن از ۱ به ۲، از ۲ به ۳ و از ۴ به ۵ افزایش می‌یابد، نشان دهد.

۵) آیا نسبت افزایش محیط مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۶) آیا نسبت افزایش مساحت مربع به افزایش طول ضلع آن، مقدار ثابتی است؟

۷) می‌خواهیم نقاط شکل (۱) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

۸) می‌خواهیم نقاط شکل (۲) را به هم وصل کنیم؛ آیا می‌توانیم با یک خط راست همهٔ این نقاط را به هم وصل کنیم؟ چرا؟

اهداف موضوعی:

- آشنایی با رابطه‌های غیرخطی، مقایسهٔ رابطهٔ خطی و غیرخطی

مهارت‌ها و فرایندها:

- مدل‌سازی جبری رابطه‌ها، بازنمایی‌های چندگانه (مقایسه‌کردن، تفکر بصری)

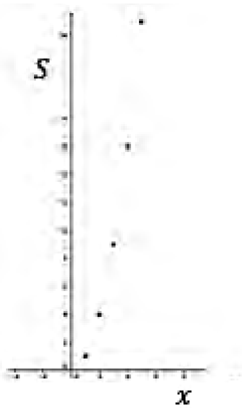
دراین فعالیت رابطهٔ بین محیط و مساحت مربع با طول ضلع مربع به صورت معادله، جدول و نمودار خواسته شده تا تفاوت بین رابطهٔ خطی و غیرخطی در این سه قالب دیده شود.

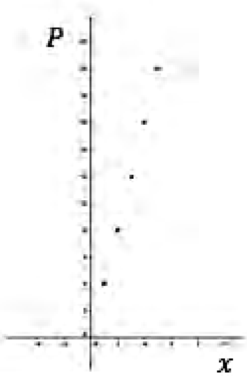
۱ محیط $P = ۴x$ و مساحت $S = x^۲$

۲

x(طول ضلع مربع)	۱	۲	۳	۴	۵
P (محیط مربع)	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰
S (مساحت مربع)	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

۳





۴

x(طول ضلع مربع)	از ۱ به ۲	از ۲ به ۳	از ۳ به ۴	از ۴ به ۵
میزان افزایش محیط	۴	۴	۴	۴
میزان افزایش مساحت	۳	۵	۷	۹

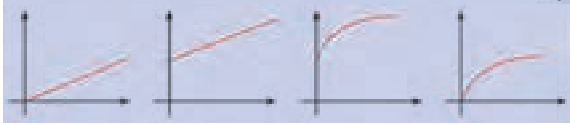
۵ بله، به ازای هر ۱ واحد افزایش طول ضلع ۴ واحد محیط اضافه می‌شود.

۶ خیر، به ازای ۱ واحد افزایش طول ضلع افزایش مساحت ثابت نیست و بستگی به مقدار طول ضلع دارد.

۷ بله، زیرا میزان افزایش محیط یکسان است.

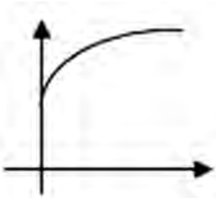
۸ خیر، زیرا میزان افزایش مساحت یکسان نیست.

در شکل زیر، محور افقی نشان‌دهندهٔ زمان بر حسب ماه و محور عمودی نشان‌دهندهٔ وزن یک انسان بر حسب کیلوگرم است. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار وزن یک انسان در طول زمان باشد؟



اهداف:

- آشنایی با رابطه‌های غیرخطی مختلف
- پرورش مهارت‌های حل مسئله و استدلال کردن، ارائهٔ بازنمایی‌های مختلف برای یک مفهوم، برقراری پیوندها و اتصال با زندگی روزمره تقویت، مهارت مقایسه کردن



رابطهٔ وزن انسان و زمان خطی نیست، پس دو نمودار سمت چپ جواب نیست. در هنگام تولد وزن انسان صفر نیست، پس نمودار سمت راست هم جواب نیست. نمودار روبه رو جواب مسئله است زیرا میزان تغییرات وزن انسان نسبت به تغییرات زمان ثابت نیست و در ابتدای تولد نیز انسان مقداری وزن دارد.

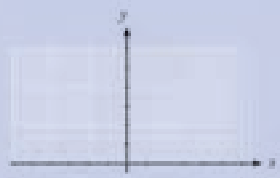
یک عدد حقیقی و مجذور آن را در نظر بگیرید. عدد حقیقی دلخواه را با x و مجذور آن (x^2) را با y نشان دهید.

۱) رابطهٔ بین x و y را با یک معادله نشان دهید.

۲) جدول زیر را کامل کنید (برای محاسبه می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y									۱/۴۴				

۳) نقاط جدول صفحهٔ قبل را روی محورهای مختصات زیر نشان دهید و نمودار رابطهٔ $y = x^2$ را رسم کنید.



اهداف:

- آشنایی با رابطهٔ غیرخطی خاص
- پرورش مهارت‌های حل مسئله و استدلال کردن، ارائه بازنمایی‌های مختلف برای یک مفهوم، برقراری پیوند و اتصال با زندگی روزمره، تقویت مهارت مقایسه

تعمیق درک روابط غیرخطی، تقویت مهارت رسم نمودار $y = x^۲$، تقویت مهارت کار با ماشین‌حساب

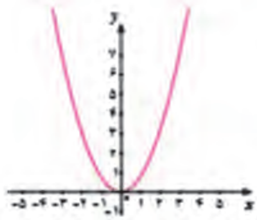
$y = x^۲$

۱

۲

x	-۲	-۱/۸	-۱/۶	-۱/۴	-۱/۲	-۱	۰	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸	۲
y	۴	۳/۲۴	۲/۵۶	۱/۹۶	۱/۴۴	۱	۰	۱	۱/۴۴	۱/۹۶	۲/۵۶	۳/۲۴	۴

۳ این نقاط را در محورهای مشخص شده نمایش دهید و آنها را به هم وصل کنید و شکل دقیق‌تر را با استفاده از جئوجبرا رسم کنید.



فعالیت آموزشی

هزینهٔ ثابت ماهیانهٔ یک کارگاه تولید سیم برق، ۱۲۰۰۰۰۰ تومان است. هزینهٔ تهیهٔ مواد اولیه برای هر متر سیم ۴۰ تومان و قیمت فروش هر متر سیم ۴۰۰ تومان است.

۱) با توجه به این اطلاعات، جدول را کامل کنید.

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)							
درآمد حاصل از فروش (تومان)							

۲) اگر x طول سیم‌های فروخته شده، C هزینهٔ تولید و R درآمد حاصل از فروش سیم در یک ماه باشند، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و هزینه و همچنین، رابطهٔ بین طول سیم‌های فروخته شده و درآمد حاصل از فروش را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر، اگر محور افقی، طول سیم‌های فروخته شده بر حسب متر و محور عمودی هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب تومان در یک ماه در نظر گرفته شود، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید. (هر واحد محور افقی را ۱۰۰ متر و هر واحد محور عمودی را ۱۰۰ هزار تومان در نظر بگیرید.)

۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط را بیابید.

۵) نقطهٔ تقاطع این دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۶) اگر مختصات نقطه‌ای در هر دو معادله صدق کند، این نقطه در کجا قرار دارد؟

اهداف موضوعی:

■ حل معادله، درک ویژگی نقطه برخورد دو منحنی در بافت مسئله

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، فرضیه‌سازی

۱

طول سیم‌های فروخته شده (متر)	۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰
هزینهٔ تولید (تومان)	۱۷۰۰۰۰	۱۷۶۰۰۰	۱۸۲۰۰۰	۱۸۸۰۰۰	۱۹۴۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۰۶۰۰۰
درآمد حاصل از فروش (تومان)	۰	۴۰۰۰۰	۸۰۰۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۶۰۰۰۰	۲۰۰۰۰۰	۲۴۰۰۰۰

۲ هزینهٔ تولید x کالا برای فروش $= C = y_1 = ۱۷۰۰۰۰ + ۶۰x$

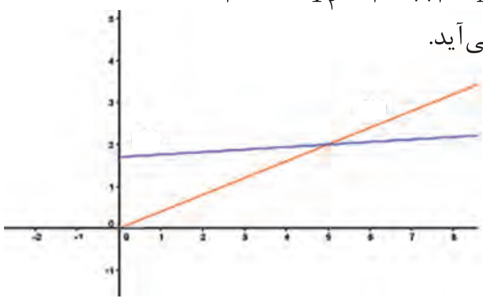
درآمد حاصل از فروش x کالا $= R = y_2 = ۴۰۰x$

۳ برای آنکه محورهای مختصات را با واحدهای جدید در نظر بگیریم، از آنجا که y بر حسب تومان است و می‌خواهیم Y جدید بر حسب ۱۰۰۰۰۰ تومان باشد، داریم: $y = ۱۰۰۰۰۰Y$ و چون x بر حسب متر است و می‌خواهیم x جدید برحسب ۱۰۰ متر باشد داریم $x = ۱۰۰X$. با جایگذاری در رابطه‌های به دست آمده نتیجه می‌شود:

$$۱۰۰۰۰۰Y_1 = ۱۷۰۰۰۰ + ۶۰ \times ۱۰۰X \Rightarrow Y_1 = ۱/۷ + ۰/۰۶X$$

$$۱۰۰۰۰۰Y_2 = ۴۰۰ \times ۱۰۰X \Rightarrow Y_2 = ۰/۴X$$

با رسم نمودار این دو خط، شکل زیر به دست می‌آید.



۴ با استفاده از شکل می‌توان دید، مختصات نقطهٔ برخورد $\begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$ است. در واحدهای اصلی، این مختصات به معنای ۵۰۰ کالا و قیمت ۲۰۰۰۰۰ تومان است.

۵ یعنی با تولید تعداد ۵۰۰ کالا هزینهٔ تولید و درآمد حاصل از فروش یکسان می‌شود ولی

بعد از آن چون نمودار درآمد بالای نمودار هزینه قرار می‌گیرد کارگاه شروع به سوددهی می‌کند یعنی حداقل ۵۰۰ کالا باید تولید شود تا ضرر نکند.

۶ چنین نقطه‌ای روی نمودار هر دو خط‌است، یعنی نقطهٔ برخورد این دو خط است.

با این فعالیت مفهوم نقطهٔ برخورد و اهمیت آن ذکر می‌شود.

نکته: دبیران محترم بیان کنند که نتیجهٔ این فعالیت دو طرفه است یعنی اگر مختصات نقطه‌ای در معادلهٔ هر دو خط صدق کند آن نقطه همان نقطهٔ برخورد یا نقطهٔ تلاقی نمودارهای دو خط است و بر عکس مختصات نقطهٔ برخورد دو خط، در معادلهٔ دو خط صدق می‌کند.

با قرارگرفتن هنرجو در یک وضعیت مسئله‌گونهٔ دیگر از زندگی روزمره، آنها را در درک مفهوم نقطهٔ برخورد ارزیابی می‌کنیم:

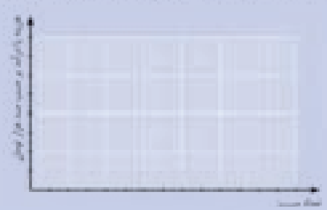
یک کارگاه تولید میز تحریر در هر ماه برای پرداخت مخارج دستگاه‌هایش، سیصدو بیست هزار تومان هزینه می‌کند. هزینهٔ مواد اولیه برای هر میز ۲۰,۰۰۰ تومان و قیمت فروش هر میز ۳۰,۰۰۰ تومان است.

۱) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
هزینهٔ تولید (بر حسب هزار تومان)					
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)					

۲) اگر در یک ماه، تعداد میزهای تولید شده x، هزینهٔ تولید C و درآمد حاصل از فروش R در نظر گرفته شود، رابطهٔ بین تعداد میزها و هزینهٔ تولید و همچنین رابطهٔ بین تعداد میزها و درآمد حاصل از فروش در یک ماه را بنویسید.

۳) در دستگاه مختصات زیر اگر محور افقی، تعداد میزهای تولید شده و محور عمودی، هزینهٔ تولید (برای رسم نمودار هزینه) و درآمد حاصل از فروش (برای رسم نمودار درآمد) بر حسب صد هزار تومان در یک ماه باشد، رابطه‌های بالا را در این دستگاه مختصات رسم کنید.



۴) مختصات نقطهٔ برخورد دو خط بالا را بیابید.

۵) نقطهٔ تقاطع دو خط چه چیزی را نشان می‌دهد؟

اهداف:

- کسب مهارت حل معادله، پرورش مهارت‌های
- حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، استدلال کردن، بازنمایی‌های چندگانه، مهارت‌های تفکر

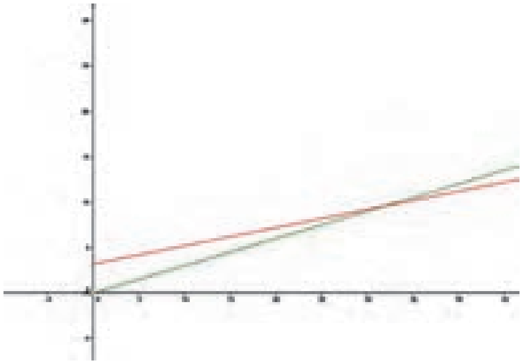
۱ قیمت‌ها و هزینه‌ها را بر حسب هزار تومان می‌نویسیم.

تعداد میزهای تولید شده در یک ماه	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
هزینهٔ تولید (بر حسب هزار تومان)	۳۲۰	۵۲۰	۷۲۰	۹۲۰	۱۱۲۰
درآمد حاصل از فروش (بر حسب هزار تومان)	۰	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰

۲ $C=۳۲۰۰۰۰+۲۰۰۰۰x \quad , \quad R=۳۰۰۰۰x$

۳ با تغییر واحد قیمت بر حسب صدهزارتومان رابطه‌های بالا به صورت زیر در می‌آیند.

$C=۳/۲+۰/۲x \quad , \quad R=۰/۳x$



البته در نمودار واقعی نقطه‌ها جدا از هم هستند.

۴ از روی شکل نقطه برخورد با تبدیل واحدها به ازای $\begin{bmatrix} ۳۲ \\ ۹۶۰۰۰۰ \end{bmatrix}$ می‌دهد که به معنی ۳۲ میز و ۹۶۰ هزار تومان است که با حل معادلهٔ زیر نیز همین جواب به‌دست می‌آید.

$۳۲۰+۲۰x=۳۰x \Rightarrow ۱۰x=۳۲۰$

$x=۳۲ \Rightarrow R=۳۰\times ۳۲=۹۶۰$

۵ یعنی با تولید ۳۲ میز هزینهٔ کارگاه و درآمد حاصل از فروش این تعداد میز یکسان است و بعد از آن سوددهی شروع می‌شود.

بخش سوم: روش های حل معادلهٔ درجهٔ دوم

اهداف بخش

- آشنایی با روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم
- آشنایی با روش جبری حل معادلهٔ درجهٔ دوم
- کسب مهارت در تعیین جواب‌های تقریبی معادله به روش هندسی
- کسب مهارت در تعیین تعداد و جواب های معادله به روش جبری
- تشخیص وجود یا عدم وجود جواب‌ها به روش هندسی
- توانایی به کارگیری فرمول‌های کلی برای تشخیص وجود و یافتن جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

واژه‌های کلیدی:

روش هندسی، روش جبری، عبارتΔ، جواب معادلهٔ درجهٔ دوم

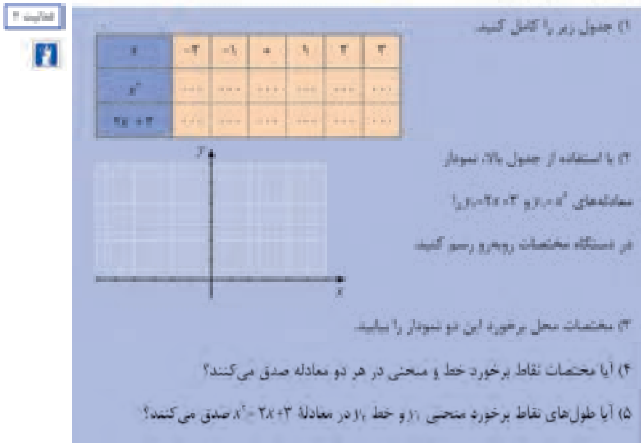
نگاه کلی به بخش:

در قسمت‌های قبل با معادله‌های درجهٔ دوم و نمودار رابطه‌های خطی و غیرخطی خاص آشنا شدیم. هدف اصلی این فصل حل این معادله‌ها و یافتن جواب‌های آنها است. به همین دلیل با هدایت هنرجویان در انجام فعالیت‌های ۴ و ۵ و ۶، روش‌های مختلف حل معادله درجه ۲ و یافتن جواب‌های آنها (در صورت وجود) آموزش داده می‌شوند. در روش هندسی حل معادله‌های درجهٔ دوم، مفهوم تلاقی نمودار رابطه‌ها نقش اصلی را بازی می‌کند. البته، روش هندسی برای حل معادله‌های پیچیده‌تر نیز قابل استفاده است ولی در این بخش فقط معادله‌های درجهٔ دوم مطرح می‌شود و هنرجویان فقط با حل این نوع معادله‌ها آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است که در روش هندسی معمولاً نمی‌توانیم جواب دقیق را بیابیم و فقط تقریبی از جواب به دست می‌آید.

ورود به مطلب:

مناسب است که یک معادلهٔ درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی مشخص را بنویسید و از هنرجویان بخواهید راه‌های پیشنهادی خود را برای حل آن بگویند. ممکن است کسی نتواند راه حل خاصی ارائه کند، می‌توانید هنرجویان را راهنمایی کنید و با تغییر شکل معادله به صورت تساوی $x^۲$ با معادلهٔ یک خط و تجربه‌ای که در برخورد خط‌ها به دست آمده است، هنرجویان را به سمت محل برخورد نمودار رابطهٔ $y=x^۲$ و نمودار یک خط برسانید. سپس می‌توانید از فعالیت طراحی شده در کتاب استفاده کنید.

فعالیت آموزشی



اهداف موضوعی:

- آشنایی با روش هندسی حل معادله‌های درجهٔ دوم

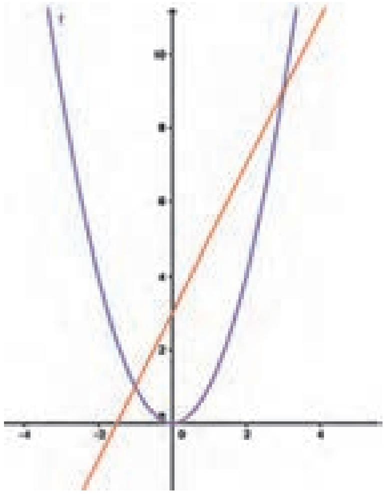
مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، استدلال کردن، پیوندها و اتصال‌ها، بازنمایی‌های چندگانه، ارزیابی کردن

۱

X	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳
$X^۲$	۴	۱	۰	۱	۴	۹
۲X+۳	-۱	۱	۳	۵	۷	۹

۲



۳ از روی شکل دو نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۳ \\ ۹ \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ نقاط برخورد این دو نمودار هستند.

۴ بله، زیرا $(۳)^۲ = ۲(۳) + ۳$ و $(-۱)^۲ = ۲(-۱) + ۳$

۵ بله
$$\begin{cases} (۳)^۲ = ۲(۳) + ۳ & \Rightarrow ۹ = ۹ \\ (-۱)^۲ = ۲(-۱) + ۳ & \Rightarrow ۱ = ۱ \end{cases}$$

در انتهای این فعالیت باید نتیجه‌گیری شود که جواب‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $x^۲ = ax + b$ را می‌توان با یافتن طول نقطه‌های برخورد نمودار خط $y = ax + b$ و منحنی $y = x^۲$ پیدا کرد.
این روش همان روش هندسی حل معادلهٔ درجهٔ دوم می‌باشد به این صورت که برای حل معادلهٔ $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ ابتدا جمله $x^۲$ را در یک طرف و بقیه را به طرف دیگر می بریم، سپس نمودار رابطه‌های $y_۱ = ۲x + ۳$ و $y_۲ = x^۲$ را رسم می‌کنیم.
برای یافتن جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ می‌توان طول نقطه‌های برخورد دو نمودار رابطه‌های بالا را در صورت امکان به‌دست آورد.
در سه مثال بعد انواع حالات ممکن معادله‌های درجهٔ دوم از نظر تعداد جواب‌ها بررسی شده‌اند.
تعداد جواب‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (با توجه به معادله)، یکی یا دو تا یا هیچ می‌باشد.

معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید (برای سهولت در رسم، از نرم افزار جئوجبرا کمک بگیرید).

الف) $x^2-2x+1=0$ ب) $x^2-1=0$ پ) $2x^2+x+1=0$

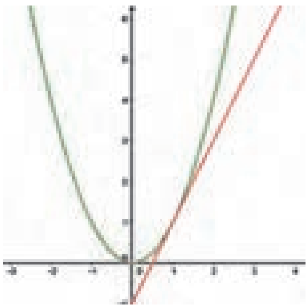
اهداف:

- کسب مهارت استفاده از روش هندسی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم و تشخیص تعداد جواب‌ها

شکل‌های مربوط به این سه معادله به صورت زیر است.

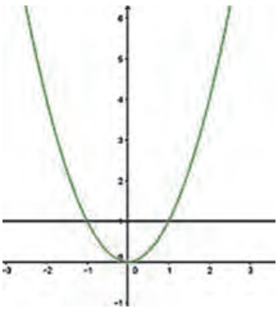
کسب مهارت به‌کارگیری نرم‌افزار، پرورش تفکر بصری

(الف)



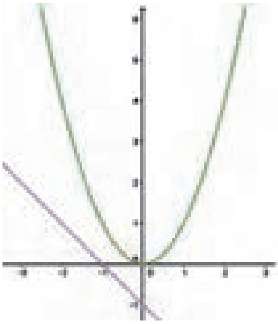
x=۱ جواب معادله است

(ب)



x=۱ و x=-۱ جواب‌های معادله هستند

(پ)



جواب ندارد

مسئله‌ها

برای تثبیت روش حل هندسی معادلهٔ درجهٔ دوم هنرجویان باید در دو سؤال ۱ و۲ یا با کمک جئوجبرا یا با جدول مقادیر و رسم نمودار آنها طول نقطه‌های برخورد دو منحنی را در صورت وجود به‌طور تقریبی تعیین نموده و آن را به عنوان جواب تقریبی معادلهٔ درجهٔ دوم مطرح نمایند.

۱) معادله‌های زیر را با روش هندسی حل کنید و جواب‌های آنها را به طور تقریبی به دست آورید.

الف) $2x^2-3x=5$

ب) $4x^2+8x=0$

پ) $x^2+x=1$

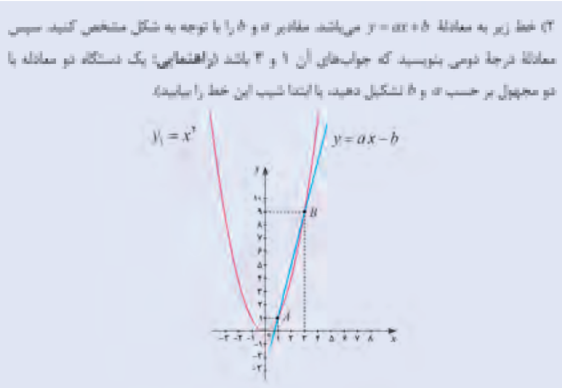
ت) $x^2+4x=-4$

مهارت‌ها و فرایندها:

- تفکر بصری، تخمین زدن،

هرکدام از حالت‌های بالا را باید به‌صورت $x^۲=ax+b$ در آورده و با رسم نمودارها، معادله را حل کنیم.

برای مثال حالت (الف) را به صورت $x^۲=\frac{۳}{۲}x+\frac{۵}{۲}$ و حالت (ب) را به صورت $x^۲=-۲x$ می‌نویسیم و مشابه کار در کلاس (۵) حل می‌کنیم.

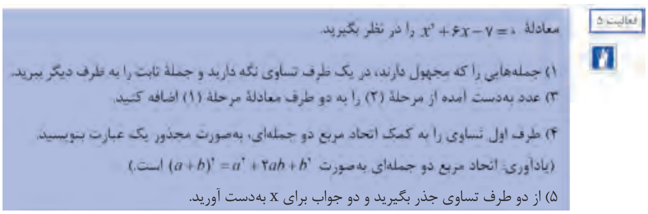

۲) خط زیر به معادلهٔ $y=ax+b$ می‌باشد. مقادیر a و b را با توجه به شکل مشخص کنید. سپس معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن ۱ و ۳ باشند (راهنمایی: یک دستگاه دو معادله با دو مجهول بر حسب a و b تشکیل دهید یا ابتدا شیب این خط را بیابید).

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها، تفکر بصری

در این مسئله می‌خواهیم ضرایب a و b را در معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲=ax+b$ طوری بیابیم که جواب‌های آن، طول نقطه‌های داده شده روی نمودار است. در این حالت معادله خط $y=ax+b$ را باید به صورتی به دست آوریم که نمودار $y=x^۲$ را در نقطه‌هایی به طول‌های ۱ و۳ قطع کند. مقادیر a و b را یافته سپس معادله $x^۲=ax+b$ را می‌سازیم. این معادله همان معادلهٔ درجهٔ دوم موردنظر می‌باشد. برای یافتن a و b باید دو نقطهٔ $\begin{bmatrix}۱\\۱\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}۳\\۹\end{bmatrix}$ روی این خط باشند، بنابراین داریم $۱=a+b$ و $۹=۳a+b$. با حل این دستگاه نتیجه می‌شود $a=۴$ و $b=-۳$.

فعالیت آموزشی


فعالیت ۵

معادلهٔ $x^۲+۶x-۷=۰$ را در نظر بگیرید.

۱) جمله‌هایی را که مجهول دارند، در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.
۳) عدد به‌دست آمده از مرحلهٔ (۲) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۱) اضافه کنید.

۴) طرف اول تساوی را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، به‌صورت مجذور یک عبارت بنویسید.
(یادآوری: اتحاد مربع دو جمله‌ای به‌صورت $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ است.)

۵) از دو طرف تساوی جذر بگیرید و دو جواب برای X به‌دست آورید.

اهداف موضوعی:

- حل یک معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت جبری با هدف آماده‌سازی برای تعمیم این روش در حالت کلی

مهارت‌ها و فرایندها:

- حل مسئله، اکتشاف هدایت شده (دنبال کردن دستورالعمل‌ها)

۱ $x^{۲}+۶x=۷$

۲ $\frac{۶}{۲}=۳ \Rightarrow ۳^{۲}=۹$

۳ $x^{۲}+۶x+۹=۷+۹ \Rightarrow x^{۲}+۶x+۹=۱۶$

۴ $(x+۳)^{۲}=۱۶$

۵ $|x+۳|=۴ \Rightarrow x+۳=۴$ یا $x+۳=-۴ \Rightarrow x=۱$ یا $x=-۷$

این فعالیت زمینه ساز یافتن فرمول کلی برای حل معادله‌های درجهٔ دوم به‌صورت جبری را فراهم می‌سازد.

معادلهٔ $x^{۲}-۳x+۲=۰$ را مانند فعالیت ۵ حل کنید.

اهداف:

تقویت مهارت دنبال کردن دستورالعمل‌ها به منظور درک رویه‌ها

$$x^{۲}-۳x+۲=۰$$

$$x^{۲}-۳x=-۲ \xrightarrow{\left(\frac{-۳}{۲}\right)^{۲}=\frac{۹}{۴}} x^{۲}-۳x+\frac{۹}{۴}=\frac{۹}{۴}-۲ \Rightarrow \left(x-\frac{۳}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

$$\to \left|x-\frac{۳}{۲}\right|=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{۲} \text{ یا } x-\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=۱ \text{ یا } x=۲$$

تذکر: می‌توانید قبل از اینکه فعالیت زیر را انجام دهید از هنرجویان سؤال کنید آیا همیشه می‌توان از این راه به جواب رسید؟ آیا معادله همیشه جواب دارد؟ آیا روشی برای یافتن وجود و تعداد جواب‌ها بدون رسم و روش هندسی وجود دارد؟

فعالیت آموزشی

معادلهٔ درجهٔ دوم دلخواه $ax^2+bx+c=0$ را در نظر بگیرید که در آن $a\neq 0$.

۱) طرفین معادلهٔ بالا را بر عدد a تقسیم کنید و معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ضریب x^2 در آن برابر ۱ باشد.

۲) جمله‌های دارای x را در یک طرف تساوی نگه دارید و جملهٔ ثابت را به طرف دیگر ببرید.

۳) در معادلهٔ بالا، نصف ضریب x را به‌دست آورید و آن را به توان ۲ برسانید.

۴) عدد به دست آمده از مرحلهٔ (۳) را به دو طرف معادلهٔ مرحلهٔ (۲) اضافه کنید.

۵) به کمک تساوی‌های بالا، جاهای خالی را پر کنید:

$$(x+\frac{b}{\quad})^2=\frac{\quad-4ac}{\quad}$$

۶) تساوی بالا در چه شرایطی امکان‌پذیر است؟ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ در چه شرایطی جواب دارد؟

۷) نشان دهید در صورت مثبت بودن b^2-4ac جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ برابر جواب‌های دو معادلهٔ زیر است.

$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad , \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

اهداف موضوعی:

■ یافتن فرمول کلی روش حل معادلهٔ درجهٔ دوم، تشخیص وجود جواب و تعداد جواب‌ها

مهارت‌ها و فرایندها :

■ حل مسئله، استدلال، اکتشاف هدایت شده

۱ $$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

۲ $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

۳ $$\frac{\frac{b}{a}}{\frac{2}{1}}=\frac{b}{2a} \Rightarrow \left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}$$

۴ $$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

۵ $$(x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

۶ چون سمت چپ این رابطه به توان دو است پس سمت راست باید عددی غیر منفی باشد.

یعنی باید $\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}\geq 0$ و چون مخرج عددی همواره مثبت است پس $b^{2}-4ac\geq 0$ این معادله در صورتی جواب دارد که $b^{2}-4ac\geq 0$

بند (۷) حال اگر $b^{2}-4ac\geq 0$ می‌توان از طرفین رابطه به دست آمده در بند (۵) جذر گرفت؛ خواهیم داشت :

$$\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\sqrt{\frac{b^{2}-4ac}{4a^{2}}}\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

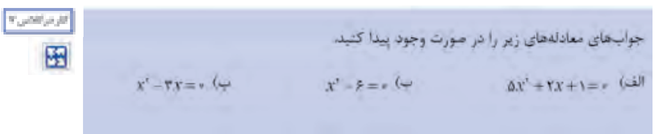
$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=+\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a} \text{ یا } x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

و از آنجا خواهیم داشت :

$$x=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}=\frac{-b+\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

$$\text{یا } x=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{b^{2}-4ac}}{2a}$$

به کمک فعالیت ۶ روش جبری یا فرمول کلی برای یافتن جواب های هر معادلهٔ درجهٔ دوم، در صورت وجود، بیان می شود. در این فعالیت از $\Delta=b^{2}-4ac$ برای بررسی وجود جواب و تعداد جواب‌ها استفاده می‌شود.



اهداف:

■ کسب مهارت استفاده از فرمول‌های محاسبه جواب معادله درجه دوم

حل قسمت الف) $5x^{2}+2x+1=0$

معادله جواب ندارد $\Leftarrow$ $\Delta=b^{2}-4ac=(2)^{2}-4(5)(1)=-16<0$

قسمت ب) $\Rightarrow x^{2}-6=0$

$\Delta=b^{2}-4ac=(0)^{2}-4(1)(-6)=24>0$

$$\rightarrow x_{1}=\frac{-(0)-\sqrt{24}}{2}=-\sqrt{6} \text{ و } x_{2}=\frac{-(0)+\sqrt{24}}{2}=\sqrt{6}$$

قسمت پ)

$$x^{۲}-۳x=۰$$

$$\Delta=b^{۲}-۴ac=(-۳)^{۲}-۴(۱)(۰)=۹>۰\Rightarrow$$

$$x_{۱}=\frac{-(-۳)+\sqrt{۹}}{۲}=۳ \text{ و } x_{۲}=\frac{-(-۳)-\sqrt{۹}}{۲}=۰$$

مسئله‌ها

۱) جواب‌های معادله‌های زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $۲x^{۲}+۵x=۰$

ب) $۳x^{۲}+۱۳x+۳=۰$

پ) $\sqrt{۲}x(x+\sqrt{۵})=\sqrt{۸}$

ت) $x^{۲}+x+۲=۰$

ث) $(۲x-۱)^{۲}=۵$

ج) $(x+۲)^{۲}=-۴$

مهارت‌ها و فرایندها:

- استفاده از روش جبری برای حل معادله

توصیهٔ آموزشی:

بهتر است هنرجویان قوی‌تر معادله‌ها را با استفاده از هر دو روش حل کنند.
در این قسمت شش معادلهٔ درجهٔ دوم داده شده که باید حل شوند همه را می‌توان به دو روش هندسی و جبری حل نمود هدف آموزشی این سؤال حل معادله‌های درجهٔ دوم دلخواه می‌باشد.

الف) حل به روش جبری (جواب‌ها $x=۰$ و $x=\frac{-۵}{۲}$)

ب) حل به روش جبری (جواب‌ها $x_{۱}=\frac{-۱۳+\sqrt{۱۳۳}}{۶}$ و $x_{۲}=\frac{-۱۳-\sqrt{۱۳۳}}{۶}$)

پ) می‌توان طرفین را بر $\sqrt{۲}$ تقسیم نمود $\sqrt{۲}x(x+\sqrt{۵})=\sqrt{۸}$

$$x(x+\sqrt{۵})=۲\Rightarrow x^{۲}+\sqrt{۵}x-۲=۰ \text{ و } \Delta=(\sqrt{۵})^{۲}-۴(۱)(۲)=۵+۸=۱۳$$

$$x_{۲}=\frac{-\sqrt{۵}-\sqrt{۱۳}}{۲} \text{ و } x_{۱}=\frac{-\sqrt{۵}+\sqrt{۱۳}}{۲}$$

هدف آموزشی این سؤال دیدن معادلهٔ درجهٔ دوم به شکلی دیگر و تشخیص همه ضرایب که بر $\sqrt{۲}$ بخش‌پذیرند و ساده‌نمودن ضرایب جهت محاسبات ساده‌تر و نهایتاً حل است.

ت) با یافتن $\Delta=-7$ و توجه به اینکه Δ منفی است معادله جواب ندارد.

ث) **روش اول :** سمت چپ را به توان ۲ می رسانیم

$$4x^2+1-4x=5 \Rightarrow 4x^2-4x-4=0 \xrightarrow{\text{همه جملات را بر ۴ تقسیم می‌کنیم}} x^2-x-1=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5 \rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

روش دوم : از طرفین جذر می‌گیریم

$$|2x-1|=\sqrt{5} \Rightarrow 2x-1=\sqrt{5} \quad \text{یا} \quad 2x-1=-\sqrt{5} \Rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

ج) مثال چالش برانگیز: (این نوع مسائل ذهن هنرجو را پویا می‌کند)

چون سمت چپ معادله غیرمنفی و سمت راست معادله منفی است معادله جواب ندارد.

۲) اگر یکی از جواب‌های معادلهٔ $5x^2+13x+c=0$ برابر (۳-) باشد، جواب دیگر این معادله را بیابید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

می دانیم جواب معادله، تساوی رابطه را برقرار می‌کند پس:

$$5(-3)^2+13(-3)+c=0 \Rightarrow 45-39+c=0 \Rightarrow c=-6$$

پس معادلهٔ درجهٔ دوم به صورت $5x^2+13x-6=0$ است.

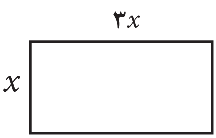
$$\Delta=(13)^2-4(5)(-6)=289 \Rightarrow x_1=\frac{-13+\sqrt{289}}{10} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-13-\sqrt{289}}{10}$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{-13+17}{10}=\frac{2}{5} \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-13-17}{10}=-3$$

۳) اگر طول مستطیلی سه برابر عرض آن باشد و مساحت آن ۳۰۰ مترمربع باشد، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟ این مسئله چند جواب دارد؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال ها



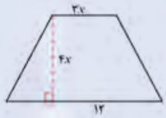
$$\text{مساحت}=x\times 3x=3x^2=300 \Rightarrow 3x^2-300=0 \Rightarrow$$

$$x^2-100=0 \Rightarrow \Delta=(0)^2-4(1)(-100)=400>0$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{\sqrt{400}}{2}=10 \quad \text{و} \quad x_2=\frac{-\sqrt{400}}{2}=-10$$

جواب منفی قابل قبول نیست و مسئله فقط یک جواب دارد. مستطیل با عرض ۱۰ و طول ۳۰ جواب است.

۴) مساحت ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مقابل، ۱۰۸ سانتی‌متر مربع است. مقدار x را پیدا کنید.



مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

ابتدا با توجه به فرمول مساحت یک ذوزنقه داریم

$$\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(3x+12)(4x)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(3x+12)(4x)}{2} = 108 \Rightarrow 12x^2 + 48x - 216 = 0 \Rightarrow$$

همه جمله‌ها را بر ۱۲ تقسیم می‌کنیم

$$x^2 + 4x - 18 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 + 72 = 88$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-4+\sqrt{88}}{2} \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-4-\sqrt{88}}{2}$$

$x_2 = -2-\sqrt{22}$ و $x_1 = -2+\sqrt{22}$ فقط جواب x_1 قابل قبول است که مثبت است زیرا طول نمی‌تواند منفی شود.

۵) حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی، ۱۳۲ می‌باشد. این دو عدد را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

عدد کوچک‌تر را با x نشان می‌دهیم. عدد متوالی بعد از آن $x+1$ خواهد بود. بنابرفرض مسئله

$$x(x+1) = 132 \Rightarrow x^2 + x - 132 = 0 \xrightarrow{\Delta=(1)^2-4(1)(-132)=529}$$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{529}}{2} = 11 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{529}}{2} = -12$$

هر دو جواب قابل قبول هستند. دو عدد متوالی ۱۱ و ۱۲ و دو عدد متوالی ۱۲- و ۱۱- هر دو جواب هستند.

۶) عددی طبیعی بیابید که دو برابر آن به اضافهٔ ۳۵، با مربع آن عدد مساوی باشد.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

این عدد طبیعی را با n نشان می‌دهیم.

$$۲n+۳۵=n^{۲}\Rightarrow n^{۲}-۲n-۳۵=۰ \quad , \quad \Delta=(-۲)^{۲}-۴(۱)(-۳۵)=۴+۱۴۰=۱۴۴$$

$$\Rightarrow n=\frac{۲+۱۲}{۲}=۷ \quad \text{و} \quad n=\frac{۲-۱۲}{۲}=-۵$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا عدد طبیعی مثبت است.

۷) نشان دهید $-۱+\sqrt{۲}$ یک جواب معادلهٔ $x^{۲}+۲x-۱=۰$ است.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ استدلال کردن

می دانیم اگر عددی جواب یک معادله باشد باید با جایگذاری آن عدد به جای مجهول معادله، تساوی معادله برقرار شود. پس شرط جواب‌بودن را بررسی می کنیم.

$$(-۱+\sqrt{۲})^{۲}+۲(-۱+\sqrt{۲})-۱=۰\Rightarrow$$

$$۱+۲-۲\sqrt{۲}-۲+۲\sqrt{۲}-۱=۰\Rightarrow ۰=۰$$

چون این عدد تساوی را برقرار کرده است، یک جواب معادله است.

۸) مساحت ناحیهٔ خاکستری ۴۰ سانتی‌متر مربع است. اندازهٔ هر ضلع مربع‌ها را بدست آورید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوندها و اتصال‌ها

مساحت مربع بزرگ‌تر $(۳y+۲)^{۲}$ و مساحت مربع کوچک‌تر $y^{۲}$ است. مساحت قسمت رنگی بین این دو مربع $(۳y+۲)^{۲}-y^{۲}$ است. با توجه به فرض مسئله: $(۳y+۲)^{۲}-y^{۲}=۴۰$. در این صورت:

$$۹y^{۲}+۴+۱۲y-y^{۲}-۴۰=۰\Rightarrow ۸y^{۲}+۱۲y-۳۶=۰$$

طرفین را بر ۴ تقسیم می کنیم

$$2y^2+3y-9=0 \xrightarrow{\Delta=9+72} y=\frac{-3\pm 9}{4} \quad y_1=-3 \quad , \quad y_2=\frac{3}{2}$$

$$\text{اندازه ضلع مربع کوچک} = y = \frac{3}{2}$$

$$\text{اندازه ضلع مربع بزرگ} = 3y+2 = 3\left(\frac{3}{2}\right)+2=\frac{13}{2}$$

و جواب منفی قابل قبول نیست.

۹) معمای زیر در کتاب «الجبر و المقابله» خوارزمی آمده است (گرفته شده از کتاب خوارزمی بنیانگذار جبر، کاروِنا بِرزینا).

"مقداری است که اگر یک سوم آن و یک درهم را در یک چهارم آن و یک درهم ضرب کنم، حاصل آن بیست می‌شود."

این مقدار را پیدا کنید.

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله

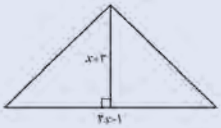
عدد را x فرض می‌کنیم.

$$\left(\frac{1}{3}x+1\right)\left(\frac{1}{4}x+1\right)=20 \Rightarrow \frac{1}{12}x^2+\frac{7}{12}x-19=0$$

طرفین را در ۱۲ ضرب می‌کنیم.

$$x^2+7x-228=0 \xrightarrow{\Delta=961} x=\frac{-7\pm 31}{2} \Rightarrow x_1=-19 \ , \ x_2=12$$

جواب منفی قابل قبول نیست، زیرا مقدار پول منفی نمی‌تواند باشد.



۱۰) مساحت مثلث روبه‌رو ۲۴ سانتی‌مترمربع است.

الف) مقدار x را پیدا کنید.

ب) اندازهٔ قاعده و ارتفاع مثلث چقدر است؟

مهارت‌ها و فرایندها:

■ حل مسئله، پیوند و اتصال،

الف)

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{قاعده}}{2}$$

$$24=\frac{(3x-1)(x+3)}{2} \Rightarrow 3x^2+8x-51=0$$

$$\Rightarrow x_1=3 \ \text{و} \ x_2=-\frac{17}{3}$$

جواب منفی قابل قبول نیست زیرا طول قاعده و ارتفاع منفی نمی‌تواند باشد.

ب)

$$\text{ارتفاع قاعده} = 3x-1=3(3)-1=8$$

$$\text{اندازه ارتفاع} = x+3=3+3=6$$

توسعهٔ دانش

مجهول، متغیر، پارامتر:

سه اصطلاح مجهول و متغیر و پارامتر در ریاضی بسیار به‌کار می‌روند. این اصطلاحات بسیار به هم نزدیکند و ممکن است با هم جابه‌جا به‌کار گرفته شوند. اصطلاح مجهول در ارتباط با مفهوم معادله است. هر کجا عددی نامعلوم باشد ولی اطلاعاتی از آن در دسترس باشد و بخواهیم از طریق آن اطلاعات عدد نامعلوم را به دست آوریم، مفهوم مجهول و معادله رخ می‌دهند. آن عدد نامعلوم را با نمادی نشان می‌دهیم که مجهول نامیده می‌شود و اطلاعات مربوط به مجهول را به طور جبری می‌نویسیم که عموماً به صورت تساوی دو مقدار است و آن را یک معادله می‌نامند؛ مثلاً آیا عددی هست که ضرب آن در خودش با جمع آن با خودش مساوی باشد؟ اگر چنین عددی را با x نشان دهیم در اینجا x مجهول است و اطلاعات مسئله می‌گوید $x \times x = x + x$. این یک معادله است که ساده شده آن به صورت $x^۲ = ۲x$ نوشته می‌شود.

حل یک معادله به معنای یافتن عدد یا اعدادی است که اگر جای مجهول قرار گیرند، تساوی برقرار می‌شود. در این مثال ۰ و ۲ جواب هستند.

اصطلاح متغیر بیشتر در ارتباط با مفهوم تابع است. اگر بخواهیم اثر یک تابع را روی مقدار دلخواهی از دامنه آن نشان دهیم نمادی را در نظر می‌گیریم که نشان‌دهندهٔ یک مقدار دلخواه در دامنهٔ تابع باشد. این نماد را متغیر تابع می‌نامند. در اینجا نماد متغیر به معنای مجهول نیست و معادله‌ای نیز وجود ندارد فقط چگونگی اثر تابع روی متغیر عموماً با یک فرمول بیان می‌شود.

مثلاً اگر تابعی که مساحت یک مربع را بر حسب طول ضلع آن نشان می‌دهد با f نشان دهیم داریم $D_f = (۰, +\infty)$ و اگر نماد x را به عنوان عضو دلخواهی از D_f به‌کار بریم x متغیر این تابع است و اثر تابع روی x به صورت $f(x) = x^۲$ نوشته می‌شود. در این نمادگذاری‌ها مجهولی وجود ندارد تا به دنبال آن بگردیم. اما اگر سؤالی به این صورت مطرح شود که به ازای چه مقداری در دامنه مقدار تابع برابر ۴ می‌شود، در اینجا با یک معادله و یک مجهول روبرو می‌شویم. اگر نمادی که مجهول را نشان می‌دهد با همان x نشان دهیم باید داشته باشیم $f(x) = ۴$. این یک معادله است و نماد x در اینجا مجهول است.

اینکه یک نماد به عنوان مجهول به‌کار گرفته شده است یا متغیر، مربوط به کاربرد آن است. اگر معادله‌ای در کار است و حل معادله هدف است نماد آن مجهول است ولی اگر معادله‌ای وجود ندارد و شیوهٔ عمل یک تابع توصیف می‌شود نماد به‌کار رفته متغیر است.

مفهوم پارامتر به مفهوم متغیر بسیار نزدیک است. پارامتر نیز با یک نماد نمایش داده می‌شود که دامنه‌ای از تغییرات برای آن در نظر می‌گیرند. پارامتر هم در معادله‌ها و هم در توابع ممکن است رخ دهد. در برخی معادله‌ها ممکن است اعدادی نامعین و دلخواه وجود داشته باشند که آنها را پارامتر می‌نامند. به ازای هر مقداری برای پارامتر، یک معادلهٔ مشخص و جدید خواهیم داشت. عملاً این گونه معادله‌ها دسته‌ای از معادله‌ها هستند و به ازای مقدار دهی به پارامتر یا پارامترهای موجود در آن اعضایی از این دسته معادله‌ها ساخته می‌شوند. مثلاً معادلهٔ $x^{۲}-۲ax+a=۰$ را در نظر بگیرید. در این معادله a عدد معینی نیست و به ازای هر مقداری که برای آن در نظر بگیریم معادلهٔ جدیدی ساخته می‌شود. این، یک دسته معادله بر حسب پارامتر a است. در اینجا x مجهول معادله و a پارامتری است که نشان‌دهندهٔ عددی دلخواه ولی ثابت است.

اینکه در معادلهٔ داده شده کدام نماد مجهول و کدام نماد پارامتر است خود به خود معلوم نیست و ارائه دهندهٔ معادله باید مشخص کند کدام نماد مجهول و کدامیک پارامتر است. در مثال بالا کاملاً ممکن بود ما a را مجهول و x را پارامتر در نظر بگیریم.

در بیان قانون توابع نیز ممکن است پارامترهایی رخ دهند که نقش آنها ایجاد دسته‌ای از توابع است که به ازای مقادیر مختلف پارامتر به وجود می‌آیند. مثلاً در تابع با قانون $f(x)=(x-a)^{۲}-a$ نماد a یک پارامتر است که نشان دهنده یک عدد دلخواه ولی ثابت است. با تغییر مقدار a توابع مختلفی ایجاد می‌شوند.

تشخیص اینکه یک نماد به صورت مجهول، متغیر، یا پارامتر به‌کار رفته است یا از طریق متن گفتگو مشخص می‌شود یا به طور مستقیم باید بیان شود.

معادله‌ها:

در ریاضیات و کاربردهای آن، مفهوم معادله بسیار رخ می‌دهد. در حالت کلی مفهوم معادله از طریق مفهوم تابع بیان می‌شود. در هر معادلهٔ عددی که مجهول آن یک عدد است، تابعی با متغیر عددی مانند f وجود دارد و معادله به صورت $f(x)=c$ می‌باشد. جواب‌های این معادله، اعدادی در دامنه تابع f هستند که تساوی را برقرار می‌کنند. از لحاظ نموداری، جواب‌های این معادله از برخورد نمودار تابع f و خط $y=c$ به دست می‌آیند.

در حالتی که f تابعی چندجمله‌ای از درجه n باشد، معادله را معادلهٔ چندجمله‌ای از درجه n می‌نامند. قبلاً با معادله‌های درجهٔ اول و در این فصل با معادله‌های درجهٔ دوم آشنا شده‌اید. برای معادله‌های درجهٔ سوم و چهارم نیز روش‌هایی برای

حل آنها وجود دارد، اما گالوا و آبل ثابت کردند که برای حل معادلات چندجمله‌ای درجات بالاتر روش و فرمولی برحسب رادیکال‌ها وجود ندارد.

به همین دلیل در حل معادله‌ها، روش‌های دیگری ابداع شده است که آنها را روش‌های عددی می‌نامند. در این روش‌ها، هدف یافتن جواب دقیق نیست، بلکه یافتن تقریبات اعشاری جواب با دقت کافی هدف خواهد بود. عملاً جواب‌های تقریبی با دقت کافی به همان خوبی جواب‌های دقیق هستند و چیزی از آنها کم ندارند. بر فرض جواب دقیق یک معادله را هم که بیابیم در به‌کارگیری این جواب برای حل یک مسئله عملی، دقت ابزار ما فقط در حد خاصی است و نمی‌توان از جواب در همان حد دقیق بودنش استفاده کرد. مثلاً فرض کنید جواب دقیق یک معادله $\sqrt{\ }$ باشد و دقت ابزار ما فقط در حد اعداد اعشاری دو رقمی باشد. در این حالت مقدار دقیق برای ما فایده‌ای ندارد و همان تقریب اعشاری ۱/۴۱ از $\sqrt{۲}$ برای کار ما کافی‌است. پس، اگر معادله را با روش‌های عددی حل می‌کردیم و جواب تقریبی ۱/۴۱را به دست می‌آوردیم هیچ کمبودی نسبت به حل دقیق با جواب $\sqrt{۲}$ نداشت.

معادله‌ها با توجه به نوع تابع f به انواع و اقسامی از معادله‌ها تقسیم‌بندی می‌شوند که برخی از آنها قابلیت حل دقیق را دارند و بسیاری از آنها به طور دقیق قابل حل نیستند. اکثر روش‌های عددی حل معادله‌ها عمومیت دارند و در مورد هر تابعی قابل به‌کار بردن هستند. روش نصف کردن یکی از ساده‌ترین روش‌های حل معادله‌ها است که در سر کلاس هم می‌توان آن را به‌کار برد و جواب‌هایی با تقریب‌های مناسب به دست آورد. در روش نصف کردن تابع f باید پیوسته باشد و روی یک بازهٔ بسته $[a, b]$ تعریف شده باشد و مقدار $f(a)$ و $f(\mathrm{b})$ با علامت‌های مختلف باشند تا مطمئن باشیم (طبق قضیه‌ها) معادله $f(x) = ۰$ حداقل یک جواب در بازهٔ $[a, b]$ دارد.

برای یافتن یکی از این جواب‌ها نقطهٔ $c = \frac{a+b}{۲}$ وسط این بازه را در نظر می‌گیریم و مقدار $f(c)$ را حساب می‌کنیم. اگر $f(c) = ۰$ به جواب رسیده‌ایم و اگر $f(c) \neq ۰$ به علامت آن نگاه می‌کنیم که با علامت $f(a)$ تفاوت دارد است یا با علامت $f(b)$. با هر کدام تفاوت داشت بازهٔ جدیدی تشکیل می‌دهیم که یک سر آن c است و سر دیگر آن a یا b است. اگر این عملیات را n بار تکرار کنیم به بازه‌ای می‌رسیم که یک جواب معادله در آن بازه است و طول بازه $\frac{b-a}{۲^{\mathrm{n}}}$ است. برای n به اندازه کافی بزرگ طول این بازه بسیار کوچک می‌شود به گونه‌ای که دو سر بازه تا چند رقم اعشار با هم مساوی‌اند و یک جواب این معادله عددی با همین رقم‌های اعشار است. برای دقیق‌تر کردن جواب تعداد مراحل تکرار را باید بیشتر کنیم.