



## ترکیبیات (شمارش)

۳

۱ مباحثی در ترکیبیات

۲ روش‌هایی برای شمارش

مسائل ترکیبیات در بخش‌های زیادی از ریاضیات مانند جبر، نظریه احتمالات و هندسه به وجود می‌آیند. ترکیبیات در علوم رایانه، بهینه‌سازی، فیزیک آماری و... کاربردهای فراوان دارد. ساختارهای ترکیبیاتی یکی از مهم‌ترین مباحث ترکیبیات است. مربع‌های لاتین یکی از ساختارهای مهم ترکیبیاتی‌اند و دارای کاربردهای بسیاری هستند. یکی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری است.

## یادآوری و تکمیل

در سال‌های قبل با ابزارهایی همچون اصل جمع و اصل ضرب برای شمارش آشنا شده و با بعضی از تکنیک‌ها و روش‌های شمارش مانند تبدیل  $r^1$  شیء از  $n$  شیء (انتخاب  $r$  شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم باشد) و ترکیب  $r^2$  شیء از  $n$  شیء (انتخاب  $r$  شیء که ترتیب انتخاب آنها مهم نباشد) نیز آشنایی داشته و از آنها در حل مسائل شمارشی استفاده کرده‌اید.

گاهی اوقات برای شمارش در حالت‌های خاص باید از روش‌هایی همچون دسته‌بندی اشیا یا تقسیم کل جایگشت‌های ممکن بر تعداد حالت‌هایی که تکراری یا بی‌اثر محسوب می‌شوند، استفاده کنیم. در این درس با توجه به طرح و حل مثال‌هایی، شما با این روش‌ها آشنا خواهید شد.

مثال: فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «ج»، «پ» و «ز» و ارقام ۲، ۳، ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است:

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل:

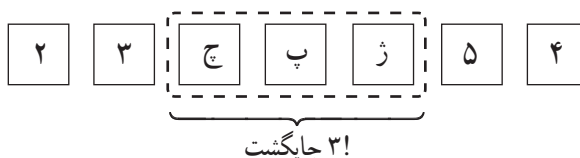
الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به  $7!$  طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

ب) کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء در نظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این صورت  $5!$  جایگشت دارند؛ در هر جایگشت، سه حرف داده شده در عین

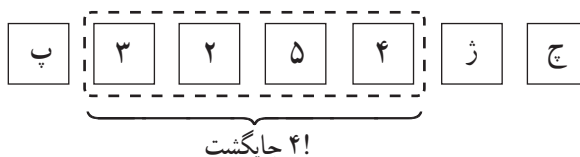
$$۱- (n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$۲- \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

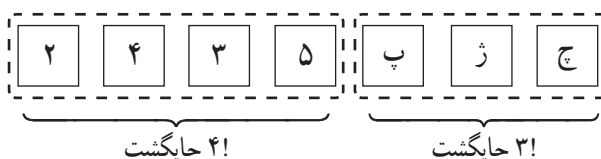
حال که کنار هم هستند ۳! جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای مورد نظر برابر است با  $5! \times 3!$



پ) مشابه قسمت (ب) ابتدا ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می‌کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و ۴! جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده هم ۴! در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر، طبق اصل ضرب عبارت است از  $4! \times 4!$



ت) حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می‌کنیم که روی هم دو شیء شده و ۳! حروف در کنار هم و ۴! نیز ارقام کنار هم جایگشت دارند که طبق اصل ضرب تعداد رمزهای مورد نظر عبارت است از  $2! \times 3! \times 4!$



ما برای حل این مثال از دسته‌بندی اشیا استفاده کردیم.

حال مسئله‌ای را طرح و حل می‌کنیم ولی هیچ توضیحی برای حل آن نمی‌دهیم تا شما خودتان راه حل این مسئله را توضیح دهید.

مثال: ۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم:

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک‌درمیان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند).

پ) اگر دانش‌آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می‌توان آنها را به صورت یک‌درمیان قرار داد؟

الف)  $2! \times 4! \times 5!$

ب)  $4! \times 5!$

پ)  $5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 5! \times 4!$

پ)  $(5! \times 5!) \times 2$

روش اول:

روش دوم:

## جایگشت‌های با تکرار

گاهی اوقات چند شیء تکراری یا یکسان در بین اشیا یافت می‌شود. در این حالت تعداد جایگشت‌های این اشیا با تعداد جایگشت‌ها در حالتی که هیچ دو شیء یکسانی در بین اشیا نباشد، متفاوت بوده و به نظر می‌رسد کمتر باشد. به عنوان مثال تعداد جایگشت‌های سه حرف  $a$ ،  $b$  و  $c$  برابر با  $3! = 6$  است ولی تعداد جایگشت‌های سه حرف  $a$  و  $a$  و  $b$  برابر با  $3$  است ( $baa$ ,  $aba$ ,  $aab$ ) در واقع چون جابه‌جایی دو حرف  $a$  حالت جدیدی تولید نمی‌کند و حالت تکراری به حساب می‌آید پس در واقع می‌بایست تعداد کل جایگشت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که دو حرف تکراری می‌توانند جابه‌جا شوند یعنی  $2!$  تقسیم کنیم، پس پاسخ این سؤال  $3 = \frac{3!}{2!}$  است.

چون دو حرف  $a$  به  $2!$  طریق می‌توانند با هم جابه‌جا شوند و این تعداد جابه‌جایی به صورت ضربی در  $3!$  محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، پس باید با تقسیم  $3!$  بر  $2!$  از عملیات ضربی خارج شود.

### کار در کلاس

محاسبه کنید با ارقام  $1$ ،  $1$ ،  $2$  و  $4$  چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت؟  
اگر  $4$  رقم متمایز بودند جواب این سؤال  $4!$  بود ولی چون در این  $4!$  و به صورت ضربی،  $3!$  حالت ممکن برای یک‌ها محاسبه شده و نباید محاسبه می‌شد، لذا کافی است برای رسیدن به جواب، تعداد کل حالت‌ها را بر تعداد حالت‌هایی که رمز  $4$  رقمی جدید تولید نمی‌شود تقسیم کنیم یعنی پاسخ،  $\dots = \frac{4!}{\dots}$  است.

اعداد  $4$  رقمی ممکن  
 $1112, 1121, 1211, 2111$   
۴ رمز ممکن

تذکر: هرگاه  $n$  شیء مفروض باشند و در بین آنها  $k$  شیء تکراری یا مشابه وجود داشته باشد، برای محاسبه تعداد جایگشت‌های این  $n$  شیء ابتدا آنها را متمایز فرض کرده و جایگشت‌های آنها را حساب می‌کنیم و سپس حاصل را بر جایگشت‌های اشیا تکراری (به دلیل ورود در محاسبات به صورت ضربی) تقسیم می‌کنیم؛ یعنی این تعداد برابر است با:  $\frac{n!}{k!}$ .

با همین استدلال می‌توان قضیه زیر را، که به آن قضیه جایگشت با تکرار می‌گوییم، بیان کرد:  
قضیه جایگشت با تکرار: اگر  $n$  شیء مفروض باشند، به طوری که  $n_1$  تای آنها از نوع اول و یکسان و  $n_2$  تای آنها از نوع دوم و یکسان و ... و  $n_k$  تای آنها از نوع  $k$  ام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

مثال: با ارقام  $1$ ،  $2$ ،  $2$ ،  $3$ ،  $2$ ،  $4$ ،  $4$ ،  $5$  چند عدد  $9$  رقمی می‌توان نوشت؟

حل: طبق قضیه جایگشت با تکرار

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!}$$

تعداد چهارها → تعداد یک‌ها ←

تعداد دوها

مثال: ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟ کل جایگشت‌های ۹ نفر عبارت از ۹! است که چون دونفری که در اتاق دونفره هستند با جابه‌جایی آنها مجدداً همان دو نفر در همان اتاق بوده و حالت جدیدی تولید نمی‌شود و نیز جابه‌جایی سه نفر و چهار نفر در اتاق‌های سه نفره و چهار نفره حالت جدیدی تولید نمی‌کند و تعداد این جایگشت‌های بی‌اثر برای دو نفر، سه نفر و چهار نفر به ترتیب ۲!، ۳! و ۴! است، پس پاسخ این سؤال طبق قضیه برابر است با  $\frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$ . این مثال به روشی دیگر و با استفاده از ترکیب برای انتخاب افراد (جابه‌جایی افراد انتخاب شده برای اتاق‌ها مهم نیست):

$$\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times 1 = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$$

انتخاب سه نفر از ۷ نفر باقی‌مانده برای اتاق سه‌نفره
انتخاب دو نفر برای اتاق دو‌نفره

## فعالیت

شخصی وارد یک گل‌فروشی می‌شود و می‌خواهد دسته‌گلی شامل سه شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک، انتخاب کند. (از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود است)

**۱** هر سطر جدول زیر یک انتخاب را نمایش می‌دهد، شما این جدول را کامل کنید.



دسته گل انتخابی				مریم	رُز	میخک
۱	یک شاخه گل مریم، یک شاخه گل رُز و یک شاخه گل میخک	*	*	*		
۲	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل مریم	*	**	**		
۳	سه شاخه گل رُز	...	***	...		
۴	.....	...	**	*		
۵	.....	***	...	...		
۶	.....	**	...	*		
۷	دو شاخه گل مریم و یک شاخه گل رُز	...	...	...		
۸	سه شاخه گل میخک	...	...	...		
۹	دو شاخه گل میخک و یک شاخه گل رُز	...	...	...		
۱۰	.....	...	...	...		

همان‌طور که مشاهده می‌کنید برای جدا کردن سه نوع گل از دو خط عمودی و برای مشخص کردن تعداد انتخاب‌ها از هر نوع گل از \* استفاده شده است.

۲ آیا در هر حالت از حالت های ۱ تا ۱۰ جابه جایی ستاره ها با هم دسته گل جدیدی تولید می کند؟ جابه جایی دو خط عمودی با هم چگونه؟

۳ با توجه به قضیه جایگشت با تکرار تعداد کل جایگشت های این ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی) را به دست آورید.

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \frac{5!}{\dots \times \dots} = \binom{5}{2} = \binom{3+2}{2}$$

۴ این مسئله را در حالت کلی و برای انتخاب دلخواه  $n$  شاخه گل از بین  $k$  نوع گل بررسی کنید.

$n = \text{تعداد ستاره ها} = \text{تعداد شاخه گل های انتخابی}$

$\dots = \text{تعداد خط های عمودی برای جدا کردن } k \text{ نوع گل}$

$\dots = \text{تعداد کل اشیا (شامل ستاره ها و خط های عمودی)}$

$$\text{تعداد کل جایگشت ها} = \frac{[n + (k-1)]!}{n! \times \dots} = \binom{n + (k-1)}{k-1}$$

.....  
 ← جابه جایی ستاره ها با هم، دسته گل جدیدی تولید نمی کند.

مثال: به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟  
 حل:

$$\begin{matrix} \text{نوع گل} = k = 4 \\ \text{تعداد شاخه گل انتخابی به دلخواه} = n = 8 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \times 8!}$$

مثال: به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط آنکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل: ابتدا ۱ شاخه (به اجبار) از هر نوع گل برمی داریم.  $9-4=5$  شاخه گل باقی مانده را به دلخواه از بین ۴ نوع گل انتخاب می کنیم:

$$k = 4 \Rightarrow \text{تعداد حالت های مطلوب} = \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3} \leftarrow n = 9 - 4 = 5 \text{ تعداد انتخاب های دلخواه}$$

### فعالیت

می خواهیم تعداد انتخاب های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع گل را مشخص کنیم. اگر فرض کنیم  $x_1$  تعداد انتخاب ها از گل نوع اول و  $x_2$  تعداد انتخاب ها از گل نوع دوم و  $x_3$  تعداد ..... باشد، در این صورت می بایست جمع انتخاب ها از سه نوع گل، برابر با ۷ باشد یعنی  $x_1 + x_2 + \dots = 7$  با توجه به اینکه هر جواب صحیح و نامنفی این معادله نشان دهنده یک انتخاب هفت تایی از سه نوع گل بوده و برعکس هر انتخاب هفت تایی از این سه نوع گل یک جواب صحیح و نامنفی برای این معادله است جدول زیر را کامل کرده و سپس تعداد جواب های معادله را به دست آورید.

تعداد انتخاب‌ها از گل نوع اول $x_1$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع دوم $x_2$	تعداد انتخاب‌ها از گل نوع سوم $x_3$	$x_1 + x_2 + x_3 = 7$
۱	۰	۶	$1 + 0 + 6 = 7$
۱	۱	۵	$1 + 1 + 5 = 7$
...	...	...	$4 + 2 + 1 = 7$
...	۷	...	.....
...	۴	۲	.....
...	...	...	.....

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 7$  برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه ۷ شاخه گل از بین سه نوع

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{\dots}{\dots} = \dots, \text{ یعنی گل}$$

با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت:

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه  $n$  شاخه گل از بین  $k$

$$\text{نوع گل یعنی برابر است با } \binom{n+k-1}{k-1}.$$

## کار در کلاس

**۱** معادله  $x_1 + x_2 + x_3 = 7$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

(راهنمایی: مثال را ملاحظه کنید، از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود.)

**۲** نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$  برابر است با  $\binom{n-1}{k-1}$ .

(راهنمایی: ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برداشته و لذا تعداد انتخاب‌های دلخواه به  $(n-k)$  تقلیل می‌یابد و...)

**۳** معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 14$  چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه  $x_1 > 1$  و  $x_3 > 3$  باشد؟

**۴** معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$  چند جواب صحیح و مثبت دارد؟ ( $1 \leq i \leq 5, x_i \geq 1$ )

**۵** معادله  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$  چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آنکه  $x_3 = 4$  و  $x_5 > 2$  باشد؟

حال می‌خواهیم ابزارهای شمارشی دیگری را معرفی کنیم که با استفاده از آنها می‌توان به حل مسائلی پرداخت که حل آنها

با استفاده از روش‌های معمولی، دشوار و گاهی اوقات بسیار وقت‌گیر است!

۱- طرح سؤال‌هایی برای معادلات سیاله که شرط‌هایی برای  $x_i$ ها به صورت  $a \leq x_i \leq b$  در آن لحاظ شده باشد در امتحانات و ارزشیابی‌ها جایز نیست.



## مربع‌های لاتین

سه مدرس به نام‌های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰-۸، ۱۲-۱۰ و ۴-۲ در سه کلاس  $A$ ،  $B$  و  $C$  تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. نام مدرس‌ها را در جدول مقابل به گونه‌ای وارد کنید که شرایط خواسته شده محقق گردد.

جلسات کلاس‌ها	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۴-۲
$A$			
$B$			
$C$			

### فعالیت

۱ به جای نام سه مدرس مذکور به ترتیب اعداد ۱، ۲ و ۳ را قرار دهید و یک جدول  $3 \times 3$  از اعداد به دست آورید.


۲ موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

- |  |   |
|--|---|
| (الف) در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.         | (a) هیچ مدرسی در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است. |
| (ب) در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.          | (b) هر یک از مدرسین در تمام کلاس‌ها تدریس داشته است.        |
| (پ) هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.   | (c) هیچ مدرسی در یک کلاس دوبار تدریس نکرده است.             |
| (ت) هر یک از اعداد در تمام ستون‌ها آمده است. | (d) هر یک از مدرسین در هر یک از جلسه‌ها تدریس داشته است.    |

**تعریف:** یک جدول مربعی از اعداد ۱، ۲، ... و  $n$  به شکل یک مربع  $n \times n$  را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و  $n$  پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین<sup>۱</sup>» می‌نامیم. (به هر یک از اعداد درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

۱- اوپلر برای نام‌گذاری این مربع‌ها از حروف لاتین استفاده می‌کرد، به همین دلیل این مربع‌ها به نام مربع‌های لاتین معروف شده‌اند.



مثال: دو مربع لاتین  $3 \times 3$  و دو مربع لاتین  $4 \times 4$  در زیر نمایش داده شده است.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴

### کار در کلاس

۱ دو مربع لاتین  $5 \times 5$  بنویسید.

۲ با استدلال کلامی بگویید که چرا با تعویض جای دو سطر (دو ستون) از یک مربع لاتین شکل حاصل باز هم یک مربع لاتین است؟

۳ شکل زیر یک مربع لاتین  $n \times n$  است که به آن «مربع لاتین چرخشی» می‌گوییم. مربع لاتین بودن آن را چگونه توجیه می‌کنید؟

۱	۲	۳	...	...	...	$n-1$	$n$
$n$	۱	۲	۳	...	...	$n-2$	$n-1$
$n-1$	$n$	۱	۲	۳	...	$n-3$	$n-2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
۳	۴	۵	...	...	...	۱	۲
۲	۳	۴	...	...	...	$n$	۱

با توجه به آنچه در کار در کلاس دیدیم برای هر عدد طبیعی مانند  $n$ ، مربع لاتین  $n \times n$  وجود دارد. حال فرض کنیم یک مربع لاتین مانند شکل زیر داریم و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱، ۲، ۳، ...،  $n$  یک مربع جدید به دست آورده ایم. خواهیم دید که مربع به دست آمده نیز یک مربع لاتین خواهد بود، زیرا در غیر این صورت در سطر یا ستونی از مربع جدید عضو تکراری وجود خواهد داشت که این موضوع با توجه به خواص جایگشت ایجاب می کند که در سطر یا ستونی از مربع اول نیز عضو تکراری وجود داشته باشد و این با مربع لاتین بودن آن در تناقض است.

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

$1 \rightarrow 3$   
 $2 \rightarrow 2$   
 $3 \rightarrow 4$   
 $4 \rightarrow 1$

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

با جایگزینی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ از جدول اول به ترتیب با اعداد ۳، ۲، ۴، ۱ و جدول دوم حاصل شده است.

### کار در کلاس

برای هر یک از مربع های لاتین زیر یک جایگشت مشخص نمایید. سپس برای هر یک از جایگشت ها از روی مربع لاتین داده شده یک مربع لاتین به دست آورید.

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۱	۳	۵	۴	۲
۵	۴	۲	۱	۳
۲	۱	۳	۵	۴
۳	۵	۴	۲	۱
۴	۲	۱	۳	۵

### دو مربع لاتین متعامد

**تعریف:** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین هم مرتبه باشند به طوری که از کنار هم قرار دادن درایه های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانه آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم های سمت چپ مربوط به مربع  $A$  و تمام رقم های سمت راست مربوط به مربع  $B$  (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین  $A$  و  $B$  «متعامدند» هرگاه هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه های مربع جدید تکرار نشده باشند.

به طور مثال برای دو مربع  $A$  و  $B$  به صورت زیر داریم :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & 33 & 44 & 11 \\ 34 & 21 & 12 & 43 \\ 41 & 14 & 23 & 32 \\ 13 & 42 & 31 & 24 \end{bmatrix}$$

یک محک برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین بدین صورت است که برای متعامد بودن باید هر دو جایگاه (درايه) در یکی از مربع ها که اعداد یکسانی دارند، جایگاه های (درايه های) نظیر به آنها از مربع دیگر اعداد متمایزی داشته باشند. این محک معمولاً زمانی که می خواهیم نشان دهیم دو مربع لاتین متعامد نیستند به کار می رود. به این صورت که کافی است در یکی از دو مربع دو درایه یکسان پیدا کنیم به طوری که در جایگاه های نظیر به این دو درایه در مربع دیگر نیز درایه های یکسان (یکسان با هم و نه لزوماً یکسان با درایه های مربع اول) وجود داشته باشد.

به طور مثال در شکل زیر اگر در مربع لاتین  $A$  دو عدد یکسان (مانند  $a$  در شکل) به گونه ای بیابیم که در جایگاه های متناظر با آنها در مربع لاتین  $B$  (جایگاه های هاشور خورده) نیز اعداد یکسانی باشند، مثلاً خانه های هاشور خورده هر دو حاوی عدد  $b$  باشند در این صورت دو مربع  $A$  و  $B$  متعامد نیستند.

$$A = \begin{bmatrix} & & & & \\ & a & & & \\ & & & & \\ & & & & a \\ & & & & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} & & & & \\ & \text{hatched} & & & \\ & & & & \\ & & & & \text{hatched} \\ & & & & \end{bmatrix}$$

مثال : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(ب)} & & \text{(الف)} & \end{matrix}$$

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

(ب)

حل: الف) مربع حاصل از کنار هم قرار دادن درایه‌های دو مربع داده شده به صورت مقابل است و چون عدد دو رقمی تکراری در آن نیست لذا دو ماتریس داده شده متعامدند.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون اول و جایگاه سطر دوم ستون دوم در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد یک هستند) دارند و دو مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۳ هستند) دارند.

۱		
	۱	

۳		
	۳	

ب) خیر، متعامد نیستند؛ زیرا مثلاً جایگاه سطر اول ستون دوم و جایگاه سطر چهارم ستون اول در مربع اول درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند و در مربع دوم نیز درایه‌های یکسان (هر دو عدد ۲ هستند) دارند.

	۲		
۲			

	۲		
۲			

### کار در کلاس

۱ چند مربع لاتین  $۱ \times ۱$  وجود دارد؟

۲ آیا دو مربع لاتین  $۲ \times ۲$  متعامد وجود دارد؟

۳ بررسی کنید که آیا دو مربع لاتین  $۳ \times ۳$  روبه‌رو متعامدند؟

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۴ آیا دو مربع لاتین  $4 \times 4$  زیر متعامدند؟

$A =$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr></table>	۳	۴	۱	۲	۴	۳	۲	۱	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳
۳	۴	۱	۲														
۴	۳	۲	۱														
۱	۲	۳	۴														
۲	۱	۴	۳														

$B =$	<table border="1" style="display: inline-table; border-collapse: collapse; text-align: center;"><tr><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr><tr><td>۱</td><td>۲</td><td>۳</td><td>۴</td></tr><tr><td>۲</td><td>۱</td><td>۴</td><td>۳</td></tr><tr><td>۴</td><td>۳</td><td>۲</td><td>۱</td></tr></table>	۳	۴	۱	۲	۱	۲	۳	۴	۲	۱	۴	۳	۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲														
۱	۲	۳	۴														
۲	۱	۴	۳														
۴	۳	۲	۱														

دیدیم که برای  $n = 1$  و  $2$ ، دو مربع لاتین متعامد  $n \times n$  وجود ندارد. ثابت شده است<sup>۱</sup> که اگر  $6$  و  $2$  و  $n \neq 1$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود دارد و برای  $6$  و  $2$  و  $n = 1$  دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود ندارد.

۵ با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای  $B$ ، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را  $B'$  بنامید. بررسی کنید که آیا  $A$  و  $B'$  متعامدند؟

$B' =$


### خواندنی

اوایل<sup>۲</sup> در سال ۱۷۸۲ ادعا کرد که برای تمام اعداد طبیعی  $n$  به صورت  $n = 4k + 2$ ، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود ندارد. در واقع اوایلر پس از بررسی‌های زیاد بر روی وجود دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $6$  و به نتیجه نرسیدن در این باره، حدس فوق را مطرح نمود. این مسئله تا سال ۱۹۰۰ حل نشده باقی ماند تا در این سال یک افسر فرانسوی به نام تاری<sup>۳</sup> ثابت کرد که ادعای اوایلر برای  $n = 6$  درست است. تا سال ۱۹۵۹ برای  $n = 10$  و اعداد بزرگ‌تر کسی جواب را نمی‌دانست. در سال ۱۹۶۰ یک ریاضی‌دان آمریکایی به نام پارکر<sup>۴</sup> و دو ریاضی‌دان هندی به نام‌های بوس<sup>۵</sup> و شریخانده<sup>۶</sup> ثابت کردند که حدس اوایلر به جز برای حالت  $n = 6$  برای سایر  $n = 4k + 2$  درست نیست؛ یعنی برای هر عدد  $6$  و  $2$  و  $n \neq 1$  حداقل دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  وجود دارد.

۱- اثبات این مطلب در این کتاب مد نظر نیست.

۲- Euler

۳- Tarry

۴- Parker

۵- Bose

۶- Shrikhande

می‌خواهیم نشان دهیم اگر دو مربع لاتین متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می‌آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است؛ به عبارتی اگر  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین متعامد باشند و  $B_1$  مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای  $B$  باشد، آنگاه  $A$  و  $B_1$  نیز متعامدند.

**۱** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین متعامد باشند و  $B_1$  نیز مربع لاتین حاصل از تعویض تمام اعداد ۱ و ۲ با هم، در  $B$  باشد. (یعنی در  $B$  به جای تمام ۱ها، ۲ و به جای تمام ۲ها، ۱ قرار دهیم و آن را  $B_1$  بنامیم.) نشان دهید  $A$  و  $B_1$  متعامدند. (راهنمایی: دو درایه یکسان در  $A$  را در نظر بگیرید و نشان دهید که جایگاه‌های متناظر با آنها در  $B_1$  نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند.)

**۲** فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مربع لاتین متعامد باشند و  $B_1$  مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای  $B$  باشد. نشان دهید  $A$  و  $B_1$  نیز متعامدند. (راهنمایی: دو درایه یکسان در  $A$  در نظر بگیرید و با برهان خلف نشان دهید درایه‌های نظیر به آنها در  $B_1$  نمی‌توانند اعداد یکسانی داشته باشند. برای این کار از برهان خلف و خاصیت جایگشت استفاده کنید.)

مثال: قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

= A

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

= B

الف) ابتدا فرض کنید بخواهیم برای کار ۵ کارگر با ۵ ماشین ریسندگی در ۵ روز هفته به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر در هر روز با یک ماشین ریسندگی و در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده باشد.

برای حل این مسئله می‌توانیم از یک مربع لاتین  $5 \times 5$  استفاده کنیم. فرض کنید هر **ستون** نشان‌دهنده یک **کارگر** و هر **سطر** نشان‌دهنده یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵** که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند نمایانگر یکی از **ماشین‌های ریسندگی** باشند. بنابراین مثلاً در روز دوشنبه کارگر  $W_1$  با ماشین ریسندگی شماره ۲ کار می‌کند.

ب) حال فرض کنید که در مسئله مطرح شده در قسمت الف) ۵ نوع الیاف مختلف هم وجود داشته باشد و بخواهیم به گونه‌ای برنامه‌ریزی کنیم که هر کارگر از هر نوع الیاف هم دقیقاً یک بار استفاده کند.

برای این کار مانند قسمت الف) یک مربع لاتین می‌کشیم و هر **ستون** را نشان‌دهنده یک **کارگر** و هر **سطر** را نشان‌دهنده یک **روز هفته** و هر کدام از **اعداد ۱ و ۲ و ... و ۵** را که در مربع لاتین ظاهر شده‌اند

نمایانگر یکی از انواع **الیاف** در نظر می‌گیریم. با توجه به مربع لاتین، مثلاً در روز سه‌شنبه کارگر شماره ۴ با الیاف شماره ۳ کار می‌کند.

پ) حال اگر درایه‌های نظیر از دو مربع  $A$  و  $B$  را در کنار هم در یک مربع جدید قرار دهیم یک مربع  $5 \times 5$  به شکل زیر خواهیم داشت و می‌توانیم تمام اطلاعات فوق را از همین مربع استخراج کنیم. به‌طور مثال کارگر شماره ۴ در روز یکشنبه با ماشین شماره ۳ و الیاف شماره ۴ کار می‌کند. تا اینجا برنامه‌ریزی ما با استفاده از دو مربع لاتین انجام شده است، اما دو مربع لاتین  $A$  و  $B$  متعامد هم هستند و این ویژگی آنها تا اینجا به کار نیامده است. می‌دانیم که متعامد بودن دو مربع  $A$  و  $B$  به این معناست که مربع دو رنگ حاصل، در هیچ خانه‌ای عدد دو رقمی تکراری ندارد. از آنجا که اعداد سمت چپ شماره ماشین ریسندگی و اعداد سمت راست شماره الیاف مورد استفاده هستند لذا در صورتی که دو مربع استفاده شده متعامد باشند هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته است.

	$W_1$	$W_2$	$W_3$	$W_4$	$W_5$
شنبه	۱۳	۴۱	۲۴	۵۲	۳۵
یکشنبه	۴۵	۲۳	۵۱	۳۴	۱۲
دوشنبه	۲۲	۵۵	۳۳	۱۱	۴۴
سه‌شنبه	۵۴	۳۲	۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه	۳۱	۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

## کار در کلاس

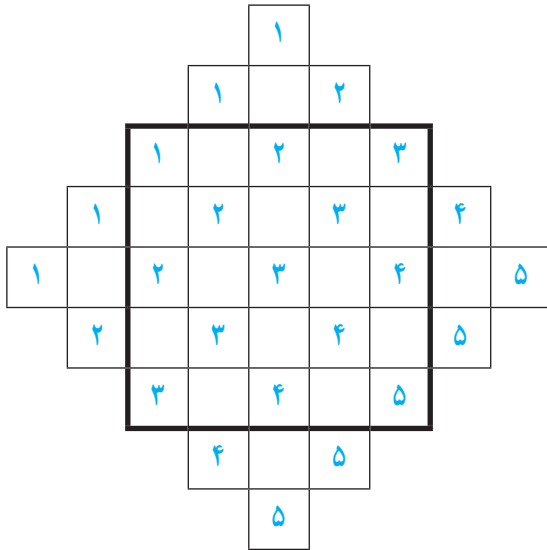
- در قسمت (الف) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر در طول هفته با هر دستگاه دقیقاً یک بار کار کرده است؟
- در قسمت (ب) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر کارگر با هر یک از الیافها دقیقاً یک بار کار می‌کند.
- در قسمت (پ) از مثال قبل، چرا می‌توان مطمئن بود که هر یک از الیافها در هر یک از ماشین‌های ریسندگی دقیقاً یک بار به کار گرفته شده است؟
- اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟



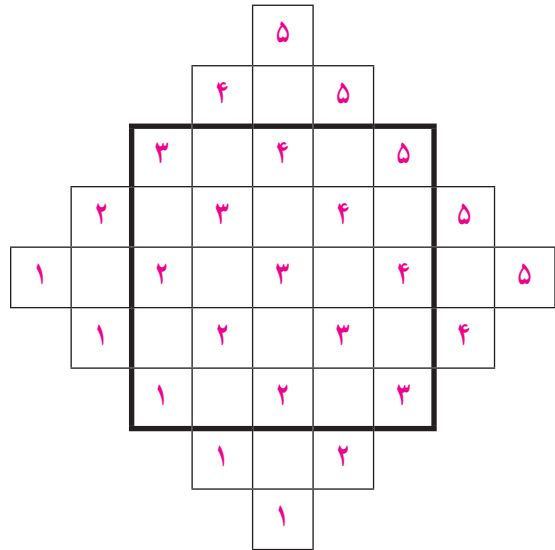
## یک روش برای ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه یک عدد فرد<sup>۱</sup>

با انجام مراحل زیر می‌توانید دو مربع لاتین  $5 \times 5$  متعامد به دست آورید.

۱ اعداد ۱، ۲، ... و ۵ با نظمی خاص (به نحوه چینش اعداد دقت کنید) در دو شکل (الف) و (ب) چیده شده‌اند.



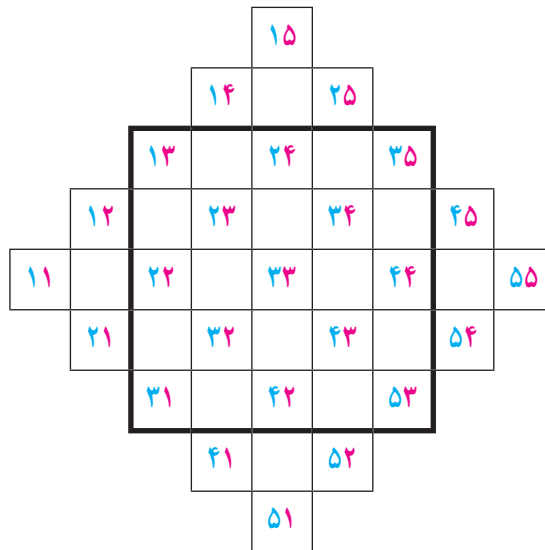
(ب)



(الف)

۲ از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل‌های (الف) و (ب) شکل زیر به دست می‌آید که در آن عدد دورقمی تکراری

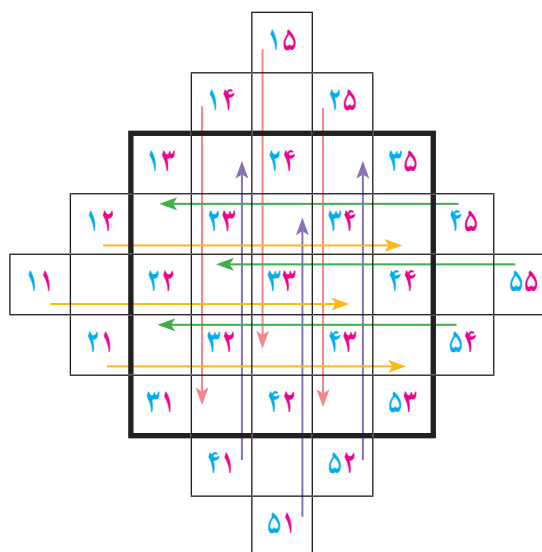
وجود ندارد.



۱- از آنجا که روش ساختن دو مربع لاتین متعامد از مرتبه غیرفرد چندان ساده نیست، لذا در این کتاب به آن پرداخته نمی‌شود.

۳ حال مربع پرننگ  $5 \times 5$  وسط، در شکل مرحله ۲ را در نظر بگیرید (شکل زیر) و با انتقال اعداد خارج از این مربع به داخل آن با روش زیر مربع مقابل را پر کنید.

۱۳		۲۴		۳۵
	۲۳		۳۴	
۲۲		۳۳		۴۴
	۳۲		۴۳	
۳۱		۴۲		۵۳



- الف) در هر کدام از مربع‌های سمت چپ، ۵ خانه به سمت راست انتقال دهید.
- ب) در هر کدام از مربع‌های سمت راست، ۵ خانه به سمت چپ انتقال دهید.
- پ) در هر کدام از مربع‌های بالا، ۵ خانه به پایین انتقال دهید.
- ت) در هر کدام از مربع‌های پایین، ۵ خانه به بالا انتقال دهید.

۴ حال دو مربع  $5 \times 5$  بکشید و در یکی از آنها اعداد سمت چپ در مربع مرحله قبل و در دیگری اعداد سمت راست را قرار دهید. دو مربع لاتین حاصل متعامد خواهند بود.



۵ با روشی کاملاً مشابه آنچه دیدید برای هر  $n$  فرد می‌توانید دو مربع لاتین متعامد از مرتبه  $n$  به دست آورید.

۱ می خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۲ اگر داشته باشیم  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از  $A$  و سه رقم از  $B$  باشد؟

۳ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:

(الف) هیچ محدودیتی نباشد؛

(ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛

(پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛

(ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه‌ی دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه‌ی یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن  $7! \times 4!$  باشد.

۵ با ارقام ۵، ۶، ۷، ۷، ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

۶ می‌خواهیم روی تعدادی جعبه‌ی حاوی اجناس تولید شده‌ی خاصی را کدگذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرف  $a, b, c, d, a, b, c, d, d, d, c, c, a, b, a, a$ ، از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می‌توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

۷ ۷ نفر به چند طریق می‌توانند در دو اتاق دوفنره و یک اتاق سه‌نفره قرار بگیرند؟

۸ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:  
(الف) به دلخواه انتخاب کنیم؛

(ب) از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم؛

(پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؛

(ت) از گل نوع سوم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

۹ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده:

(الف)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$       $x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$

(ب)  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$       $x_1 > 2, x_5 \geq 4$

(پ)  $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$       $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$

(ت)  $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$       $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

(ث)  $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$       $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

۱۰ به چند طریق می‌توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر و به دلخواه توزیع کرد؟

۱۱ به چند طریق می‌توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

۱۲ آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می‌تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

۱۳ مربع لاتین  $3 \times 3$  مقابل را در نظر بگیرید.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline ۳ & ۱ & ۲ \\ \hline ۱ & ۲ & ۳ \\ \hline ۲ & ۳ & ۱ \\ \hline \end{array}$$

الف) سطر دوم و سوم مربع  $A$  را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را  $A_1$  بنامید. آیا  $A$  و  $A_1$  متعامدند؟

ب) ابتدا سطر اول و سطر سوم مربع  $A$  را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل، سطر دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را  $A_2$  بنامید. آیا  $A$  و  $A_2$  متعامدند؟

پ) با توجه به قسمت‌های الف) و ب) به سؤالات زیر جواب دهید.

۱- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی متعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۲- آیا می‌توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتینی غیرمتعامد با مربع لاتین اول به دست می‌آید؟

۱۴ قرار است شش مدرس  $T_1, T_2, \dots, T_6$  در شش جلسه متوالی در شش کلاس  $C_1, C_2, \dots, C_6$  به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۱۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ و دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۷ بنویسید.

۱۶ در یک مسابقه اتومبیل‌رانی قرار است ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند به طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

الف) هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند؛

ب) هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند؛

پ) هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند؛

ت) هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

– برای این منظور یک برنامه‌ریزی انجام دهید.