

مثلثات

۲

۱ تناوب و تاثرات

۲ معادلات مثلثاتی

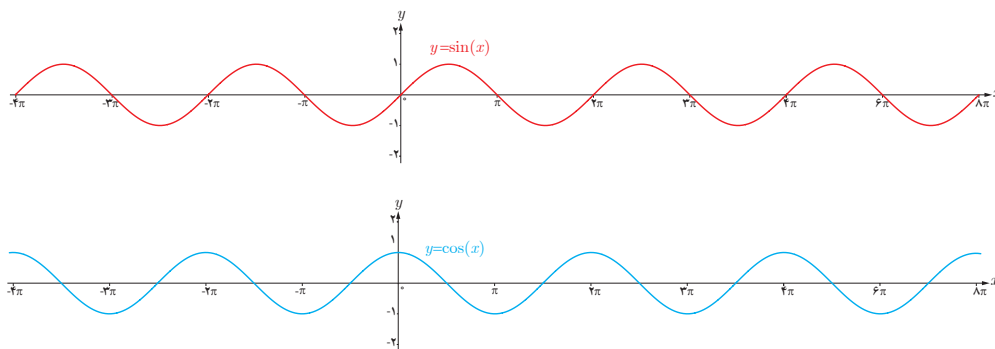
فصل



انشعاب رگ‌ها در بدن انسان به گونه‌ای است که مقاومت هیدرولیکی درون رگ‌ها تابعی مثلثاتی از زاویه بین هر دو رگ متصل به هم است. در شبیه‌سازی کامپیوتری از شبکه رگ‌ها این خاصیت مورد توجه قرار می‌گیرد.

تناوب و تنازات

با توابع مثلثاتی $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ در سال گذشته آشنا شدیم و دیدیم که در آنها مقادیر تابع برای هر دو نقطه به فاصله 2π روی محور x ها یکسان است $\sin(x \pm 2k\pi) = \sin x$ و $\cos(x \pm 2k\pi) = \cos x$ به عبارتی اگر تکه‌ای از نمودار این توابع را در بازه‌ای به طول 2π داشته باشیم، با تکرار این تکه می‌توان نمودار توابع فوق را به دست آورد. این مطلب را می‌توانید در شکل‌های زیر مشاهده نمایید.



با دقت به نمودار توابع فوق می‌توان مشاهده کرد که نمودار در بازه‌هایی به طول $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ تکرار می‌شود. اما کوچک‌ترین بازه‌ای که نمودار این توابع در آن تکرار شده است، همان 2π است. چنین توابعی را توابع متناوب و 2π را دوره تناوب آنها می‌نامیم.

تعریف:

تابع f را متناوب می‌نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد به طوری که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x \pm T) = f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f می‌نامیم.

فعالیت

۱ می‌دانیم دوره تناوب تابع $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ برابر 2π و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع به ترتیب ۱ و -۱ است. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب a را در تابع $f(x) = a \sin x$ بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی نماییم.

| تابع | نمودار تابع | ماکزیمم | مینیمم | دوره تناوب |
|---------------------------|-------------|---------|--------|------------|
| $y = \sin x$ | | ۱ | -۱ | 2π |
| $y = 2 \sin x$ | | ... | ... | ... |
| $y = -3 \sin x$ | | ... | ... | ... |
| $y = \frac{1}{2} \sin x$ | | ... | ... | ... |
| $y = -\frac{1}{3} \sin x$ | | ... | ... | ... |

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانید مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = a \sin x + c$ چگونه است. با انجام مراحل مشابه بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = a \cos x$ و $y = a \cos x + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

۱ با دقت در نمودار هر یک از توابع داده شده زیر، دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک را تشخیص دهید. در ادامه می‌خواهیم با بررسی نمودارهای داده شده، تأثیر ضریب b در تابع $y = \sin bx$ را بر دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم این تابع بررسی کنیم.

| تابع | نمودار تابع | ماکزیمم | مینیمم | دوره تناوب |
|-------------------------------------|-------------|---------|--------|------------|
| $y = \sin x$ | | ۱ | -۱ | 2π |
| $y = \sin 2x$ | | ... | ... | ... |
| $y = \sin(-3x)$ | | ... | ... | ... |
| $y = \sin \frac{x}{2}$ | | ... | ... | ... |
| $y = \sin\left(-\frac{x}{3}\right)$ | | ... | ... | ... |

۲ با توجه به نمودارهای فوق دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx$ را مشخص نمایید.

۳ با توجه به آنچه در مورد انتقال توابع می دانیم، مشخص نمایید دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = \sin bx + c$ چگونه است.

با انجام مراحل مشابه مراحل بالا می توان نشان داد دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم توابع $y = \cos bx$ و $y = \cos bx + c$ نیز مانند آنچه گفته شد به دست می آید.

همان طور که در فعالیت های قبل دیدیم در توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ ضریب a در دوره تناوب تابع بی تأثیر است، اما در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است. برعکس، ضریب b در دوره تناوب تابع تأثیرگذار و در مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع بی تأثیر است. مقدار c نیز از آنجا که فقط باعث انتقال نمودار می شود، در دوره تناوب بی تأثیر است و صرفاً در مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع تأثیرگذار است.

توابع $y = a \sin bx + c$ و $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

بنابراین با داشتن ضابطه تابعی به صورت فوق می توان مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب تابع را به دست آورد و برعکس با داشتن مقادیر ماکزیمم، مینیمم و دوره تناوب یک تابع مثلثاتی، می توان ضابطه تابع مورد نظر را به دست آورد.

❖ مثال: دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را مشخص نمایید.

الف) $y = 3 \sin(2x) - 2$ ب) $y = -\frac{1}{4} \cos(\pi x)$

پ) $y = \pi \sin(-x) + 1$ ت) $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$

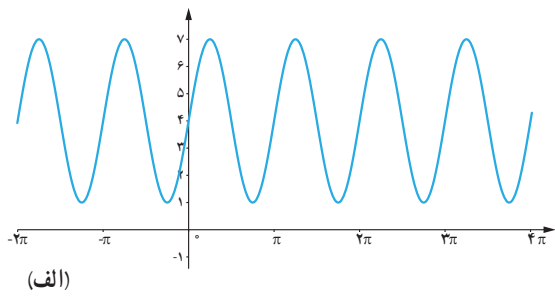
❖ حل:

الف) $\max = |3| - 2 = 1$ $\min = -|3| - 2 = -5$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

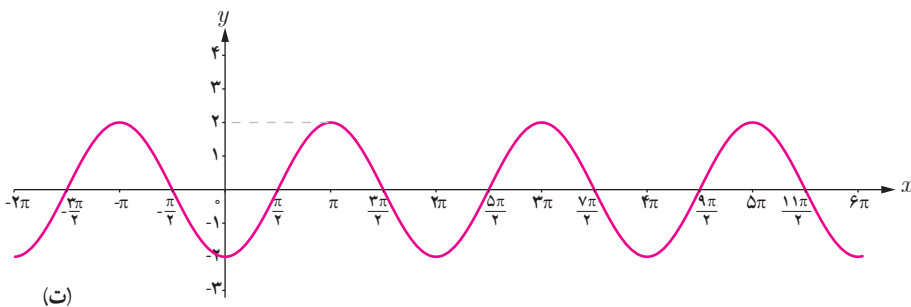
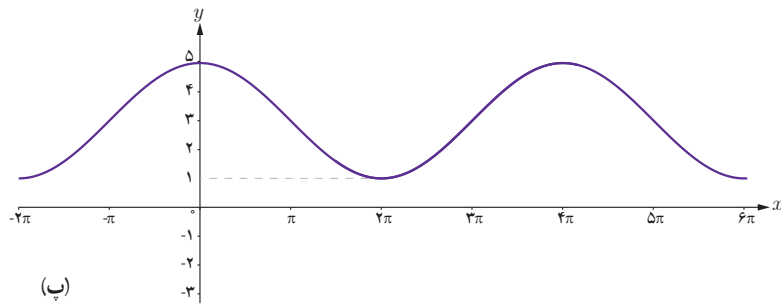
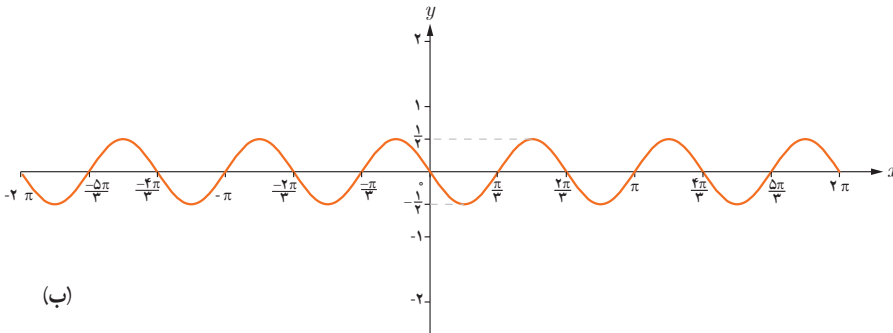
ب) $\max = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}$ $\min = -\left| -\frac{1}{4} \right| = -\frac{1}{4}$ $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

پ) $\max = |\pi| + 1 = \pi + 1$ $\min = -|\pi| + 1 = 1 - \pi$ $T = \frac{2\pi}{|-1|} = 2\pi$

ت) $\max = |8| = 8$ $\min = -|8| = -8$ $T = \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{3} \right|} = 6\pi$



❖ **مثال:** هر یک از نمودارهای داده شده در زیر مربوط به تابعی با ضابطه $f(x) = a \cos bx + c$ یا $f(x) = a \sin bx + c$ است. با دقت در شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص نمایید.



❖ **حل:**

(الف) با توجه به شکل، نمودار تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۷ و ۱ و طول دوره تناوب برابر π است. لذا $T = \frac{2\pi}{|b|} = \pi$ و بنابراین $|b| = 2$.
از طرفی چون مقادیر ماکزیمم و مینیمم به ترتیب $|a| + c$ و $-|a| + c$ است، بنابراین همواره مقدار c میانگین مقادیر ماکزیمم و مینیمم است، داریم $c = 4$ و در نتیجه $|a| = 3$.

با توجه به تأثیری که منفی بودن هر کدام از a و b بر قرینه شدن نمودار تابع نسبت به محورهای x و y دارد، هر دوی a و b باید مثبت باشند لذا ضابطه تابع مورد نظر به صورت مقابل است:

$$y = 3 \sin(2x) + 4$$

(ب) با توجه به نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \sin bx + c$ باشد و با توجه به مقادیر ماکزیمم و مینیمم و دوره تناوب از روی نمودار، $c = 0$ و $|a| = \frac{1}{3}$ و $|b| = 3$ به دست می‌آید که در آن علامت a منفی و b مثبت است.

$$y = -\frac{1}{3} \sin 3x$$

بنابراین داریم:

(پ) با توجه به شکل نمودار، ضابطه تابع مورد نظر می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و مقادیر ماکزیمم و مینیمم آن برابر ۵ و ۱ و طول دوره تناوب برابر 4π است. بنابراین $c = 3$ و $|b| = \frac{1}{4}$ و $|a| = 2$ لذا $a = 2$ و $b = \frac{1}{4}$ و بنابراین داریم

$$y = 2 \cos\left(\frac{x}{4}\right) + 3$$

(ت) ضابطه این نمودار نیز می‌تواند به صورت $y = a \cos bx + c$ باشد و $c = 0$ و $|a| = 2$ و $|b| = 1$ و a منفی و b مثبت است. بنابراین داریم:

$$y = -2 \cos x$$

تائزانت

فعالیت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو خط TAT' در نقطه A بر محور کسینوس‌ها عمود است.

الف) زاویه α را در ربع اول دایره مثلثاتی در نظر می‌گیریم و پاره خط OM را امتداد می‌دهیم تا این خط را در نقطه M' قطع کند. نشان دهید:

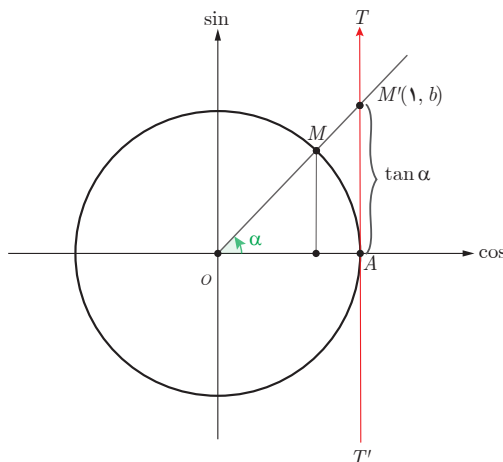
$$\tan \alpha = AM' = b$$

می‌توان دید که تائزانت هر زاویه دلخواه مانند α ، به همین ترتیب از برخورد امتداد ضلع دوم آن زاویه با خط TAT' تعیین می‌شود. بنابراین خط TAT' را محور تائزانت می‌نامیم. نقطه A مبدأ این محور است و جهت مثبت محور، از پایین به سمت بالا است.

(ب) چرا تائزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع اول و سوم قرار دارد مقداری مثبت و تائزانت زوایایی که انتهای کمان آنها در ربع

دوم و چهارم قرار دارد، مقداری منفی است؟

(پ) آیا مقدار $\tan \frac{\pi}{3}$ عددی حقیقی است؟ $\tan \frac{3\pi}{4}$ چگونه؟ به کمک شکل، پاسخ خود را توجیه کنید.



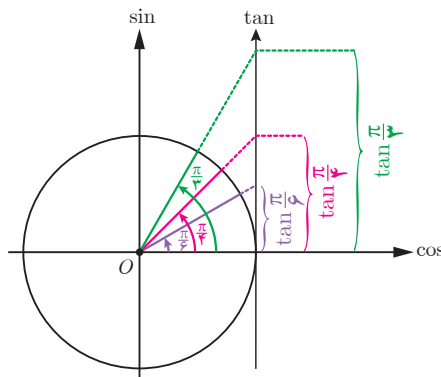
تغییرات تانژانت

فعالیت

با تغییر زاویه α مقادیر تانژانت آن نیز تغییر می‌کند. ابتدا این تغییرات را در ربع اول دایره مثلثاتی بررسی می‌کنیم. اگر $\alpha = 0^\circ$ ، مقدار $\tan \alpha$ نیز برابر صفر است و با افزایش اندازه α ، مقدار $\tan \alpha$ نیز افزایش می‌یابد.

الف) با افزایش مداوم مقادیر زاویه α در ربع اول و نزدیک شدن آن به $\frac{\pi}{2}$ ، مقادیر تانژانت تا چه حد افزایش می‌یابد؟

ب) توضیح دهید اگر عدد حقیقی و مثبت a را داشته باشیم، چگونه می‌توان زاویه‌ای مانند α یافت، به طوری که $\tan \alpha = a$.



کارد کلاسی

الف) با بررسی تغییرات مقادیر تانژانت در ربع‌های دوم، سوم و چهارم مشخص کنید روند این تغییر در هر ربع افزایشی است یا کاهش‌ی؟

ب) بازه تغییرات مقدار تانژانت را در هر ربع بنویسید.

| ربع | دوم | سوم | چهارم |
|-------------------|-------|-------|-------|
| زوايا | | | |
| افزایشی یا کاهششی | | | |
| بازه تغییرات | | | |

پ) جدول زیر را کامل کنید. (علامت \uparrow به معنی افزایش یافتن و علامت \downarrow به معنی کاهش یافتن است.)

| ربع اول | ربع دوم | ربع سوم | ربع چهارم |
|--|--|--|---|
| $\circ \quad \frac{\pi}{6} \quad \frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{3} \quad \frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3} \quad \frac{3\pi}{4} \quad \frac{5\pi}{6}$ | $\pi \quad \frac{7\pi}{6} \quad \frac{5\pi}{4} \quad \frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2} \quad \frac{5\pi}{3} \quad \frac{7\pi}{4} \quad \frac{11\pi}{6} \quad 2\pi$ |
| $\circ \quad \nearrow \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \quad \dots \quad \nearrow +\infty$ | $\dots \quad -1 \quad \dots$ | $\circ \quad \dots \quad \dots \quad \dots$ | $\dots \quad \dots \quad \dots \quad \circ$ |

تابع تانژانت

همان طور که می بینیم به ازای هر زاویه دلخواه در دایره مثلثاتی (به جز $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$), عددی حقیقی به عنوان $\tan \alpha$ داریم و تابعی با ضابطه $y = \tan \alpha$ مشخص می کند. دامنه این تابع مجموعه $D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است و برد آن

مجموعه اعداد حقیقی است. به سادگی می توان دید تابع $y = \tan \alpha$, تابعی متناوب است^۱ و دوره تناوب آن π است، زیرا:

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

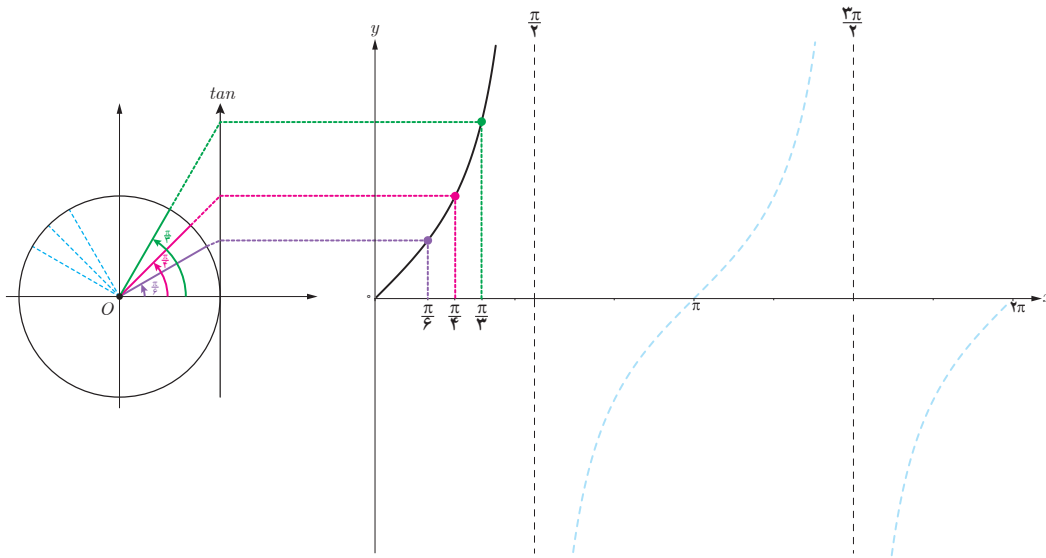
کارد کلاس

صعودی یا نزولی بودن تابع $y = \tan \alpha$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بررسی کنید.

رسم تابع $y = \tan \alpha$

فعالیت

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan \alpha$ در ربع اول رسم شده است. مشابه آن، نمودار این تابع را در ربع های دیگر رسم کنید.



۱- به دست آوردن دوره تناوب توابع شامل \tan مدنظر نیست.

۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم هر یک از توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y = 1 + 2 \sin 4x$

ب) $y = \sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{4} x$

پ) $y = -\pi \sin \left(\frac{x}{4}\right) - 2$

ت) $y = -\frac{3}{4} \cos 3x$

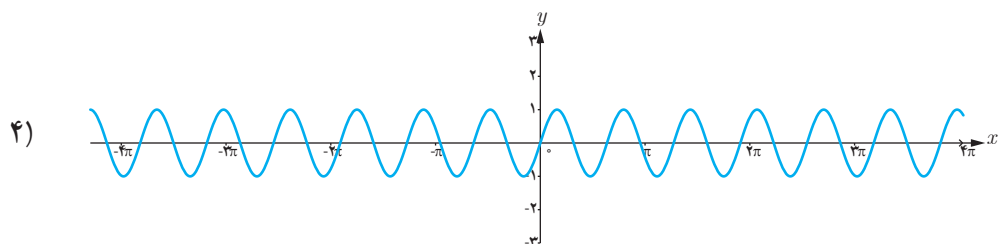
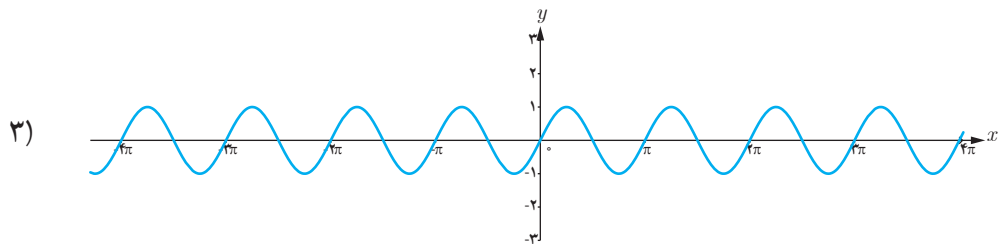
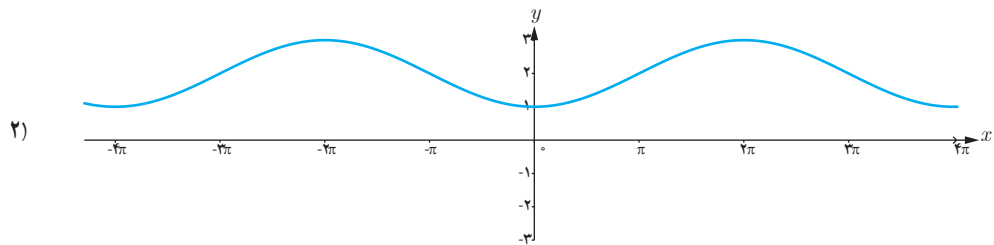
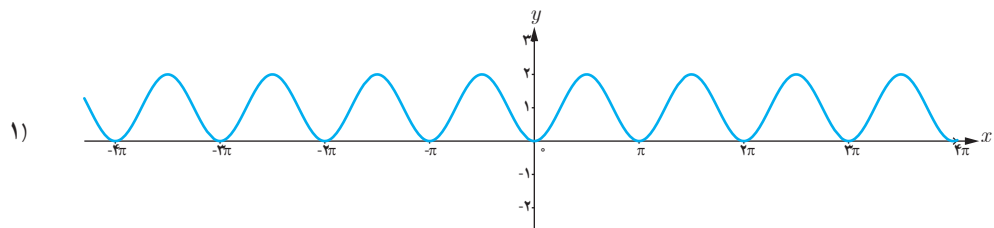
۲ هر یک از توابع داده شده را با نمودارهای زیر نظیر کنید.

الف) $y = \sin \pi x$

ب) $y = 2 - \cos \frac{1}{4} x$

پ) $y = \sin 2x$

ت) $y = 1 - \cos 2x$



۳ در هر مورد ضابطه تابعی مثلثاتی با دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم داده شده بنویسید.

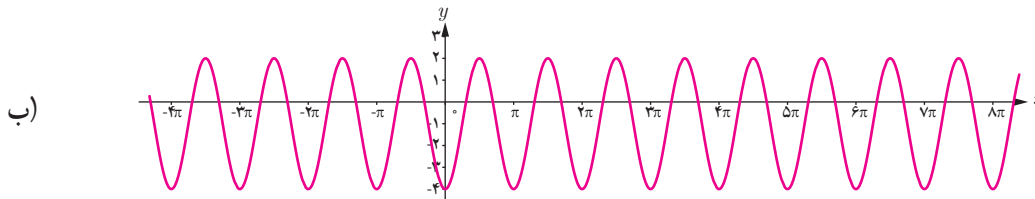
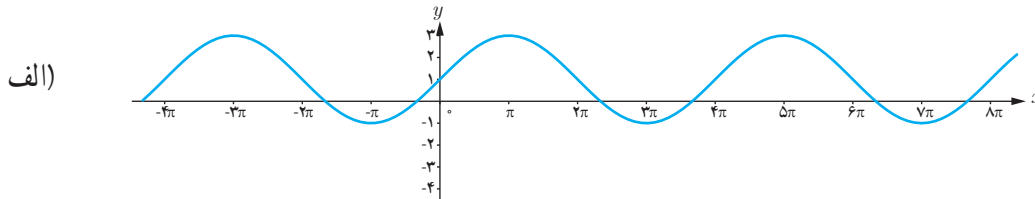
الف) $T = \pi$, $\max = 3$, $\min = -3$

ب) $T = 3$, $\max = 9$, $\min = 3$

پ) $T = 4\pi$, $\max = -1$, $\min = -7$

ت) $T = \frac{\pi}{4}$, $\max = 1$, $\min = -1$

۴ ضابطه مربوط به هر یک از نمودارهای داده شده را بنویسید.



۵ کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

ب) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

پ) می توان بازه ای یافت که تابع تانژانت در آن غیرصعودی باشد.

ت) تابع تانژانت در هر بازه که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۶ با توجه به محورهای سینوس و تانژانت، در موارد زیر مقادیر $\sin \alpha$ و $\tan \alpha$ را با هم مقایسه کنید:

ب) $\frac{3\pi}{4} < \alpha < 2\pi$

الف) $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$