درس ۲

«ریشهٔ nاُم و توان گویا»

تاکنون با مفهوم توان‌های صحیح اعداد و نحوهٔ ریشه‌گیری دوم و سوم آنها آشنا شده‌اید.
فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا ضمن مرور آنچه تاکنون دربارهٔ اعداد توان‌دار و ریشه‌های دوم و سوم اعداد یاد گرفته‌اید، با مفهوم ریشه‌های چهارم، پنجم و ... اعداد حقیقی و نحوهٔ محاسبهٔ آنها آشنا شوید.

فعالیت

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$۷۳^{۱}=$ $\quad$ $(\frac{۲}{۵})^{۴}=$ $\quad$ $(۲)^{-۷}=$ $\quad$ $۴^{۳}=$

$(۱\frac{۱}{۲})^{۰}=$ $\quad$ $(۰/۰۱)^{۵}=$ $\quad$ $-۳^{۶}=$ $\quad$ $(-۳)^{۶}=$

۲. الف) مانند نمونه، حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌صورت عدد توان‌دار بنویسید و در جدول در جای مناسب قرار دهید. (m و n اعداد صحیح و a و b اعداد حقیقی مخالف صفرند)

$(۲/۱)^{۶}\times(\frac{۲۱}{۱۰})\times(۲\frac{۱}{۱۰})^{۴}=(۲/۱)^{۱۱}$ $\quad$ $(-۳۶)^{۷}\div ۹^{۷}=$

$(۱۰^{۶})^{۸}=$ $\quad$ $(\frac{۴}{۷})^{۵}\div(\frac{۴}{۷})^{۸}=$ $\quad$ $(-۴)^{۳}\times(-۵)^{۳}=$

$a^m . a^n = a^{m+n}$	$(۲/۱)^۶ \times (\frac{۲۱}{۱۰}) \times (۲\frac{۱}{۱۰})^۴ = (۲/۱)^{۱۱}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	
$a^m . b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	$(-۳۶)^۷ \div ۹^۷ =$
$(a^m)^n = a^{mn}$	

ب) مانند نمونه، برای هر یک از رابطه‌ها یا مثال‌های زیر، رابطه یا مثال متناظر بنویسید.

$a^m . a^n = a^{m+n}$	$۵^۷ \times ۵^۸ = ۵^{۷+۸} = ۵^{۱۵}$
	$۹^{۱۰} \div ۹^۶ = ۹^{۱۰-۶} = ۹^۴$
$a^m . b^m = (ab)^m$	
$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$	
	$(۲^۳)^۴ = ۲^{۳\times۴} = ۲^{۱۲}$

۳. همان‌طور که می‌دانید، اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد، $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ ریشه‌های دوم عدد a هستند. به عبارت دیگر، ریشه‌های دوم عدد a همان ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ = a$ هستند. برای مثال، ریشه‌های دوم عدد ۱۶ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ = ۱۶$ می‌باشند و چون $۱۶=۴^۲$ و $۱۶=(-۴)^۲$، پس ۴ و ۴− یا $\sqrt{۱۶}$ و $-\sqrt{۱۶}$ ریشه‌های دوم عدد ۱۶ هستند. همچنین، ریشهٔ سوم عدد حقیقی مانند a، ریشهٔ معادلهٔ $x^۳ = a$ است. برای مثال، ریشهٔ سوم عدد ۲۷، ریشهٔ معادلهٔ $x^۳=۲۷$ است که برابر ۳ می‌باشد.

با همین استدلال، ریشهٔ پنجم عدد ۳۲−، پاسخ معادلهٔ $x^۵=-۳۲$ است که برابر ______ و ریشه‌های ششم عدد ۶۴، ریشه‌های معادلهٔ $x^۶=$ ______ هستند که برابر ۲+ و ۲− می‌باشند.

جدول صفحهٔ بعد را مانند نمونه کامل کنید.

a عدد	۶۴	-۶۴
ریشه‌های چهارم	$\sqrt[۴]{۶۴}\,,\,-\sqrt[۴]{۶۴}$	وجود ندارد
$\sqrt[۴]{a}$	$\sqrt[۴]{۶۴}$	وجود ندارد
ریشه پنجم	$\sqrt[۵]{۶۴}$	$\sqrt[۵]{-۶۴}$
$\sqrt[۵]{a}$		
ریشه‌های ششم		
$\sqrt[۶]{a}$		
....		
....		

اگر $n \geq ۲$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک ریشهٔ nاُم عدد a می‌نامیم، هرگاه : $b^n = a$.
همچنین $\sqrt[n]{a}$ ، وقتی n زوج است، ریشهٔ nاُم مثبت عدد a است.

در حالت کلی‌تر، دربارهٔ ریشه‌های nاُم $(n \in \mathbb{N})$ عددی مانند a می‌توان گفت :

a ریشهٔ nاُم $= \sqrt[n]{a}\,,\,-\sqrt[n]{a}$	n زوج باشد	$a \geq ۰$
a ریشهٔ nاُم $= \sqrt[n]{a}$	n فرد باشد	
ریشه ندارد	n زوج باشد	$a < ۰$
a ریشهٔ nاُم $= \sqrt[n]{a}$	n فرد باشد	

کار در کلاس

۱ــ با توجه به جدول بالا، مانند نمونه برای هر یک از موارد خواسته شده مثالی بیاورید و آن را حل کنید. مقدار تقریبی هر یک از مثال‌ها را می‌توانید به کمک ماشین حساب به‌دست آورید.

n زوج است و $a \ge ۰$: $a=۲۵,\ n=۸ \Rightarrow$ ریشه‌های ۸اُم عدد ۲۵ = $\sqrt[۸]{۲۵} \simeq ۱/۴۹۵ \ ,\ -\sqrt[۸]{۲۵} \simeq -۱/۴۹۵$

n فرد است و $a \ge ۰$: $a= \quad ,\ n= \quad \Rightarrow$

n زوج است و $a < ۰$: $a= \quad ,\ n= \quad \Rightarrow$

n فرد است و $a < ۰$: $a= \quad ,\ n= \quad \Rightarrow$

۲. با توجه به اینکه $\sqrt{a^{۲}}=|a|$ و $\sqrt[۳]{a^{۳}}=a$ ، این رابطه در حالت کلی نیز برای هر $n \ge ۲$ برقرار است؛ یعنی :

$$\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} |a| & \text{زوج است } n \\ a & \text{فرد است } n \end{cases}$$

برای مثال، $\sqrt[۱۰]{(-۱۵)^{۱۰}}=|-۱۵|=۱۵$ و $\sqrt[۵]{(-\frac{۸}{۳})^{۵}}=-\frac{۸}{۳}$ ، همچنین $\sqrt[۴]{(-۳)^{۴}}=$ ______ و $\sqrt[۱۲]{(\quad)^{۱۲}}=۵$

توان‌های گویا

سهام‌داران یک شرکت تولیدکنندهٔ محصولات فرهنگی از مدیر عامل این شرکت خواستند که جهت برنامه‌ریزی برای توسعهٔ شرکت گزارش عملکرد شرکت طی سال‌های قبل را ارائه کند. مدیرعامل در جلسهٔ ارائهٔ گزارش اعلام کرد که طی سال‌های قبل، سود سالانهٔ شرکت ۲۰ درصد بوده است و پیش‌بینی کرد که این سود در سال‌های آینده نیز محقق شود.

اگر سرمایهٔ شرکت را ۱۰۰ میلیون تومان، سود سالانهٔ آن را ٪۲۰ و میزان درآمد را در تمام مدت یک سال، یکسان در نظر بگیریم، سهام‌داران شرکت می‌توانند با استفاده از فرمول زیر، سرمایهٔ شرکت را طی سال‌های آینده برآورد کنند :

سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $=۱۰۰\times(۱/۲)^{t}$ ⟵ زمان (برحسب سال)

برای مثال، پس از گذشت یک سال و دو سال به ترتیب می‌توان سرمایهٔ شرکت را به‌صورت زیر حساب کرد :

پس از گذشت یک سال : سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $=۱۰۰\times(۱/۲)^{۱}=۱۲۰$

پس از گذشت ۲ سال : سرمایهٔ شرکت (بر حسب میلیون تومان) $=۱۰۰\times(۱/۲)^{۲}=۱۴۴$

حال اگر سهام‌داران این شرکت می‌خواستند سرمایهٔ شرکت را در مدتی کمتر از یک سال، برای مثال ۶ ماه بعد (نیم سال) یا ۲۰۰ روز بعد، محاسبه کنند چگونه می‌توانستند این کار را انجام دهند؟

تا اینجا شما با توان‌های صحیح و نحوهٔ کاربرد آنها در محاسبات آشنا شدید اما در حل و مدل‌سازی بسیاری از مسائل واقعی نیاز به استفاده از توان‌های غیر صحیح همانند توان‌های گویاست. در ادامه، با مفهوم توان‌های گویا و نحوهٔ استفاده از آنها در محاسبات آشنا می‌شوید.

فعالیت

۱. پدر محمد زیست‌شناس است و در آزمایشگاه روی باکتری‌ها کار می‌کند. روزی او محمد را با خود به محل کارش برد و نوعی باکتری را در زیر میکروسکوپ، نشانش داد که در شرایط آزمایشگاهی در هر ساعت جرم آن ۲ برابر می‌شود. سپس، از محمد خواست که جرم اولیهٔ باکتری را یک گرم در نظر بگیرد و جدول زیر را کامل کند. شما نیز به او در کامل کردن جدول کمک کنید.

زمان (ساعت)	۱	۲	۳		۵		۷	___	t
جرم (گرم)				$۲^۴=۱۶$		$۲^۶=۶۴$		___	۲^t

محمد پس از کامل کردن جدول، از پدرش پرسید: آیا حتماً باید تا پایان ساعت منتظر شویم و نمی‌توانیم جرم باکتری را در کمتر از یک ساعت به‌دست آوریم؟ برای مثال، جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود؟

پدر محمد: نظر خودت دربارهٔ جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چیست؟

محمد: مطمئن نیستم ولی حدس می‌زنم که $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم شود، اما مقدار $۲^{\frac{۱}{۲}}$ را نمی‌دانم چقدر می‌شود؛ چون تمام توان‌هایی که ما تاکنون یاد گرفته‌ایم، توان‌های صحیح بوده‌اند.

پدر محمد به صورت زیر به او نشان داد که جرم باکتری‌ها پس از نیم ساعت چقدر می‌شود و او را با توان‌های گویا آشنا کرد:

اگر فرض کنیم جرم باکتری‌ها در هر نیم ساعت a برابر شود، بعد از یک ساعت برابر $a \times a = a^۲$ می‌شود.

با توجه به جدولی که کامل کردی، داریم: $a^۲=۲$ یعنی $a=\sqrt{۲}$. (زیرا a مثبت است.) بنابراین، پس از نیم ساعت جرم باکتری‌ها $\sqrt{۲}$ گرم خواهد شد.

حالا می‌خواهیم بدانیم آیا می‌توانیم $\sqrt{۲}$ را به‌صورت توانی از ۲ بنویسیم.

معادلهٔ $\sqrt{۲}=۲^b$ را در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم مقدار b را به‌دست آوریم.

$\sqrt{۲} = ۲^b \xRightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم}} (\sqrt{۲})^۲ = (۲^b)^۲ \Rightarrow ۲ = ۲^{۲b} \Rightarrow ۲^۱ = ۲^{۲b} \Rightarrow ۲b = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲}$

بنابراین، داریم : $\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۱}{۲}}$

پس، جرم باکتری‌ها بعد از نیم ساعت ($\frac{۱}{۲}$ ساعت)، $۲^{\frac{۱}{۲}}$ گرم خواهد بود و حدس شما درست است. حالا بعد از پانزده دقیقه، جرم باکتری‌ها چند گرم خواهد شد؟

محمد : چون پانزده دقیقه، $\frac{۱}{۴}$ ساعت است، پس $۲^{\frac{۱}{۴}}$ گرم یا $\sqrt[۴]{۲}$ گرم خواهد بود.

حالا شما مانند محمد جرم باکتری‌ها را در زمان‌های داده شده به‌دست آورید.

= پس از ۲۰ دقیقه (—— ساعت) $= \sqrt[۶]{۲}$ $\quad$ = پس از ۱۰ دقیقه ($\frac{۱}{۶}$ ساعت)

برای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، توان $\frac{۱}{n}$ عدد حقیقی مثبت a را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

در این کتاب اگر $a < ۰$ ، $a^{\frac{۱}{n}}$ را تعریف نمی‌کنیم. برای مثال، عبارت‌هایی مانند $(-۲)^{\frac{۱}{۲}}$ و $(-۱)^{\frac{۱}{۳}}$ را تعریف نمی‌کنیم. همچنین، هرجا عبارت‌های $a^{\frac{۱}{n}}$ بیان می‌شود، a را عددی مثبت در نظر می‌گیریم.

۲. در خصوص توان‌های صحیح اعداد دیدید که : $\quad ۲^۶ = ۲^{۲\times۳} = (۲^۲)^۳$

دربارهٔ توان‌های گویای اعداد نیز می‌توانیم به طریقی مشابه عمل کنیم :

$$۷^{\frac{۵}{۴}} = ۷^{۵\times\frac{۱}{۴}} = (۷^۵)^{\frac{۱}{۴}} = \sqrt[۴]{۷^۵} \qquad ۳^{\frac{۲}{۳}} = ۳^{۲\times\frac{۱}{۳}} = (۳^۲)^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۳^۲}$$

و به‌طور کلی، داریم :

هرگاه $a > ۰$، برای دو عدد طبیعی m و n، $a^{\frac{m}{n}}$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{۱}{n}})^m = (a^m)^{\frac{۱}{n}}$$

بنابراین، $a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

همچنین $a^{-\frac{m}{n}}$ نیز به این صورت تعریف می‌شود :

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{۱}{a^{\frac{m}{n}}}$$

اعداد توان‌دار زیر را به شکل رادیکالی بنویسید.

$۱۲^{-\frac{۲}{۱۱}} =$ $\qquad$ $۶^{\frac{۷}{۹}} =$ $\qquad$ $۵^{\frac{۳}{۴}} =$

$(۰/۰۰۱)^{\frac{۱۴}{۴}} =$ $\qquad$ $(۲\frac{۱}{۳})^{-\frac{۸}{۳}} =$

روابطی که در ابتدای درس دربارهٔ توان‌های صحیح اعداد یادآوری شد، درخصوص توان‌های گویا و حقیقی[1] اعداد حقیقی مثبت نیز برقرار است.

(m و n اعداد حقیقی و a و b اعداد حقیقی مخالف صفر هستند.)

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m.b^m = (ab)^m$$

$$\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

کار در کلاس

۱. هر یک از عبارت‌های توانی زیر را به‌صورت رادیکالی و عبارت‌های رادیکالی را به‌صورت توان‌دار بنویسید.

$\sqrt[۳]{۲۵} =$ $\qquad$ $۷^{\frac{۱}{۸}} =$ $\qquad$ $۳^{\frac{۱}{۴}} =$

$\sqrt[۱۰]{۱} =$ $\qquad$ $(۰/۳۱)^{\frac{۱}{۲}} =$ $\qquad$ $\sqrt[۱۲]{۲/۷} =$

۲. با توجه به مسئلهٔ بیان شده در ابتدای معرفی توان‌های گویا، سرمایهٔ شرکت مذکور را مانند نمونه در هر یک از زمان‌های خواسته شده به‌دست آورید.

: ۳سال و ۶ ماه بعد

۶ماه ($\frac{۱}{۲}$ سال) بعد : $۱۰۰ \times (۱/۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۱۰۰ \times \sqrt{۱/۲}$

: ۱ سال و ۲ ماه بعد

۲۰۰ روز بعد :

۱ـ در این کتاب، تمامی توان‌های اعداد، گویا هستند.

۳. مانند نمونه، هر یک از اعداد توان‌دار زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$۴^{\frac{۱}{۲}} = (۲^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = ۲^{۲\times\frac{۱}{۲}} = ۲$

$۱۲۵^{-\frac{۱}{۳}} =$

$۱۰۰^{\frac{۱}{۲}} =$

$۳۲^{\frac{۱}{۵}} =$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$-۴(۱۰۰۰)^{\frac{۱}{۳}} =$

$(۲\times ۸)^{\frac{۱}{۴}} =$

$۷^{\frac{۳}{۴}}\times ۷^{\frac{۵}{۴}} =$

$۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۲}{۳}} =$

$۸^{\frac{۲}{۷}}\times (۱/۵)^{\frac{۲}{۷}} =$

$۱۲۵^{\frac{۲}{۳}}\div ۱۲۵^{\frac{۱}{۴}} =$

۵. دانش‌آموزی $\sqrt[۳]{-۸}$ را به‌صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ نوشت. توضیح دهید که چرا نمایش $\sqrt[۳]{-۸}$ به‌صورت $(-۸)^{\frac{۱}{۳}}$ نادرست است.

تمرین

۱. با استفاده از تعریف توان‌های گویا نشان دهید که $\sqrt{۵}$ ، $\sqrt[۴]{۵^{۲}}$ ، $\sqrt[۶]{۵^{۳}}$ با هم برابرند.

۲. حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (a، m و n اعداد حقیقی مثبت‌اند.)

$(۲^{۶})^{\frac{۱}{۳}} =$

$۸^{\frac{۱}{۲}}\times ۲^{\frac{۱}{۲}} =$

$۵^{\frac{۱}{۴}}\times ۵^{(-\frac{۱}{۴})} =$

$۳^{\frac{۱}{۳}}\times ۳^{\frac{۱}{۴}} =$

$(m^{\frac{۳}{۴}}.n^{\frac{۱}{۲}})^{۲}(m^{۲}n^{۳})^{\frac{۱}{۲}} =$

$۳^{۰/۲۶}\times ۳^{۰/۷۴} =$

$\left(\dfrac{a^{-\frac{۱}{۲}}}{a^{-\frac{۱}{۴}}}\right)^{-۴} =$

$(\frac{۳^{۴}}{۲^{۶}})^{\frac{۱}{۲}} =$

۳. در هر یک از تساوی‌های زیر، مقدار x را مشخص کنید.

$(۰/۳۶)^{۴} \times (۰/۳۶)^{x} \times (۰/۳۶)^{-۶} = (۰/۳۶)^{۷}$

$۸^{x} \times ۹^{۵} = ۷۲^{۵}$

$\dfrac{x^{۵} \times ۱۵^{۳}}{۳^{۲} \times ۳^{۵} \times ۳} = ۵^{۸}$

$(۲^{x})^{۶} = \dfrac{۱}{۳^{۲}}$

۴. همان‌طور که می‌دانید، حجم کره‌ای به شعاع r با استفاده از فرمول $v = \dfrac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ (v حجم کره) به‌دست می‌آید.

الف) توضیح دهید که چگونه می‌توان با استفاده از مفهوم ریشه‌گیری و توان‌های گویا، شعاع کره‌ای به حجم v را از فرمول زیر به‌دست آورد.

$r = (\dfrac{۳v}{۴\pi})^{\frac{۱}{۳}}$

ب) شعاع این تانکر کره‌ای شکل را که حجم آن $\dfrac{۳۲\pi}{۳}$ است، به‌دست آورید.

۵. اگر D قطر جعبهٔ زیر باشد، اندازهٔ آن از طریق تابع $D = (L^{۲} + W^{۲} + H^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ (L طول، W عرض و H ارتفاع جعبه) به‌دست می‌آید.

الف) با توجه به شکل، اندازهٔ D را به‌دست آورید.

ب) اگر اندازهٔ $L=W=H=۱\,m$ باشد، اندازهٔ D را به‌دست آورید.