

فصل ۳- الگوهای غیر خطی

دنباله هندسی

درس ۱

توان های گویا

درس ۲

تابع نمایی

درس ۳



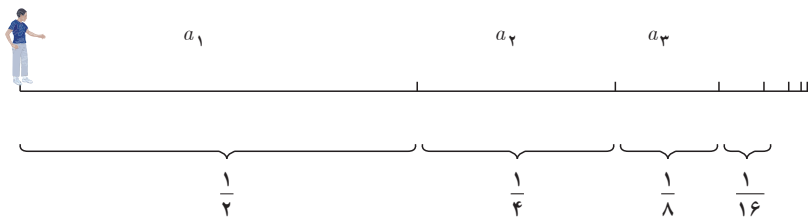
توابع نمایی در مدل سازی بسیاری از پدیده های واقعی از جمله، رشد جمعیت، زوال مواد رادیو اکتیو و استفاده از آن در تعیین طول عمر فسیل ها، بیماری های واگیردار، شدت اصوات و زلزله ها کاربرد دارد.

درس ۱

دنباله هندسی^۱

آیا ممکن است پس از پایان کلاس ریاضی امروز و شنیدن صدای زنگ تفریح، هنگامی که از جای خود بلند می‌شوید و بدون توقف به سمت در کلاس حرکت می‌کنید هیچ‌گاه به در خروجی نرسید؟
این مسئله‌ای است که فیلسوف یونانی، زنو^۲، بیش از دو هزار سال پیش مطرح کرد و به پارادکس زنو معروف است. او چنین استدلال کرد:

زمانی که از جای خود بلند می‌شوید تا به در خروجی برسید ابتدا نصف مسافت تا در خروجی را طی می‌کنید و سپس نصف مسیر باقی‌مانده را طی می‌کنید و به همین ترتیب، نصف مسیر باقی‌مانده و... و این روند همیشه ادامه خواهد داشت.



بنابراین، هیچ‌گاه به در خروجی نخواهید رسید! زیرا هر چند هرکدام از فاصله‌ها نصف فاصله پیشین است، هیچ‌کدام از این فاصله‌ها صفر نخواهند شد و همواره مسافتی وجود دارد که باید طی شود.
به بیان دیگر، اگر با سرعتی ثابت بخواهیم بدون توقف در کلاس به در خروجی برسیم و فرض کنیم برای طی مسافت a_1 زمان t لازم بوده است پس برای طی مسافت a_2 به زمان $\frac{t}{2}$ و نیاز داریم. بنابراین:

$$T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

و چون جملات دنباله \dots و $\frac{t}{4}$ و $\frac{t}{2}$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شوند، پس T از مجموع بی‌شمار جمله تشکیل شده است؛ از این رو مقدار T نیز بی‌نهایت خواهد بود!

بیش از دو هزار سال زمان نیاز بود تا به این تناقض پاسخ قطعی داده شود^۳. حل این مسئله در ریاضی به ایجاد شاخه‌ای به نام «سری‌های هندسی و محاسبه مجموع آنها» انجامید که در ادامه این درس برخی از مفاهیم آن را بیان خواهیم کرد. با بیان این مفاهیم، نگرانی شما نیز حل می‌شود و درمی‌یابید که چرا به در خروجی کلاستان خواهید رسید.

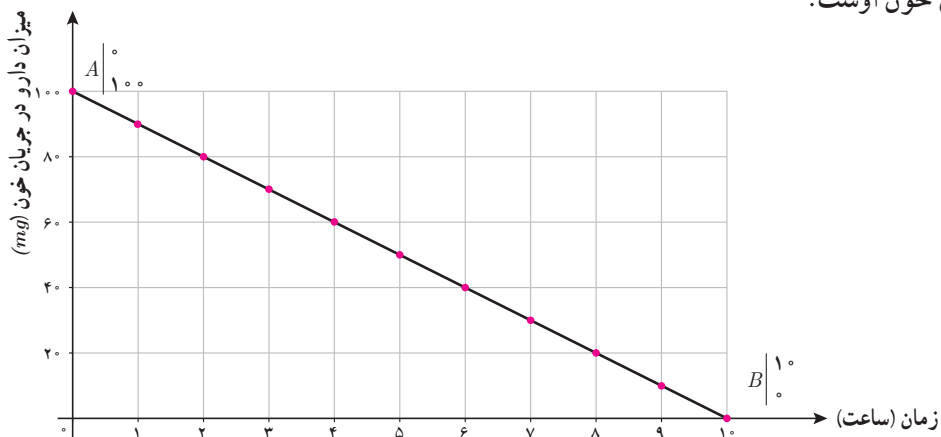
۱. Geometric Sequence

۲. Zeno's Paradox

۳. در سال ۱۸۱۲ گاوس و به دنبال او کوشی پس از تحقیقاتی که از سال‌ها پیش ریاضی‌دان‌هایی مانند مرکاتور، برونکور، نیوتن و اوپلر از اواخر قرن هفدهم شروع کرده بودند، نتایجی دقیق برای حل این مسائل یافتند.

فعالیت

همان طور که در فعالیت صفحه ۶۸ گفته شد، پس از مصرف بعضی از داروها، ماده مؤثر آنها با سرعتی ثابت از خون حذف می‌شود. برای مثال، اگر فرض کنیم بدن یک شخص پس از مصرف 100° میلی‌گرم از داروی A، در هر ساعت 10° میلی‌گرم آن را حذف کند، نمایش دنباله کاهشی زیر بیانگر میزان داروی موجود در بدن این شخص از لحظه مصرف دارو تا لحظه تمام شدن دارو در جریان خون اوست.



اگر a_n میزان مصرف دارو در بدن شخص n ساعت پس از مصرف باشد، با توجه به کاهش 10° میلی‌گرم دارو در بدن شخص در هر ساعت:

$$a_1 = 90^\circ \quad a_{n+1} = a_n - 10^\circ$$

پس، برای تعیین ضابطه تابعی دنباله با استفاده از نمودار رسم شده:

$$m_{AB} = \frac{0 - 100^\circ}{10 - 0} = -10^\circ$$

$$h = 100^\circ = \text{عرض از مبدأ} \Rightarrow a_n = -10^\circ n + 100^\circ$$

ضابطه تابعی دنباله را به کمک رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ (جمله عمومی دنباله) نیز می‌توان مشخص کرد؛ زیرا:

$$a_1 = 90^\circ \Rightarrow a_n = 90^\circ + (n-1)(-10^\circ) \Rightarrow a_n = -10^\circ n + 100^\circ$$

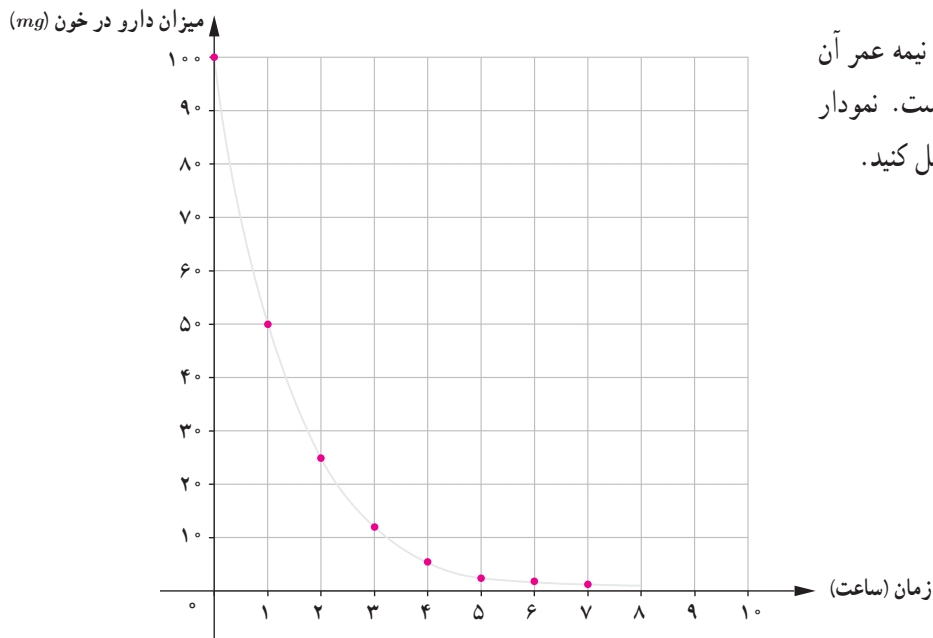
$d = -10^\circ$: کاهش ثابت 10° میلی‌گرم در هر ساعت پس از مصرف دارو

میزان حذف دارو و ماده مؤثر آن در خون عموماً، مانند مثال بالا، با سرعت ثابت از جریان خون حذف نمی‌شود^۱ و در تعداد زیادی از داروها ماده مؤثر یک دارو با توجه به «نیمه عمر ماده مؤثر^۲» دارو در بدن کاهش می‌یابد. فعالیت صفحه بعد، تأثیر مفهوم نیمه عمر را در ضابطه تابعی دنباله مشخص می‌کند.

۱. اثر این دارو را First Zero Kinetics می‌نامند.

۲. نیمه عمر یک دارو (Half-life medicine) مدت زمانی است که میزان دارو در خون به نصف میزان اولیه از زمان مصرف دارو کاهش می‌یابد. نیمه عمر یک دارو را با $t_{1/2}$ نشان می‌دهند.

فعالیت



شخصی 10° میلی گرم از دارویی که نیمه عمر آن یک ساعت است، مصرف کرده است. نمودار «میزان دارو در خون - زمان» را کامل کنید.

الف) میزان دارو در بدن شخص پس از چند نیمه عمر، کمتر از 2° میلی گرم خواهد بود؟ آیا می توانید مشخص کنید میزان دارو در بدن شخص در چه زمانی صفر خواهد شد؟ چرا؟

ب) اگر a_n میزان داروی موجود در بدن شخص پس از n امین نیمه عمر باشد، رابطه بازگشتی میزان دارو در بدن شخص چگونه است؟

با توجه به تعریف دنباله a_n و نیز تعریف نیمه عمر، هر جمله دنباله از حاصل ضرب عدد ثابت در جمله پیشین به دست می آید؛ یعنی:

$$a_1 = 5^\circ \quad a_{n+1} = \dots \dots \dots a_n$$

ج) ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 = 5^\circ \quad a_2 = \frac{1}{2} \times 5^\circ \quad a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 5^\circ \right) = \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 5^\circ \quad a_4 = \dots \dots \dots$$

$$\Rightarrow a_n = \dots \dots \times 5^\circ$$

خواندنی

دانستن نیمه عمر دارویی در پزشکی بسیار اهمیت دارد. برای مثال:

– در درمان بیماری های عفونی، آنتی بیوتیک مصرف شده باید در مدت زمانی مشخصی با میزان تقریباً ثابتی در جریان خون بیمار وجود داشته باشد.

– در درمان فشار خون یا مشکلات کلسترول خون، دارو باید در تمام شبانه روز به یک میزان در بدن وجود داشته باشد.

– کسانی که برای خواب بهتر در شب از قرص های آرام بخش استفاده می کنند باید در طول روز شاداب و سر حال باشند و دارو در خون آنها از میزان مشخصی کمتر باشد.

به دنباله‌هایی از اعداد که هر جمله‌شان به جز جمله اول از ضرب یک عدد ثابت مخالف صفر در جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله هندسی گفته می‌شود. عدد ثابت را نسبت مشترک^۱ می‌نامند و عموماً با r نشان می‌دهند.

یک دنباله هندسی، دنباله‌ای به صورت

$$a, ar, ar^2, ar^3, \dots$$

است که در آن $a \neq 0$ جمله اول و $r \neq 0$ نسبت مشترک دنباله است. جمله n ام این دنباله هندسی از رابطه $a_n = a_1 r^{n-1}$ به دست می‌آید.

کار در کلاس

۱. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	نسبت مشترک	پنج جمله اول	ضابطه بازگشتی	جمله عمومی دنباله
$a_1 = 1$	$r = \frac{1}{3}$	$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}$	$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ $a_1 = 1$	$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
$a_1 = \frac{1}{81}$	$r = \frac{3}{2}$			
$a_1 = 4$	$r = -\frac{1}{4}$		$a_{n+1} = \left(-\frac{1}{4}\right)a_n$ $a_1 = 4$	
		$1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}$		
				$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

۲. با توجه به جدول بالا، در هر دنباله هندسی به صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ با فرض $a_1 > 0$:

- الف) اگر $0 < r < 1$ ، دنباله a_n ، افزایشی کاهشی ثابت است.
- ب) اگر $r > 1$ ، دنباله a_n ، افزایشی کاهشی ثابت است.
- ج) اگر $r = 1$ ، دنباله a_n ، افزایشی کاهشی ثابت است.

۱. Common ratio

کار در کلاس

ضابطه بازگشتی دنباله هندسی a, ar, ar^2, ar^3, \dots را مشخص کنید.

کار در کلاس

(هزینه استهلاک)^۱ — شخصی یک یخچال فریزر به قیمت ۹۶۰ هزار تومان خریده است. هزینه استهلاک این یخچال هر سال معادل ۱۰٪ ارزش سال پیش آن است. اگر v_n ارزش یخچال فریزر در سال n ام باشد:

الف) ضابطه تابعی دنباله v_n را به دست آورید.

با توجه به هزینه استهلاک ۱۰٪، ارزش یخچال فریزر در هر سال ۹۰٪ سال قبل خواهد بود؛ یعنی:

$$v_1 = 960,000 \quad v_2 = 960,000 \times \frac{90}{100} = \dots \quad v_3 = \dots \quad v_n = \dots$$

ب) بیشترین کاهش ارزش یخچال فریزر در چه سالی است؟ آیا می‌توانید کمترین کاهش ارزش آن را مشخص کنید؟ چرا؟
با توجه به اینکه ارزش یخچال در هر سال ۱۰٪ کاهش می‌یابد، هر چه ارزش آن بیشتر باشد میزان ۱۰٪ آن بیشتر خواهد بود.
بنابراین ...

ج) چرا ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر نمی‌شود؟ با چه فرضی ارزش یخچال پس از ۱۰ سال صفر می‌شود؟ ضابطه v_n را به گونه‌ای بنویسید که ارزش یخچال فریزر پس از ده سال صفر شود. دنباله v_n در این حالت حسابی است یا هندسی؟

د) اگر مطابق فرض مسئله، شخص بخواهد یخچال فریزر را زمانی بفروشد که ارزش آن کمتر از نصف قیمت خریداری شده باشد، چند سال پس از خرید باید آن را بفروشد؟

(راهنمایی: با توجه به قیمت خرید اولیه، ۹۶۰ هزار تومان، نصف ارزش آن ۴۸۰ هزار تومان است. پس، باید نخستین عدد n را که نامساوی $v_n < 480,000$ را تأمین می‌کند، مشخص کنیم.)

ه) با توجه به قسمت‌های ب و ج، تفاوت حالتی که از جملات دنباله در هر مرحله، k واحد کسر شود، با حالتی که k درصد از آن کسر شود چیست؟ کدام حالت بیانگر یک دنباله حسابی و کدام حالت بیانگر یک دنباله هندسی است؟

۱. Depreciation Cost

کار در کلاس

طبق آزمایش‌های انجام شده، نیمه‌عمر ماده کافئین برای یک شخص بالغ و سالم شش ساعت است. اگر یک لیوان بزرگ چای سیاه یا یک فنجان قهوه ۸۰ میلی‌گرم کافئین داشته باشد، پس از چند نیمه‌عمر یا چند ساعت یک شخص می‌تواند چای یا قهوه مصرف کند؟ (با در نظر گرفتن اینکه اگر میزان کافئین در بدن کمتر از ۵/۰ میلی‌گرم باشد، هیچ نوع وابستگی به این ماده در بدن ایجاد نمی‌شود.)

خواندنی

امروزه چای و قهوه از محبوب‌ترین نوشیدنی‌ها در میان مردم در تمام کشورها و فرهنگ‌ها هستند. هر دوی این نوشیدنی‌ها باعث تمرکز بیشتر، جلوگیری از خواب‌آلودگی و رفع خستگی می‌شوند. تمامی این تأثیرها به سبب وجود ماده کافئین در آنهاست. البته باید بدانیم که مصرف متعادل این نوشیدنی‌ها مفید است ولی وارد شدن بیش از اندازه کافئین به بدن منجر به اضطراب، تپش قلب، بی‌خوابی و... می‌گردد. مصرف بیش از اندازه آن به نوعی در افراد ایجاد وابستگی و عادت می‌کند؛ تا جایی که اگر این نوشیدنی‌ها را مصرف نکنند، دچار مشکلاتی چون سردرد می‌شوند. یکی از دلایل توصیه پزشکان به پرهیز از نوشیدن چای و قهوه، همین وابستگی و تأثیرات منفی نوشیدن بیش از اندازه آنهاست. توجه به نیمه‌عمر ماده کافئین می‌تواند راهنمای خوبی برای مصرف صحیح این نوشیدنی‌ها باشد.



فعالیت

برای درمان شخصی که مبتلا به نوعی گلودرد عفونی است، پزشک معالج قرص‌های آنتی‌بیوتیک حامل 80 میلی‌گرم آنتی‌بیوتیک تجویز کرد. با توجه به اینکه نیمه‌عمر این آنتی‌بیوتیک هشت ساعت است، شخص بیمار باید در پایان هر هشت ساعت پس از خوردن قرص پیشین، این قرص‌ها را مصرف کند.

الف) با کامل کردن جدول زیر، میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار را پس از سه و شش بار مصرف قرص مشخص کنید.
ب) با یک «رابطه بازگشتی» میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص بیمار را پس از n بار مصرف قرص مشخص کنید.

ج) آیا می‌توانید میان تعداد قرص مصرفی و میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار رابطه‌ای مشخص کنید؟ (ضابطه تابعی دنباله)
د) با جای‌گذاری مقادیر $n=1$ تا $n=6$ در رابطه به دست آمده در قسمت ج، صحت اعداد به دست آمده در جدول الف را بررسی کنید.

الف) اگر « S_n » میزان آنتی‌بیوتیک موجود در بدن شخص بیمار پس از n بار مصرف قرص باشد، با توجه به فرض‌های مسئله :

تعداد مصرف n	تاریخ مصرف	زمان مصرف	(میلی‌گرم) S_n
۱	۱۵ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_1 = 80 \text{ mg}$
۲	۱۵ بهمن	۰۰:۰۸ صبح	$S_2 = \frac{1}{4}S_1 + 80 = 40 + 80 = 120$
۳	۱۵ بهمن	۰۰:۰۴ بعد از ظهر	$S_3 = \frac{1}{4}S_2 + 80 = 60 + 80 =$
۴	۱۶ بهمن	۰۰:۰۰ بامداد	$S_4 = \dots\dots + 80 = \dots\dots$
۵	۱۶ بهمن	$S_5 = \dots\dots = \dots\dots$
۶	$S_6 = \dots\dots + \dots\dots =$

ب) با توجه به نحوه کامل کردن جدول بالا، رابطه بازگشتی میزان آنتی‌بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف دارو از رابطه زیر مشخص می‌شود :

$$S_{n+1} = \dots\dots\dots + \frac{1}{4}S_n \quad , \quad S_1 = \dots\dots$$

ج) برای نوشتن ضابطه تابعی دنباله S_n بر حسب n ، اگر میزان آنتی‌بیوتیک هر قرص را A میلی‌گرم در نظر بگیریم (در این مسئله $A=80 \text{ mg}$ است)، با استفاده از رابطه بازگشتی به دست آمده در قسمت ب :

$$S_1 = A$$

$$S_2 = A + \frac{1}{4}S_1 = \dots$$

$$S_3 = \dots + \dots = A + \frac{1}{4}\left(A + \frac{1}{4}A\right) = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A$$

به همین صورت برای محاسبه S_∞ :

$$S_\infty = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A$$

پس برای محاسبه مجموع آنتی بیوتیک در بدن شخص پس از n بار مصرف :

$$S_n = A + \frac{1}{4}A + \left(\frac{1}{4}\right)^2 A + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} A \quad (1)$$

اگر طرفین رابطه (1) را در ضرب $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم :

$$\frac{1}{4}S_n = \frac{1}{4}A + \dots + \dots + \dots \quad (2)$$

با تفاضل رابطه (1) از (2) رابطه زیر به دست می آید :

$$S_n - \frac{1}{4}S_n = A - \left(\frac{1}{4}\right)^n A \Rightarrow \frac{3}{4}S_n = A\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{4}{3}A\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

بنابراین، با فرض این مسئله $A = 80 \text{ mg}$ ، مجموع میزان آنتی بیوتیک پس از n بار مصرف :

$$S_n = 160 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

(د) با توجه به رابطه به دست آمده برای S_n :

$$S_1 = 160 \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^1\right) = 160 \times \frac{3}{4} = 120 \quad S_2 = \dots \quad S_3 = \dots$$

مطابق روشی که در این فعالیت برای محاسبه S_n انجام شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی را می توانیم مشخص کنیم :

اگر جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = ar^{n-1}$ باشد، حاصل مجموع :

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \quad (r \neq 1)$$

از رابطه :

$$S_n = a \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

به دست می آید.

کار در کلاس

در فعالیت صفحه پیش :

الف) مقادیر a و r را مشخص کنید.

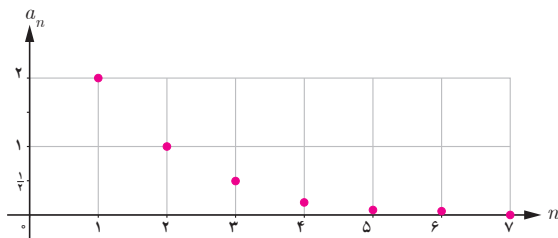
ب) ضابطه های دنباله های a_n و S_n را بنویسید. با توجه به این ضابطه معنای a_4 و S_4 چیست؟

کار در کلاس

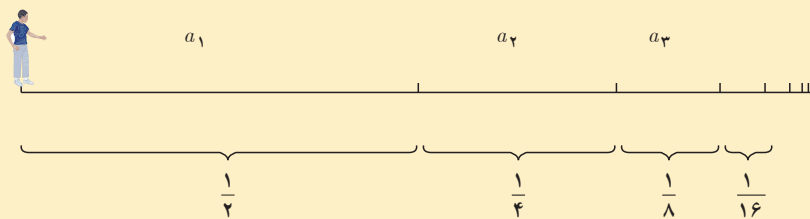
۱. جدول زیر را کامل کنید. (در صورت نیاز از ماشین حساب استفاده شود.)

جملات دنباله	(جمله اول) a_1	(نسبت مشترک) r	مجموع n جمله اول S_n
$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \dots$	$a_1 = \frac{1}{2}$	$r = \frac{1}{3}$	$S_5 = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{3})^5)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{121}{162}$ $S_{10} =$
$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_4 =$ $S_8 =$
$\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_7 =$ $S_{14} =$
$\frac{2}{5}, 2, 10, \dots$	$a_1 = \dots\dots\dots$	$r = \dots\dots\dots$	$S_7 =$

۲. نمودار زیر یک دنباله هندسی را مشخص می‌کند. با نوشتن سه جمله اول آن و محاسبه نسبت مشترک دنباله هندسی:
 الف) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.
 ب) حاصل S_6 را به دست آورید.



جواب تناقض (پارادوکس) زنو



همان طور که خوانده شد، مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ به دست می آید. زمانی که نسبت مشترک عددی میان صفر و یک باشد، مقدار دنباله r^n بسیار بسیار کوچک می شود و می توانیم در حالتی که مجموع بی شمار جملات دنباله هندسی خواسته می شود، از مقدار آن صرف نظر کنیم. بنابراین:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \xrightarrow{\text{در حالتی که } n \text{ عدد خیلی بزرگ باشد}} S_n = a_1 \frac{1-\cancel{r^n}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

اکنون یک بار دیگر به قسمت پایانی استدلال زنو توجه کنید. اگر مطابق گفته او زمان رسیدن به در خروجی کلاس از

$$\text{رابطه } T = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots \text{ به دست آید که یک دنباله هندسی با نسبت مشترک } \frac{1}{2} \text{ است:}$$

$$\text{زمان رسیدن به در خروجی کلاس} = t + \frac{t}{2} + \frac{t}{4} + \dots$$

$$= \frac{t(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}}$$

چون n ، تا بی نهایت ادامه دارد و مقدار عدد $(\frac{1}{2})^n$ در بی نهایت بسیار بسیار ناچیز است، از مقدار $(\frac{1}{2})^n$ می توان صرف نظر کرد:

$$\frac{t(1 - (\frac{1}{2})^n)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t(1 - \cancel{(\frac{1}{2})^n})}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t$$

یعنی اگر برای نصف مسافت طی شده t ثانیه زمان مصرف کرده اید، با فرض ثابت بودن سرعت شما، بقیه مسافت را نیز در t ثانیه و کل مسافت را در $2t$ ثانیه طی می کنید.

در واقع، اشتباه زنو این بود که می پنداشت اگر بی شمار جمله با هم جمع شوند، حاصل این بی شمار جمله باید بی نهایت شود!

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی مشخص کنید کدام یک از آنها یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد.

$$\begin{array}{ll} ۱) a_{n+1} = (a_n)^2 & a_1 = \frac{1}{4} \\ ۲) a_{n+1} = \frac{2}{3} a_n & a_1 = \frac{1}{4} \\ ۳) a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} & a_1 = 1 \\ ۴) a_{n+1} = 2a_n & a_1 = 1 \end{array}$$

۲. با توجه به مفهوم دنباله هندسی و نسبت مشترک جملات دنباله هندسی ثابت کنید هرگاه c و b و a سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه $a \times c = b^2$. (b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند.)

۳. اگر $x+3$ و $x+2$ و x سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید.

۴. سرطان از تکثیر بیش از حد سلول‌ها در بدن ایجاد می‌شود. در فردی که به سرطان سینه مبتلاست، از روش‌های مختلفی از جمله شیمی‌درمانی برای از بین بردن سلول‌های سرطانی استفاده می‌شود. در این روش معمولاً دارو چندین دفعه به بیمار تجویز می‌شود و هر بار درصدی از سلول‌های سرطانی از بین می‌رود.

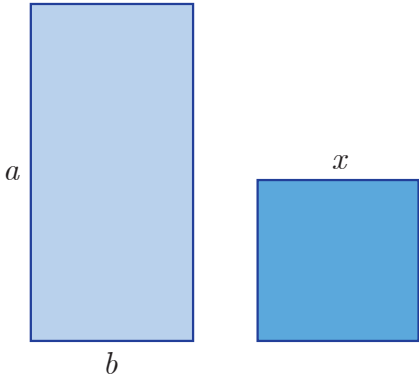
الف) اگر داروی شیمی‌درمانی هر بار 60% سلول‌های سرطانی فردی را از بین ببرد و اگر توده سرطانی او در ابتدا 10^{12} سلول داشته باشد، پس از ۳ بار شیمی‌درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن این فرد باقی می‌ماند؟

ب) فرض کنید پس از اولین شیمی‌درمانی، رشد توده سرطانی متوقف شده است. برای اینکه این شخص به طور کامل درمان شود، ابتدا باید تعداد سلول‌های سرطانی‌اش به کمک شیمی‌درمانی کمتر از 7×10^6 سلول شود و سپس با کوچک شدن توده سرطانی به کمک جراحی، باقی‌مانده سلول‌های سرطانی او برداشته شود. برای این منظور، مطابق اطلاعات مسئله این شخص چند مرتبه باید شیمی‌درمانی شود؟

۵. میان دو عدد a و b و n عدد را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله شروع از a و ختم به b یک دنباله هندسی تشکیل دهند. ثابت کنید نسبت مشترک دنباله‌های هندسی از رابطه $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ به دست می‌آید. (راهنمایی: تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۶. جمله سوم یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

۱. مطابق آمار، سالیانه ده هزار نفر در ایران به سرطان سینه مبتلا می‌شوند (مرکز تحقیقات سرطان دانشگاه علوم پزشکی شهید بهشتی). در حال حاضر، حدود 25% مبتلایان به علت تشخیص دیر رس و تأخیر در شروع درمان جانشان را از دست می‌دهند. تشخیص زودرس در سرطان سینه امکان‌پذیر است و با گنجاندن غربالگری سرطان سینه در نظام بهداشتی کشور و افزایش آگاهی بانوان درباره علائم بیماری می‌توان میزان مرگ و میر ناشی از این بیماری را به طور قابل توجهی کاهش داد.



۷. مستطیلی با اضلاع a و b مطابق شکل مقابل مفروض است. اگر مربعی به ضلع x هم مساحت با آن باشد، کدام یک از دنباله‌های زیر تشکیل یک دنباله هندسی می‌دهند؟

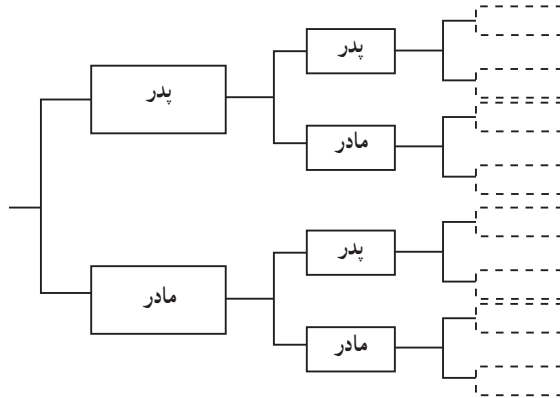
الف) a و b و x

ب) b و x و a

پ) x و a و b

۸. یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم وزن دارد. پس از ورود آن به جو زمین، در هر دقیقه ۱۵٪ از وزنش به سبب تماس با جو از بین می‌رود. پس از گذشت پنج دقیقه از ورود این شهاب سنگ به جو زمین، چقدر از وزن آن باقی می‌ماند؟

۹. شخصی پدر و مادر، دو پدر بزرگ و دو مادر بزرگ، چهار پدر پدر بزرگ و چهار مادر مادر بزرگ و ... دارد. الف) نیاکان این شخص در ده نسل قبلی چند نفر بوده‌اند؟ (نخستین نسل را پدر و مادر شخص در نظر بگیرید.) ب) مجموع نیاکان این شخص از ده نسل قبل تا یک نسل قبل (یعنی پدر و مادر شخص) چند نفرند؟



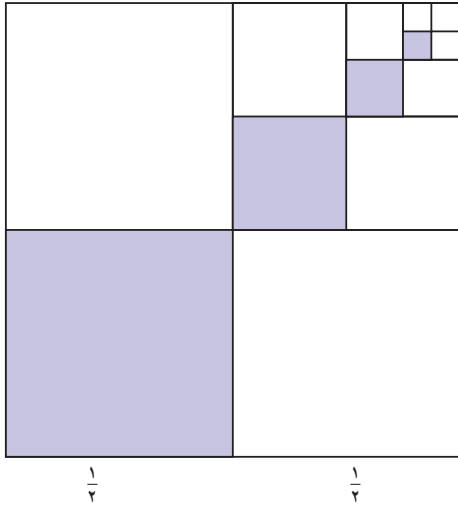
۱۰. مجموع‌های زیر را به دست آورید.

الف) $۱ + ۴ + ۱۶ + \dots + ۴۰۹۶$

ب) $\frac{1}{۵} + \frac{1}{۱۰} + \frac{1}{۲۰} + \dots + \frac{1}{۶۴۰}$

۱۱. نخستین جمله یک دنباله هندسی ۱۵۳۶ و نسبت مشترک این دنباله هندسی $\frac{1}{۴}$ است. کدام جمله دنباله برابر ۶ است؟ مجموع جملات این دنباله از ۱۵۳۶ تا عدد ۶ را به دست آورید.

۱۲. پس از تقسیم مربعی به ضلع یک متر به چهار مربع برابر، یکی از آنها را رنگ می‌کنیم. از مربع‌های باقی مانده، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده ضلع مشترک ندارد، انتخاب می‌کنیم و با تقسیم آن به چهار مربع برابر، مربعی را که با مربع رنگ‌آمیزی شده در یک رأس مشترک است، رنگ‌آمیزی می‌کنیم و همین روند را مطابق شکل ادامه می‌دهیم.



الف) چرا دنباله مساحت‌های مربع‌های رنگی، یک دنباله هندسی را تشکیل می‌دهد؟

ب) اگر روند رنگ‌آمیزی گفته شده را n مرحله انجام دهیم، مجموع مساحت‌های مربع‌های رنگی از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

پ) پس از شش مرحله رنگ‌آمیزی مربع به روش بالا، چه مساحتی از مربع رنگ می‌شود؟

بازی و ریاضی

مربع‌های زیر را با اعداد مثبت به گونه‌ای پر کنید که هر سطر و هر ستون جدول روبه‌رو یک دنباله هندسی تشکیل بدهد.

