

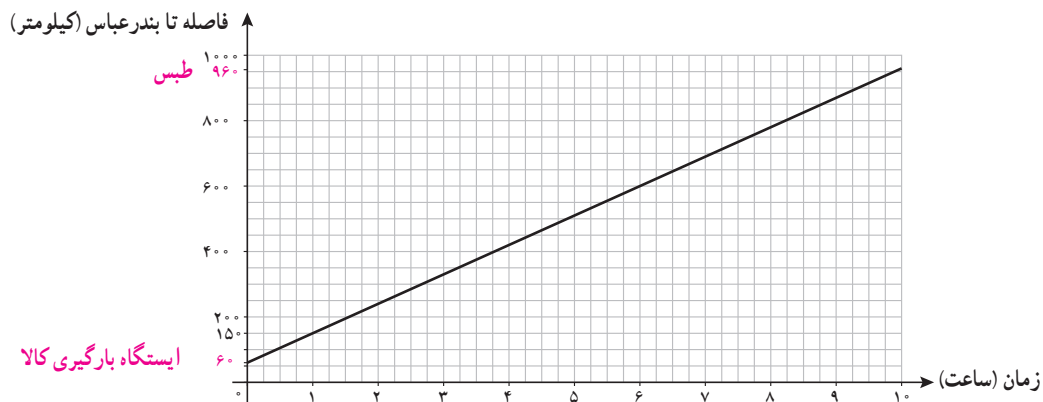
درس ۲

دنباله‌های حسابی

فعالیت

یک قطار باری از ایستگاهی در ۶۰ کیلومتری بندرعباس بارگیری کرده است و مطابق نمودار مکان - زمان زیر با سرعتی ثابت به سمت طبس حرکت می‌کند.

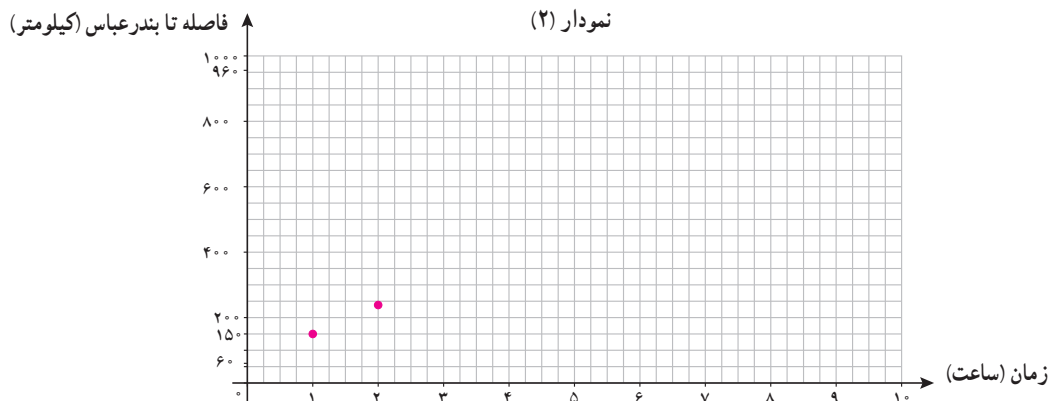
نمودار (۱)



الف) ضابطه تابع و دامنه و برد آن را به دست آورید.

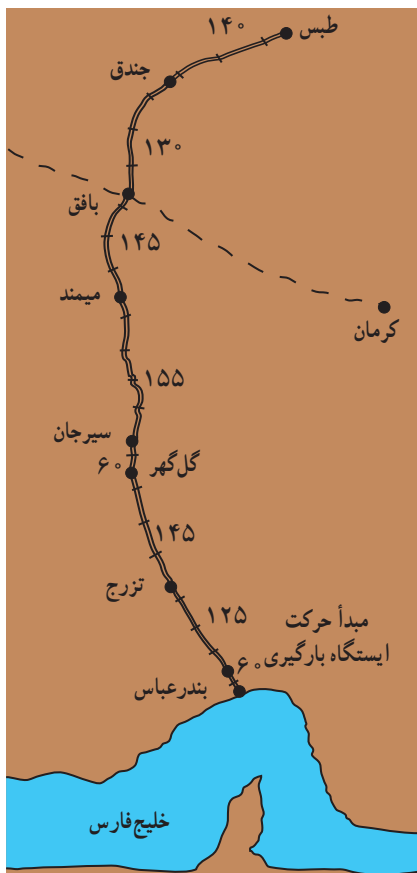
ب) اگر راهبر این قطار به دلایلی مانند رعایت سرعت مجاز و امنیت قطار موظف باشد پس از حرکت، مسافت طی شده در هر «یک ساعت» را به مرکز بندرعباس گزارش دهد، این نقاط را به کمک نمودار (۱) در نمودار (۲) کامل کنید.

نمودار (۲)



ج) ضابطه و دامنه و برد نمودار (۲) چه تفاوتی با نمودار (۱) دارند؟

د) جدول ۱ را به کمک نقشه داده شده کامل کنید.



جدول ۱

نام دو ایستگاه متوالی	مسافت	فاصله تا بندرعباس
ایستگاه بارگیری - تزرچ	۱۲۵	$۶۰ + ۱۲۵ = ۱۸۵$
تزرچ - گل گهر	۱۴۵	
گل گهر - سیرجان		
سیرجان - میمند		
میمند - بافق		
بافق - جندق		
جندق - طبس		

ه) با فرض اینکه مسافت طی شده قطار n ساعت پس از ترک ایستگاه بارگیری باشد، جدول ۲ را به کمک نمودار (۲) کامل کنید.

جدول ۲

$n = ۱$	$n = ۲$	$n = ۳$	$n = ۴$	$n = ۵$
$a_1 = ۶۰ + ۹۰ = ۱۵۰$	$a_2 = a_1 + ۹۰$ $= ۱۵۰ + ۹۰ = ۲۴۰$	$a_3 = a_2 + ۹۰$ $= \dots\dots\dots$		
$n = ۶$	$n = ۷$	$n = ۸$	$n = ۹$	$n = ۱۰$

و) با مقایسه جدول های ۱ و ۲، کدام ایستگاه ها محل تماس راهبر قطار بوده اند؟ چرا؟

ز) با توجه به جدول ۲، ابتدا تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\begin{cases} a_3 = a_2 + \dots \\ a_3 = a_1 + \dots \times 9^0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11} = a_{10} + \dots \\ a_{11} = a_1 + \dots \times 9^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_5 = a_4 + \dots \\ a_5 = a_1 + \dots \times 9^0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_8 = a_7 + \dots \times 9^0 \\ a_8 = a_5 + \dots \times 9^0 \end{cases}$$

از روابط بالا می‌توان نتیجه گرفت:

$$a_n = a_1 + (\dots) \times 9^0 \quad (1)$$

$$a_n - a_{n-1} = \dots \text{ (رابطه بازگشتی)}$$

$$a_n - a_m = (\dots) \times 9^0$$

ح) کدام ویژگی دنباله a_n باعث برقراری روابط بالا شده است؟

ط) رابطه (۱) در قسمت «ز» چه ارتباطی با ضابطه تابع به دست آمده در قسمت «الف» دارد؟

دنباله حسابی^۱

نکته قابل توجه در دنباله مطرح شده در فعالیت، یعنی دنباله «مسافت طی شده در هر گزارش»، این است که افزایش جملات دنباله منظم است؛ به گونه‌ای که براساس هر دو جمله متوالی، جمله بعدی مشخص می‌شود. چنین دنباله‌هایی که هر جمله آنها به جز جمله اول، از اضافه شدن یک عدد ثابت به جمله پیشین به دست می‌آید، دنباله‌های «حسابی» نامیده می‌شوند.

یک دنباله حسابی، دنباله‌ای به صورت:

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots$$

است که در آن a جمله اول و عدد ثابت d «اختلاف مشترک» جملات دنباله است. جمله n ام این دنباله با

$$\text{رابطه } a_n = a_1 + (n-1)d \text{ معرفی می‌شود.}$$

« d » را اختلاف مشترک^۲ دنباله حسابی می‌نامند؛ زیرا همه جملات دنباله در یک ویژگی مشترک اند و آن اینکه اختلاف آنها مقدار ثابت d است.

۱. Arithmetic Sequence

۲. Common Difference

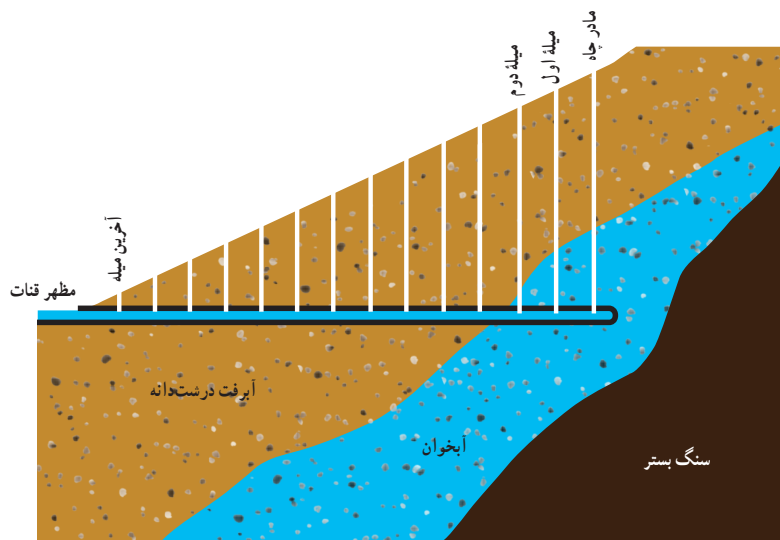
کار در کلاس

۱. ضابطه بازگشتی دنباله حسابی با جمله اول a_1 و اختلاف مشترک d را مشخص کنید.
۲. مثبت یا منفی یا صفر بودن «اختلاف مشترک»، d ، چه تأثیری در جملات دنباله حسابی دارد؟
۳. جدول زیر را کامل کنید.

جمله اول	اختلاف مشترک	پنج جمله اول	a_n
a	d		
۲	۳	۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴	$a_n = 2 + 3(n - 1)$
		۴, ۱, -۲, -۵, -۸	
۴	$-\frac{1}{2}$		
			$a_n = -3 + 5(n - 1)$

کار در کلاس

قنات یا کاریز، راه آب یا کانالی است که در زیرزمین کنده شده است تا آبی را که از حفر چاه اصلی (نخستین چاه) به نام «مادرچاه» به دست آمده است، به منطقه‌ای دیگر انتقال دهد. برای حفر کانال، مطابق شکل زیر، از چاه‌های کمکی به نام «میله» استفاده می‌کنند. میله‌ها برای رساندن اکسیژن و نیز کمک به مقتی^۱ در خارج کردن خاک‌های حاصل از حفر کانال و بعدها برای کمک به لایروبی و تعمیر قنات حفر می‌شوند.



در یک منطقه، مقتی پس از حفر چاه در عمق ۳۰ متری سطح زمین، به آب زیرزمینی دست یافته و در این عمق شروع به حفر کانال قنات کرده است. با توجه به شیب ثابت زمین و حفر چاه‌های کمکی در فاصله‌های یکسان از هم، عمق میله اول ۲۹/۵ متر و میله دوم ۲۹ متر بوده و به همین ترتیب، عمق میله‌ها کاهش یافته است. اگر عمق آخرین میله ۱/۵ متر باشد، این مقتی در مجموع چند چاه حفر کرده است؟

۱. مقتی: به کسی می‌گویند که کانال را حفر می‌کند.

خواندنی

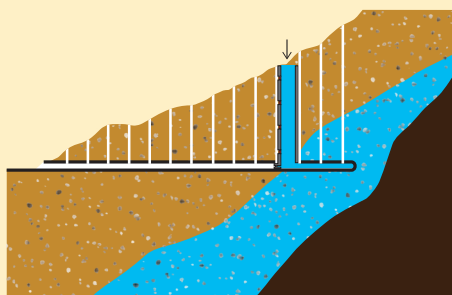
سدهی کهن در دل خاک

اگرچه به نظر می‌رسد مدیریت منابع طبیعی، رشته‌ای نوپا، مهم و حیاتی در بسیاری از دانشگاه‌های دنیاست، با نگاهی به تاریخ گذشته سرزمینمان متوجه می‌شویم که چگونه ایرانیان از هزاران سال پیش با فرهنگ ساختن کاریز و قنات، به استفاده بهینه از منابع طبیعی توجه داشته‌اند. چنان که در سفرنامه ناصر خسرو به قنات گناباد اشاره شده است؛ قناتی با عمق مادر چاه بیش از سیصد متر و ارتفاع یک برج ۱۰۰ طبقه و با عمری سه هزارساله.

حفر صدها چاه و ایجاد هزاران متر کانال قنات برای انتقال آب حتی با وسایل امروزی، آن هم در مسیرهای خشک و کویری و در گرمای طاقت فرسا، کاری بس عظیم و بی‌همتاست که نه تنها نشان از صبر و شکیبایی دارد، بلکه شاید بیش از هر چیز بیانگر عشق نیاکان ما به زندگی و تلاش برای تداوم آن در نسل‌های آینده‌شان است.

انسان‌هایی که معضل عظیم بی‌آبی را نه تنها علتی برای کوچ نمی‌دانستند، بلکه با دانش و تفکر و هوشمندی و برنامه‌ریزی بلندمدت، آرام آرام ده‌ها هزار متر مکعب خاک را از اعماق زمین جا به جا کردند تا دسترسی به منبع حیات را برای نسل‌های بعدی‌شان فراهم سازند. تنها با نگاه به یکی از قنات‌های موجود در ایران، مانند قنات زارچ یزد که برای ایجاد آن بیش از هشتاد هزار متر کانال و چاه در دل کویر حفر شده است و با دانستن اینکه یک مقنی شاید در طول یک روز بیش از دو یا سه متر حفاری انجام نمی‌داده است، مشخص می‌شود که حتی با یک گروه حفاری، اتمام این قنات به چندین ده سال کار بی‌وقفه نیاز داشته است. کاری دشوار که هر روز و هر لحظه آن جدال مستقیم با مرگ بوده است؛ زیرا با ریزش خاک به ویژه در زمین‌های سست کویری و در عمق چندین ده متر از سطح زمین، کمترین احتمالی برای زنده ماندن مقنی قابل تصور نبوده است. این گونه بوده است که این افراد کار هر روزه خود را با لباس سفید و اشهدگویان شروع می‌کردند.

فرهنگ ایجاد کاریز افزون بر موارد فوق، نشان از دیگر جنبه‌های هوشمندی ایرانیان نیز دارد. نخست، با ایجاد شیبه ملایم هنگام حفر کانال و به کمک گرانس زمین نیازی به وجود پمپ برای انتقال آب نبوده است. با توجه به نبود وسایل مهندسی



امروزی برای جهت‌یابی و تعیین زاویه حفر، انجام دادن این عمل در گذشته بسیار دشوار بوده است. دوم، فرهنگ ایجاد کاریز، ذخیره‌سازی آب در عمق زمین و درون چاه‌ها را ممکن می‌ساخته است. از آن رو که در سدهای آبی مقادیر زیادی از آب در معرض خورشید تبخیر می‌شود، پیشینیان ما با بستن آب در انتهای یکی از میله چاه‌ها، آب را توسط چاه‌های قنات در اعماق زمین از تابش مستقیم آفتاب حفاظت می‌کردند؛ به بیانی دیگر، قنات‌ها سدهایی زیرزمینی بوده‌اند^۱.

در گزارش سازمان خواربار و کشاورزی ملل متحد (فائو) با عنوان «اهمیت میراث سیستم‌های سنتی کشاورزی» سال ۲۰۱۴ ضمن به رسمیت شناختن این میراث در سطح جهانی و حفظ آن جهت نیل به توسعه پایدار، نوشته شده است: «قدمت فناوری و دانش سیستم آبیاری سنتی در ایران، و حفر کاریز، دست‌کم به ۸۰۰ سال پیش از میلاد می‌رسد و نزدیک به سه هزاره زنده مانده است. شبکه آبیاری سیستم قنات توانسته است به طور پایدار، امنیت غذایی و معیشت خانوارهای کشاورزان را فراهم آورد».

بیش از ۴۰ هزار قنات در ایران منابع پایدار با ارزشی هستند که توجه دوباره به آنها شاید بخشی از راه‌حل سازگاری با شرایط اقلیمی کشورمان در جهت تأمین منابع آب باشد؛ منابعی که امروز برای ایجاد دوباره آنها نیاز به هزاران میلیارد تومان سرمایه و هزاران ساعت کار انسانی است. میراثی با ارزش که نیاکانمان با شکیبایی و عشق برای ما به یادگار گذاشته‌اند.

۱. طبق گزارش‌های رسمی، میانگین بارش جوی کشور ۴۱۳ میلیارد متر مکعب است که نزدیک به ۲۹۶ میلیارد متر مکعب آن در سال تبخیر می‌شود. اگر تقویت منابع آب زیرزمینی و ذخیره‌سازی آن توسط قنات‌ها تنها ده درصد از تبخیر آب را کاهش دهد، به طور میانگین نزدیک به ۳۰ میلیارد متر مکعب به حجم آب مورد استفاده افزوده می‌شود که عددی بسیار چشمگیر است.

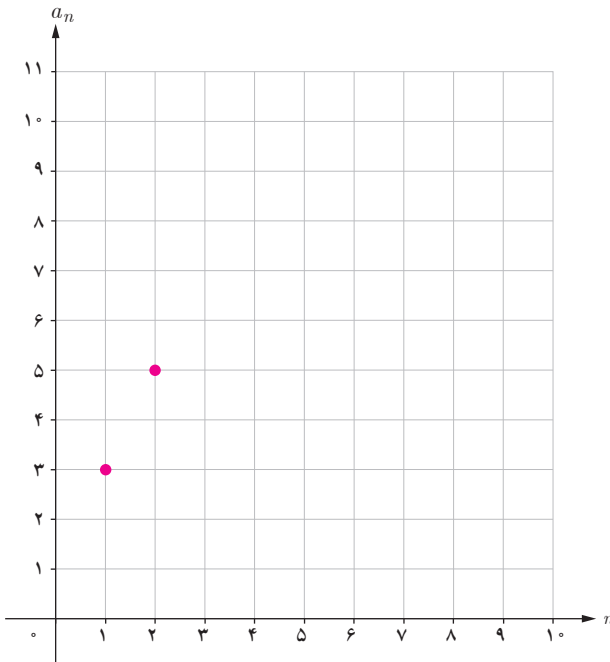
فعالیت

دنباله حسابی $a_n = 3 + 2(n-1)$ را در نظر بگیرید.

الف) با محاسبه سه جمله دیگر دنباله، نمودار زیر را کامل کنید.

ب) معادله خطی را که از دو نقطه اول و دوم می‌گذرد، به دست آورید. آیا نقاط دیگر دنباله در ضابطه خط به دست آمده صدق می‌کنند؟

ج) شیب خط به دست آمده چه ارتباطی با d (اختلاف مشترک دنباله حسابی) دارد؟



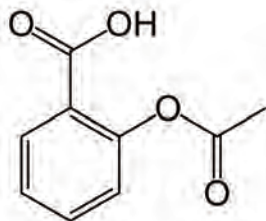
اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی را بنویسیم، یک معادله خط خواهد شد. هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است و به عکس، دنباله ساخته شده از یک تابع خطی نیز جملات یک دنباله حسابی را مشخص می‌کند.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	دنباله ساخته شده از تابع	چهار جمله اول دنباله	نمودار دنباله
$y = 2x - 1$	$a_n = 2n - 1$	1, 3, 5, 7	
$y = -x + 4$			
		$-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}$	

فعالیت

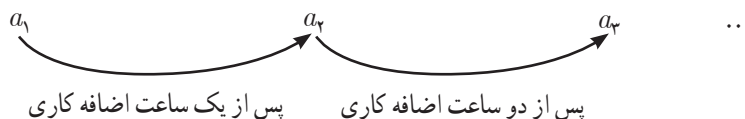


پس از مصرف بعضی از داروها، مانند آسپرین، سطح دارو در خون با سرعتی ثابت صفر می‌شود. اگر شخصی که سابقهٔ سکتهٔ قلبی دارد با مصرف یک قرص آسپرین، 25° میلی‌گرم دارو به بدنش وارد شود و پس از پایان هر یک ساعت ۱۵ میلی‌گرم دارو در سطح خونس کاهش یابد:

(الف) چند ساعت پس از مصرف دارو، سطح آن در بدنش 13° میلی‌گرم می‌شود؟
 (ب) نمودار «سطح دارو در بدن – زمان» مسئلهٔ بالا را رسم کنید.
 (ج) اگر پس از پنج ساعت از مصرف دارو این شخص قرص دیگری مصرف کند، پس از چند ساعت سطح دارو در بدن او 13° میلی‌گرم خواهد شد؟

کار در کلاس

درآمد یک کارمند در یک شرکت خصوصی، ماهیانه $2,600,000$ تومان است که 10% آن به عنوان مالیات کسر می‌شود. اگر این شخص برای هر ساعت اضافه کاری ۱۱ هزار تومان از شرکت دریافت کند و بابت این اضافه کاری مالیات پرداخت نکند، پس از روزانه چند ساعت اضافه کاری دریافتی خالص ماهیانهٔ او ۳ میلیون تومان خواهد بود؟ (ماه را 30 روزه در نظر بگیرید.)
 با توجه به فرض مسئله مبنی بر دریافت ۱۱ هزار تومان اضافه کاری برای هر یک ساعت کار، میزان دریافتی این شخص پس از k ساعت اضافه کاری از یک دنبالهٔ عددی پیروی می‌کند؛ زیرا:



بنابراین، اگر a_1 میزان دریافتی شخص بدون اضافه کاری و پس از کسر مالیات باشد، جملهٔ آخر دنباله باید برابر با مبلغ تومان باشد؛ یعنی در رابطه

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

باید باشد

مجموع n جمله اول یک دنباله عددی

در فعالیت «محاسبه تعداد چاه‌های قنات» مشخص شد که قنات موردنظر ۵۸ چاه دارد که عمق آنها دنباله حسابی $1/5, \dots, 29, 29/5, 30$ را تشکیل می‌دهد. فرض کنید یک مقنی در هر روز بتواند ۲ متر چاه حفر کند. می‌خواهیم بدانیم این مقنی به چند روز کار نیاز دارد تا مجموع چاه‌های گفته شده را حفر کند.
الف) ابتدا باید بدانیم مجموع ۵۸ چاه حفر شده چند متر است.
برای این کار، مجموع عمق چاه‌ها را یک بار از عمیق‌ترین تا کم عمق‌ترین چاه و بار دیگر از کم عمق‌ترین تا عمیق‌ترین چاه با یکدیگر جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 S_{58} &= 30 + 29/5 + 29 + \dots + 2/5 + 2 + 1/5 \\
 S_{58} &= 1/5 + 2 + 2/5 + \dots + 29 + 29/5 + 30 \\
 \hline
 2S_{58} &= 31/5 + 31/5 + \dots + 31/5 + 31/5
 \end{aligned}$$

$$2S_{58} = 58 \times 31/5 \Rightarrow S_{58} = \frac{58 \times 31/5}{2} \Rightarrow S_{58} = 913/5 \text{ m}$$

ب) با توجه به اینکه مقنی روزانه ۲ متر چاه حفر می‌کند:

$$\text{روز} = \frac{913/5}{2} = 456/75 = \frac{913}{150}$$

بنابراین، مقنی بدون حتی یک روز استراحت تقریباً به ۱۵ ماه زمان نیاز دارد تا قنات موردنظر را تحویل دهد.

جمع کردن جملات یک دنباله به دو صورت محاسبه مجموع a_1 تا a_n و محاسبه مجموع a_n تا a_1 برای تعیین S ، روش جالبی است که می‌توانیم به کمک آن، مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی را به دست آوریم:

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $a_n = a_1 + (n-1)d$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

رابطه بالا را در محاسبه مجموع چاه‌های حفر شده می‌توانیم مشاهده کنیم؛ زیرا:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{58} = \frac{58}{2}(30 + 1/5) = 913/5$$

کار در کلاس

۱. مجموع دنباله‌های حسابی زیر را به دست آورید.

الف) ۱۹۹ و و ۹ و ۴ و ۱- (الف)

ب) $a_{n+1} = 5 + a_n$, $a_1 = -2$ $S_{10} = ?$

(راهنمایی: ابتدا به کمک رابطه بازگشتی، جملات دنباله را مشخص کنید.)

۲. مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

$$a_1 = 1 \quad a_n = a_1 + (n-1)d = \dots\dots$$

$$S_n = \dots\dots (a_1 + a_n)$$



۳. یک طراح داخلی برای یک سالن سینما در ردیف اول ۱۵ صندلی، در ردیف دوم ۱۸ صندلی و در ردیف سوم ۲۱ صندلی مشخص کرده است. اگر صندلی‌های هر ردیف با همین نظم اضافه شوند، برای داشتن سالنی با ۸۷ صندلی باید چند ردیف صندلی داشته باشیم؟

با توجه به معلوم بودن $S_n = 87$ برای به دست آوردن n یعنی تعداد ردیف‌ها، از رابطه

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

با جای گذاری $d = \dots\dots$ در رابطه بالا $n = \dots\dots$ به دست می‌آید.

تمرین

۱. با نوشتن جملات رابطه‌های بازگشتی، مشخص کنید کدام یک دنباله حسابی است.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$ $a_1 = 2$ ب) $a_{n+1} = a_n + 5$ $a_1 = -1$

ج) $a_{n+1} = 5a_n + 1$ $a_1 = -1$ د) $a_{n+1} - a_n = n$

۲. در یک دنباله حسابی، جمله اول برابر ۵- و اختلاف مشترک برابر ۸ است. کدام جمله دنباله برابر ۵۵۵ است؟

۳. یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۵۲ و جمله نوزدهم آن ۹۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.



۴. برای کاهش مصرف آب در کشاورزی یک منطقه، از آبیاری قطره‌ای استفاده می‌شود؛ به این صورت که یک میله که در آن سوراخ‌هایی برای پخش آب تعبیه شده است، به کمک چرخ‌هایی (مطابق شکل مقابل) حول یک محور می‌چرخد. اگر فاصله اولین چرخ تا موتور ۳ متر و بعد از آن، فاصله هر چرخ تا چرخ بعدی ۵ متر باشد و در کل، ۱۲ چرخ روی میله قرار داشته باشد، با این وسیله چه مساحتی آبیاری می‌شود؟ (آخرین چرخ دقیقاً در انتهای میله قرار دارد.)

۵. در یک کارخانه سنگ‌بری برای صیقل دادن سنگ‌ها از یک صفحه به وزن ۱۲۵۰۰ گرم استفاده می‌شود. اگر با توجه به مصرف هفتگی به‌طور میانگین ۱۸۷۵ گرم از وزن صفحه کم شود، پس از شش هفته استفاده مداوم وزن صفحه چقدر است؟

۶. میان دو عدد a و b و n عدد را به‌گونه‌ای قرار می‌دهیم که جملات دنباله از a تا b یک دنباله حسابی تشکیل دهند. ثابت کنید اختلاف مشترک جملات دنباله از رابطه $d = \frac{b-a}{n+1}$ به‌دست می‌آید. (توجه داشته باشید که تعداد کل جملات $(n+2)$ جمله است.)

۷. براساس رابطه به‌دست آمده در مسئله ۶، سه عدد را به‌گونه‌ای میان اعداد ۱۰ و ۱۸ قرار دهید که یک دنباله حسابی تشکیل دهند.

۸. مجموع عددهای زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱ و ۵ و ۹ و و ۴۰۱ ب) ۱۳ و و ۸۱ و ۸۵ و ۸۹



۹. باغداران برای چیدن میوه‌ها از نردبان‌هایی استفاده می‌کنند که بخشی از آنها که روی زمین قرار می‌گیرد، برای تعادل بیشتر، عرض بیشتری دارد و انتهای نردبان که به درخت تکیه داده می‌شود، برای جابه‌جایی آسان‌تر و تکیه‌گاه بهتر، عرض کمتری دارد.

اگر عرض نخستین پله این نردبان ۱۲۵ سانتی‌متر و عرض آخرین پله آن ۴۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شود و هر پله ۱۰ سانتی‌متر کوتاه‌تر از پله پیشین باشد، این نردبان چند پله خواهد داشت؟ برای ساخت پله‌ها به چند متر چوب احتیاج خواهیم داشت؟

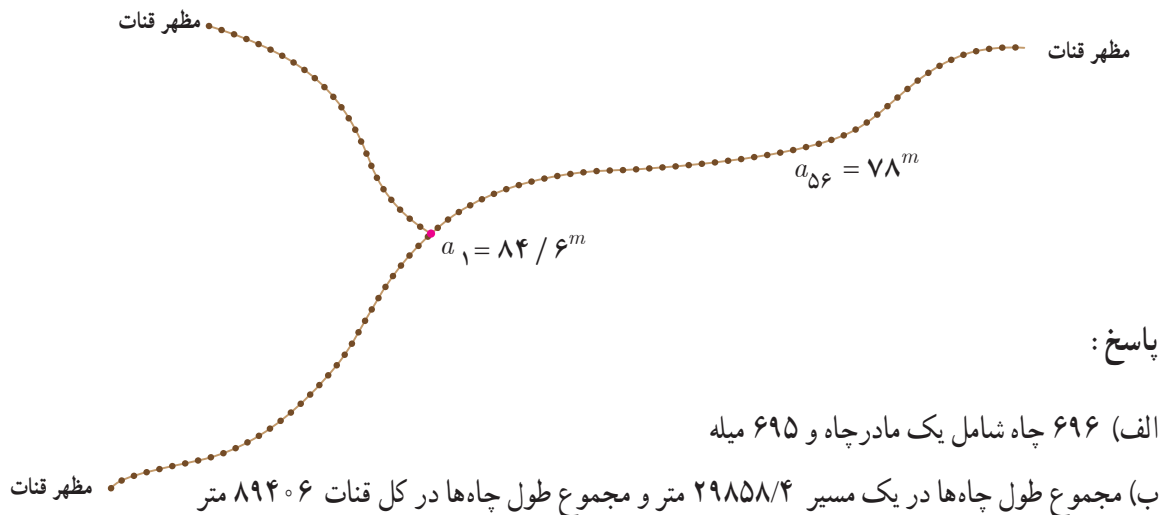
۱۰. ارزش امروزی قنات زارچ، طولانی‌ترین قنات ایران — عمق مادرچاه قنات زارچ $۸۴/۶$ متر است که از آن سه شاخه قنات خارج شده است. اگر تعداد میله‌های هر سه شاخه قنات برابر و عمق پنجاه و ششمین چاه (میله ۱۵۵م) ۷۸ متر باشد، با فرض اینکه شیب زمین ثابت و فاصله میان هر دو میله یکسان باشد و عمق آخرین چاه قنات (میله) ۱۲۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شود:

الف) هر شاخه قنات دارای چند میله است؟

ب) مجموع طول چاه‌های حفر شده در این مسیر چقدر است؟ مجموع طول چاه‌های حفر شده در کل قنات چقدر است؟

ج) اگر میانگین هزینه حفری یک متر چاه (شامل حفر، مصالح و دیوارچینی) ۲۵ هزار تومان باشد، هزینه حفری چاه‌های قنات در حال حاضر چقدر است؟

د) طبق محاسبات مهندسی، در قنات زارچ در مجموع طول کل کانال قنات ۷۱ کیلومتر است. با توجه به میانگین هزینه ۳۵ هزار تومان برای حفری کانال قنات، ارزش کل قنات زارچ چقدر است؟ (راهنمایی: a_n را عمق چاه n ام تا کانال قنات و a_1 را عمق مادرچاه در نظر بگیرید.)



پاسخ:

الف) ۶۹۶ چاه شامل یک مادرچاه و ۶۹۵ میله

ب) مجموع طول چاه‌ها در یک مسیر $۲۹۸۵۸/۴$ متر و مجموع طول چاه‌ها در کل قنات ۸۹۴۰۶ متر

ج) $۲۲,۳۵۱,۵۰۰,۰۰۰$ تومان

د) $۴۷,۲۰۱,۵۰۰,۰۰۰$ تومان