بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات تکمیلی

ویژه مدارس استعدادهای درخشان

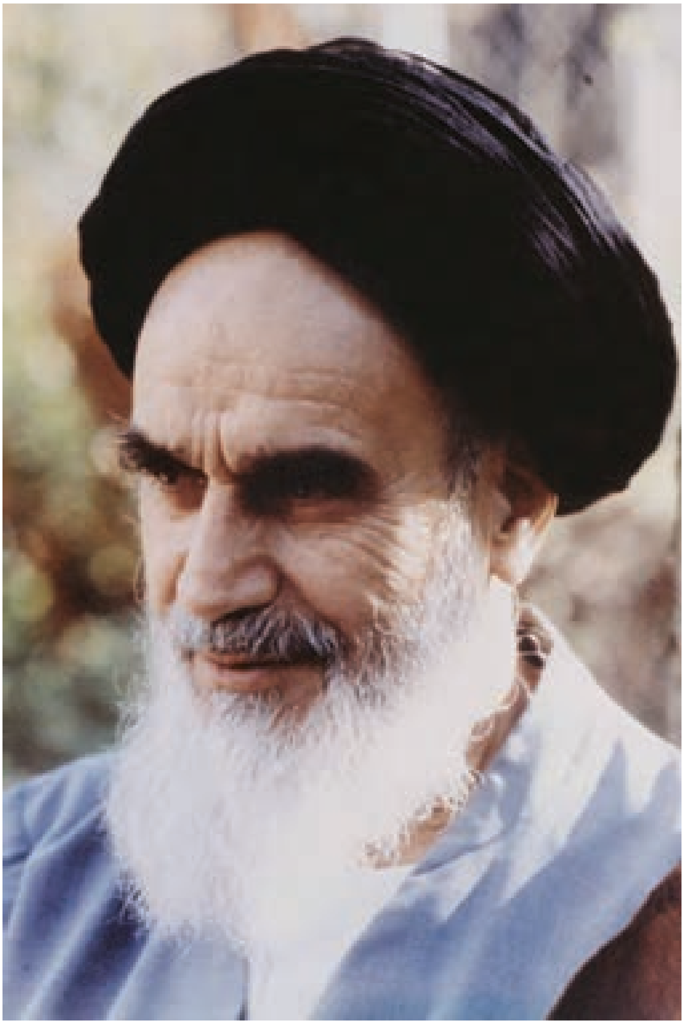
پایهٔ هشتم دورهٔ اول متوسطه

۱۳۹۷

این کتاب، به منظور فراهم کردن مواد آموزشی تکمیلی مورد نیاز مدارس استعدادهای درخشان، توسط مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان و دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری طراحی و تألیف شده است.

نام کتاب:	**ریاضیات تکمیلی ویژهٔ مدارس استعدادهای درخشان پایهٔ هشتم دورهٔ اوّل متوسطه ــ ۱۱۷/۱**
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف:	**محمود امانی طهرانی، محمد نستوه، کورش امیری‌نیا، سیده‌طاهره آقامیری، رضا گلشن مهرجردی، عباسعلی مظفری و ناصر جعفری (اعضای شورای برنامه‌ریزی) محمدحسین احمدی، نرگس اخلاقی‌نیا، عبدالرضا زارع‌شحنه، سعید صدری، علی قصاب و عاطفه کشاورزی زفرقندی (اعضای گروه تألیف) واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری (نظارت) ــ سهیلا غفرانی (ویراستار علمی)ــ سید اکبر میرجعفری (ویراستار ادبی)**
شناسه افزوده آماده‌سازی:	**لیدا نیک‌روش (مدیر امور فنی و چاپ) ــ سعید صدری (نگاشتارگر [طراح گرافیک]، طراح جلد و صفحه‌آرا)ــ محمدحسین احمدی (طراح پشت جلد و امور آماده‌سازی)**
نشانی سازمان:	**تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ــ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی) تلفن: ۹ــ۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir**
ناشر:	**شرکت افست: تهران ــ کیلومتر ۴ جادهٔ آبعلی، پلاک ۸، تلفن: ۷۷۳۳۹۰۹۳، دورنگار: ۷۷۳۳۹۰۹۷، صندوق پستی: ۴۹۷۹ــ ۱۱۱۵۵**
چاپخانه:	**شرکت افست «سهامی عام»**
سال انتشار و نوبت چاپ:	**چاپ چهارم ۱۳۹۷**

شابک ۴-۲۴۶۶-۰۵-۹۶۴-۹۷۸ ISBN 978-964-05-2466-4



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی (رحمةالله علیه)

ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم.
ان‌شاءالله در شرایط بهتر، زمینهٔ کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همهٔ امور فراهم می‌سازیم.
مبارزهٔ علمی برای جوانان زنده کردن روح جستجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.

به نام خداوند جان آفرین

سخنی با معلم

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «اِنگارِش» خوانده می شد) را بیشتر دانش بررسی کمّیتها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می‌کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می‌داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریف‌ها به نتایج دقیق و جدیدی می‌رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی‌رود، ولی ساختارهای ویژه‌ای که ریاضی‌دانان می‌پژوهند بیشتر از دانش‌های طبیعی به‌ویژه فیزیک سرچشمه می‌گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض‌گونه (مجرد) گسترش پیدا می‌کنند، به‌طوری‌که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می‌گردند تا جوابشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی‌دانان گاه به دلایل صرفاً ریاضی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می‌پردازند.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

این کتاب که در راستای اجرای سیاست غنی‌سازی برنامهٔ درسی مدارس استعدادهای درخشان و مطابق با اصل یکپارچگی و فراگیری برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران تولید شده است، به تعمیق بخش هایی از کتاب درسی ریاضی پایه هشتم می‌پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از پنج سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب‌نظران در هنگام تدریس در نقد منصفانهٔ این کتاب بسیار ضروری است، زیرا بی‌نقصی این کتاب هیچ‌گاه در تصور نبوده است!

فصل‌های کتاب متناظر با کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرب خواهد فهمید که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه‌های بخش‌های کتاب به صورت فهرست‌وار بدین شرح است:

۱. تمرین‌های این کتاب با پیش‌فرض استعداد برتر و نیاز مخاطبین نگاشته شده است. یک معلم خلاق می تواند مخاطبین خود را در هنگام تدریس با بخشی از تمرین‌ها به چالش مفهومی

بکشد. تفکر دربارهٔ همهٔ تمرین‌ها در سال آموزشی واجب تلقی می شود، و این امر شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلاقیت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید!

۲. دیر زمانی است که مقولهٔ کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود زمانی یک یا دو جلسه‌ای برای اجرای هریک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد را به این امر اختصاص دهید.

۳. تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور باب بخشی به نام گفتگو در این کتاب گشوده شده است، تا عیاری برای سنگ محک نقد نظام تفکر تدریس معلمین در اختیار قرار داده شود. این گفتگوها آیینه‌ای است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم نهاد ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

۴. شمارهٔ برخی از مسائل کتاب با رنگ صورتی مشخص شده‌اند. این رنگ برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید در هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش آموزان منفعل، در کنار صدها مسئلهٔ مهارتی، با حل چند مسئلهٔ چالش برانگیز هم آشنا گردند.

۵. شمارهٔ برخی از مسائل کتاب با رنگ سبز مشخص شده‌اند. این رنگ نشان دهندهٔ یک برنامهٔ مطالعاتی است که در فرهنگ عامه به نام پروژه شناخته می‌شود. به زبان تمثیل اگر حل مسئلهٔ ریاضی را به بازچینش درست یک نقاشی قطعه‌قطعه شده تشبیه کنیم، انجام یک پروژه به مثابهٔ کشیدن یک نقاشی خلاقانه با موضوع داده شده است. این هر دو ضروری است؛ زیرا پر واضح است که آحاد اندیشمندان باید بتوانند کاری از جنس حلّ مسئله را به‌خوبی انجام دهند، در حالی‌که نخبگان و سرآمدان باید به خلق آثار خلاقانه و ماندگار بپردازند.

فهرست مطالب

فصل ۱ ــ عددهای صحیح و گویا ۱
گفت‌وگو ۲
یادآوری عددهای صحیح ۴
عددهای گویا ۱۱
دو مسئلۀ واقعاً کاربردی ۱۷

فصل ۲ ــ عددهای اول ۲۱
گفت‌وگو ۲۲
یادآوری عددهای اول ۲۴
تعیین عددهای اول ۲۶
ماشین کانویِ ۲۹

فصل ۳ ــ چندضلعی‌ها ۳۱
گفت‌وگو ۳۲
کارگاه بازی ۳۴
چندضلعی‌ها و تقارن ۳۵
توازی و تعامد ۳۷

چهارضلعی‌ها ۴۱
زاویه‌های داخلی و خارجی ۴۲
کاشی‌کاری ۴۷

فصل ۴ـ جبر و معادله ۵۵
ساده کردن عبارت‌های جبری ۵۶
پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری ۶۰
تجزیه عبارت‌های جبری ۶۵
معادله ۶۹

فصل ۵ـ بردار و مختصات ۷۷
کارگاه بازی ۷۸
دریچه‌ای به روبوکاپ ۷۹
کاربردهایی از بردارها ۸۲
بردار، رودخانه و غواص ۸۴
ریاضیات تخم مرغی ۸۷

فصل ۶ـ مثلث ۸۹
رابطهٔ فیثاغورس ۹۰
هم‌نهشتی ۹۵
مثلث‌های هم‌نهشت ۹۶
هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه ۱۰۲
تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۱) ۱۰۸

فصل ۷ـ توان و جذر ۱۰۹
توان ۱۱۰

اعداد رادیکالی ۱۱۲
تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۲) ۱۱۳

فصل ۸ــ آمار و احتمال ۱۱۵
گفت‌وگو ۱۱۶
دسته‌بندی داده‌ها و میانگین ۱۱۸
کارگاه بازی‌ــ حلقه شانس ۱۲۴
احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۱۲۶
بررسی حالت‌های ممکن ۱۲۹

فصل ۹ــ دایره ۱۳۵
خط و دایره ۱۳۶
زاویۀ مرکزی و زاویۀ محاطی ۱۳۸
کاربردهایی از دایره ۱۴۳

کتاب‌نامه ۱۴۷
دربارۀ طرح روی جلد ۱۴۹

۱

عددهای صحیح و گویا

عددهای گویا را هر روز بارها می‌بینید و به‌کار می‌برید،
فقط کافیست کمی بیشتر دقت کنید.

گفت‌وگو

معلم ۱: [با لحنی خسته و معترض] من نمی‌فهمم که چرا بعضی از دانش‌آموزها دوست دارند که راه‌حل خودشان را توضیح بدهند؟! [پس از اندکی مکث] امروز برای صدمین بار یک اتفاق تکراری را دیدم؛ سر کلاس به یک مسئله رسیدیم. یکی از دانش‌آموزها مسئله را حل کرد و راه‌حلش را پای تخته نوشت. من هم دربارهٔ راه‌حل او توضیح دادم. هنوز حرفم تمام نشده بود که دانش‌آموزی دیگر گفت که من هم یک راه‌حل دیگر دارم.

معلم ۲: از اینکه وسط حرف شما پرید ناراحت شدید؟

معلم ۱: نه! حرفم تمام شده بود! با اینکه کاملِ کامل توضیح داده بودم، ولی او می‌خواست راه‌حل خودش را توضیح بدهد.

معلم ۲: شاید راه‌حلش متفاوت بوده است؟

معلم ۱: خُب، من معتقدم که دو حالت دارد: یا راه‌حلش غلط بوده یا درست. اگر غلط بوده که هیچ، و اگر درست بوده ما سر کلاس یک راه‌حل ارائه داده بودیم. دیگر نیازی به چک کردن راه‌حل او نداشتیم.

معلم ۲: ولی اگر راه‌حلش متفاوت باشد چه؟

معلم ۱: «اگر راه‌حلش متفاوت باشد» یعنی چه؟ مگر فرقی دارد از چه راه‌حلی مسئله حل شده باشد؟!

معلم ۲: برای شما؟ یا برای آن دانش آموز؟

معلم ۱ پاسخی نداد.

معلم ۲: برای شما می‌تواند خیلی فرق نداشته باشد، اما برای او مهم است.

معلمی دیگر از آن سوی اتاق دبیران وارد بحث شد.

معلم دیگر: ببخشید وارد بحث می‌شوم. منم فکر می‌کنم که روحیهٔ آن دانش‌آموز آسیب می‌بیند. اگر زمان کلاس اجازه می‌دهد، خوب است که آن دانش‌آموز هم راه‌حل خودش را توضیح دهد.

معلم ۲: [قاطعانه] ببخشید! اما من منظورم روحیه‌اش نبود! من منظورم چیزی فراتر بود!

اکنون همهٔ نگاه‌های دفتر دبیران به سمت او بود.

معلم ۲: یک معلم خوب معلمی است که بتواند خوب تدریس کند؛ یعنی بتواند نظام منطقی ذهن خودش را به شاگردهایش یاد بدهد؛ اما ساختار ذهنی هر آدمیزاد عاقلی نظام و منطقی خاص دارد. یک معلم عالی کسی است که بتواند با هر منطق ذهنی کنار بیاید و با راه‌حل هر کدام از شاگردهایش که متفاوت فکر می‌کنند، متفاوت برخورد کند.

معلم دیگر: یعنی با شاگردهای زرنگش، محترمانه‌تر برخورد کند؟ و بیشتر به ایشان فرصت بدهد؟

معلم ۲: منظور من این نیست! من می‌گویم هر دانش آموزی نگرش خاص خودش را دارد. یک معلم عالی کسی است که بتواند آن نگرش را نقد کند و بینش آن دانش‌آموز را ارتقا بدهد؛ نه اینکه نگرش و بینش خودش را با نگرش و بینش آن دانش‌آموز جایگزین کند. باید اجازه بدهد دانش‌آموز ایده‌اش را توضیح بدهد. اگر غلط بود، اشتباهش را بگوید و کمکش کند که راه‌حلش را اصلاح کند.

معلم ۱: [با تردید] این کار وقت کلاس را خیلی می‌گیرد!چه فایده‌ای دارد؟!

معلم ۲: فایده؟! برای هر نفر، بهترین راه‌حل، راه‌حلی است که مال خودش باشد.

یادآوری عددهای صحیح

۱. الف) حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

- $۳ \times ۴ \div ۲ \times ۸$
- $۱۰ + ۳ - ۷ - ۲$

ب) خلیل محاسبه‌های بالا را این‌گونه انجام داد:

$۱۰ + ۳ - ۷ - ۲ = ۱۰ + ۳ + (-۷) + (-۲) = ۴$
$۳ \times ۴ \div ۲ \times ۸ = ۳ \times ۴ \times \frac{۱}{۲} \times ۸ = ۴۸$

دربارهٔ روش خلیل بحث کنید.

۲. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۱۲ - ۸ - ۳ - ۴ + ۶$

ب) $۲ \times ۶ \div ۳ \div ۲ \times ۵$

ج) $۴^{۳} + ۳^{۲} - ۲ \times ۵^{۲}$

د) $۶ \times ۲^{۳} - ۲ \times ۶^{۲}$

هـ) $(۷^{۲} - ۵^{۲})(۶ \times ۳^{۲} + ۴) \times ۲۰ - ۲^{۵}$

و) $(۵^{۳} - ۳^{۵})(۳^{۲} - ۲^{۳})^{۴} - ۵^{۴}$

ز) $(۲ - ۳^{۲} \times ۵^{۲} \div ۱۵ - ۲^{۳})(۷ + ۲)$

ح) $۵^{۲} - (۳^{۲} - ۱^{۳}) \times ۲^{۲} \div ۴^{۲}$

ط) $(۴۳ - ۵^{۲} \times ۲)^{۲} - ۸ \div ۲^{۴} - ۱ \times ۳ - ۴ \times (۸ + ۳^{۲})$

۳. با قرار دادن دو علامت ضرب و دو علامت جمع در جاهای خالی عبارتِ

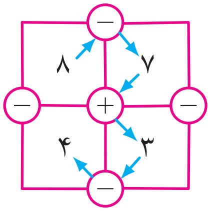
$۱ \square ۲ \square ۳ \square ۴ \square ۵$

کدام‌یک از اعداد ۱۵، ۲۷، ۲۹ و ۳۰ می‌تواند حاصل عبارت داده شده باشد؟

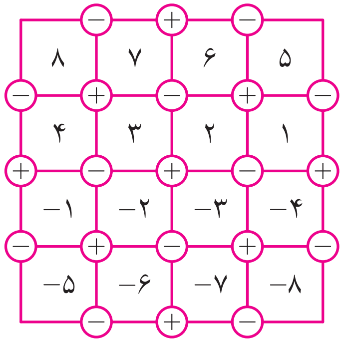
۴. یک ماشین‌حساب خراب داریم که نمی‌تواند همزمان بیش از دو عدد را باهم جمع کند و هرگاه حاصل‌جمع اعداد از ۹ بیشتر شود، حاصل‌جمع را ۳− اعلام می‌کند. با پرانتزگذاری روی عبارت‌های زیر و محاسبهٔ آنها، حاصل حداقل چقدر می‌شود؟

الف) $۱ + ۲ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲ + ۱ + ۲$

ب) $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸$



۵. در جدول روبه‌رو، از خانهٔ بالا سمت چپ به خانهٔ پایین سمت چپ مسیری یافته‌ایم که حاصل آن برابر صفر شده است. $۸ - ۷ + ۳ - ۴ = ۰$.



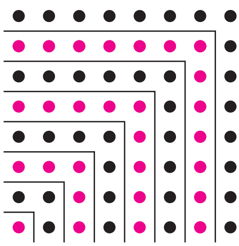
در جدول زیر، از خانهٔ بالا سمت چپ، یعنی خانهٔ ۸ شروع به حرکت کنید و مسیری بیابید که به خانهٔ پایین سمت چپ، یعنی خانهٔ ۵− ختم شود و حاصل برابر ۸ شود. توجه کنید که به هر خانه دقیقاً یک‌بار و به هر دایره حداکثر یک‌بار باید وارد شوید.

۶. الگوی زیر را با دقت ببینید.

$$۱ = ۱ \times ۱$$
$$۱ + ۳ = ۲ \times ۲$$
$$۱ + ۳ + ۵ = ۳ \times ۳$$
$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۴ \times ۴$$
$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ = ۵ \times ۵$$
$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ = ۶ \times ۶$$

قانون الگوی بالا چیست؟ آیا می‌توانید دو سطر بعدی این الگو را بنویسید؟

سعی کنید با استفاده از شکل زیر توضیح دهید که چرا تساوی‌های بالا برقرار است.



۷. نجمه حاصل عبارت $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹$ را این‌گونه محاسبه کرد:

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ = \frac{۱۰ \times ۹}{۲} = ۴۵. \qquad , \quad \boxed{\begin{array}{c} ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \\ ۱۰ \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} ۹ \\ ۸ \\ ۷ \\ ۶ \\ ۵ \\ ۴ \\ ۳ \\ ۲ \\ ۱ \end{array}} + \boxed{\begin{array}{c} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \\ ۴ \\ ۵ \\ ۶ \\ ۷ \\ ۸ \\ ۹ \end{array}}$$

الف) راه‌حل نجمه را شرح دهید.

ب) با استفاده از راه‌حل نجمه، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + ۱۱۷$$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $۲ + ۴ + ۶ + \cdots + ۸۶$

ب) $۴ + ۷ + ۱۰ + \cdots + ۱۲۴$

ج) $-۴۳ - ۳۷ - ۳۱ - \cdots + ۱۷۳ + ۱۷۹$

د) $(-۵) - (-۶) - (-۷) - \cdots - (-۸۹)$

هـ) $۴ - ۵ + ۶ - ۷ + ۸ - \cdots + ۸۸ - ۸۹ + ۹۰$

و) $-۲ - ۴ + ۶ - ۸ - ۱۰ + ۱۲ - \cdots - ۲۳۶ - ۲۳۸ + ۲۴۰$

ز) $(۲۰ - ۱) + (۱۹ - ۱) + (۱۸ - ۱) + \cdots + (-۱۸ - ۱) + (-۱۹ - ۱) + (-۲۰ - ۱)$

۹. الگوی عددی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & -۱ & & & \\ & & ۲ & & -۲ & & \\ & -۳ & & ۳ & & -۳ & \\ ۴ & & -۴ & & ۴ & & -۴ \end{array}$$

الف) دو سطر بعدی این الگو را بنویسید.

ب) اگر این الگو را تا سطر بیستم بنویسیم و سپس همهٔ عددهای آن را با هم جمع بزنیم، حاصل چه عددی می‌شود؟

ج) این الگو را تا سطر چندم ادامه دهیم که مجموع همهٔ عددهای آن -۱۴۴ شود؟

۱۰. نوشین حاصل عبارت $۵^۲ + ۴^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$ را این‌گونه محاسبه کرد:

می‌دانیم:

$$۱^۲ = ۱ \times ۱ = ۱,$$
$$۲^۲ = ۲ \times ۲ = ۲ + ۲,$$
$$۳^۲ = ۳ \times ۳ = ۳ + ۳ + ۳,$$
$$۴^۲ = ۴ \times ۴ = ۴ + ۴ + ۴ + ۴,$$
$$۵^۲ = ۵ \times ۵ = ۵ + ۵ + ۵ + ۵ + ۵.$$

با استفاده از رابطه‌های بالا، سه برابرِ مجموعِ $۵^۲ + ۴^۲ + ۳^۲ + ۲^۲ + ۱^۲$ را این‌گونه حساب می‌کنیم:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} ۱ & & & & \\ ۲ & ۲ & & & \\ ۳ & ۳ & ۳ & & \\ ۴ & ۴ & ۴ & ۴ & \\ ۵ & ۵ & ۵ & ۵ & ۵ \end{array}} + \boxed{\begin{array}{lllll} ۵ & & & & \\ ۴ & ۵ & & & \\ ۳ & ۴ & ۵ & & \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۵ & \\ ۱ & ۲ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array}} + \boxed{\begin{array}{lllll} ۵ & & & & \\ ۵ & ۴ & & & \\ ۵ & ۴ & ۳ & & \\ ۵ & ۴ & ۳ & ۲ & \\ ۵ & ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \end{array}} = \boxed{\begin{array}{lllll} ۱۱ & & & & \\ ۱۱ & ۱۱ & & & \\ ۱۱ & ۱۱ & ۱۱ & & \\ ۱۱ & ۱۱ & ۱۱ & ۱۱ & \\ ۱۱ & ۱۱ & ۱۱ & ۱۱ & ۱۱ \end{array}}.$$

در نتیجه،

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲ = \frac{۱۱ \times \left(\frac{۵ \times ۶}{۲}\right)}{۳}.$$

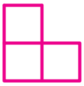
الف) راه حل نوشین را شرح دهید.

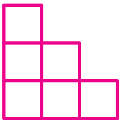
ب) با استفاده از راه‌حل نوشین، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + ۱۱۷^۲$$

۱۱. در کتاب ریاضی تکمیلی هفتم با چندحجره‌ای‌ها و nـ پله آشنا شدید. برای یادآوری، تعریف nـ پله در صفحهٔ بعد آمده است.

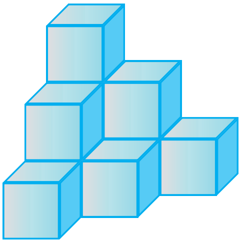

شکل ۱


شکل ۲


شکل ۳

در شکل‌های مقابل، شکل ۱ نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یک چندحجره‌ای[1] است که به آن ۱ـ پله می‌گوییم؛ شکل ۲ نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یک چندحجره‌ای است که به آن ۲ـ پله می‌گوییم؛ شکل ۳ نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یک چندحجره‌ای است که به آن ۳ـ پله می‌گوییم.

با همین الگو nـ پله را تعریف می‌کنیم. بنابراین nـ پله‌ای‌ها نمای روبه‌رو، نمای بالا و نمای چپ یکسانی دارند. شکل زیر، تصویری سه‌بعدی از یک ۳ـ پله است.



با روش نوشین، تعداد مکعب‌های واحد به‌کاررفته در یک nـ پله را به‌دست آورید.

۱۲. اقدس می‌خواست چهل و یک عدد موجود در الگوی عددی زیر را باهم جمع بزند.

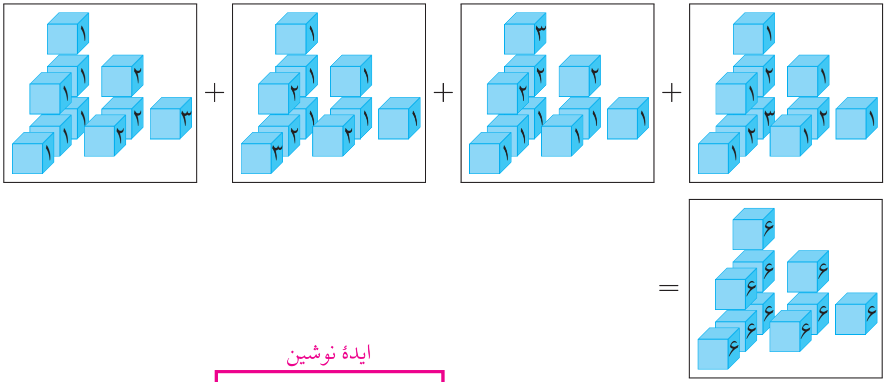
$$۱, ۴, ۱۰, ۲۰, ۳۵, ۵۶, ۸۴, ۱۲۰, \ldots, ۱۲۳۴۱$$

او با روشی عجیب حاصل $۱۰ + ۴ + ۱$ را به‌دست آورد تا در ادامه با استفاده از روش عجیبش مجموع چهل و یک عدد بالا را به‌دست آورد. اقدس ابتدا $۱۰ + ۴ + ۱$ را این‌گونه نوشت:

$$\begin{aligned} ۱ + ۴ + ۱۰ &= ۱ + (۱ + ۳) + (۱ + ۳ + ۶) \\ &= ۱ + (۱ + (۱ + ۲)) + (۱ + (۱ + ۲) + (۱ + ۲ + ۳)) \\ &= ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۲ + ۲ + ۲ + ۳. \end{aligned}$$

[1] به جسم‌های سه‌بعدی که از به‌هم چسباندن یک (یا چند) وجهِ مکعب‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، «چندحجره‌ای» می‌گوییم.

سپس اقدس با استفاده از شکل‌های زیر، حاصل ۱۰ + ۴ + ۱ را به‌صورت زیر به‌دست آورد.



ایدهٔ نوشین

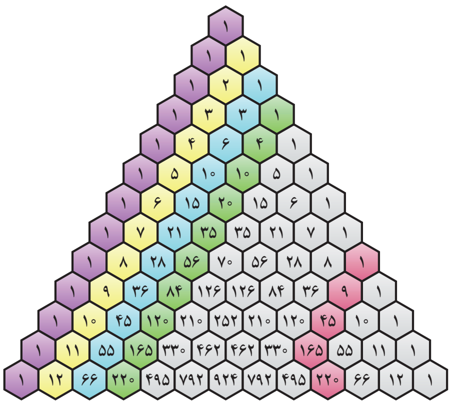
$$\frac{6 \times (1+3+6)}{4} = \frac{6 \times \left(\frac{3\times4\times5}{6}\right)}{4} = \frac{3\times4\times5\times6}{24} = 15.$$

الف) روش اقدس را توضیح دهید.

ب) با استفاده از روش اقدس حاصل جمع زیر را محاسبه کنید.

$$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + \cdots + 12341$$

۱۳. در کتاب تکمیلی سال هفتم با مثلث خیام آشنا شدید. شکل زیر، قسمتی از مثلث خیام را نشان می‌دهد. قبل از دیدن مسائل صفحهٔ بعد، حدس بزنید اعداد مثلث خیام چه ارتباطی با مسئله‌های نجمه، نوشین و اقدس دارند.



در مثلث خیام صفحهٔ قبل، اعدادی که رنگ زمینهٔ آنها صورتی، زرد، آبی و سبز است، به‌ترتیب روی قطرهای صفر، اول، دوم و سوم قرار گرفته‌اند.

الف) باتوجه‌به ایده‌های نجمه، نوشین و اقدس، مجموع اعداد قطر اول، قطر دوم و قطر سوم مثلث خیام صفحهٔ قبل را به‌دست آورید.

ب) می‌خواهیم مجموع n عدد اول قطر mام مثلث خیام را بیابیم. حدس شما چیست؟

۱۴. اگر $n^۲$تا عدد متمایز، طوری در یک جدول $n \times n$ چیده شود که حاصل‌جمع اعداد روی هر سطر، هر ستون و هر قطر، عدد یکسانی باشد، به این جدول $n \times n$ مربع جادویی می‌گویند. برای مثال، جدول زیر، یک مربع جادویی ۳ × ۳ با اعداد ۱ تا ۹ است.

۶	۱	۸
۷	۵	۳
۲	۹	۴

الف) آیا در تمام مربع‌های جادویی ۳ × ۳ که با اعداد ۱ تا ۹ ساخته می‌شوند، مجموع هر سطر، هر ستون و هر قطر ۱۵ است؟ چرا؟

ب) باتوجه‌به متن زیر، یک مربع جادویی ۵ × ۵ با اعداد ۱ تا ۲۵ بسازید.

فرض کنید n عددی فرد باشد. برای ساختن یک مربع جادویی $n \times n$ با اعداد ۱ تا $n^۲$، ابتدا عدد ۱ را در خانهٔ وسطِ سطر بالایی جدول $n \times n$ قرار می‌دهیم. یک خانه به بالا می‌رویم و یک خانه به سمت چپ (اگر از جدول خارج شدیم از سمت مقابل وارد می‌شویم) و عدد بعدی را داخل آن می‌نویسیم و همین کار را تکرار می‌کنیم تا به $n^۲$ برسیم. اگر در مرحله‌ای به خانه‌ای رسیدیم که پر بود (و می‌خواستیم عدد m را داخل آن بنویسیم)، عدد بعدی را زیر خانهٔ عدد قبلی (خانه‌ای که عدد $m - ۱$ را در آن نوشته بودیم)، می‌نویسیم.

ج) یک مربع جادویی ۴×۴ با اعداد ۱ تا ۱۶ بسازید.

د) **پروژه.** اگر n یک عدد طبیعی زوج و $n > ۲$، آنگاه روشی برای ساخت مربع‌های جادویی $n \times n$ با اعداد ۱ تا $n^۲$ ارائه کنید.

عددهای گویا

۱. حاصل عبارت زیر تقریباً چقدر است؟

$$\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴} + \frac{۵۱۳}{۵۱۱} - \frac{۳۰۱}{۹۰۰} + \frac{۵}{۶}$$

۲. اگر نقطهٔ A نمایش $\frac{۲}{۷}$ و نقطهٔ B نمایش $\frac{۲}{۳}$ روی محور اعداد زیر باشد و فاصلهٔ این دو عدد روی محور به پنج قسمت مساوی تقسیم شده باشد، در این صورت نقطهٔ C نمایش چه عددی است؟

۳. اگر به مخرج کسر $\frac{۱۰}{۱۵}$ عدد ۶ را اضافه کنیم، چه عددی باید به صورت کسر اضافه کنیم تا مقدار کسر تغییر نکند؟

۴. مقدار x را در معادله‌های زیر به‌دست آورید. سپس با جایگذاری مقدار x، کسرهای سمت راست و چپ هر تساوی را مشخص کنید.

الف) $\frac{۴۶}{۲/۵} \times ۵ = \frac{x}{۰/۱۲۵}$

ب) $\frac{x}{۱۲} = \frac{x+۶}{۳}$

ج) $-\frac{۴}{۱۱} = \frac{x}{x+۳۰}$

۵. در تساوی زیر، مقدار x را پیدا کنید.

$$\frac{۱}{x} + \frac{۵}{۲x} + \frac{۷}{۴x} + \frac{۶}{۸x} = \frac{۳}{۲}$$

۶. خانم خیرخواه و آقای خیراندیش دو معلم ریاضی هستند. آنها دربارهٔ اینکه چرا عدد صفر معکوس ندارد، این‌گونه بحث کردند:

در کلاس درس خانم خیرخواه

خانم خیرخواه: ۱۲ تقسیم بر ۴ یعنی ۱۲ تا سیب داریم و ۴ تا سبد و می‌خواهیم در هر سبد به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سبد چند تا سیب داریم؟

دانش‌آموزان: ۳ تا.

خانم خیرخواه: با این تعبیر اگر بخواهیم ۱۲ را تقسیم بر صفر کنیم، یعنی ۱۲ تا سیب داریم و صفر تا سبد. یعنی سبد نداریم و می‌خواهیم در هر سبد به‌طور مساوی سیب قرار دهیم. حالا در هر سبد چند تا سیب داریم؟

دانش‌آموزان: خانم سبد نداریم که بخواهیم داخلش سیب بگذاریم.

خانم خیرخواه: به همین خاطر تقسیم بر صفر تعریف نمی‌شود. در نتیجه یک تقسیم بر صفر یعنی $\frac{۱}{۰}$ یا به عبارتی معکوس صفر هم تعریف نشده است.

در کلاس درس آقای خیراندیش

آقای خیراندیش: معکوس ۵ یعنی $\frac{۱}{۵}$، مقداری است که اگر ۵ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم.

$$۵ \times \frac{۱}{۵} = ۱$$

معکوس ۲ یعنی $\frac{۱}{۲}$، مقداری است که اگر ۲ تا از آن داشته باشیم یعنی یک واحد داریم.

$$۲ \times \frac{۱}{۲} = ۱$$

با این تعریف معکوس صفر، یعنی $\frac{۱}{۰}$ چه معنایی دارد؟

دانش‌آموزان: یعنی مقداری که اگر صفر تا از آن داشته باشیم، یک واحد داریم.

$$۰ \times \frac{۱}{۰} = ۱$$

آقای خیراندیش: $\frac{۱}{۰}$ عددی است که اگر هیچی ازش نداشته باشیم یک واحد داریم و این معنایی ندارد. پس معکوس صفر تعریف نشده است.

الف) دربارهٔ دو متن بالا بحث کنید و ایرادهای آنها را، در صورت وجود، بیابید.

ب) تعبیر دیگری برای اینکه چرا صفر معکوس ندارد پیدا کنید.

۷. بین دو عدد ۹ و ۱۰، سی عدد گویا بنویسید.

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به‌صورت یک کسر ساده‌نشدنی بنویسید.

الف) $\frac{۶ \times ۱۴}{۶}$

ب) $\frac{۶ + ۱۴}{۶}$

ج) $\frac{۳ \times ۵ + ۵ \times ۷}{۵}$

د) $\frac{۳ + ۵ + ۷}{۵}$

هـ) $\frac{۵۲ + ۲۱۸}{۹۱ + ۲۱۸}$

و) $\frac{۵۲ \times ۲۱۸}{۹۱ \times ۲۱۸}$

ز) $\frac{۲ \times ۵ \times ۷ \times ۱۱ + ۷}{۲ \times ۵ \times ۱۱}$

ح) $\frac{۳ \times ۳^۲ \times ۳^۳ - ۱}{۳ \times ۳ \times ۳ - ۱}$

۹. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۳۰} + \frac{۱}{۴۲} + \frac{۱}{۵۶}$

ب) $\frac{۲}{۳ \times ۵} + \frac{۲}{۵ \times ۷} + \frac{۲}{۷ \times ۹} + \cdots + \frac{۲}{۴۹ \times ۵۱}$

ج) $\frac{۱}{۵ \times ۸} + \frac{۱}{۸ \times ۱۱} + \frac{۱}{۱۱ \times ۱۴} + \cdots + \frac{۱}{۳۲ \times ۳۵}$

د) $\frac{۱}{۱ \times ۶} + \frac{۱}{۶ \times ۱۱} + \frac{۱}{۱۱ \times ۱۶} + \cdots + \frac{۱}{۴۶ \times ۵۱}$

هـ) $\frac{۱}{۳ \times ۶} + \frac{۱}{۶ \times ۹} + \frac{۱}{۹ \times ۱۲} + \cdots + \frac{۱}{۲۱ \times ۲۴}$

و) $\frac{۲ + ۴}{۲ \times ۳ \times ۴} + \frac{۴ + ۶}{۴ \times ۵ \times ۶} + \frac{۶ + ۸}{۶ \times ۷ \times ۸} + \cdots + \frac{۱۸ + ۲۰}{۱۸ \times ۱۹ \times ۲۰}$

ز) $\frac{۱}{۲ \times ۴} + \frac{۱}{۳ \times ۵} + \frac{۱}{۴ \times ۶} + \cdots + \frac{۱}{۹۸ \times ۱۰۰}$

۱۰. در تساوی زیر مقدار m و n را بیابید.

$$\frac{۵}{۴} \times \frac{۶}{۵} \times \frac{۷}{۶} \times \cdots \times \frac{m}{n} = ۳$$

۱۱. جدول زیر را با اعداد داده شده طوری پر کنید که یک مربع جادویی تشکیل شود.

$$۰,\ \frac{۱}{۱۰۰},\ \frac{۱}{۵۰},\ \frac{۱}{۲۵},\ \frac{۱}{۲۰},\ \frac{۳}{۱۰۰},\ -\frac{۱}{۱۰۰},\ -\frac{۱}{۵۰},\ -\frac{۳}{۱۰۰}.$$

۱۲. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\frac{-۲۰}{۳۵} + \frac{-۲}{۷} - \frac{۱۰}{۵}$

ب) $\dfrac{\frac{۱۵}{۳۲} \times \frac{۱۳}{۴}}{-\frac{۳}{۸} \times \frac{-۵}{۱۶}} \div ۵۲$

ج) $\dfrac{۱ + \frac{۳}{۴}}{(۲ + \frac{۱}{۵}) \div (۱ - \frac{۱}{۴})}$

د) $\frac{۳۷۳۷۳۷}{۳۷}\left(\frac{۱}{۳۷} + \frac{۱}{۱۳ \times ۷}\right)$

۱۳. در زیر، عدد $\frac{۷}{۸}$ به‌صورت مجموع سه کسر متفاوت با صورت ۱ و مخرج طبیعی نوشته شده است[۱]:

$$\frac{۷}{۸} = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸}.$$

هر یک از اعداد زیر را به‌صورت مجموع دو یا چند کسر متفاوت با صورت ۱ و مخرج طبیعی بنویسید.

- $\frac{۱۳}{۱۸}$
- $\frac{۵}{۱۲۱}$
- $\frac{۴}{۱۳}$
- $\frac{۵}{۶}$
- $\frac{۶}{۲۳}$
- $\frac{۷}{۱۲}$
- $\frac{۲۳}{۱۵}$
- $\frac{۱}{۶}$
- $\frac{۸۲۳}{۱۰۲۴}$
- $\frac{۴۰۰}{۷۲۹}$
- $\frac{۴۳}{۴۸}$
- $\frac{۲}{۳۵}$
- $\frac{۱۳}{۲۷}$
- $\frac{۷۳}{۸۱}$
- $\frac{۵۷}{۶۴}$
- $\frac{۳۵۱}{۵۱۲}$

[۱] به‌چنین مجموع کسرهایی، «کسر مصری» می‌گویند؛ زیرا در مصر باستان از این روش برای نمایش و محاسبهٔ کسرها استفاده می‌شده است. برای حل بهتر این تمرین بهتر است به «www.webmath.ir» بیایید.

۱۴. برای هر قسمت مسئله‌ای بسازید که عدد داده شده در راه‌حل آن مسئله ظاهر شود.

الف) $\frac{۳}{۵} \times \frac{۴}{۷}$

ب) $\frac{۷}{۳} \div \frac{۱}{۵}$

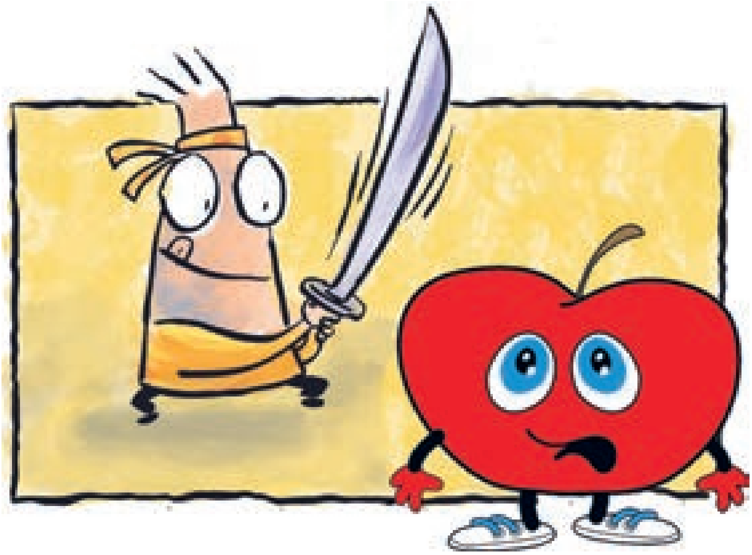
ج) $۱ - \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}$

د) $-\frac{۲}{۳} - \frac{۵}{۴}$

۱۵. **پروژه.** دو نفر می‌خواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند. نفر اول با چاقو سیب را می‌بُرد و نفر دوم حق انتخاب دارد که کدام تکه را انتخاب کند.

الف) اگر سه نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند، راه‌حل چیست؟

ب) اگر n نفر بخواهند یک سیب را به‌طور عادلانه بین خودشان تقسیم کنند، راه‌حل چیست؟



با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

۱۶. دستورهای زیر را در نظر بگیرید.

$\mathcal{A}$: قرینه و معکوس ورودی

$\mathcal{B}$: ضرب‌در، یک واحد کمتر از قرینه ورودی

$\mathcal{C}$: تقسیم بر قرینهٔ مجذور ورودی

$\mathcal{D}$: منهای معکوسِ مجذورِ قرینه ورودی

در هر ستون جدول زیر، یکی از دستورهای بالا روی عدد ورودیِ هر ستون اعمال شده و خروجی به‌دست آمده است.

	ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»
ورودی	اولین عدد اول	خروجی ستون «الف»	خروجی ستون «ب»	خروجی ستون «ج»
دستور	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
خروجی	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	-۴	$-\frac{۶۵}{۱۶}$

الف) اعداد صورتی نوشته شده در جدول فوق درست‌اند. راه‌حل به‌دست آمدن هر یک را بنویسید.

ب) خروجی هر ستون از جدول زیر را به‌دست آورید.

	ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»
ورودی	بزرگ‌ترین عدد صحیحِ منفی	خروجی ستون «الف»	خروجی ستون «ب» به توان ۲	خروجی ستون «ج» به‌اضافهٔ معکوسش
دستور	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
خروجی				

دو مسئلهٔ واقعاً کاربردی

۱. بنا به ابلاغ سازمان امور مالیاتی کشور، سقف معافیت‌های مالیاتی در سال ۱۳۹۴ تا حقوق ماهیانه مبلغ یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان (۱,۱۵۰,۰۰۰) است. بر اساس این قانون، تمام کسانی که بیش از یک میلیون و صد و پنجاه هزار تومان و کمتر از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان (۸,۰۵۰,۰۰۰) دریافتی ماهیانه دارند، با محاسبهٔ نرخ ۱۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند و کسانی که ماهیانه بیش از هشت میلیون و پنجاه هزار تومان حقوق می‌گیرند، مازاد این مبلغ را به نرخ ۲۰ درصد مالیات پرداخت می‌کنند.

جدول مالیات بر حقوق به‌صورت زیر است.

تا سقف ۱,۱۵۰,۰۰۰ تومان	معاف
مازاد بر ۱,۱۵۰,۰۰۰ و تا سقف ۸,۰۵۰,۰۰۰ تومان	۱۰ درصد
مازاد بر ۸,۰۵۰,۰۰۰ تومان	۲۰ درصد

برای مثال، اگر شخصی ۱۰ میلیون تومان حقوق ماهیانه دریافت کند، باید یک میلیون و هشتاد هزار تومان (۱,۰۸۰,۰۰۰) مالیات پرداخت کند که محاسبهٔ آن به‌صورت زیر است.

مشمول ۲۰ درصد $\quad ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۸,۰۵۰,۰۰۰ = ۱,۹۵۰,۰۰۰$

مشمول ۱۰ درصد $\quad ۸,۰۵۰,۰۰۰ - ۱,۱۵۰,۰۰۰ = ۶,۹۰۰,۰۰۰$

مالیات محاسبه شده: $\frac{۲۰}{۱۰۰} \times ۱,۹۵۰,۰۰۰ + \frac{۱۰}{۱۰۰} \times ۶,۹۰۰,۰۰۰ = ۳۹۰,۰۰۰ + ۶۹۰,۰۰۰$

$= ۱,۰۸۰,۰۰۰.$

حقوق چند نفر (به تومان) در زیر آمده است. مالیات بر حقوق هر یک را محاسبه کنید.

الف) ۱,۰۰۰,۰۰۰ ب) ۴,۴۲۰,۰۰۰

ج) ۸,۰۰۰,۰۰۰ د) ۱۲,۵۰۰,۰۰۰

۲. بنابر احکام اسلامی تقسیم ارث:

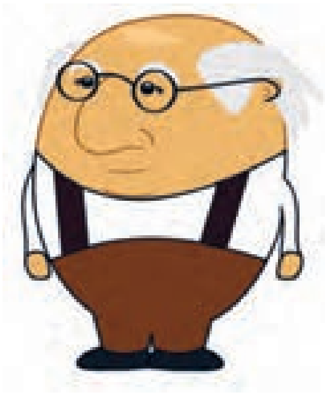
- قبل از اینکه اموال شخص بین وراث تقسیم شود، باید تمام بدهی‌های شخص مرحوم پرداخت شود.
- هر شخص قبل از مرگش می‌تواند $\frac{۱}{۳}$ کل اموال خود را وصیت کند و بقیه اموال، یعنی $\frac{۲}{۳}$ آن، باید بین وراث تقسیم شود.
- از $\frac{۲}{۳}$ اموالی که باید بین وراث تقسیم شود، $\frac{۱}{۸}$ بین همهٔ همسران به‌طور مساوی تقسیم می‌شود و در صورت زنده بودن پدر و مادر شخص مرحوم، به هر کدام $\frac{۱}{۶}$ اموال به ارث می‌رسد و باقی‌مانده ارث به فرزندان تعلق می‌گیرد به‌طوری‌که هر پسر دو برابر هر دختر ارث می‌برد.

وراث باید مطابق جدول زیر، مالیات بر ارث بپردازند.

تا سقف ۵ میلیون تومان	۵ درصد
مازاد بر ۵ میلیون تومان و تا سقف ۲۰ میلیون تومان	۱۵ درصد
مازاد بر ۲۰ میلیون تومان و تا سقف ۵۰ میلیون تومان	۲۵ درصد
مازاد بر ۵۰ میلیون تومان	۳۵ درصد

اکبر آقا قبل از مرگش، خودرویی به قیمت ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ تومان خرید ولی ۲۰ درصد از قیمت خودرو را پرداخت نکرده بود. اکبر آقا برای $\frac{۱}{۳}$ اموال خود، بعد از ارزش‌گذاری تمام دارایی‌ها و اموالش، وصیت کرد:

یک‌دهم از ثلث اموالم را به همسر اولم بدهید.
یک‌هشتم آن را به نوهٔ عزیزم صدرا بدهید و
بقیه را به انسان‌های خیلی خوب بدهید.



پدر و مادر مرحوم اکبر آقا هنوز زنده هستند. اکبر آقا ۲ همسر، ۳ پسر و ۲ دختر داشت و اموال وی بیست میلیارد و سیصد و هجده میلیون تومان بود.

الف) قبل از محاسبه مقدار ارث هر شخص، می‌توانید بگویید که ارث صدرا با ارث چه کسی برابر می‌شود؟

ب) به هر کدام از وراث چند تومان ارث می‌رسد؟

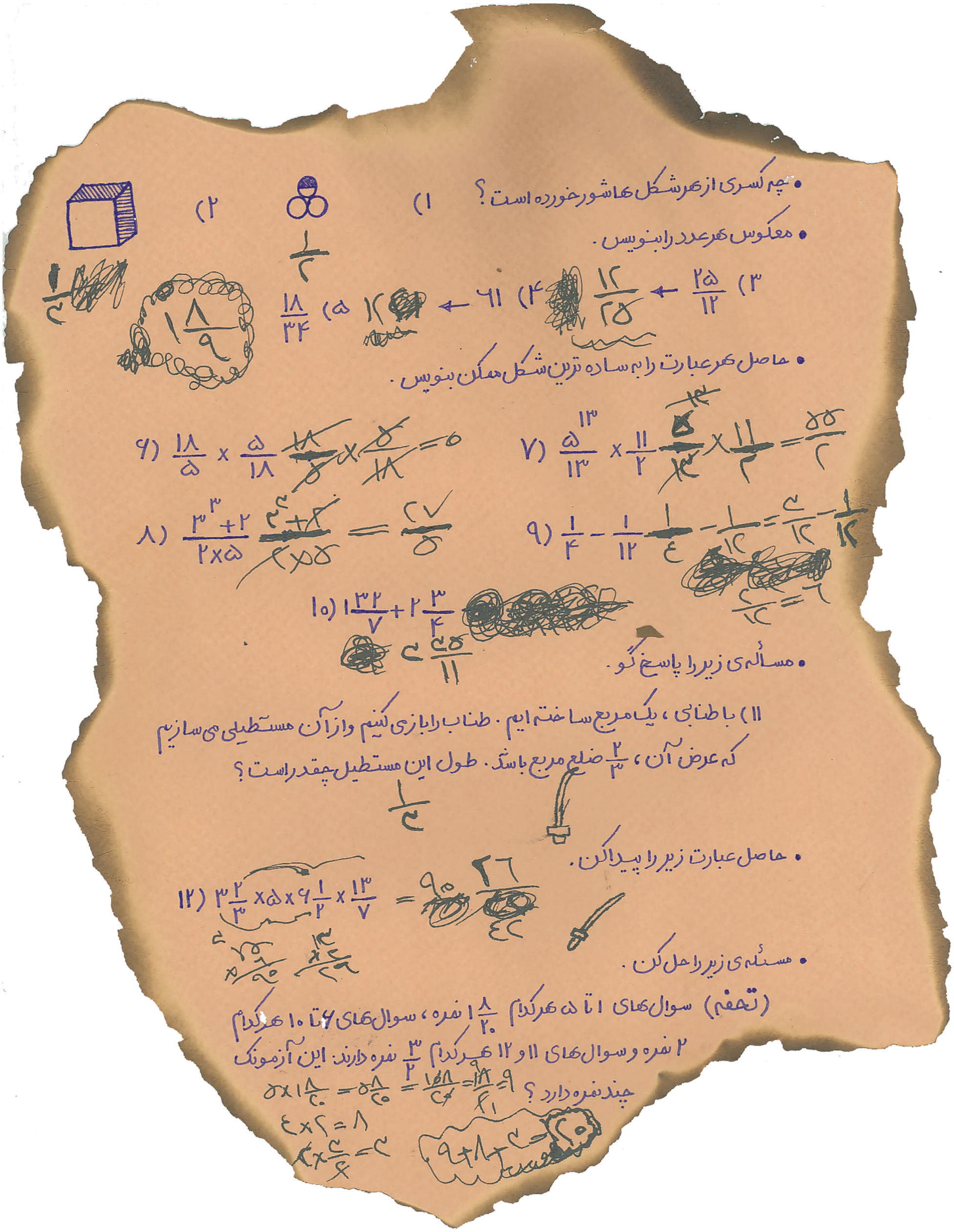
ج) ادارهٔ مالیات از مرگ اکبر آقا چقدر کسب درآمد کرده است؟

حکایتی از گلستان سعدی

پادشاهی را مهمّی پیش آمد. گفت: اگر انجامِ این حالت به مراد من برآید، چندین درم دهم زاهدان را. چون حاجتش برآمد و تشویش خاطرش برفت، وفای نذرش به وجود شرط، لازم آمد. یکی را از بندگان خاص، کیسه‌ای درم داد تا صرف کند بر زاهدان. گویند: غلامی عاقلِ هشیار بود. همه روز بگردید و شبانگه باز آمد و درم‌ها بوسه داد و پیش مَلِك بنهاد و گفت: زاهدان را چندان که گردیدم، نیافتم. گفت: این چه حکایت است؟! آنچه من دانم در این مُلك چهارصد زاهد است. گفت: ای خداوند جهان، آن که زاهد است، نمی‌ستاند و آن که می‌ستاند، زاهد نیست. مَلِك بخندید و ندیمان را گفت: چندان که مرا در حقِّ خداپرستان ارادت است و اقرار، مر این شوخ دیده را عداوت است و انکار و حق به جانب اوست.

زاهد که درم گرفت و دینار   زاهدتر از او کسی به دست آر

۳. صدرا یک صندوقچهٔ قدیمی در زیرزمین خانهٔ اکبر آقا پیدا کرد که برگهٔ زیر، در آن بود. این برگه را تصحیح کنید.



• چه کسری از هر شکل هاشور خورده است؟

۱) $\frac{1}{2}$

۲)

• معکوس هر عدد را بنویس.

۳) $\frac{25}{12} \leftarrow \frac{12}{25}$

۴) $61 \leftarrow 1$

۵) $\frac{18}{34}$ $1\frac{8}{9}$

• حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین شکل ممکن بنویس.

۶) $\frac{18}{5} \times \frac{5}{18} = 0$

۷) $\frac{5}{13} \times \frac{11}{2} = \frac{55}{2}$

۸) $\frac{3^3+2}{2\times 5} = \frac{27}{5}$

۹) $\frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2}{12} - \frac{1}{12}$

۱۰) $1\frac{32}{7} + 2\frac{3}{4}$ $\frac{45}{11}$

• مسئله‌ی زیر را پاسخ گو.

۱۱) با طنابی، یک مربع ساخته‌ایم. طناب را باز می‌کنیم و از آن مستطیلی می‌سازیم که عرض آن، $\frac{2}{3}$ ضلع مربع باشد. طول این مستطیل چقدر است؟

$\frac{1}{4}$

• حاصل عبارت زیر را پیدا کن.

۱۲) $3\frac{2}{3} \times 5 \times 6\frac{1}{2} \times \frac{13}{7} = \frac{26}{42}$

• مسئله‌ی زیر را حل کن.

(تحقیق) سوال‌های ۱ تا ۵ هرکدام $1\frac{8}{20}$ نمره، سوال‌های ۶ تا ۱۰ هرکدام ۲ نمره و سوال‌های ۱۱ و ۱۲ هرکدام $\frac{3}{2}$ نمره دارند. این آزمونک چند نمره دارد؟

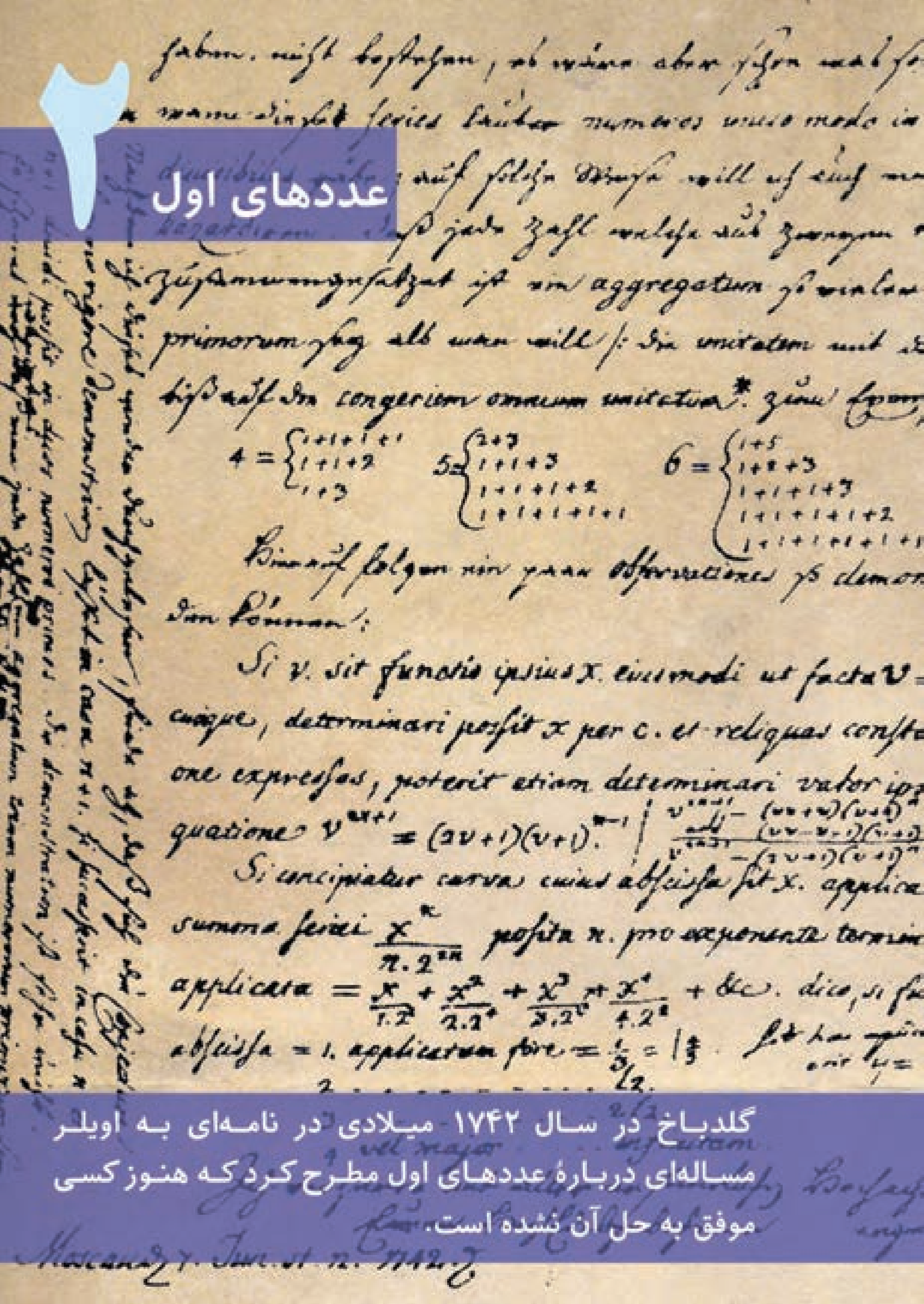
$5 \times 1\frac{8}{20} = 5\frac{8}{20} = \frac{108}{20} = \frac{18}{4} = 9$

$4 \times 2 = 8$

$2 \times \frac{3}{2} = 3$

$9 + 8 + 3 = 20$

۲
عددهای اول



گلدباخ در سال ۱۷۴۲ میلادی در نامه‌ای به اویلر مساله‌ای دربارهٔ عددهای اول مطرح کرد که هنوز کسی موفق به حل آن نشده است.

گفت‌وگو

در دفتر دبیران به جز مدیر و معلم ریاضی که دوست صمیمی مدیر بود، کسی نبود.

مدیر: امسال نیاز به یک معلم ریاضی دیگر هم داریم. به نظر شما برای انتخاب معلم جدید به چه چیزی بیشتر اهمیت بدهم؟ به سواد ریاضی‌اش؟ یا به هنر تدریس معلمی‌اش؟

معلم ریاضی: هر دو مهم است. [پس از اندکی مکث] سودِ هنر تدریس را همهٔ دانش‌آموزانِ کلاس می‌برند و سود سواد ریاضی را دانش‌آموزهای نخبه.

مدیر: پس کلاً به نظر شماهنر تدریس مهم‌تر است!

معلم ریاضی: نه! بستگی به این دارد که شاگردهای کلاس چقدر باهوش باشند. اگر یک کلاس با سطح یادگیری متوسط داشته باشیم، حتماً هنر تدریس مهم‌تر است؛ اما اگر یک کلاس با دانش‌آموزهای باهوش داشته باشیم، باید سواد معلم را لحاظ کنیم.

مدیر: جسارتاً من این حرف شما را قبول ندارم. من خودم رشته‌ام مهندسی برق بوده است، ولی چند سال ریاضی درس داده‌ام. همه راضی بودند؛ هم دانش‌آموزهای نخبه و هم کلاً همهٔ دانش آموزها.

معلم ریاضی: مثلاً در فصل اعداد، به دانش‌آموزهای نخبه چه خوراک علمی می‌دادید؟

مدیر: [با خندهٔ ریز] آن روزها هر کسی دربارهٔ عددهای اول خیلی کنجکاوی می‌کرد، به او می‌گفتم برود فرمول اعداد اول را کشف کند!!

معلم ریاضی: فرمول اعداد اول؟! یعنی هیچ مسئلهٔ مناسب‌تری سراغ نداشتید که به او پیشنهاد بدهید؟ عملاً آنها را سرکار می گذاشتید!

مدیر: آها! حالا فهمیدم منظور شما چیه! من همیشه کلی مسئله داشتم که به هر دانش‌آموزی که علاقه داشت می‌دادم. برای بعضی از مسئله‌ها هم جایزه می‌دادم. کلاً خیلی از شاگردها همیشه در تکاپو بودند.

معلم ریاضی: [با حالتی صمیمانه] تو معلم ریاضی خوبی بودی، اما نه برای دانش‌آموزهای خاص! چیزی که احتمالاً نداشتی یک شناخت کلی از دانش ریاضی است! اگر کسی ده‌ها درس رشتهٔ ریاضی دانشگاهی را گذرانده باشد، ممکن است بتواند چنین دانشی را کسب کند، تا حدوداً بفهمد هدف مطالعهٔ گرایش‌های مختلف در رشته ریاضی چه هستند؛ تفاوتشان با هم چیست؛ تا حالا دربارهٔ چه ایده‌هایی در این گرایش‌ها کار شده و از این جور چیزها.

مدیر: می‌فرمایید یک مهندس برق که کلی ریاضی خوانده، معنای ریاضی را نفهمیده است؟

معلم ریاضی: واقعیت این است که یک مهندس برق خیلی ریاضی نخونده است! او حداکثر کاربردهایی از ریاضی را دیده است.

معلم ریاضی کمی مکث کرد که ببیند بین همهٔ آنچه که می خواهد بگوید کدام‌یک را انتخاب کند.

معلم ریاضی: شما می دانید که اعداد را، هم می‌شود تحلیلی مطالعه کرد و هم جبری؟ یعنی هم در ساختارهای پیوسته مطالعه‌شان کرد و هم در ساختارهای گسسته.

مدیر: دانستن این موضوع چه فایده‌ای برای دانش‌آموزها دارد؟

معلم ریاضی: برای تقریباً همهٔ دانش آموزها، تقریباً هیچی! اما ممکن است در سی سال تدریس، به یک دانش‌آموز نابغه برخورد کنید که گفتن این جمله به او، دیدش را از زمین تا آسمان تغییر دهد. این همان دانش‌آموزی است که ممکن است در آینده یک ریاضیدان بزرگ شود.

یادآوری عددهای اول

۱. بیشترین تعداد اعداد طبیعی دو رقمی پشت سر هم که هیچ‌کدام از آنها اول نباشند، چند تا است؟

۲. چند عدد طبیعی دو رقمی وجود دارد که اعداد قبل و بعد از آن، یکی مربع کامل و دیگری عدد اول باشد؟

۳. مربع زیر را با اعداد اول دو رقمی طوری پر کنید که یک مربع جادویی حاصل شود.

۱۱۳		۵
		۱۰۱

● در دو مسئلهٔ بعد، به دو عدد همسایه می‌گوییم هرگاه خانه‌های آنها در یک ضلع مشترک باشند.

۴. اعداد ۱ تا ۹ را طوری در یک جدول ۳ × ۳ بچینید که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند.

۵. الف) نمی‌توان اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳ و ۱۵ را طوری در خانه‌های خالی جدول زیر قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند. چرا؟

	۸		۱۶
۴		۱۲	
	۶		۱۴
۲		۱۰	

ب) آیا می‌توان اعداد ۱ تا ۱۶ را طوری در یک جدول ۴ × ۴ قرار داد که هر دو عدد همسایه نسبت به هم اول باشند؟

۶. الف) همه اعداد کوچکتر از ۳۰ را بنویسید که نسبت به ۳۰ اول‌اند.

ب) چند عدد کوچک‌تر از ۱۲۱ وجود دارد که نسبت به ۱۲۱ اول باشد؟

۷. عددی اول، مانند p داده شده است. چند عدد طبیعی وجود دارد که:

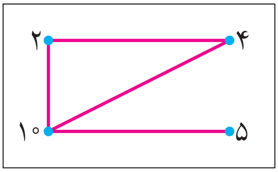
الف) از p کوچک‌تر و نسبت به p اول باشد؟

ب) از p^2 کوچک‌تر و نسبت به p اول باشد؟

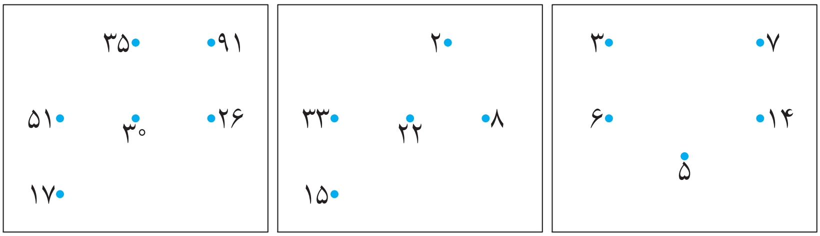
ج) از p^2 کوچک‌تر و نسبت به p^2 اول باشد؟

د) از p^p کوچک‌تر و نسبت به p اول باشد؟

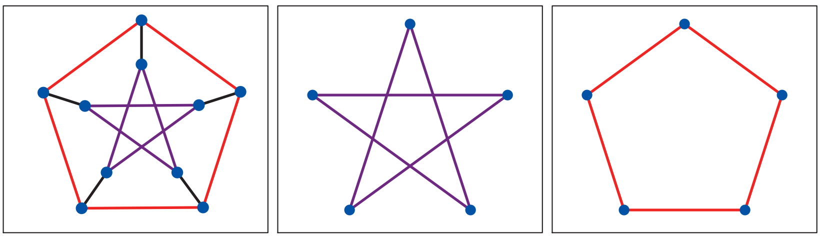
۸. در شکل زیر، فقط اعدادی که نسبت به‌هم اول نیستند را به یکدیگر وصل کرده‌ایم.



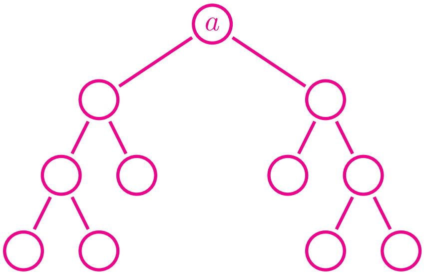
الف) در هر یک از کادرهای زیر، اعدادی که نسبت به‌هم اول نیستند را به یکدیگر وصل کنید. سپس عبارت به‌دست آمده را بخوانید!



ب) باتوجه‌به قانون گفته شده، برای هریک از نقطه‌های زیر عددی مناسب بیابید.



۹. نمودار درختی زیر، برای تجزیه عدد a رسم شده است. کدام‌یک از اعداد ۶۴، ۱۳۰×۹۹، ۳۵×۳۶ و ۱۶۸ نمی‌تواند برابر a باشد؟



تعیین عددهای اول

۱. یک عدد مرکب را «تقریباً اول» می‌نامیم، هرگاه هر دو شمارندهٔ آن، به غیر از خود عدد، نسبت به‌هم اول باشند. برای مثال عدد ۱۵ یک عدد تقریباً اول است، زیرا هر دو شمارنده از شمارنده‌های ۱، ۳ و ۵ نسبت به‌هم اول‌اند؛ ولی عدد ۱۲ تقریباً اول نیست، زیرا شمارنده‌های ۲ و ۶ نسبت به‌هم اول نیستند.

الف) اعداد تقریباً اول کوچک‌تر از ۱۰۰ را بیابید و آنها را به‌ترتیبی که در غربال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰ حذف می‌شوند، مرتب کنید.

ب) چند عدد دو رقمی تقریباً اول وجود دارد که نسبت به ۳۳۰ اول باشد؟

ج) آیا حاصل‌ضرب دو عدد تقریباً اول، می‌تواند عددی تقریباً اول باشد؟

د) کوچک‌ترین عددی را بیابید که اعداد دو رقمی تقریباً اول، نسبت به آن عدد، اول نباشند.

هـ) در غربال اعداد کوچک‌تر از ۱۰۰۰ آخرین عدد تقریباً اولی که حذف می‌شود، چیست؟

۲. الف) قانون جدول زیر را کشف کنید و جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید.

$\square n + ۱$	۱۹	۱۶	۱۳	۱۰	۷	۴
$\square n + ۲$	۳۲	۲۷	۲۲	۱۷	۱۲	۷
$\square n + ۳$	۴۵	۳۸	۳۱	۲۴	۱۷	۱۰
$\square n + ۴$	۵۸	۴۹	۴۰	۳۱	۲۲	۱۳
$\square n + ۵$	۷۱	۶۰	۴۹	۳۸	۲۷	۱۶
$\square n + ۶$	۸۴	۷۱	۵۸	۴۵	۳۲	۱۹

ب) فرض کنید سطرها و ستون‌های این جدول را ادامه داده‌اید. نینا ادعا می‌کند که اگر عددی طبیعی، مانند m، در جدول ظاهر شود، آنگاه $۲m + ۱$ اول نیست؛ و اگر m در جدول ظاهر نشود، آنگاه $۲m + ۱$ عددی اول است. برای مثال $m = ۲۲$ در جدول ظاهر می‌شود، بنابراین برای $m = ۲۲$ داریم،

$$۲m + ۱ = ۲ \times ۲۲ + ۱ = ۴۵,$$

که ۴۵ عددی اول نیست. اما $m = ۶$ در جدول ظاهر نمی‌شود، پس برای $m = ۶$ داریم،

$$۲m + ۱ = ۲ \times ۶ + ۱ = ۱۳,$$

که ۱۳ عددی اول است. ادعای نینا را برای حداقل پنج عدد دیگر آزمایش کنید.

ج) همهٔ اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۵۰ را که در جدول ظاهر نمی‌شوند، بیابید.

۳. الف) نشان دهید برای هر عدد طبیعی n که $n < ۶۳۱$، عددی اول مانند p وجود دارد که $n < p \leqslant ۲n$.

کامبیز الگوی عددی زیر را نوشت و ادعا کرد برای حل مسئلهٔ بالا نوشتن همین اعداد کافی است.

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۳, ۲۳, ۴۳, ۸۳, ۱۶۳, ۳۱۷, ۶۳۱$$

چرا ادعای کامبیز درست است؟

ب) **پروژه.** اگر $n \geqslant ۱$، ثابت کنید عدد اولی مانند p وجود دارد که $n < p \leqslant ۲n$.

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

۴. جدولی از اعداد طبیعی را به‌صورت زیر تشکیل دهید:

- در ستون سمت چپ آن، اعداد اول را به‌ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید.
- در هر ردیف مضرب‌های طبیعی عدد اولِ آن ردیف را از کوچک به بزرگ (از چپ به راست) بنویسید.
- هر ردیف را با عدد اول آن نام‌گذاری کنید. برای مثال ردیفی را که در آن اعداد

$$۵, ۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, ۳۰, ۳۵, ۴۰, ۴۵, ۵۰, ۵۵, ۶۰, \ldots$$

آمده است، ردیف ۵ بنامید.

الف) عدد ۲۰ در کدام ردیف‌ها ظاهر می‌شود؟ عدد ۳۰ چطور؟

ب) پنج عدد مثال بزنید که فقط در ردیف‌های ۷ و ۱۷ ظاهر شده باشند.

ج) آیا می‌توان سه عدد در ردیف ۱۱ پیدا کرد که فقط در ردیف ۱۱ دیده شوند؟

د) در هر ردیف اولین عدد مرکبی را بیابید که در ردیف‌های بالایی ظاهر نشده باشد. آیا این اعداد خاصیت مشترکی دارند؟

هـ) هر یک از اعداد ۹۱، ۱۱۹، ۱۴۳، ۱۳۳، ۲۹۹، ۲۴۷ و ۶۶۷ برای اولین بار در کدام ردیف ظاهر می‌شوند؟

و) می‌دانیم a عددی مرکب و کوچکتر از ۳۰۰ است. دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ زیر بحث کنید.

«عدد a در ردیف ۱۷ یا یکی از ردیف‌های قبل از ردیف ۱۷ ظاهر می‌شود.»

۵. باتوجه‌به قسمت «و» تمرین قبل، توضیح دهید که چرا برای تعیین اول بودن عدد n، کافی است بخش‌پذیری عدد n بر اعداد اول کوچک‌تر از $\sqrt{n}$ را بررسی کنیم.

۶. سهیلا با روش غربال، اعداد اول کوچک‌تر از ۲۵۰۰ را مشخص کرده است. او با چه ترتیبی اعداد زیر را خط زده است؟

- ۱۶۵۱
- ۱۹۰۹
- ۲۴۷۱
- ۱۷۱۷

۷. تاکنون هیچ الگوی عددی با رقم‌های منظم که همهٔ اعداد آن اول باشند، پیدا نشده است. در الگوی عددی زیر اولین عدد مرکب را بیابید.

$$۳۱, ۳۳۱, ۳۳۳۱, ۳۳۳۳۱, ۳۳۳۳۳۱, ۳۳۳۳۳۳۱, \ldots$$

برای یافتن اولین عدد مرکب در الگوی بالا می‌توانید مانند ریاضی‌دان‌های حرفه‌ای از نرم‌افزارهای ریاضی، استفاده کنید. برای آشنایی با نرم‌افزارهای ریاضی به www.webmath.ir بیایید.

ماشین کانوِی

کسرهای زیر را در نظر بگیرید.

$F۱$	$F۲$	$F۳$	$F۴$	$F۵$	$F۶$	$F۷$	$F۸$	$F۹$	$F۱۰$
$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۹۹}{۹۸}$	$\frac{۱۳}{۴۹}$	$\frac{۳۹}{۳۵}$	$\frac{۳۶}{۹۱}$	$\frac{۱۰}{۱۴۳}$	$\frac{۴۹}{۱۳}$	$\frac{۷}{۱۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۹۱}{۱}$

عدد ۱۰ را در کسرهای فوق به‌ترتیب از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. حاصل‌ضرب ۱۰ در کسرهای $F۱$ تا $F۸$ عددی طبیعی نیست ولی حاصل‌ضرب ۱۰ در $F۹$ یک عدد طبیعی و برابر با ۵ است.

اکنون ۵ را در کسرهای جدول از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. اولین عدد طبیعی از حاصل‌ضرب ۵ در کسر $F۱۰$ به‌دست می‌آید که ۴۵۵ است.

حال ۴۵۵ را در کسرهای جدول از چپ به راست ضرب می‌کنیم تا به یک عدد طبیعی برسیم. اولین عدد طبیعی از حاصل‌ضرب ۴۵۵ در کسر $F۴$ به‌دست می‌آید که ۵۰۷ است.

اگر این‌کار را به‌همین‌صورت ادامه دهیم، دنباله‌ای از اعداد طبیعی حاصل می‌شود. در این دنباله توان‌های عدد ۱۰، اعداد اول هستند که به ترتیب همه آنها ساخته می‌شوند. یعنی اولین عددی که

از توان‌های ۱۰ ساخته خواهد شد $۱۰^{۲}$ است که به عنوان شانزدهمین عدد در دنباله ساخته می‌شود. دومین عددی که از توان‌های ۱۰ ساخته خواهد شد $۱۰^{۳}$ است که به عنوان شصت و هفتمین عدد در دنباله ساخته می‌شود. $۱۰^{۵}$ به عنوان دویست و پنجاه و ششمین عدد ، $۱۰^{۷}$ به عنوان ششصد و هفدهمین عدد و به‌همین‌ترتیب بقیه توان‌های عدد ۱۰ ساخته می‌شوند.

۲۵, ۵۰, ۱۰۰, ۱۴۳۰, ۲۰۴۴۹, ۷۷۰۷۷, ۳۳۰۳۳, ۱۴۱۵۷, ۱۴۰۱۴, ۶۰۰۶, ۲۵۷۴, ۲۵۴۸, ۱۰۹۲, ۴۶۸, ۱۱۸۳, ۵۰۷, ۴۵۵, ۵, ۱۰۰۲۰۰۱, ۴۲۹۴۲۹, ۱۸۴۰۴۱, ۱۸۲۱۸۲, ۷۸۰۷۸, ۳۳۴۶۲, ۳۳۱۲۴, ۱۴۱۹۶, ۶۰۸۴, ۱۵۳۷۹, ۶۵۹۱, ۵۹۱۵, ۲۵۳۵, ۲۲۷۵, ۴۵۵۰, ۱۹۵۰, ۱۷۵۰, ۲۷۵۰, ۳۹۳۲۵, ۱۴۸۲۲۵, ۶۳۵۲۵, ۲۷۲۲۵, ۲۶۹۵۰, ۱۱۵۵۰, ۴۹۵۰, ۴۹۰۰, ۱۳۰۰, ۱۸۵۹۰, ۲۶۵۸۳۷, ۲۰۰۴۰۰۲, ۸۵۸۸۵۸, ۳۶۸۰۸۲, ۳۶۴۳۶۴, ۱۵۶۱۵۶, ۶۶۹۲۴, ۶۶۲۴۸, ۲۸۳۹۲, ۱۲۱۶۸, ۳۰۷۵۸, ۱۳۱۸۲, ۱۱۸۳۰, ۵۰۷۰, ۲۹۵۷۵, ۱۲۶۷۵, ۱۱۳۷۵, ۱۲۵, ۲۵۰, ۵۰۰, ۱۰۰۰, ۱۴۳۰۰, ۲۰۴۴۹۰, ۲۹۲۴۲۰۷, ۱۱۰۲۲۰۱۱, ۴۷۲۳۷۱۹, ۲۰۲۴۴۵۱, ۵۵۸۲۵۷۷, ۲۳۹۲۵۳۳, ۲۳۶۸۳۶۶, ۱۰۱۵۰۱۴, ۴۳۵۰۰۶, ۴۳۰۶۱۲, ۱۸۴۵۴۸, ۷۹۰۹۲, ۱۹۹۹۲۷, ۸۵۶۸۳, ۷۶۸۹۵, ۳۲۹۵۵, ۵۱۱۲۲۵, ۱۹۲۶۹۲۵, ۸۲۵۸۲۵, ۳۵۳۹۲۵, ۳۵۰۳۵۰, ۱۵۰۱۵۰, ۶۴۳۵۰, ۶۳۷۰۰, ۱۶۹۰۰, ۲۴۱۶۷۰, ۳۴۵۵۸۸۱, ۱۳۰۲۶۰۱۳, ۲۵۹۹۰۵۱, ۱۱۱۳۸۷۹, ۹۹۹۶۳۵, ۴۲۸۴۱۵, ۳۸۴۴۷۵, ۱۶۴۷۷۵, ۱۴۷۸۷۵, ۶۳۳۷۵, ۵۶۸۷۵, ۶۲۵, ۱۲۵۰, ۲۵۰۰, ۳۵۷۵۰, ۴۴۹۲۶۴۵۳, ۱۶۹۳۳۸۱۶۹, ۷۲۵۷۳۵۰۱, ۳۱۱۰۲۹۲۹, ۳۰۷۸۸۷۵۸, ۱۳۱۹۵۱۸۲, ۵۶۵۵۰۷۸, ۵۵۹۷۹۵۶, ۲۳۹۹۱۲۴, ۱۰۲۸۱۹۶, ۴۶۴۷۵۰, ۶۶۴۵۹۲۵, ۲۵۰۵۰۰۲۵, ۱۰۷۳۵۷۲۵, ۴۶۰۱۰۲۵, ۴۵۵۴۵۵۰, ۱۹۵۱۹۵۰, ۸۳۶۵۵۰, ۸۲۸۱۰۰, ۲۱۹۷۰۰, ۳۱۴۱۷۱۰, ۱۱۳۷۵۰, ۴۸۷۵۰, ۴۳۷۵۰, ۶۸۷۵۰, ۹۸۳۱۲۵, ۳۷۰۵۶۲۵, ۱۵۸۸۱۲۵, ۶۸۰۶۲۵, ۶۷۳۷۵۰, ۲۸۸۷۵۰, ۱۲۳۷۵۰, ۱۲۲۵۰۰, ۳۲۵۰۰, ۱۱۱۹۵۹۱۲, ۴۷۹۸۲۴۸, ۲۰۵۶۳۹۲, ۵۱۹۸۱۰۲, ۲۲۲۷۷۵۸, ۱۹۹۹۲۷۰, ۸۵۶۸۳۰, ۷۶۸۹۵۰, ۳۲۹۵۵۰, ۲۹۵۷۵۰, ۱۲۶۷۵۰, ۱۸۶۲۷۱۹۸۵۹, ۷۹۸۳۰۸۵۱۱, ۳۴۲۱۳۲۲۱۹, ۳۳۸۶۷۶۳۳۸, ۱۴۵۱۴۷۰۰۲, ۶۲۲۰۵۸۵۸, ۶۱۵۷۷۵۱۶, ۲۶۳۹۰۳۶۴, ۱۱۳۱۰۱۵۶, ۱۹۲۶۹۲۵۰, ۸۲۵۸۲۵۰, ۳۵۳۹۲۵۰, ۳۵۰۳۵۰۰, ۱۵۰۱۵۰۰, ۶۴۳۵۰۰, ۶۳۷۰۰۰, ۱۶۹۰۰۰, ۲۴۱۶۷۰۰, ۳۴۵۵۸۸۱۰, ۴۹۴۱۹۰۹۸۳, ۵۹۱۵۰۰, ۲۵۳۵۰۰, ۲۲۷۵۰۰, ۹۷۵۰۰, ۸۷۵۰۰, ۱۳۷۵۰۰, ۱۹۶۶۲۵۰, ۲۸۱۱۷۳۷۵, ۱۰۵۹۸۰۸۷۵, ۴۵۴۲۰۳۷۵, ۱۹۴۶۵۸۷۵, ۲۲۶۲۰۳۱۲, ۲۲۳۹۱۸۲۴, ۹۵۹۶۴۹۶, ۴۱۱۲۷۸۴, ۱۰۳۹۶۲۰۴, ۴۴۵۵۵۱۶, ۳۹۹۸۵۴۰, ۱۷۱۳۶۶۰, ۱۵۳۷۹۰۰, ۶۵۹۱۰۰, ۳۷۲۵۴۳۹۷۱۸, ۱۵۹۶۶۱۷۰۲۲, ۶۸۴۲۶۴۴۳۸, ۶۷۷۳۵۲۶۷۶, ۲۹۰۲۹۴۰۰۴, ۱۲۴۴۱۱۷۱۶, ۱۲۳۱۵۵۰۳۲, ۵۲۷۸۰۷۲۸, ۴۹۰۰۰۰, ۱۳۰۰۰۰, ۱۸۵۹۰۰۰, ۲۶۵۸۳۷۰۰, ۳۸۰۱۴۶۹۱۰, ۵۴۳۶۱۰۰۸۱۳, ۲۰۴۸۹۹۱۸۴۴۹, ۸۷۸۱۳۹۳۶۲۱, ۳۷۶۳۴۵۴۴۰۹, ۸۲۳۵۵۶۲۵, ۸۱۵۲۳۷۵۰, ۳۴۹۳۸۷۵۰, ۱۴۹۷۳۷۵۰, ۱۴۸۲۲۵۰۰, ۶۳۵۲۵۰۰, ۲۷۲۲۵۰۰, ۲۶۹۵۰۰۰, ۱۱۵۵۰۰۰, ۴۹۵۰۰۰, ۳۵۷۸۵۷۵۰, ۱۵۳۳۶۷۵۰, ۱۳۷۶۳۷۵۰, ۵۸۹۸۷۵۰, ۵۲۹۳۷۵۰, ۸۳۱۸۷۵۰, ۱۱۸۹۵۸۱۲۵, ۴۴۸۳۸۰۶۲۵, ۱۹۲۱۶۳۱۲۵, ۵۸۰۵۸۸۰۰۸, ۲۴۸۸۲۳۴۳۲, ۶۲۸۹۷۰۳۴۲, ۲۶۹۵۵۸۷۱۸, ۲۴۱۹۱۱۶۷۰, ۱۰۳۶۷۶۴۳۰, ۹۳۰۴۲۹۵۰, ۳۹۸۷۵۵۵۰, ۴۰۹۷۹۸۳۶۸۹۸, ۱۷۵۶۲۷۸۷۲۴۲, ۷۵۲۶۹۰۸۸۱۸, ۷۴۵۰۸۷۹۴۳۶, ۳۱۹۳۲۳۴۰۴۴, ۱۳۶۸۵۲۸۸۷۶, ۱۳۵۴۷۰۵۳۵۲, ۱۴۳۰۰۰۰, ۲۰۴۴۹۰۰۰, ۲۹۲۴۲۰۷۰۰, ۴۱۸۱۶۱۶۰۱۰, ۵۹۷۹۷۱۰۸۹۴۳, ۲۲۵۳۸۹۱۰۲۹۳۹, ۹۶۵۹۵۳۲۹۸۳۱, ۴۱۳۹۷۹۹۸۴۹۹, ۱۰۰۰۰۰.

۳ چندضلعی‌ها

در بیشتر بناهای قدیمی و جدید ایران می‌توانید از دیدن طرح‌ها و تقارن‌های زیبای کاشی‌کاری‌ها لذت ببرید.

گفت‌وگو

پس از یک روز طولانی و خسته‌کننده، معلم ریاضی در دفتر دبیران نشسته بود و در این هنگام معلم دیگری وارد دفتر دبیران شد.

معلم دیگر: از این خسته شدم که همه جا در کتاب‌های درسی نوشته، مثلاً فلان‌ابن‌فلان یک دانشمند ایرانی یا مسلمان بوده که در قدیم زندگی می‌کرده است و چه‌ها کرده است. این حرف‌ها را باید تمام کرد. ما باید علم جدید را یاد بگیریم.

معلم ریاضی: خُب، چه اشکالی دارد که هم علم جدید یاد بگیریم و هم یاد بگیریم که گذشتگان ما چه نقشی در علم داشتند؟

معلم دیگر: به اعتقاد من آنها هیچ کار مهمی انجام ندادند. جایی می‌خواندم که «نقش دانشمندان اسلامی انتقال دانش از یونان باستان به اروپای رُنِسانس[1] بوده است. مسلمان‌ها دانشمند درست و حسابی نداشتند. نهایتاً امانت‌دارهای خوبی بودند که کتاب‌های دانشمندان بزرگ یونان را گرفتند و به دانشمندان بزرگ اروپایی تحویل دادند»!

معلم ریاضی: شما که این‌قدر اهل مطالعه هستید، جایی نخوانده‌اید که مثلاً خوارزمی، ابن سینا و ابوریحان چه اشخاصی بوده‌اند و چه کارهایی انجام داده‌اند؟ یا ابن خلدون یا ...، باز هم بگویم؟

معلم دیگر: حالا این چند نفر را استثنا می‌کنیم. بقیه چی؟ واقعاً دیگر بس است!

کمی هر دو ساکت شدند، تا اینکه سکوت فضا دوباره شکسته شد.

معلم دیگر: [با لحنی گلایه‌آمیز] تازه امروز در همین مدرسهٔ استعدادهای درخشان، یکی

[1] رنسانس یا دورهٔ نوزایش، جنبش فرهنگی مهمی بوده است که آغازگر دورانی از پیشرفت‌های همه جانبه در اروپا شد.

از دانش‌آموزانم به من می‌گوید که تصمیم گرفته است که برود و تاریخ علم گذشتگان را مطالعه کند. من هم نه گذاشتم و نه برداشتم. سریع بهش گفتم که: «هر چه تا حالا بوده کشف شده! در گذشتهٔ ما دیگر چیزی پیدا نمی‌شود! برو آینده این مملکت را بساز!». [با تأکید] بد گفتم؟!

معلم ریاضی: البته باید خیلی‌ها آینده این مملکت را بسازند. ولی گذشته، یعنی تاریخ یک ملت. که این هم خیلی مهم است. بد نیست در هر نسل، چند نفری بروند و در این مورد تحقیق کنند.

معلم دیگر: واقعاً به نظر شما چیز مهمی برای تاریخ کشفیات ما باقی مانده است؟

معلم ریاضی: شما تا حالا اصفهان رفتید؟

معلم دیگر: [بی حوصله] بله! چند باری رفتم. آثار تاریخی شهر را حفظ هستم! شما فکر می‌کنید من که این حرف‌ها را می‌زنم از هیچ جای ایران خبر ندارم؟!

معلم ریاضی: شما که به اصفهان سفر کرده‌اید، تا حالا «امامزاده درب امام»[1] رفته‌اید؟

معلم دیگر: خیر! این چه جور اسمی است؟

معلم ریاضی: حدوداً ۴۰ سال پیش یک دانشمند انگلیسی روشی برای کاشی‌کاری کشف کرد که خیلی عجیب و جدید بود. او توانست یک روش کاشی‌کاری «فقط نامتناوب» ارائه بدهد.

همین چند سال پیش چند نفر گردشگر از هزاران کیلومتر آن طرف‌تر آمدند اصفهان. رفته بودند برای دیدن کاشی‌های این امامزاده و فهمیده بودند حدود ۵۰۰ سال پیش از کشف آن روش کاشی‌کاری عجیب، معمار گمنام این امامزاده روش کاشی‌کاری تقریباً مشابهی ارائه داده بوده است.

[1] واقع در اصفهان، خیابان عبدالرزاق، بازار حاج محمدجعفر، کوی درب امام. به راستی چند نفر از خوانندگان این کتاب، این اثر تاریخی را دیده‌اند؟

اکنون «معلم دیگر» فقط گوش می‌کرد.

معلم ریاضی: یک سوال؛ این باعث شرمساری ما نیست که یکی از آن سر دنیا بیاید و بگوید تاریخ ما ایرانی‌ها چه بوده است؟

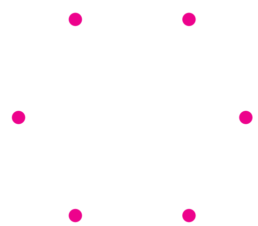
[با لبخندی معنی دار] فکر کنم کسی که گفته نقش دانشمندان ما انتقال دانش از یونان باستان به اروپای رنسانس بوده یا معنی انتقال را نمی‌فهمیده یا معنی دانش را!

برای دیدن عکس‌های «امامزاده درب امام» و آشنایی با روش کاشی‌کاری فقط نامتناوب به «www.webmath.ir» مراجعه کنید.

کارگاه بازی

مثلث

شش نقطه روی یک صفحه هستند. نفر اول دو نقطه را انتخاب می‌کند و با یک پاره‌خط این دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند. نفر دوم نیز، دو نقطه را انتخاب و به‌هم وصل می‌کند. هرکس که اولین مثلث را بسازد باخته است. منظور از مثلث سه‌ضلعی است که هر رأس آن یکی از شش نقطهٔ داده شده باشد.



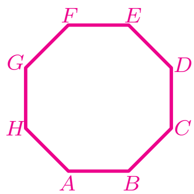
چندضلعی‌ها و تقارن

۱. در بازی مثلث که در بخش قبل معرفی شد،

الف) نفر اول چگونه بازی کند که همیشه برنده باشد؟

ب) فرض کنید بازی را با n نقطه ($n > ۴$) از رأس‌های یک nـ ضلعی منتظم انجام می‌دهید. برای چه nهایی نفر اول همیشه می‌تواند برنده باشد؟ برای چه nهایی نفر دوم می‌تواند همیشه برنده باشد؟

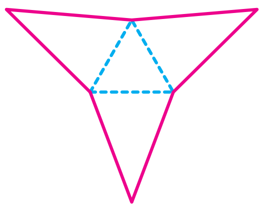
۲. چند تا چندضلعی منتظم درون هشت‌ضلعی منتظم زیر می‌توان رسم کرد که همهٔ رأس‌های هر یک از آنها روی رأس‌های هشت‌ضلعی منتظم زیر باشند؟



۳. یک هشت‌ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر بسازید. هشت‌ضلعی مقعر دیگری با ضلع‌های برابر بسازید که با هشت‌ضلعی اول هم‌نهشت نباشد.

۴. فرض کنید n عددی زوج و بزرگ‌تر از ۴ باشد.

الف) باتوجه‌به شکل زیر، روشی برای رسم یک nـ ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر پیدا کنید. برای چه nهایی، nـ ضلعی مقعر ساخته شده مرکز تقارن دارد؟



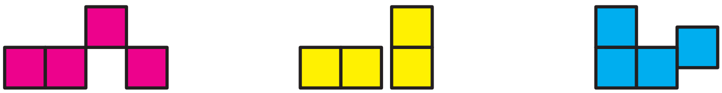
ب) روش دیگری برای ساخت یک nـ ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر که محور و مرکز تقارن ندارند، پیدا کنید.

۵. فرض کنید n عددی فرد و بزرگ‌تر از ۳ باشد. آیا می‌توانید حداقل دو روش برای ساختن یک nـ ضلعی مقعر با ضلع‌های برابر ارائه دهید؟

۶. شکلی مثال بزنید که محور تقارن داشته باشد ولی مرکز تقارن نداشته باشد.

۷. به شکل‌هایی در صفحه که از به‌هم چسباندن یک یا چند ضلع مربع‌های واحد به یکدیگر ساخته می‌شوند، چندخانه‌ای می‌گویند. برای مثال، سه شکل زیر، چندخانه‌ای (۴ــ خانه‌ای) هستند.

ولی سه شکل زیر چندخانه‌ای (۴ــ خانه‌ای) نیستند.



الف) همهٔ ۴ــ خانه‌ای‌های غیر هم‌نهشت را رسم کنید.

ب) کدام‌یک از ۴ــ خانه‌ای‌ها مرکز تقارن دارند؟

ج) کدام‌یک از ۴ــ خانه‌ای‌ها محور تقارن دارند؟

۸. می‌دانیم که بازشدهٔ یک مکعب یک ۶ــ خانه‌ای است.

الف) همهٔ ۶ــ خانه‌ای‌هایی را که باز شدهٔ یک مکعب هستند، رسم کنید.

ب) کدام‌یک از ۶ــ خانه‌ای‌های قسمت «الف» مرکز تقارن دارند؟

ج) کدام‌یک از ۶ــ خانه‌ای‌های قسمت «الف» محور تقارن دارند؟

۹. همهٔ عددهای فارسی دورقمی را بیابید که مرکز تقارن دارند.

۱۰. فرض کنید دو شکل دارید که هر یک مرکز تقارن دارند.

الف) این شکل‌ها را طوری در یک صفحه قرار دهید که شکل جدید نیز مرکز تقارن داشته باشد.

ب) دربارهٔ تعداد روش‌های حل قسمت «الف» بحث کنید.

۱۱. در یک کاغذ شطرنجی، مثلثی با رأس‌های $P = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$، $Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $R = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ رسم کنید و دستورهای زیر را در نظر بگیرید.

$\mathcal{A}$: تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های $\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$.

$\mathcal{B}$: دوران $180°$ در جهت عقربه‌های ساعت نسبت به نقطهٔ $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

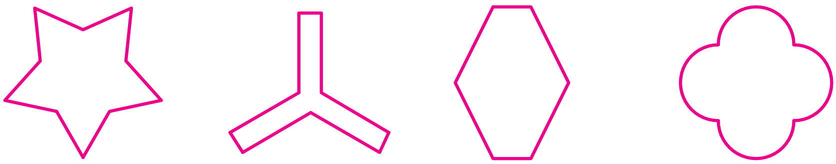
$\mathcal{C}$: تقارن نسبت به خط گذرنده از نقطه‌های $\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

در هر یک از قسمت‌های زیر دستورهای داده شده را به‌ترتیب از چپ به راست برای مثلث PQR اجرا کنید. آیا شکل‌های به‌دست آمده در هر قسمت یکسان می‌شوند؟

الف) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ ب) $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}$

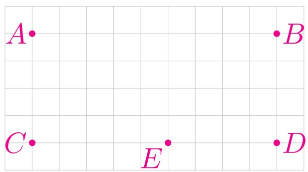
ج) دستورهایی با دوران، تقارن و دوران بسازید و آنها را به‌ترتیب $\mathcal{D}$، $\mathcal{E}$ و $\mathcal{F}$ بنامید به‌طوری‌که $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ مثلث PQR را دو واحد بالا ببرد.

۱۲. شکل‌های زیر را بر اساس تعداد محور تقارن از کوچک به بزرگ مرتب کنید.



توازی و تعامد

۱. باتوجه‌به شکل زیر، نقاط خواسته شده در هر قسمت را مشخص کنید.



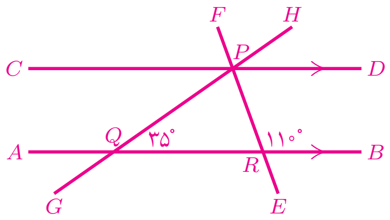
الف) چند نقطه مانند F، روی پاره‌خط AB هست که $D\widehat{E}F$ و $B\widehat{F}E$ مکمل شوند؟

ب) چند نقطه مانند G، روی پاره‌خط AB هست که $B\widehat{G}E$ و $D\widehat{E}G$ برابر شوند؟

۲. در شکل روبه‌رو،

الف) کدام زاویه‌ها برابر °۳۵ است؟

ب) کدام زاویه‌ها برابر °۱۱۰ است؟

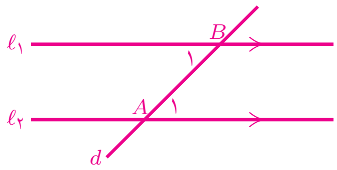


۳. دربارهٔ درستی یا نادرستی جملهٔ زیر بحث کنید.

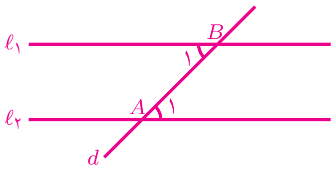
«اگر دو ضلعِ یک زاویه با دو ضلع زاویه‌ای دیگر موازی باشند، آنگاه آن دو زاویه با هم برابرند.»

۴. عبارت‌های نوشته شده در کادرهای زیر، همواره درست‌اند. نوشته‌های این دو کادر چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟

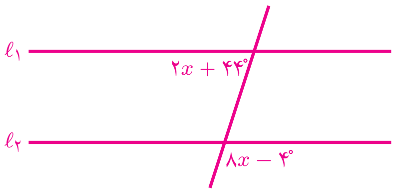
اگر خط d دو خط موازی ℓ_1 و ℓ_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 را پدید آورد، آنگاه $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$.

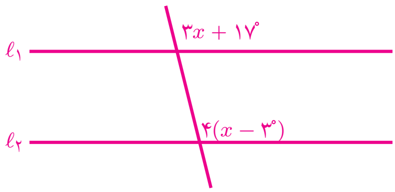


اگر خط d دو خط ℓ_1 و ℓ_2 را قطع کند و زاویه‌های A_1 و B_1 پدید آیند به‌طوری‌که $\widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$، آنگاه ℓ_1 و ℓ_2 موازی‌اند.

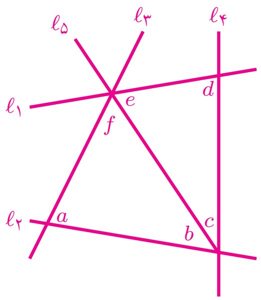


۵. در هر یک از شکل‌های زیر، x چقدر باشد که داشته باشیم $\ell_1 \parallel \ell_2$؟





۶. در شکل، کدام خطوط موازی‌اند اگر،

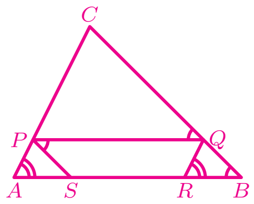


الف) $a = ۹۰^\circ$، $f = ۶۸^\circ$ و $c = ۶۸^\circ$.

ب) $d = ۹۰^\circ$، $b = ۴۲^\circ$ و $c = ۴۸^\circ$.

ج) $e = ۴۶^\circ$، $f = ۵۴^\circ$ و $b = ۴۶^\circ$.

۷. باتوجه‌به شکل، ثابت کنید:



الف) $PQ \parallel AB$.

ب) $AC \parallel RQ$.

ج) $PS \parallel CB$.

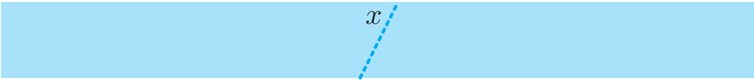
۸. در چهارضلعی $ABCD$، زاویه‌های A و B مکمل‌اند. همچنین زاویه‌های A و D مکمل‌اند. ثابت کنید $BC \parallel AD$، $DC \parallel AB$ و $\hat{A} = \hat{C}$.

۹. اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $E = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix}$، $O = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و $P = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$، آنگاه مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$O\hat{A}P + O\hat{B}P + O\hat{C}P + O\hat{D}P + O\hat{E}P$$

۱۰. یک توپ بیلیارد روی نقطه‌ای از میز مستطیلی شکل بیلیارد قرار دارد. به این توپ ضربه‌ای زده شده است. بررسی کنید که پس از چندبار برخورد توپ با دیواره‌های میز، مسیر توپ با مسیر اولیه‌اش موازی می‌شود.

۱۱. روی یک نوار کاغذی مستطیلی، زاویه‌ای به اندازهٔ x داریم. (شکل ۱).

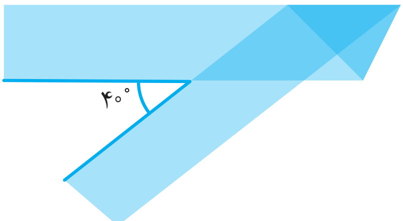


شکل ۱

ابتدا نوار را روی ضلع زاویه تا می‌زنیم (شکل ۲).

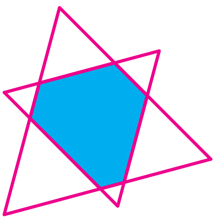
شکل ۲

سپس آن را از پشت تا می‌زنیم (شکل ۳). اگر زاویه‌ای که در شکل آخر تشکیل می‌شود ۴۰ درجه باشد، آنگاه x چقدر است؟



شکل ۳

۱۲. دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع‌های a و b طوری روی هم قرار گرفته‌اند که هر ضلع مثلث اول با یکی از اضلاع مثلث دوم موازی است. محیط شش‌ضلعی آبی را برحسب a و b به‌دست آورید.



چهارضلعی‌ها

۱. حسن یک مثلث داشت. او یک ضلع مثلثش را به آینه چسباند و یک مربع تشکیل شد! مثلث حسن چه خاصیتی دارد؟

۲. الف) آیا یک چهارضلعی غیر از مربع وجود دارد که چهار محور تقارن داشته باشد؟

ب) آیا شکلی غیر از مربع وجود دارد که چهار محور تقارن داشته باشد؟

۳. یک چهارضلعی به غیر از لوزی مثال بزنید که قطرهای آن برهم عمود باشند.

۴. یک چهارضلعی داریم که قطرش محور تقارنش است. ثابت کنید قطرهای این چهارضلعی برهم عمودند.

۵. آیا می‌توانید یک چهارضلعی به غیر از مربع مثال بزنید که قطرهای آن باهم برابر و برهم عمود باشند؟

۶. یک چهارضلعی به غیر از متوازی‌الاضلاع مثال بزنید که دو جفت ضلع برابر داشته باشد.

۷. یک چهارضلعی با دو جفت ضلع برابر و قطرهای عمود برهم و دو زاویهٔ قائمه مثال بزنید که مربع نباشد.

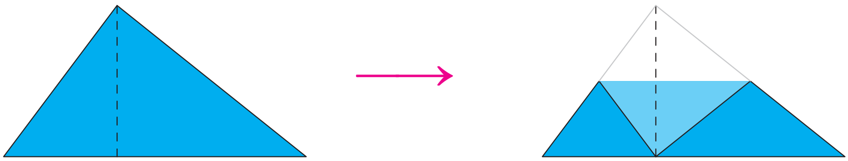
۸. یک چهارضلعی با دو ضلع موازی، دو ضلع مساوی و دو جفت زاویهٔ برابر مثال بزنید که متوازی‌الاضلاع نباشد.

۹. در یک چهارضلعی دو قطر برهم عمودند. تعداد محورهای تقارن این چهارضلعی چه اعدادی می‌تواند باشد؟ برای هر عدد یک مثال بیاورید.

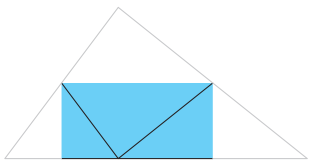
۱۰. ثابت کنید که اگر یک متوازی‌الاضلاع محور تقارن داشته باشد، آن متوازی‌الاضلاع یا مستطیل است و یا لوزی.

زاویه‌های داخلی و خارجی

۱. نازنین برای اینکه ثابت کند مجموع زاویه‌های هر مثلث ۱۸۰ درجه است، یک مثلث کاغذی ساخت و ارتفاع آن را رسم کرد. سپس رأسی را که ارتفاع از آن رسم شده بود، روی پای ارتفاع گذاشت و کاغذ را تا زد.



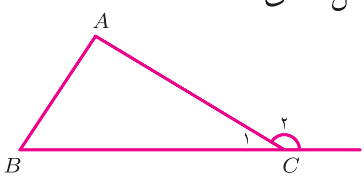
سپس هر یک از دو رأس دیگر مثلث را نیز روی پای ارتفاع رسم شده گذاشت و کاغذ را تا زد.



دربارهٔ درستی روش نازنین بحث کنید.

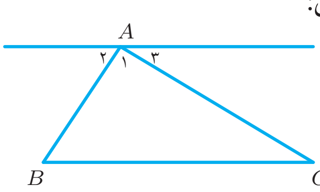
۲. هادی و هدی می‌خواستند ثابت کنند مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰ درجه است.

راه‌حل هادی:



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}+\hat{B}=\hat{C}_2\\ \hat{C}_1+\hat{C}_2=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{C}_1+\hat{A}+\hat{B}=180^\circ.$$

راه‌حل هدی:



$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}_2=\hat{B}\\ \hat{A}_3=\hat{C}\\ \hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3=180^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ.$$

هر دو راه‌حل بالا ایراد دارند. درصورت امکان آنها را اصلاح کنید.

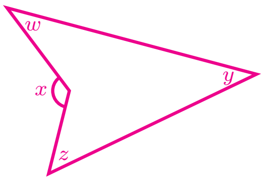
۳. در پنج‌ضلعی منتظم $ABCDE$،

الف) زاویهٔ بین دو قطر AD و BE چند درجه است؟

ب) زاویهٔ بین دو قطر AC و CE در محل تقاطع آنها، چند درجه است؟

۴. مثلث ABC و نقاط D و E چه خاصیتی داشته باشند که اگر نقطه‌های D و E به‌ترتیب روی BC و AD باشند، آنگاه با رسم پاره‌خط‌های AD و CE، زاویه‌های با اندازه‌های متفاوت کمترین تعداد ممکن باشد؟ (پنج نقطهٔ A، B، C، D و E را متمایز در نظر بگیرید.)

۵. در شکل زیر ثابت کنید $x = y + z + w$.



۶. در چهارضلعی $ABCD$ اندازهٔ زاویهٔ C بیشتر از ۱۸۰ درجه است. اگر دو مثلث ABC و BCD هم‌نهشت باشند، آنگاه درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $B\hat{A}C = C\hat{B}D$ ب) $A\hat{C}B = B\hat{C}D$

ج) $AB = BC$ د) $AB = CD$

۷. یک چندضلعی محدب، حداکثر و حداقل چند زاویهٔ داخلی حاده (تند) دارد؟

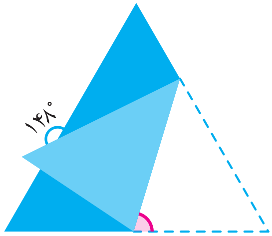
۸. در چهارضلعی محدب $ABCD$ امتداد ضلع‌های AD و BC یکدیگر را در نقطهٔ E، و امتداد ضلع‌های AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ F قطع می‌کنند.

الف) ثابت کنید اگر $\hat{E} = \hat{F}$، آنگاه $ABCD$ دو زاویهٔ روبه‌روی برابر دارد.

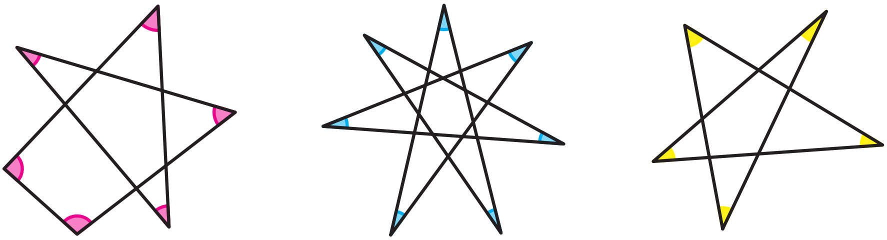
ب) اگر $\hat{E} = \hat{F} = 20^\circ$، آنگاه تفاضل زاویه‌های روبه‌روی $ABCD$ چقدر است؟

ج) اگر $\hat{E} \neq \hat{F}$، آیا می‌توان تفاضل زاویه‌های روبه‌روی $ABCD$ را یافت؟

۹. یک مثلث متساوی‌الاضلاع مانند شکل زیر تا شده است. اندازهٔ زاویهٔ صورتی چند درجه است؟



۱۰. در شکل‌های زیر، مجموع زاویه‌های رنگ شده را به‌دست آورید.



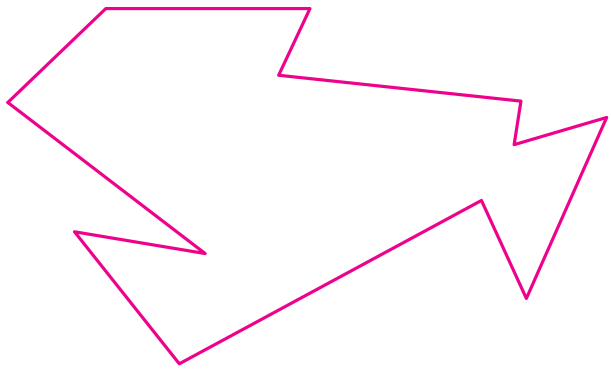
۱۱. درون مربعی ۵۷ نقطه وجود دارد. می‌خواهیم این مربع را با کاشی‌های مثلثی‌شکل بپوشانیم به‌طوری‌که سه شرط زیر برقرار باشند:

- حتماً و فقط این ۵۷ نقطه و چهار رأس مربع، رئوس کاشی‌های مثلثی باشند.
- کاشی‌ها روی‌هم قرار نگیرند.
- کاشی‌ها تمام مربع را بپوشانند.

برای این کار به چند کاشی مثلثی نیاز داریم؟

۱۲. می‌خواهیم چندضلعی صفحهٔ بعد را مثلث‌بندی کنیم، یعنی طوری چندضلعی را با تعدادی مثلث (نه لزوماً هم‌نهشت) بپوشانیم که هر سه شرط زیر برقرار باشد:

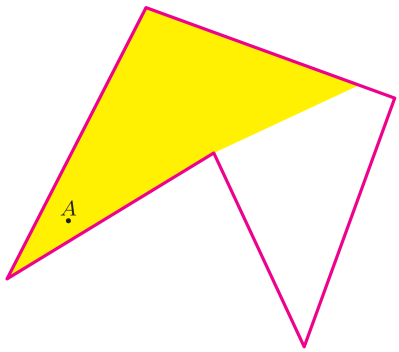
- ضلع هر مثلث، ضلع یا قطر چندضلعی باشد.
- هیچ دو مثلثی روی‌هم قرار نگیرند و هیچ مثلثی از چندضلعی خارج نشود.
- تمام چندضلعی با مثلث‌ها پوشانده شود.



الف) حداقل سه مثلث‌بندی متفاوت برای چندضلعی بالا بیابید.

ب) مجموع زاویه‌های داخلی شکل بالا، چند درجه است؟

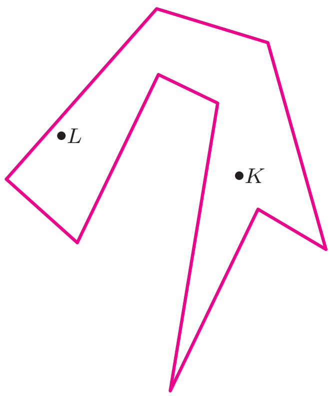
۱۳. در شکل زیر، فرض کنید نقطهٔ A یک لامپ است. این لامپ ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن (زرد رنگ) کرده است.



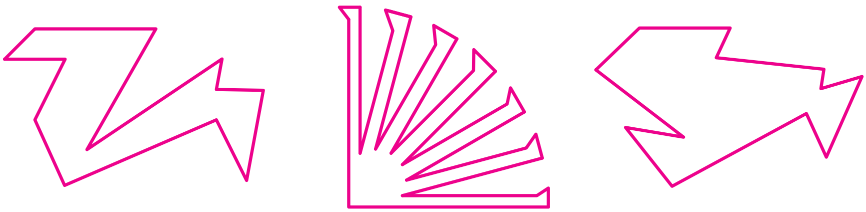
الف) در شکل روبه‌رو، لامپ‌های L و K چه ناحیه‌ای از چندضلعی را روشن می‌کنند؟ آن ناحیه‌ها را با رنگ زرد مشخص کنید.

ب) لامپ‌های شکل روبه‌رو را طوری جابه‌جا کنید که تمام چندضلعی روشن شود.

ج) آیا می‌توان فقط با یک لامپ، این چندضلعی را روشن کرد؟



۱۴. شکل‌های زیر، نقشه‌های ساختمان سه موزه هستند. می‌خواهیم در این موزه‌ها دوربین‌های مداربسته کار بگذاریم. اگر هر دوربین قابلیت دید ۳۶۰ درجه داشته باشد، با حداقل چند دوربین می‌توان تمام نقاط هر یک از موزه‌ها را پایید؟



۱۵. **پروژه.** می‌خواهیم دربارهٔ nضلعی‌های مقعر بیشتر بدانیم. برای مثال، می‌توانیم بپرسیم:

- مجموع زاویه‌های داخلی یک nـ ضلعی مقعر چقدر است؟
- یک nـ ضلعی مقعر حداکثر چند زاویهٔ بیش از ۱۸۰ درجه دارد؟

الف) آیا می‌توانید به این پرسش‌ها پاسخ دهید؟

ب) آیا می‌توانید پرسش‌های دیگری مطرح کنید؟

در «www.webmath.ir» لینکی قرار داده شده تا کار شما را برای انجام این پروژه ساده‌تر کند. با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

۱۶. **پروژه.** اگر یک موزهٔ nـ ضلعی داشته باشیم، برای پاییدن آن حداقل به چند دوربین نیازمندیم؟ به عبارت دیگر برای پاییدن هر موزه با n دیوار چند دوربین کافی است؟

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

کاشی‌کاری

کاشی‌کاری

تعدادی چندضلعی در نظر بگیرید. به پوشاندن یک صفحه با این چندضلعی‌ها (و یا چندضلعی‌های هم‌نهشت با آنها) به‌طوری‌که این چندضلعی‌ها روی هم قرار نگیرند و شکافی بین آنها ایجاد نشود، «کاشی‌کاری» می‌گویند.

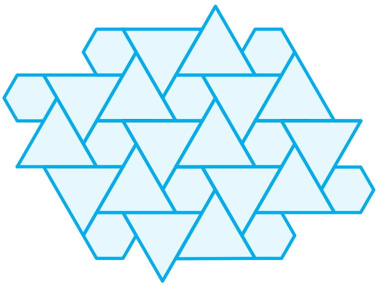
کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع

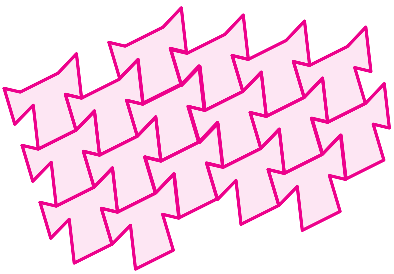
اگر هر دو چندضلعیِ یک کاشی‌کاری، یا هیچ نقطهٔ مشترکی با هم نداشته باشند، یا فقط در یک رأس مشترک باشند، و یا فقط در یک ضلع مشترک باشند، آن کاشی‌کاری را، «کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع» می‌نامند.

کاشی‌کاری تک‌وجهی

اگر در یک کاشی‌کاری همهٔ کاشی‌ها هم‌نهشت باشند، به آن کاشی‌کاری، «کاشی‌کاری تک‌وجهی» می‌گویند.

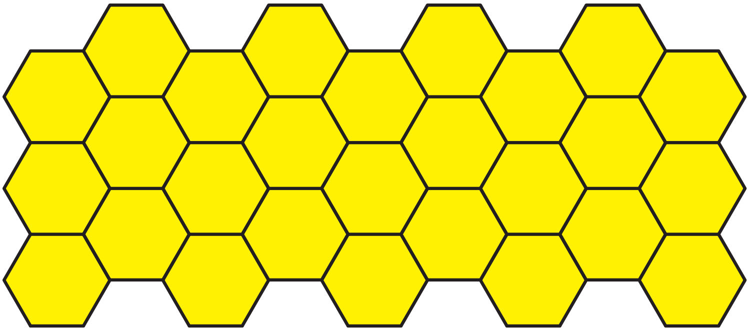
۱. الف) چرا هیچ‌کدام از کاشی‌کاری‌های زیر کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع نیستند؟





ب) کدام‌یک از کاشی‌کاری‌های بالا تک‌وجهی است؟

ج) کاشی‌کاری زیر یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع است. چرا؟



۲. اگر به محیط اطراف خود دقت کنید، کاشی‌کاری‌های جالبی می‌بینید. در زیر، کدام تصویرها قسمتی از یک کاشی‌کاری را نشان می‌دهند؟ ضلع‌به‌ضلع و تک‌وجهی بودن هر کاشی‌کاری را بررسی کنید.

۳. طرح روی جلد کتاب ریاضی تکمیلی هشتم یک نوع کاشی‌کاری است. ضلع‌به‌ضلع و تک‌وجهی بودن این کاشی‌کاری را بررسی کنید.

۴. در هر قسمت کاشی‌کاری خواسته شده را در محیط اطراف خود (سرویس‌های بهداشتی، حمام، آشپزخانه، حیاط، راهروهای ساختمان، نمای ساختمان، مدرسه، پیاده‌رو، استخر، مسجد، زیارتگاه و ...) بیابید و آن را در دفترتان رسم کنید. سپس پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی‌هایتان مقایسه کنید.

الف) یک کاشی‌کاری که ضلع‌به‌ضلع باشد ولی تک‌وجهی نباشد.

ب) یک کاشی‌کاری که هم ضلع‌به‌ضلع باشد و هم تک‌وجهی.

ج) یک کاشی‌کاری که تک‌وجهی باشد ولی ضلع‌به‌ضلع نباشد.

د) یک کاشی‌کاری که نه تک‌وجهی باشد و نه ضلع‌به‌ضلع.

۵. الف) نشان دهید که مجموع زاویه‌های داخلی یک nـ ضلعی محدب مساوی با $n-۲$ برابرِ مجموع زاویه‌های یک مثلث است.

ب) چرا با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی منتظم، اندازه زاویه‌های داخلی آن بیشتر می‌شود؟

ج) چرا اگر n عددی بزرگ‌تر از شش باشد، با nـ ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی کرد؟

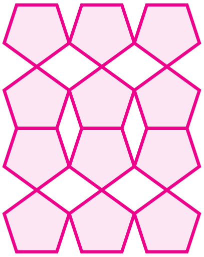
د) چرا با پنج‌ضلعی منتظم نمی‌توان کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی کرد؟

هـ) ثابت کنید که فقط سه نوع چندضلعی منتظم هستند که با آنها می‌توان کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی کرد.

۶. در هر یک از موارد زیر بررسی کنید که آیا با تعدادی چندضلعی منتظم (به طول واحد) می‌توان کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع کرد یا خیر. (توجه کنید که در هر مورد باید از هر نوع کاشی، حداقل یک‌بار استفاده شود.)

الف) چهارضلعی منتظم، شش‌ضلعی منتظم و ۱۲ ضلعی منتظم

ب) سه‌ضلعی منتظم، هفت ضلعی منتظم و ۴۲ ضلعی منتظم



۷. الف) در شکل روبه‌رو، با تعدادی پنج‌ضلعی منتظم و دو نوع چهارضلعی، یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع ارائه شده است. چرا این دو نوع چهارضلعی، لوزی هستند؟

ب) با تعدادی پنج‌ضلعی منتظم هم‌نهشت و یک نوع لوزی، یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع بسازید.

۸. نشان دهید با هر مثلث می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید می‌توان با چسباندن دو مثلث هم‌نهشت به یکدیگر، یک متوازی‌الاضلاع ساخت. سپس نشان دهید با هر متوازی‌الاضلاع می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

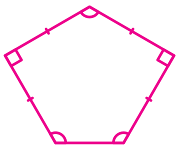
۹. نشان دهید با هر چهارضلعی محدب می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید می‌توان با چسباندن دو چهارضلعی محدبِ هم‌نهشت به یکدیگر، یک چندضلعی ساخت که ضلع‌های آن دوبه‌دو باهم موازی و مساوی باشند. سپس نشان دهید با هر چندضلعی که ضلع‌های آن دوبه‌دو باهم موازی و مساوی باشند، می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۰. نشان دهید با هر چهارضلعی مقعر می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۱. یک پنج‌ضلعی محدب مثال بزنید که با آن نتوان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

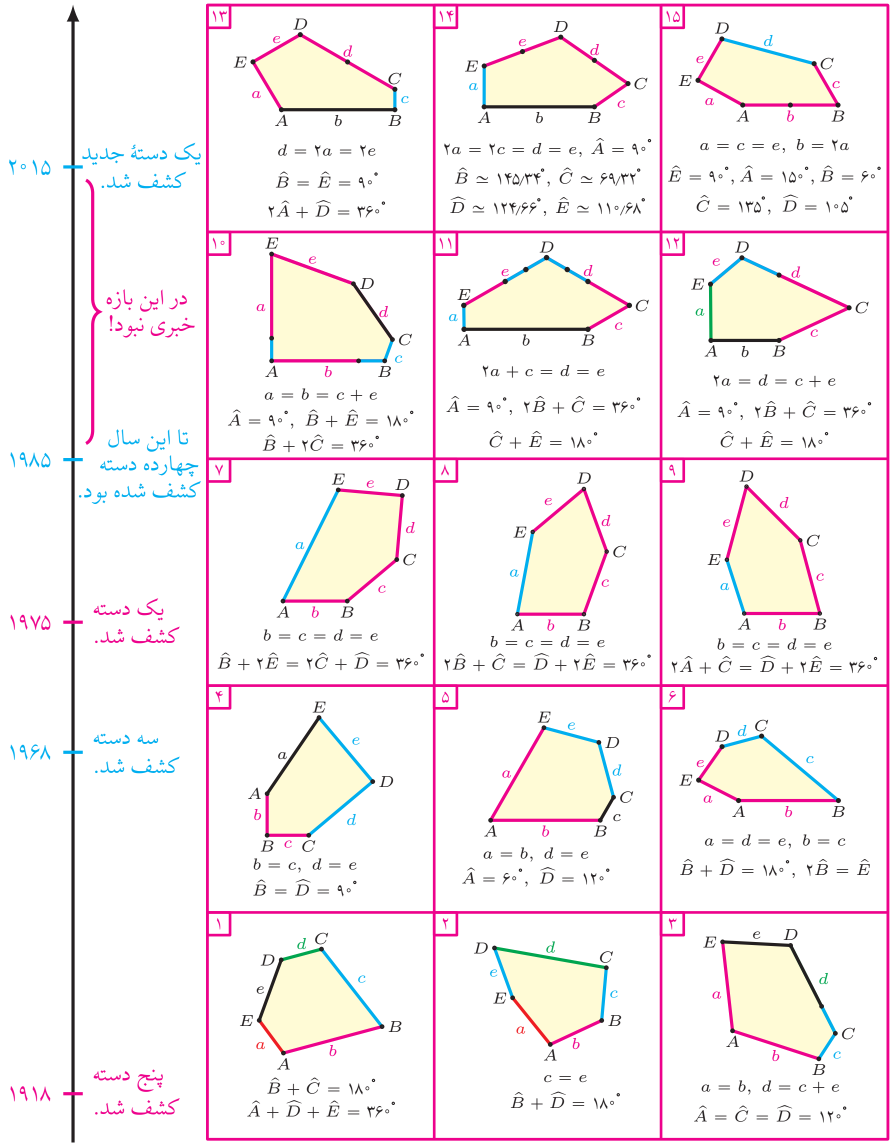
۱۲. یکی از پنج‌ضلعی‌های محدبی که می‌توان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد، «پنج‌بِاز»[۱] (شکل زیر) است. با پنج‌بِاز کاشی‌کاری تک‌وجهی کنید.



۱۳. شما و ریاضی‌دانان می‌دانید که با هر پنج‌ضلعی محدب نمی‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد. سؤالی که برای ریاضی‌دانان مطرح است این است که یک پنج‌ضلعی محدب چه خاصیتی داشته باشد که بتوان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

[۱] نام نوعی کاشی که معماران و هنرمندان ایرانی به‌کار می‌برده‌اند.

روی جلد کتاب یک نمونه از کاشی‌کاری‌های تک‌وجهی با پنج‌ضلعی‌های محدب را می‌بینید که در سال ۲۰۱۵ کشف شده است. در زیر پانزده دسته از پنج‌ضلعی‌های محدبی که می‌توان با آنها کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد به همراه مختصری از تاریخچهٔ کشف این پانزده دسته پنج‌ضلعی محدب آمده است.



الف) پنج‌ضلعی روی جلد این کتاب در کدام دسته از پانزده دستهٔ داده شده قرار دارد؟

ب) پنج‌باز در کدام دسته از پانزده دستهٔ داده شده قرار دارد؟

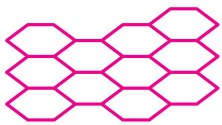
ج) **پروژه.** آیا شما همان کسی هستید که دستهٔ بعدی را کشف و کار جاودانه‌ای در ریاضیات خواهد کرد؟ کسی چه می‌داند!

۱۴. یک پنج‌ضلعی مقعر مثال بزنید که با آن بتوان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

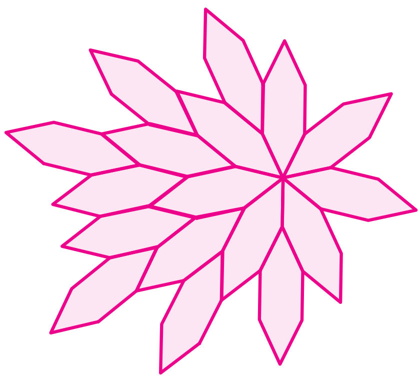
۱۵. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ باشد. به شش‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی که دو زاویهٔ روبه‌روی آن $\frac{360^\circ}{n}$ و بقیهٔ زاویه‌های آن باهم برابر باشند، «شش طولانی»[1] می‌گویند.

الف) اگر $n = 7$، آنگاه اندازهٔ هر یک از زاویه‌های شش طولانی مربوطه را به‌دست آورید و این شش‌ضلعی را رسم کنید.

ب) چرا با کمک هر یک از انواع شش طولانی می‌توان با روش زیر کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی کرد؟



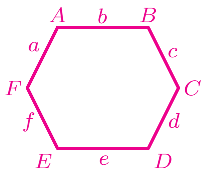
ج) نشان دهید اگر $n = 7$، آنگاه با کمک شش طولانی ساخته شده، می‌توان به روش زیر کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی کرد.



[1] نام نوعی کاشی که معماران و هنرمندان ایرانی به‌کار می‌برده‌اند.

د) آیا برای هر یک از انواع شش طولانی می‌توان یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی، شبیه شکل صفحهٔ قبل ارائه داد؟

۱۶. در سال ۱۹۱۸ میلادی، کارل رینهارت[۱] ثابت کرد که تنها با سه نوع شش ضلعی محدب می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد. او ضلع‌ها و زاویه‌های یک شش ضلعی محدب را به‌صورت زیر نام‌گذاری کرد و آن سه دسته را چنین معرفی کرد:



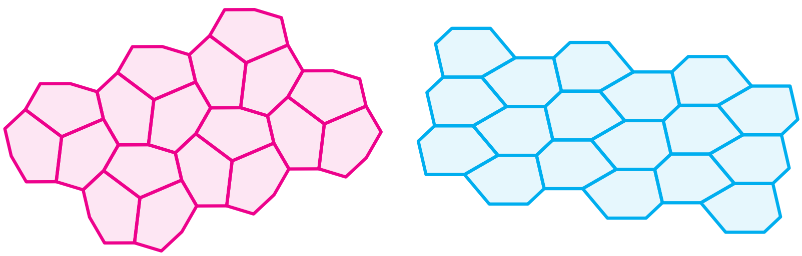
- ویژگی‌های دستهٔ اول: $a = d,\ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = ۳۶۰^\circ$.
- ویژگی‌های دستهٔ دوم: $c = e,\ a = d,\ \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D} = ۳۶۰^\circ$.
- ویژگی‌های دستهٔ سوم: $e = f,\ c = d,\ a = b,\ \widehat{A} = \widehat{C} = \widehat{E} = ۱۲۰^\circ$.

الف) از هر دستهٔ بالا، شکلی به‌عنوان مثال رسم کنید.

ب) شش ضلعی منتظم جزء کدام‌یک از دسته‌هاست؟

ج) شش طولانی جزء کدام‌یک از دسته‌هاست؟

د) مشخص کنید که هر یک از دو شکل زیر، روش کاشی‌کاری کدام‌یک از دسته‌ها را نشان می‌دهد؟



ه) روش کاشی‌کاری دسته‌ای را که در شکل بالا نیامده است، بیابید.

[۱] Karl Reinhardt

کاشی‌کاری با n ضلعی‌های محدب که $n > ۶$

کارل رینهارت در سال ۱۹۲۷ میلادی ثابت کرد برای $n > ۶$ هیچ n ضلعی محدبی وجود ندارد که بتوان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۷. یک شش‌ضلعی مقعر مثال بزنید که بتوان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۸. می‌توان گفت کاشی‌کاری روی جلد کتاب با استفاده از یک نُه ضلعی مقعر ساخته شده است. چرا؟ همچنین می‌توان گفت با استفاده از یک بیست‌وشش ضلعی مقعر ساخته شده است. چرا؟

۱۹. در سال ۱۹۳۶ میلادی، هاینس ودربرگ[۱] با استفاده از یک n ضلعی مقعر، کاشی‌کاری تک‌وجهی زیر را ارائه کرد. n چه عددی است؟

[۱] Heinz Voderberg

۴ جبر و معادله

Again, $\widetilde{\mathcal{Y}}$ is additive and $\mathcal{Y} \subseteq \operatorname{cores}\widetilde{\mathcal{Y}}$. Injective coresolutions are always $\mathcal{I}$-proper, and $\mathcal{A}$ has enough injectives if and only if $\operatorname{cores}\widetilde{\mathcal{I}} = \mathcal{A}$. If N is an object in $\mathcal{A}$ that admits a $\mathcal{Y}$-coresolution $N \xrightarrow{\simeq} Y$ and an injective resolution $N \xrightarrow{\simeq} I$, then there exists a quasi-isomorphism $Y \xrightarrow{\simeq} I$.

The next lemmata are standard or have standard proofs: for Lemma 1.6 see the proof of [3, Theorem 2.3], for Lemma 1.7 see the proof of [3, Proposition 2.1], for Lemma 1.8 repeatedly apply Definition 1.1, and for the 'horseshoe lemma', Lemma 1.9, see [9, proof of Lemma 8.2.1].

LEMMA 1.6. *Let $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ be an exact sequence in $\mathcal{A}$.*

(a) If $A_3 \perp \mathcal{W}$, then $A_1 \perp \mathcal{W}$ if and only if $A_2 \perp \mathcal{W}$. If $A_1 \perp \mathcal{W}$ and $A_2 \perp \mathcal{W}$, then $A_3 \perp \mathcal{W}$ if and only if the given sequence is $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\mathcal{W})$ exact.

(b) If $\mathcal{V} \perp A_1$, then $\mathcal{V} \perp A_2$ if and only if $\mathcal{V} \perp A_3$. If $\mathcal{V} \perp A_2$ and $\mathcal{V} \perp A_3$, then $\mathcal{V} \perp A_1$ if and only if the given sequence is $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{V},-)$ exact.

LEMMA 1.7. *If $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$, then $\mathcal{X} \perp \operatorname{res}\widehat{\mathcal{Y}}$ and $\operatorname{cores}\widehat{\mathcal{X}} \perp \mathcal{Y}$.*

LEMMA 1.8. *If $\mathcal{W}$ is an injective cogenerator for $\mathcal{X}$, then every object X in $\mathcal{X}$ admits a proper $\mathcal{W}$-coresolution, and so $\mathcal{X} \subseteq \operatorname{cores}\widetilde{\mathcal{W}}$. If $\mathcal{V}$ is a projective generator for $\mathcal{Y}$, then every object Y in $\mathcal{Y}$ admits a proper $\mathcal{V}$-resolution, and so $\mathcal{Y} \subseteq \operatorname{res}\widetilde{\mathcal{V}}$.*

LEMMA 1.9. *Let $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ be an exact sequence in $\mathcal{A}$.*

(a) Assume that A' and A'' admit proper $\mathcal{X}$-resolutions $X' \xrightarrow{\simeq} A'$ and $X'' \xrightarrow{\simeq} A''$. If the given sequence is $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},-)$-exact, then A is in $\operatorname{res}\widetilde{\mathcal{X}}$ with proper $\mathcal{X}$-resolution $X \xrightarrow{\simeq} A$ such that there exists a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\binom{\mathrm{id}_{X'}}{0}"] \arrow[d, "\simeq"'] & X \arrow[r, "(0\ \mathrm{id}_{X''})"] \arrow[d, "\simeq"'] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & A \arrow[r] & A'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

in which the top row is degreewise split exact and

$$\partial_n^X = \begin{pmatrix} \partial_n^{X'} & f_n \\ 0 & \partial_n^{X''} \end{pmatrix}.$$

خوارزمی برای نوشتن مسائل جبری از هیچ نمادی استفاده نمی‌کرد. اما امروزه در مقاله‌های ریاضی نمادهای زیادی به‌کار برده می‌شود. این یک مقالهٔ جبر است که در سال ۲۰۰۸ با همکاری ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی نوشته و منتشر شده است.

(b) Assume that A' and A'' admit proper $\mathcal{Y}$-coresolutions $A' \xrightarrow{\simeq} Y'$ and $A'' \xrightarrow{\simeq} Y''$. If the given sequence is $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-,\mathcal{Y})$-exact, then A is in $\operatorname{cores}\widetilde{\mathcal{Y}}$ with proper $\mathcal{Y}$-coresolution $A \xrightarrow{\simeq} Y$ such that there exists a commutative diagram

$$0 \longrightarrow Y' \xrightarrow{\binom{\mathrm{id}_{Y'}}{0}} Y \xrightarrow{(0\ \mathrm{id}_{Y''})} Y'' \longrightarrow 0$$

ساده کردن عبارت‌های جبری

۱. الف) حاصل عبارت $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \cdots + n$ را برحسب n بیابید.

ب) الگوی زیر را با دقت ببینید.

$$۱ + ۲ = ۳$$

$$۴ + ۵ + ۶ = ۷ + ۸$$

$$۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵$$

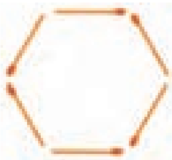
$$۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ = ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴$$

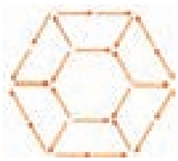
$$۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ = ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵$$

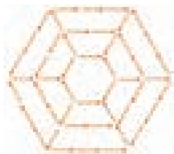
$$۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ = ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸$$

اگر این الگو را تا سطر nاُم ادامه دهیم، با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا تساوی برای سطر nاُم نیز برقرار است؟

۲. الگوی زیر را با دقت ببینید. الهام می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۵ و مائده می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۰ را حساب کند.


شکل ۱


شکل ۲


شکل ۳

راه‌حل الهام:

$$۱۵ \times (۶ \times ۱۵) - (۱ \times ۶) - (۲ \times ۶) - (۳ \times ۶) - (۴ \times ۶) - \cdots - (۱۳ \times ۶).$$

راه‌حل مائده:

$$۶ + (۲ \times ۶ + ۶) + (۳ \times ۶ + ۶) + (۴ \times ۶ + ۶) + \cdots + (۱۰ \times ۶ + ۶).$$

الف) دربارهٔ راه‌حل الهام و مائده بحث کنید.

ب) برای یافتن تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nاُم روش دیگری بیابید.

۳. ده عدد بعدی الگوی زیر را بنویسید.

۲, ۴, ۸, ...

پاسخ چند نفر به این پرسش در زیر آمده است.

پاسخ مرضیه:

۲, ۴, ۸, ۱۰, ۱۴, ۱۶, ۲۰, ۲۲, ۲۶, ۲۸, ۳۲, ۳۴, ۳۸.

پاسخ مریم :

۲, ۴, ۸, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۲, ۴۰, ۵۰, ۶۰, ۷۲, ۸۴, ۹۸.

پاسخ نیّره :

$۲, ۴, ۸, ۳۲, ۲۵۶, ۸۱۹۲, ۲^{۲۱}, ۲^{۳۴}, ۲^{۵۵}, ۲^{۸۹}, ۲^{۱۴۴}, ۲^{۲۳۳}, ۲^{۳۷۷}.$

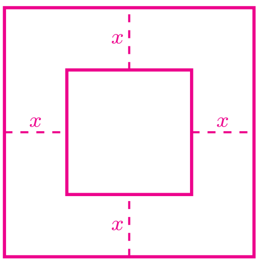
پاسخ زهرا:

۲, ۴, ۸, ۱۴, ۲۶, ۴۸, ۸۸, ۱۶۲, ۲۹۸, ۵۴۸, ۱۰۰۸, ۱۸۵۴, ۳۴۱۰.

الف) کشف کنید که هر یک از این چهار نفر با چه قانونی ده عدد بعدی را نوشته‌اند؟

ب) حداقل سه جواب دیگر برای مسئله پیدا کنید و برای یکی از آنها، جملهٔ nام را بنویسید.

۴. در شکل زیر، طول ضلع مربع بزرگ ۳ واحد است. مساحت مربع کوچک را بر حسب x به‌دست آورید.



۵. میثم و مهسا با روش‌های زیر حاصل‌ضرب $(۲x+۳)(x^۲-۵x+۴)$ را به‌دست آوردند.

روش میثم:

$$\begin{aligned}(۲x+۳)(x^۲-۵x+۴) &= ۲x(x^۲-۵x+۴)+۳(x^۲-۵x+۴)\\ &= (۲x^۳-۱۰x^۲+۸x)+(۳x^۲-۱۵x+۱۲)\\ &= ۲x^۳-۷x^۲-۷x+۱۲.\end{aligned}$$

روش مهسا:

$$\begin{array}{r} x^۲-۵x+۴\\ ۲x+۳\\ \hline ۳x^۲-۱۵x+۱۲\\ ۲x^۳-۱۰x^۲+۸x\\ \hline ۲x^۳-۷x^۲-۷x+۱۲\end{array}$$

الف) دربارهٔ دو راه‌حل بالا بحث کنید.

ب) ابتدا دو عدد ۳۸ و ۱۵۴ را به‌صورت گسترده بنویسید. سپس یک‌بار با روش میثم و بار دیگر با روش مهسا حاصل ۱۵۴×۳۸ را بیابید.

ج) حاصل‌ضرب عدد دو رقمیِ $\overline{ab}$ در $\overline{ba}$ را به‌دست آورید.

۶. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(x-۳)(x^۲-۳x+۹)$

ب) $(۴x-۵y)(۳x-y)$

ج) $(۱+۲x)(x^۲-۳x+۱)$

د) $(۲x+y)(۲x+y+۳)$

هـ) $(x+y-z)(x-z)$

و) $(a^۲+b)(c-b+d-a^۲)$

ز) $(z^۲-۵)(z+۱)(z^۴+۲z+۱)$

ح) $(a^۲+b)(c^۲-d)(۵-۲e)$

ط) $x(x^۲-\frac{۷}{۴})(۴x^۲-x+۱)$

ی) $(x^۳-۱)(x^۲-۲۵)(z+۱)^۲$

۷. یک عدد سه رقمیِ کوچک‌تر از ۹۰۰ انتخاب کنید. اختلاف این عدد با عدد ۹۹۹ را سمت راست آن بنویسید. عدد شش رقمی به‌دست آمده بر ۳۷ بخش‌پذیر است؛ خارج قسمتی که به‌دست می‌آید بر ۲۷ بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت دوم یک واحد از عدد سه رقمی انتخاب شده بیشتر است.

برای مثال، اگر ۱۶۷ را انتخاب کنیم، داریم:

$$۹۹۹ - ۱۶۷ = ۸۳۲, \quad \frac{۱۶۷۸۳۲}{۳۷} = ۴۵۳۶, \quad \frac{۴۵۳۶}{۲۷} = ۱۶۸, \quad ۱۶۸ = ۱۶۷ + ۱.$$

الف) چرا مراحل بالا برای هر عدد سه رقمیِ کوچک‌تر از ۹۰۰ درست است؟

ب) قانون بالا را طوری اصلاح کنید که این قانون برای هر عدد سه‌رقمی دلخواه برقرار باشد.

۸. صالح برای محاسبهٔ توان دوم یک عدد دو رقمی که یکان آن ۵ است، ابتدا عدد دهگان را در عدد بعدی‌اش ضرب می‌کند و سپس در سمت راست حاصل‌ضرب به‌دست آمده عدد ۲۵ را می‌نویسد. برای مثال:

$$(۷۵)^{۲} = ۵۶۲۵ \qquad (۵۶ = ۷ \times ۸).$$

صالح مدعی است که چنین روشی برای یافتن مربع هر عدد سه‌رقمی با یکان ۵ نیز کار می‌کند. برای مثال:

$$(۱۰۵)^{۲} = ۱۱۰۲۵ \qquad (۱۱۰ = ۱۰ \times ۱۱).$$

آیا ادعای صالح درست است؟ چرا؟

۹. اگر a، b و c سه عدد باشند، آنگاه خانه‌های خالی جدول زیر را طوری پر کنید که یک مربع جادویی داشته باشید.

a		b
		c

۱۰. صبح دیروز نرخ تبدیل دلار در سه صرافی برابر بود. ظهر، صرافی اول ٪۱ به نرخ دلار اضافه کرد و عصر ٪۱ از نرخ جدید آن کم کرد. صرافی دوم، ظهر ٪۱ از نرخ دلار کم کرد و عصر ٪۱ به نرخ جدید آن اضافه کرد. صرافی سوم نرخ دلار را تغییر نداد. عصر دیروز نرخ دلار در کدام صرافی از بقیه بیشتر بود؟

پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

۱. مقدار عبارت جبری $n^۲ + n + ۴۱$ را برای $n = ۱$، $n = ۲$، $n = ۳$، ... و $n = ۲۰$ به‌دست آورید. اعداد به‌دست آمده چه خاصیت مشترکی دارند؟

۲. از بهنام، احسان، حامد و شکیب پرسیدند:

اگر $a > ۰$، $b < ۰$ و $c < ۰$، آنگاه چندتا از عبارت‌های زیر منفی هستند؟			
• $\frac{a^۳b^۳}{b^۶c^۲}$	• $(ac - b^۲c)$	• $(b-a)^۳$	• $ab^۲c$

آنها به پرسش بالا این‌گونه پاسخ داده‌اند:

بهنام: حداقل سه تا — احسان: حداکثر سه تا

حامد: بیشتر از سه تا — شکیب: کمتر از سه تا

دربارهٔ درستی یا نادرستی هر یک از پاسخ‌های بالا بحث کنید.

۳. اگر $x + ۲y = ۴$، آنگاه مجموع عبارت‌های جبری زیر را به‌دست آورید.

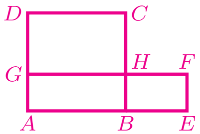
$$۳x + ۵y,\ ۲x + ۳y,\ x + ۲y,\ x + ۴y,\ ۲y,\ x.$$

۴. می‌دانیم x، y و z سه عدد متفاوت هستند و یکی از آنها ۳، دیگری ۴ و یکی دیگر ۵ است. بیشترین و کمترین مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $-x^y - z$ — ب) $-x^y - \frac{۱}{z}$

۵. همهٔ مستطیل‌های به محیط ۲۰ سانتی‌متر و طول اضلاع صحیح را رسم کنید. کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

۶. در شکل زیر، محیط مربع $ABCD$ با محیط مستطیل $AEFG$ برابر است. طول ضلع مربع $ABCD$ را برابر a و عرض مستطیل $AEFG$ را برابر b در نظر بگیرید.



الف) طول DG را بر حسب a و b به‌دست آورید.

ب) طول BE بر حسب a و b چیست؟

ج) مساحت $BEFH$ و $GHCD$ را بر حسب a و b به‌دست آورید.

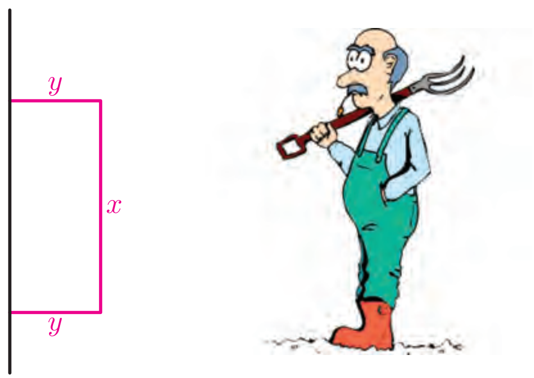
د) ثابت کنید مساحت $GHCD$ از مساحت $BEFH$ بیشتر است.

هـ) ثابت کنید مساحت مربع $ABCD$ از مساحت مستطیل $AEFG$ بیشتر است.

۷. اگر کلیه مستطیل‌هایی که اندازه محیط آنها برابر $۴a$ است را رسم کنیم، کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟ چرا؟

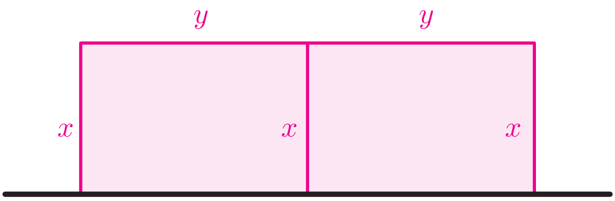
راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید.

۸. آقا فرامرز می‌خواهد با سیم توری، در زمین کشاورزی خود حصاری به شکل مستطیل بکشد. طول سیم توری او ۶۰۰ متر است. مطابق شکل زیر، یک ضلع مستطیل به دیوار محصور است. (فرض کنید خط سیاه زیر همان دیوار و خطوط صورتی حصار هستند!) مقدارهای x و y را طوری تعیین کنید که مساحت داخل حصار بیشترین مقدار ممکن باشد.



۹. فرض کنید f مقداری ثابت باشد. در شکل زیر، x و y را طوری تعیین کنید که مساحت صورتی رنگ بیشترین مقدار ممکن باشد به‌طوری‌که

$$۳x+۲y=f.$$



۱۰. اگر a و b دو عدد باشند، حاصل $a\perp b$ برابر $a-\frac{b}{۲}$، و حاصل $a\top b$ برابر $\frac{a}{۲}-b$ می‌شود.
برای مثال:

$$۲\perp۴=۲-\frac{۴}{۲}=۰,\quad ۲\top۴=\frac{۲}{۲}-۴=-۳.$$

الف) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

- $۳\top(۵\perp۷)$
- $(۳\top۵)\perp۷$
- $(۲\top۶)\perp\big(-۳\top(-۲)\big)$
- $-۴\perp\big(۳\top(-۱)\big)$

ب) حاصل $x+y$ با کدام‌یک از موردهای زیر برابر است؟

- $(x)\perp(-۲y)$
- $(۲x)\top(-y)$
- $۲\big(x\top(x-y)\big)$
- $۲\big(x\perp(x-y)\big)$

ج) دربارهٔ درستی یا نادرستی هر یک از ادعاهای زیر، بحث کنید.

- اگر $a\top b=a\perp b$، آنگاه a و b قرینه یکدیگرند.
- اگر $a\top b=b\top a$، آنگاه a و b باهم برابرند.

د) بیشترین و کمترین مقداری را که با پرانتزگذاری عبارت زیر حاصل می‌شود، بیابید.

$$۲\perp۲\top۲\perp۲$$

۱۱. دستورهای زیر را در نظر بگیرید.

$\mathcal{A}$: مجذور قرینهٔ ورودی

$\mathcal{B}$: دو واحد بیشتر از نصف ورودی

$\mathcal{C}$: منهای دو برابر ورودی ستون «ب»

$\mathcal{D}$: یک واحد کمتر از یک‌چهارم ورودی

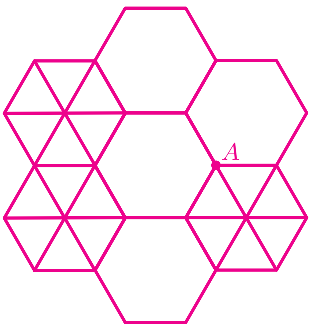
الف) خروجی هر ستون از جدول زیر را برحسب x به‌دست آورید.

	ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»
ورودی	x	یک واحد کمتر از خروجی «الف»	شش برابر خروجی ستون «ب»	سه واحد کمتر از خروجی ستون «ج»
دستور	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
خروجی				

ب) اگر در خانهٔ زیرِ خانهٔ $\mathcal{D}$ بنویسیم $۳۵y^۲$ و عملیات را به‌طور معکوس انجام دهیم، در خانهٔ بالای خانهٔ $\mathcal{A}$ چه عبارتی برحسب y به‌دست می‌آید؟

۱۲. اگر k تا چندضلعی منتظم در یک رأس مشترک باشند به‌طوری‌که این چندضلعی‌ها روی هم قرار نگرفته باشند و دورتادور رأس مشترک را پوشانده باشند، به آن نقطهٔ مشترک، نقطهٔ گرهی از مرتبهٔ k می‌گویند.

برای مثال در شکل زیر، نقطهٔ A یک نقطهٔ گرهی از مرتبهٔ ۴ است.



الف) در شکل بالا چند نقطهٔ گرهی وجود دارد. مرتبهٔ هر نقطهٔ گرهی را مشخص کنید.

ب) سارا و دانا می‌خواستند بدانند با یک مثلث متساوی‌الاضلاع، یک هفت ضلعی منتظم و یک ۴۲ ضلعی منتظم، یعنی $(۳, ۷, ۴۲)$، می‌توان نقطهٔ گرهی ساخت یا نه. آن دو به‌صورت زیر عمل کردند.

روش سارا برای بررسی وجود نقطهٔ گرهی در $(۳, ۷, ۴۲)$:

کافی است در رأس مشترک از این سه چندضلعی منتظم، مجموع زاویه‌ها برابر ۳۶۰ درجه باشد.

$$\frac{(۳-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۳}+\frac{(۷-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۷}+\frac{(۴۲-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۴۲}=۳۶۰^\circ.$$

بنابراین این چندضلعی‌های منتظم می‌توانند نقطهٔ گرهی بسازند.

روش دانا برای بررسی وجود نقطهٔ گرهی در $(۳, ۷, ۴۲)$:

کافی است درستی تساوی زیر را برای چندضلعی‌های منتظم داده شده بررسی کنیم.

$$۳-۲=۲(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}),$$

که a، b و c تعداد اضلاع هریک از چندضلعی‌های منتظم داده شده است.

چون

$$۳-۲=۲(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۴۲})$$

پس این چندضلعی‌های منتظم می‌توانند نقطهٔ گرهی بسازند.

ج) فرض کنید a، b، c و d تعداد اضلاع چهار چندضلعی منتظم باشند. روش دانا را برای بررسی وجود نقطهٔ گرهی در (a, b, c, d) به‌کار گیرید.

د) با کدام‌یک از قسمت‌های زیر می‌توان یک نقطهٔ گرهی ساخت؟

$(۳, ۴, ۵, ۶)$ $(۳, ۴, ۴, ۶)$ $(۴, ۶, ۱۲)$ $(۵, ۵, ۱۰)$

هـ) چه ارتباطی بین راه‌حل سارا و دانا وجود دارد؟

و) چرا با هفت‌تا چندضلعی منتظم نمی‌توان نقطهٔ گرهی ساخت؟

تجزیهٔ عبارت‌های جبری

۱. کدام‌یک از تساوی‌های زیر، تجزیهٔ یک عبارت جبری را نشان می‌دهد؟

الف) $x^{۲} + x + ۱ = x(x + ۱) + ۱$

ب) $x^{۲} + ۲x + ۱ = (x + ۱)^{۲}$

ج) $(x - ۱)a - a(۱ - x) = a(x - ۲)$

د) $۲y^{۲} + ۵y = ۲y(y + \frac{۵}{۲})$

۲. با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج هر کسر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{x \times ۲^{a} - y \times ۲^{a}}{x - y}, \ (x \neq y)$

ب) $\dfrac{۴۲xy^{۳} - ۳۵x^{۲}y}{۷xy}, \ (xy \neq ۰)$

۳. در زیر، از $x = ۱$ نتیجه شده $۱ = ۰$. ایراد کجاست؟

$$
\begin{aligned}
x = ۱ &\Longrightarrow x^{۲} = x \\
&\Longrightarrow x^{۲} - x = ۰ \\
&\Longrightarrow x(x - ۱) = ۰ \\
&\Longrightarrow \frac{x(x - ۱)}{x - ۱} = \frac{۰}{x - ۱} \\
&\Longrightarrow x = ۰ \\
&\Longrightarrow ۱ = ۰.
\end{aligned}
$$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $(u + ۱)^{۲} - ۳(u + ۱)$

ب) $(a - ۱۸)^{۲} + (۱۸ - a)$

ج) $(a + ۵)a - a(۷ - a)$

د) $(b - ۲)(b - ۴) + ۴b - ۸$

هـ) $(t - ۱)^{۲} + t(t - ۱) + ۸(t - ۱)$

و) $ab - a + b - ۱$

ز) $xz + xw - yz - yw$

ح) $tv - tr - kv + kr$

ط) $xw - ۲xz - yw + ۲yz$

ی) $۵ac - ۳۵bc - ۱۴bd + ۲ad$

۵. در تجزیهٔ عبارت $۱۲ac+۱۲bd-۲۴bc-۶ad$ کدام عبارت زیر نمی‌تواند ظاهر شود؟

الف) $۲c-d$ ب) $۲d-۴c$

ج) $۲b-a$ د) $۳a-۶b$

هـ) $۱۲c-۶b$ و) $۶a-d$

۶. عبارت جبری $۳x(۲x-\frac{۱}{۳})(x-۱۸)$ را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت جبری را ساده کنید.

ب) مقدار این عبارت جبری را برای $x=\frac{۱}{۶}$ به‌دست آورید.

ج) دو عدد بیابید که برای آنها، حاصل عبارت جبری با حاصل قسمت «ب» برابر باشد.

د) یک عبارت جبری با تنها یک نوع متغیر بیابید که با جایگذاری چهار مقدار عددی متفاوت، به عدد -۳ برسیم.

۷. برای مرکب بودن هر یک از اعداد زیر دلیل بیاورید.

الف) $۱+۲+۳+\cdots+۹۷$ ب) $۱\times۲\times۳\times\cdots\times۹۷+۸۳$

ج) $۳^{۱۰۱}+۱$ د) $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+۳۱^۲$

۸. عددهای طبیعی m و n در تساوی $۵۶m=۶۵n$ صدق می‌کنند. ثابت کنید $m+n$ عددی مرکب است.

۹. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $n>۲$ و $m>۳$. ثابت کنید حاصل عبارت‌های زیر عددی مرکب است.

الف) $۱+۲+۳+\cdots+n$ ب) $۱\times۲\times\cdots\times m+m-۲$

ج) $n^۳-۲n^۲$ د) $mn-n-m+۱$

هـ) $m^۲n-mn+n-m^۲+m-۱$ و) $mn^۲+m-n^۲-۱$

ز) $۲mn-۴n-m+۲$ ح) $mn-۲n+m-۲$

۱۰. الف) حاصل کدام‌یک از عبارت‌های زیر عددی اول است؟

- $۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱$
- $۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$
- $۱۳۹۴ + ۱۳۹۵ + ۱۳۹۶ + ۱۳۹۷ + ۱۳۹۸$

ب) آیا ممکن است مجموع پنج عدد طبیعی متوالی، عددی اول باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۱. برای درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر دلیل بیاورید.

الف) حاصل‌ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.

ب) حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

ج) برای هر عدد طبیعی n، مقدار $۲n^۲ + ۲۹$ عددی اول است.

د) مجموع سه عدد زوج متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

هـ) حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

و) برای هر عدد طبیعی m که m مضرب ۴۱ نباشد، مقدار $m^۲ + m + ۴۱$ عددی اول است.

ز) اگر a و b دو عدد صحیح باشند که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر ۶ برابر ۵ باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم ab بر ۶ برابر ۱ است.

ح) اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، حاصل بر ۸ بخش‌پذیر است.

ط) هر مضرب ۴ را می‌توان به‌صورت تفاضل مربع دو عدد صحیح نوشت.

ی) تفاضل دو عدد مربع کامل، مضرب ۴ است.

۱۲. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(z^۲ - ۵) - (z + ۱)(z^۴ + ۲z + ۱)$

ب) $(x^۳ - ۱)(x^۲ - ۲۵) - (x + ۱)^۲$

ج) $(z^۲ - ۵)(z + ۱) - (z^۴ + ۲z + ۱)$

د) $(x^۳ - ۱) - (x^۲ - ۲۵)(x + ۱)^۲$

۱۳. در این مسئله منظور از $\mathcal{P}$ یک جمله است که در آن فقط متغیر a با توان ۱ به‌کار رفته است. برای مثال $\mathcal{P}$ می‌تواند برابر a، $-a$، $۲a$، $-\sqrt{۳}a$ یا $\frac{۲}{۳}a$ باشد؛ ولی $\mathcal{P}$ نمی‌تواند برابر $a^۲$، $a^۲+a$، $-ab$، $۳b$، $۲+a$ یا ۵ باشد. در این مسئله منظور از $\mathcal{R}$ نیز یک جمله است که در آن فقط متغیر b با توان ۱ به‌کار رفته است.

الف) باتوجه‌به تعریف بالا، $\mathcal{P}$ برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر می‌تواند باشد؟ $\mathcal{R}$ برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$-۳a,\ ۵b,\ a+b,\ ab,\ ۱۲a,\ b+۱,\ -۱۸,\ b^۲,\ -a^۲,\ \frac{۱}{۲}a,\ \sqrt{۲}b.$$

ب) در جدول صفحه بعد، باتوجه‌به تعریف بالا، در هر پرانتز $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ را طوری تعیین کنید که تعداد جمله‌های حاصل‌ضربِ عبارت جبریِ هر ردیف، برابر با عدد ستون سمت راست باشد. توجه کنید که لازم نیست جمله‌ای که به‌جای $\mathcal{P}$ یا $\mathcal{R}$ در پرانتز اول و دوم هر عبارت جبری استفاده می‌کنید برابر باشد.

تعداد جمله‌های حاصل‌ضرب	عبارت جبری
۹	$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+d+e)$
۸	$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+d)$
۷	$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+d)$
۶	$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)$
۵	$(\mathcal{P}+\mathcal{R}-c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)$
۴	$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)$
۳	$(a^۲+\mathcal{P}+۱)(a^۲+a+۱)$
۲	$(۲a^۲+\mathcal{P}+۱)(۲a^۲+\mathcal{P}+۱)$
۲	$(a^۲+\mathcal{P}+۱)(a^۲+\mathcal{P}+۱)$

برای نمونه، دو جواب برای ردیف اول به‌دست می‌آوریم:

- $(a+b+c)(-a+d+e)$

$$= a(-a+d+e)+b(-a+d+e)+c(-a+d+e)$$

$$= -a^۲+ad+ae-ab+bd+be-ac+cd+ce,$$

- $(a+b+c)(a+d+e)$

$$= a(a+d+e)+b(a+d+e)+c(a+d+e)$$

$$= a^۲+ad+ae+ab+bd+be+ac+cd+ce.$$

۱۴. می‌دانیم a و b دو عدد صحیح هستند. با ذکر دلیل مشخص کنید که تعداد جمله‌های عبارت $(x^۲+ax+۱)(x+b)$، پس از ساده کردن چه اعدادی نمی‌تواند باشد.

۱۵. باتوجه‌به تمرین ۲ صفحهٔ ۲۷ به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) آیا ادعای نینا برای هر عدد طبیعی m درست است؟ چرا؟

ب) آیا ادعای نینا ارتباطی با روش غربالِ اعداد اول دارد؟

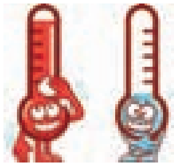
معادله

۱. در زیر، هریک از اعداد سمت راست، جواب یکی از معادله‌های سمت چپ است. هر معادله را به جواب آن وصل کنید.

• -۱	• $x^۲+x-۲=\frac{۲x-۲}{۲}+۱$
• ۰	• $x^۳-x=x^۲-۱$
• $\sqrt{۲}$	• $۵x^۲+x=۰$
• $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$	• $(x^۲-۱)^۲=۸x^۲$
• $-\frac{۱}{۵}$	

۲. چرا در همهٔ مربع‌های جادویی ۳×۳ که با اعداد ۱ تا ۹ ساخته می‌شوند، عدد خانهٔ وسط، همیشه ۵ است؟

۳. برای اندازه‌گیری دما در برخی کشورها از واحد سانتی‌گراد (C) و در برخی کشورها از واحد فارنهایت (F) استفاده می‌شود. آب در صفر درجهٔ سانتی‌گراد و ۳۲ درجهٔ فارنهایت یخ می‌زند. در جدول زیر، تبدیل شدهٔ دماهایی از سانتی‌گراد به فارنهایت را مشاهده می‌کنید.



C	۱۰۰°	۰°	−۱۰°	−۲۰°	−۳۰°
F	۲۱۲°	۳۲°	۱۴°	−۴°	−۲۲°

الف) می‌دانیم رابطهٔ بین F و C به‌صورت $F = mC + n$ است. باتوجه‌به جدول بالا، اعداد m و n را بیابید.

ب) در چه درجه‌ای سانتی‌گراد و فارنهایت یک عدد را نشان می‌دهند؟

۴. الف) کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند صورت مسئله‌ای باشد که معادله‌اش به‌صورت $۲x + ۳ = ۵x$ است؟

- دو دونده روزی سه کیلومتر می‌دوند. پنج دونده روزی چند کیلومتر می‌دوند؟
- قیمت پنج کیلو سیب، سه هزار تومان بیشتر از قیمت دو کیلو از همان سیب است. قیمت سه کیلو سیب چند هزار تومان است؟
- سه روز بعد از دو روز دیگر، پنج‌شنبه خواهد بود. امروز چند شنبه است؟
- دمای شهری که دو برابر دمای آن، سه واحد بیشتر از پنج برابر دمایش است، چقدر است؟

ب) با کمک همکلاسی‌هایتان حداقل ۵ مسئله بسازید که معادلهٔ آنها به‌صورت $۲x + ۳ = ۵x$ باشد.

۵. ابتدا برای هریک از معادله‌های زیر یک مسئله بسازید و سپس آنها را حل کنید.

الف) $\frac{4a-6}{2}+3a=11-2a$

ب) $x+2x+3x+\cdots+10x+11=66$

ج) $\frac{8y-3}{5}=\frac{6y+10}{4}$

د) $4x-8x-12x-\cdots-48x-4=584$

۶. الف) چند مستطیل با طول و عرض طبیعی وجود دارد که محیط آن ۲۰ باشد.

ب) معادلهٔ $2x+2y=20$ چند جواب طبیعی دارد؟ همهٔ جواب‌ها را بنویسید.

۷. الف) معادلهٔ $x+2y=50$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

ب) معادلهٔ $x+2y+4z=100$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۸. چند عدد حسابی یک رقمی مانند a و b در معادلهٔ $ab=10+a$ صدق می‌کنند؟

۹. چند عدد صحیح می‌توان یافت که حاصل‌ضرب آن عدد در عدد قبلی‌اش برابر با حاصل‌ضرب آن عدد در عدد بعدی‌اش شود؟

مهتاب و مهناز این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. دربارهٔ راه‌حل این دو نفر بحث کنید.

راه‌حل مهناز:

$$x(x+1)=x(x-1)$$
$$\Longrightarrow x^2+x=x^2-x$$
$$\Longrightarrow 2x=0$$
$$\Longrightarrow x=0.$$

بنابراین فقط عدد صفر جواب این مسئله است.

راه‌حل مهتاب:

$$x(x+1)=x(x-1)$$
$$\Longrightarrow \cancel{x}(x+1)=\cancel{x}(x-1)$$
$$\Longrightarrow (x+1)=(x-1)$$
$$\Longrightarrow 1=-1.$$

بنابراین این مسئله جواب ندارد.

۱۰. چند عدد صحیح وجود دارد که حاصل‌ضرب آن در عدد بعدی‌اش، چهار واحد بیشتر از آن عدد باشد؟

۱۱. $\frac{۲}{۳}$ عددی از $\frac{۱}{۵}$ آن $\frac{۲}{۷}$ بیشتر است. آن عدد چیست؟

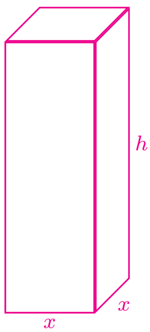
۱۲. یکی از همسایه‌های طاهره خانم، سن او را پرسید. طاهره خانم گفت: «سن من دوسوم سال‌هایی است که مانده تا ۱۰۰ ساله شوم.» سن طاهره خانم چقدر است؟

۱۳. عددی به ما داده شده است. آن را دو برابر می‌کنیم و یک واحد از نتیجه کم می‌کنیم. اگر نتیجه $۲^{۱۰۰} + ۱$ باشد، با چه عددی شروع کرده‌ایم؟

۱۴. اگر قیمت بی‌تخفیف سه تلفن همراه از یک نوع برابر قیمت با تخفیف پنج تلفن همراه از همان نوع باشد، تخفیف چند درصد است؟

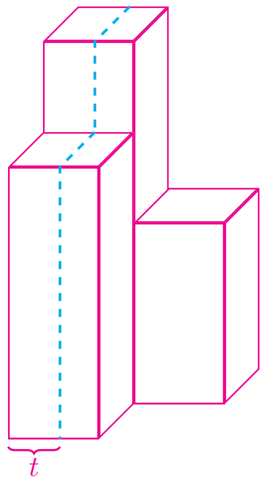
۱۵. وقتی ۳۰ درصد از یک بشکه خالی است، حجم آن ۳۰ لیتر بیشتر از زمانی است که ۳۰ درصد از آن بشکه پر است. وقتی بشکه کاملاً پر است، حجم بشکه چقدر است؟

۱۶. شکل زیر یک مکعب مستطیل است که مساحت کل آن برابر ۱۸۲ می‌باشد. اگر $x + h = ۱۰$، آنگاه h را بیابید.



۱۷. مکعب مستطیلی به ابعاد x، x و $\frac{10}{3}$ را در نظر بگیرید. این مکعب را روی وجه مربعی آن قرار داده‌ایم و تا ارتفاع h داخل آن آب ریخته‌ایم. اگر مکعب را بغلتانیم و آن را روی وجه $x \times \frac{10}{3}$ قرار دهیم، ارتفاع آب ۳ می‌شود. اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه h را بیابید.

۱۸. سه مکعب مستطیل چوبی مانند شکل زیر به یکدیگر چسبیده‌اند. ارتفاع این مکعب مستطیل‌ها ۲، ۳ و ۴ و قاعده‌های سه مکعب مربع‌های همنهشت به طول ضلع ۱ هستند. با یک ارّه، این حجم چوبی را از محل خطچین به دو قسمت با حجم مساوی تقسیم می‌کنیم. t چه کسری از طول ضلع مربع است؟



۱۹. حاصل جمع پنج عدد طبیعی متوالی برابر با حاصل جمع سه عدد طبیعی متوالی بعدی است. مجموع این هشت عدد را به‌دست آورید.

۲۰. شانزده عدد طبیعی متمایز که میانگین آنها ۱۶ باشد را در نظر بگیرید. در بین این اعداد بزرگ‌ترین عدد ممکن، چه عددی است؟

۲۱. من و چهار نفر از دوستانم مقداری پول خرج کرده‌ایم. به‌طور متوسط هر کدام از ما ۸۰۰۰ تومان خرج کرده است. من ۱۰۰۰۰ تومان خرج کرده‌ام. هر کدام از دوستانم به‌طور متوسط چقدر خرج کرده‌اند؟

۲۲. تعدادی از مؤلفان کتاب‌های تکمیلی ویژهٔ استعدادهای درخشان در جلسه‌ای حضور داشتند. میانگین سن این افراد برابر تعدادشان بود. شخصی که ۶۱ ساله بود، به این جلسه اضافه شد.

الف) اگر بازهم میانگین سن افراد حاضر در جلسه برابر تعدادشان باشد، در ابتدا چند نفر در جلسه حضور داشته‌اند؟

ب) اگر میانگین سن افراد حاضر در جلسه تغییر نکرده باشد، در ابتدا چند نفر در جلسه حضور داشته‌اند؟

۲۳. الف) امیرحسین هر روز صبح با دوچرخه از خانه به مدرسه می‌رود. او صبح‌ها مسیر خانه تا مدرسه را با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت و بعدازظهرها مسیر مدرسه تا خانه را با سرعت ۹۰ کیلومتر در ساعت رکاب می‌زند. چرا میانگین سرعت امیرحسین ۶۰ کیلومتر در ساعت نیست؟

ب) مسئله را در حالت کلی که سرعت‌های ۳۰ و ۹۰ به‌ترتیب با v و u جانشین شوند، حل کنید.

۲۴. هومن پول‌هایش را جمع می‌کند تا رایانه‌ای ۵,۴۰۰,۰۰۰ تومانی بخرد.

وقتی شروین از هومن پرسید: «چقدر پول جمع کرده‌ای؟» هومن گفت: «اگر یک‌پنجم بیشتر از پول الانم را داشتم، یک‌چهارم کمتر از پولی که برای خرید رایانه لازم دارم، نیاز داشتم.»

وقتی بهمن از هومن پرسید: «چقدر پول جمع کرده‌ای؟» هومن گفت: « اگر یک‌پنجم بیشتر از پول الانم داشتم، هنوز سه‌چهارم از پولِ خرید رایانه را نیاز داشتم.»

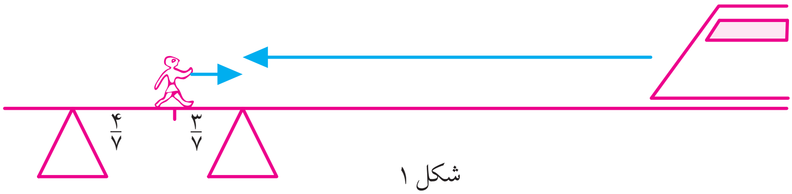
باتوجه به متن بالا آیا می‌توان گفت هومن راستگو نیست؟!

۲۵. چه عددی است که اگر آن را در ۳ ضرب کنیم، سپس $\frac{۳}{۴}$ حاصل‌ضرب را به حاصل‌ضرب اضافه کنیم، بعد حاصل این جمع را بر ۷ تقسیم کنیم و سپس $\frac{۱}{۳}$ خارج‌قسمت را از خارج‌قسمت کم کنیم و حاصل تفاضل را به توان ۲ برسانیم و ۵۲ واحد از این مجذور کم کنیم، بعد از جذر گرفتن از حاصلِ آخرین تفاضل، ۸ واحد به این جذر اضافه کنیم و نتیجه را بر ۱۰ تقسیم کنیم، پاسخ مساوی ۲ شود؟

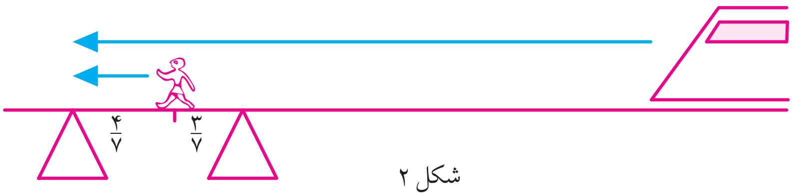
۲۶. رامبد گفته که او و شش نفر از دوستانش باهم ۷۰۷ لبو فروخته‌اند. می‌دانیم تعداد لبوهای فروخته شدهٔ هیچ دوتای آنها یکی نیست و تعداد لبوهای کسی که بیشترین لبو را فروخته است، شش لبو بیشتر از کسی است که کمترین لبو را فروخته است. کسی که کمترین لبو را فروخته، چه تعداد لبو فروخته است؟

۲۷. رضا می‌خواست دو عدد دو رقمی را در هم ضرب کند. متأسفانه عدد اولی را در مقلوب عدد دومی ضرب کرد. جواب رضا ۳۸۱۶ واحد بیشتر از جواب درست بود. جواب درست را بیابید.

۲۸. ریزعلی روی پلی که ریلِ راه‌آهن از آن عبور می‌کرد، در حال حرکت بود. او بعد از اینکه $\frac{۴}{۷}$ مسافت روی پل را پیمود، قطاری دید که از روبه‌رو به سمت او می‌آمد. ریزعلی تشخیص داد که اگر به سمت قطار بدود در لبهٔ پل به قطار می‌رسد (شکل ۱) و می‌تواند از ریل خارج شود؛ همچنین اگر برگردد و به سمت دیگر پل بدود باز هم در لبهٔ پل قطار به او می‌رسد (شکل ۲) و می‌تواند به موقع از ریل خارج شود. اگر سرعت دویدن ریزعلی ۲۰ کیلومتر در ساعت باشد، سرعت قطار چقدر بوده است؟



شکل ۱



شکل ۲

دهقان فداکار

ریزعلی خواجوی مشهور به دهقان فداکار در سال ۱۳۴۱ توانست شب‌هنگام جان مسافران یک قطار را نجات دهد. به گفتهٔ او پس از توقف قطار، مردم ناراضی از قطار پیاده شدند و او را کتک زدند! پس از آنکه مسافران با چشم خود ریزش کوه را دیدند، به تشکر و عذرخواهی از او روی آوردند.

۵ بردار و مختصات

کشتی‌های بادبانی برای حرکت کردن فقط از نیروی باد کمک می‌گرفتند. برای این کشتی‌ها تفاوتی نداشت که باد از کدام سمت بوزد. سکان‌داران و ناخداها با به‌کارگیری مفاهیم برایند برداری، از باد برای حرکت خود در هر جهتی استفاده می‌کردند.

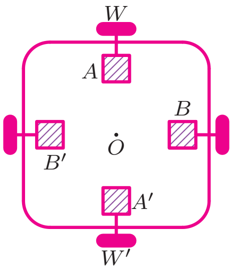
کارگاه بازی

دانش‌آموزان کلاس را به گروه‌های سه‌نفری تقسیم کنید. مطابق شکل دور کمر هر یک از اعضای گروه یک نخ کاموایی به طول تقری ۲ متر ببندید و سر دیگر این نخ را به یک قلم گره بزنید. اعضای گروه باید روی رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی بایستند و در طول مسابقه اجازه ندارند محل ایستادن خود را تغییر دهند. در وسط این مثلث فرضی یک بطری نوشابه خانواده قرار دهید.

مدت زمانی را که هر گروه قلم را بدون استفاده از دست و صرفاً با حرکت بدن به درون بطری هدایت می‌کند، ثبت کنید. گروهی برنده است که در زمان کمتری بتواند این کار را انجام دهد. جایزهٔ نفرات تیم برنده، افزایش نیم نمره به نمرهٔ آزمون میان‌ترم‌شان خواهد بود.

دریچه‌ای به روبوکاپ

سال گذشته دیدید که گروهی از دانش‌آموزان، روباتی به نام روپاد ساختند که می‌توانست در راستای شمال ــ جنوب و شرق ــ غرب حرکت کند.

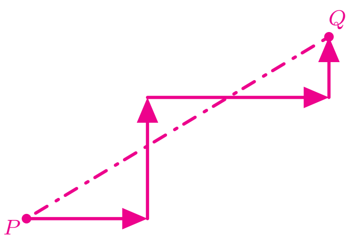


در شکل بالا، به نقطهٔ O مرکز کف روپاد می‌گوییم. در این شکل همچنین نمایی از چهار موتور و چهار چرخ روپاد را می‌بینید. برای مثال با حرکت همزمان ساعتگرد موتور A و پادساعتگرد موتور A' به‌اندازهٔ یک واحد، هر دو چرخ W و W' مجموعاً روپاد را یک واحد به سمت شرق جابه‌جا می‌کنند.

روپاد با دریافت دستوری مانندِ

$$(۱۰۰E)(۴۸N)$$

ابتدا ۱۰۰ واحد به سمت شرق و سپس ۴۸ واحد به سمت شمال حرکت می‌کرد. مدل حرکت روپاد به‌صورت پاره‌خط‌های موازی دو محور افقی و عمودی بود؛ زیرا روپاد دستورات را مرحله به مرحله اجرا می‌کرد و این کار باعث هدر رفتن انرژی و زمان می‌شد. برای مثال، روپاد برای رسیدن از نقطهٔ P به نقطهٔ Q مسیری مثل مسیر زیر را طی می‌کرد، درحالی‌که کوتاهترین مسیر ممکن مسیر مستقیم (که با خطچین نشان داده شده) است.



با همفکری، اعضای گروه به این نتیجه رسیدند که اگر هر دو دستهٔ موتور A و A' و همچنین B و B' همزمان حرکت کنند، از نظر فیزیکی روپاد می‌تواند مسیری مورب را طی کند. بنابراین تصمیم گرفتند که دست به‌کار شوند.

لازم نبود که مسئول مکانیک گروه روپاد تغییرات زیادی ایجاد کند؛ اما مسئول برنامه‌نویسی و الکترونیک گروه باید این فکر را عملی می‌کردند. آنها با مرور مفاهیم مختصات و بردار و الگوبرداری از نمادهای رایج کتاب درسی تغییراتی در روش برنامه دادند به‌طوری‌که تنها از دو نماد i و j استفاده می‌شد. دراین زمان مسئول الکترونیک، روپاد را جوری تغییر داد که اگر در هر مرحله مقدار حرکت راستای شمالی ــ جنوبی و یا شرقی ــ غربی مشخص می‌شد، روپاد دستور را اجرا کند. همزمان برنامه‌نویس هم دست به‌کار شد. او برنامه را جوری تغییر داد که دستورات به‌صورت رشته‌ای وارد شوند و هر بار دستورات بین دو پرانتز همزمان به موتورها ارسال شود. در این حالت روپاد مثلاً با دریافت دستورِ

$$(۳i-j)(۲i+۷j)(-۴j-۵i)$$

ابتدا همزمان سه واحد به سمت شرق و یک واحد به سمت جنوب، سپس همزمان دو واحد به سمت شرق و هفت واحد به سمت شمال و در آخر همزمان چهار واحد به سمت جنوب و پنج واحد به سمت غرب می‌رفت.

سپس آنها توانستند با تغییراتی در برنامه و حذف نمادهای «i» و «j» و استفاده از نماد ویرگول ریاضی (یعنی «,») شکل دستورات را ساده‌تر کنند. در این حالت مثلاً دستور بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شد:

$$(۳,-۱)(۲,۷)(-۵,-۴).$$

تمرین‌ها

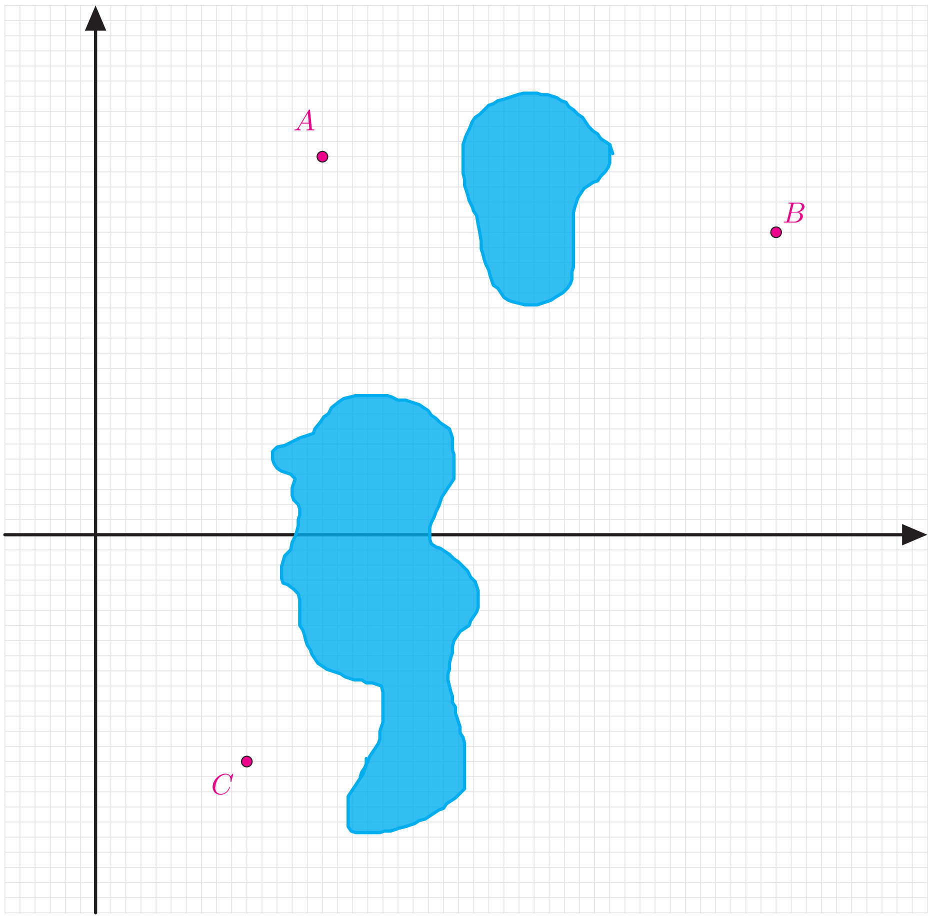
۱. چرا مسیر مستقیم نشان داده شده در صفحهٔ قبل کوتاهترین مسیر ممکن است؟

۲. اگر روپاد در نقطهٔ $\begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ باشد و دستور $(4, 5)(-3, 9)(2, -8)(-5, 2)$ را اجرا کنیم، روپاد در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟

۳. اگر پهنای روپاد ۲۰ سانتی‌متر باشد و هر یک از دو دستور $(1, 0)$ و $(0, 1)$ بتوانند روپاد را تنها یک میلی‌متر حرکت دهند، بر روی شکل مسیری پیشنهاد دهید که مرکز روپاد را که در ابتدا روی مبدأ مختصات است، به‌ترتیب به نقاط A، B و C برساند.

توجه کنید که روپاد نمی‌تواند به ناحیه‌های تیره‌رنگ درون شکل وارد شود.

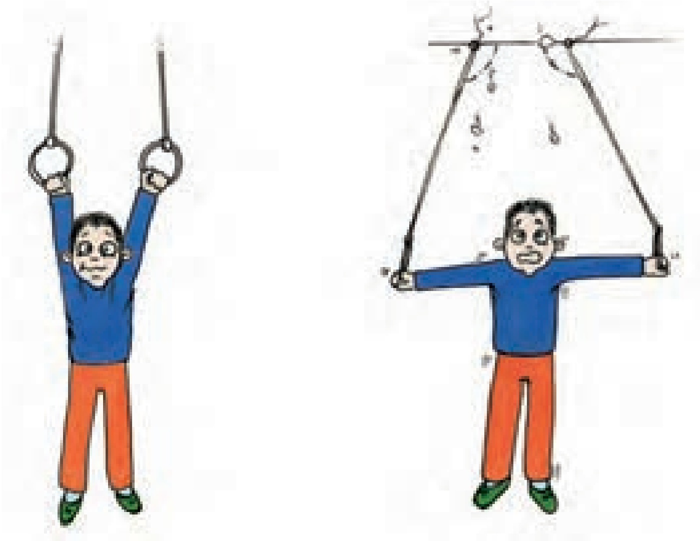
هر ضلع مربع‌های کوچک صفحهٔ شطرنجی زیر، ۱۰ سانتی‌متر است.



کاربردهایی از بردارها

۱. پدر دریا می‌خواهد تابی برای او درست کند. او شاخهٔ قطوری را انتخاب کرده است. کدام‌یک از دو حالت داده شده برای دریا تاب ایمن‌تری محسوب می‌شود؟

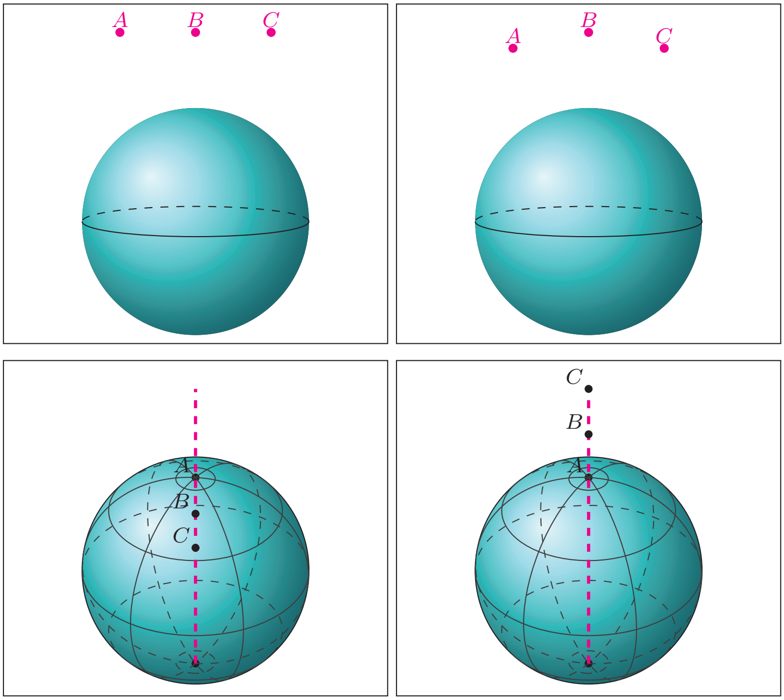
۲. در یکی از مسابقات دارحلقهٔ ژیمناستیک از طناب غیر استانداردی استفاده شده بود. در زمان مسابقه، نوجوانی مطابق شکل سمت چپ از دارحلقه آویزان شده، اما با باز کردن دست‌هایش طناب دارحلقه پاره شد و ورزشکار از ادامهٔ مسابقه بازماند. علت فنی پاره شدن طناب را توضیح دهید.



۳. الف) با جستجوی اینترنتی توصیفی از قانون جاذبه در علم نیوتن را بخوانید.

ب) با جستجوی اینترنتی معنی وزن اجسام را بخوانید.

ج) اگر کره‌های زیر، بیانگر کرهٔ زمین باشند، در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید وزن یک جسم مشخص به‌ترتیب در کدام‌یک از نقاط A، B یا C بیشتر است؟ چرا؟



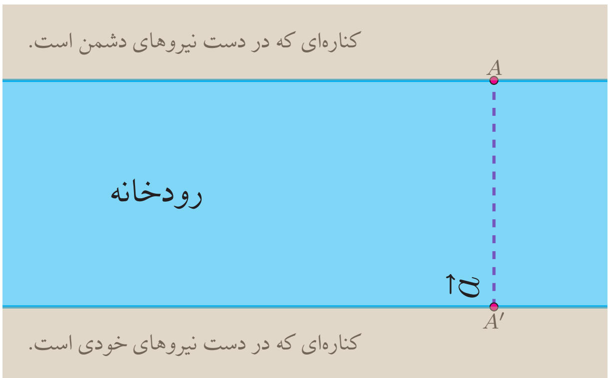
۴. **پروژه.** صدها سال پیش، اگر یک کشتی بادبانی می‌خواست به سمت ساحل حرکت کند، حتی اگر باد در جهتِ مخالفِ مسیرِ کشتی می‌وزید، بازهم ناخدای کشتی طوری آن را هدایت می‌کرد که کشتی ساحل برسد! این نوع کشتی‌ها فقط درصورتی نمی‌توانستند حرکت کنند که باد نوزد! حرکت کشتی‌های بادبانی را با استفاده از مفاهیم بردارها توجیه کنید.

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

بردار، رودخانه و غواص

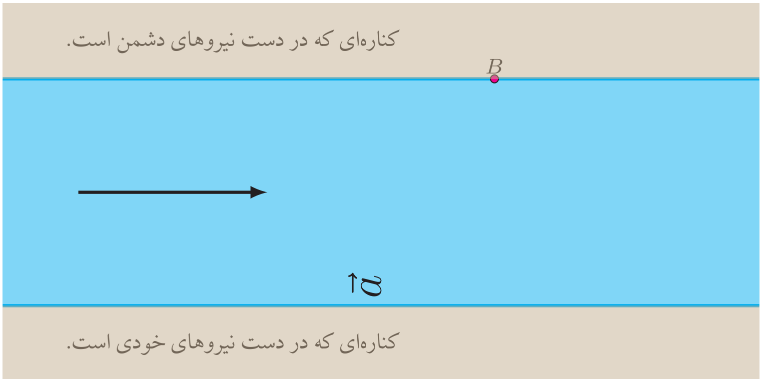
مسائل این بخش یادبودی از شهدای غواص جنگ هشت ساله ایران است که در آن به کاربردی از بردارها می‌پردازد. در جنگ گاهی نیاز بود که غواص‌های خط‌شکن در تاریکی شب و سکوت، با شنا کردن در عرض رودخانه‌ای خروشان، خود را به نقاط معینی از کنارهٔ رودی که در تصرف دشمن است، برسانند.

فرض کنید که یک غواص بتواند با نیروی ثابتی که با بردار $\vec{a}$ نشان داده شده است، عرض رودخانه را شنا کند. اگر آب رودخانه راکد باشد(!) و غواص بخواهد به نقطهٔ A برسد، واضح است که باید از نقطهٔ A' شروع به حرکت کند.

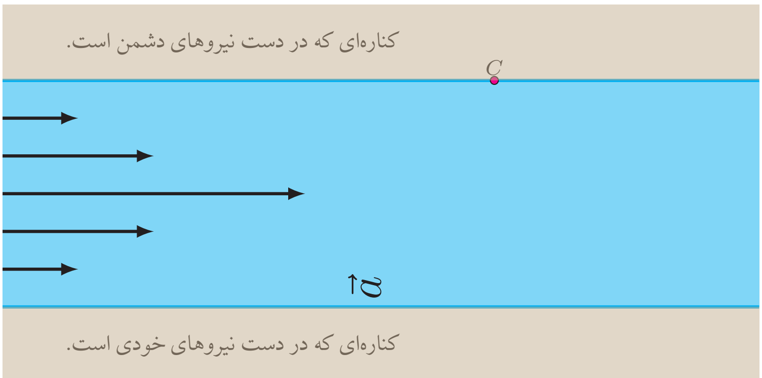


با وجود حل این مسئله، حلّ چنین مسائلی در زندگی واقعی کاربردی ندارد(!) زیرا آب رودخانه همیشه در جریان است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که رودخانه نیرویی مثل $\vec{b}$ (که در شکل با جهت افقی نشان داده شده است) را به غواص وارد می‌کند.

۱. در این حالت تعیین کنید که برای رسیدن به نقطهٔ B غواص باید از کدام نقطهٔ کنارهٔ مقابل رودخانه شروع به شنا کردن کند؟

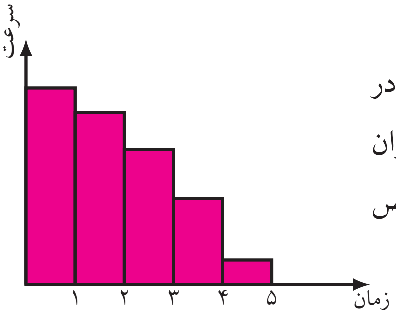


حتی مسئلهٔ اخیر هم کمی غیر واقعی است، زیرا در رودخانه‌ها هر چه از کناره‌ها به وسط رودخانه نزدیک شویم سرعت حرکت آب بیشتر می‌شود؛ بنابراین مثلاً می‌توان فرض کرد که بردارهای نیروی وارد بر غواص در امتداد عرض رودخانه به‌صورت زیر باشند.



۲. در این حالت برای رسیدن به نقطهٔ C، غواص شنای خود را باید از کدام نقطه آغاز کند؟

در واقع در دنیای واقعی، قدرت بدنی غواص در طول مسیر رفته‌رفته کم می‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد مثلاً نمودار مقدار سرعت غواص به‌صورت روبه‌رو است.



سروده‌ای از حامد عسکری با لهجهٔ آبادانی برای شهدای غواص

نِنه‌ش می‌گفت بُواش قنداقه شو دید	رو بازوش دس کشید مثل همیشه
می‌گفت دِستاش مثه بال نِهنگه	گِمونم ای پسر غِوّاص میشه
نِنه‌ش می‌گفت: همه‌ش نزدیک شط بود	می‌ترسیدُم که دور شه از کنارُم
به مو می‌گفت: نِنِه می‌خوام بزرگ شُم	بِرُم سی لیلا مرواری ارُم
نِنه‌ش می‌گفت نمی‌خواستُم بره شط	میدیدُم هی تو قلبُم التهابه
یه روز اومد به مو گفت: بِل بِرُم شط	نفس مو بیشتِر از جاسم تو آبه
زِد و نامردای بعثی رسیدن	مثه خرچنگ افتادن تو کارون
کِهورا سوختن، نخلا شکستن	تموم شهر شد غرقابهٔ خون
نِنه‌ش می‌گفت روزی که داشت می‌رفت	پسین بود؟ صبح بود؟ یادُم نمیاد
موگفتم :بِچه‌ای...لبخند زد گفت:	دفاع از شط شناسنامه نمی‌خواد
رفیقاش میگن: از وقتی که اومد	تو چشماش یه غرور خاص بوده
به فرمانده‌ش می‌گفته بِل بِرُم شط	ماها هف پشتمون غِوّاص بوده
ننه‌ش می‌گفت جِوونِ برگ سِدرُم	مثه مرغابیای خسته برگشت
شبی که کربلای چاار لو رفت	یه گردان زد به خط یه دسته برگشت
نِنه‌ش می‌گفت: چشام به در سیا شد	دوای زخم نمکسودُم نِیومد
مسلمونا دلُم می‌سوزه از داغ	جِوونُم دلبَرُم رودُم نِیومد
عشیره می‌گن از وقتی که گم شد	یه خنده رو لب باباش نیومد
تا از موجا جنازه پس بگیره	شبای ساحلو دمّام می‌زد
یه گردان اومده با دست بسته	دوباره شهر غرق یاس می‌شه
ننه‌ش بندا رو وامی‌کرد باباش گفت:	مو گفتم ای پسر غِوّاص می‌شه

۳. اکنون برای رسیدن به نقطهٔ C، غواص باید چه مکانی را برای شروع شنا انتخاب کند؟

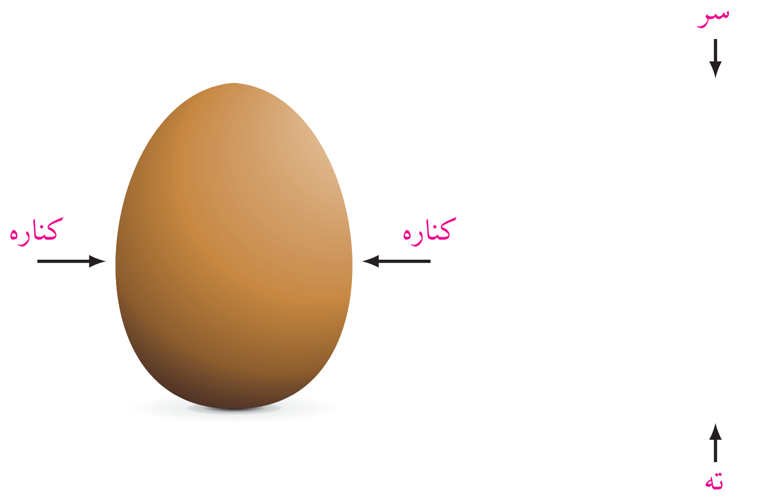
۴. **پروژه.** با مقایسهٔ جواب چهار مسئلهٔ اخیر مشاهده می‌کنید که چقدر استفاده از داده‌های دنیای واقعی و به کار نبستن دانش ریاضی می‌تواند خطرناک باشد. به نظر شما چطور می‌توان این مسئله را در دنیای واقعی بهتر مدل کرد؟

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

ریاضیات تخم مرغی

می‌خواهیم با کمک تعدادی تخم مرغ شسته شده آزمایشی انجام دهیم. در کنار خود یک کاسهٔ تمیز آماده کنید تا تخم مرغ شکسته را در آن بریزید و سپس تحت نظارت والدین خود با آن یک نیمروی خوشمزه درست کنید.

با کمک یک قاشق سعی کنید به سر، ته و کناره‌های یک تخم‌مرغ شکسته نشده و بدون ترک، ضربه‌هایی با نیروی برابر وارد کنید. مشاهده می‌کنید که تخم‌مرغ از کناره‌ها راحت‌تر می‌شکنند.



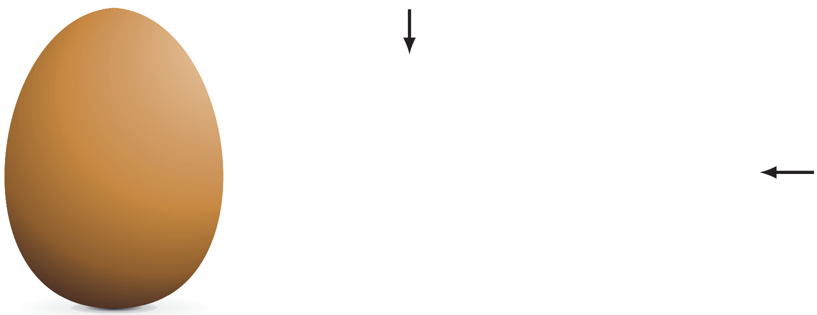
حالت اول

حالت دوم

۱. با کمک خط‌کش مدرج ضخامت پوستهٔ تخم‌مرغ را در سر، ته و کناره‌ها اندازه بگیرید. آیا ضخامت پوستهٔ تخم‌مرغ در سه قسمت به‌دست آمده متفاوت است؟

برای اینکه به علت تفاوت آسانی و سختی شکستن تخم‌مرغ در دو حالت گفته شده پی ببرید، از روش هوشمندانه‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنید پوستهٔ تخم‌مرغ از قطعات ریز به‌هم چسبیده‌ای ساخته شده است. این قطعات می‌تواند آن‌قدر ریز باشد که حتی با چشم هم دیده نشوند. هر قطعه می‌تواند (بخشی از) نیروی وارد شده به خود را به قطعه‌های کناری‌اش منتقل کند.

۲. در شکل‌های زیر، راستای تقریبی تجزیهٔ بردار نیروی وارد بر کناره، سر و ته پوستهٔ تخم‌مرغ را رسم کنید.



۳. در شکل بالا، با تجزیهٔ بردارهای نیرو، توضیح دهید که چرا تخم‌مرغ از کناره‌ها راحت‌تر می‌شکند.

برای دیدن فیلم شکستن تخم‌مرغ به «www.webmath.ir» بیایید.

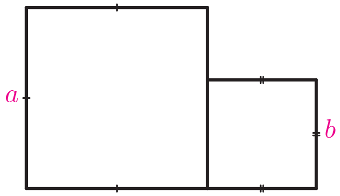
۶

مثلث

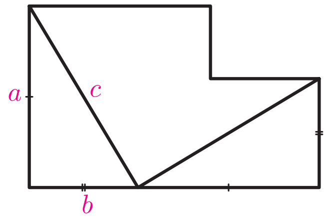
یکی از کتیبه‌های کشف‌شده از قدیمی‌ترین تمدن جهان، در کُنار صَندل جیرفت در استان کرمان، نشان می‌دهد که بشر از حدود ۵۰۰۰ سال پیش با تصاویر هندسی ساده، مربع، مثلث و دایره به‌خوبی آشنا بوده است.

رابطهٔ فیثاغورس

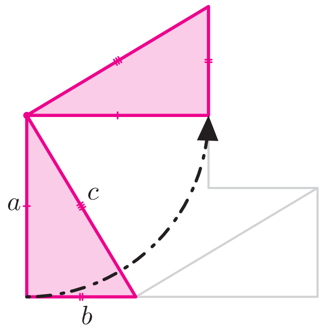
۱. شکل‌های زیر مراحل یکی از اثبات‌های قضیهٔ فیثاغورس را نشان می‌دهد. باتوجه‌به شکل‌ها، اثبات را بنویسید.



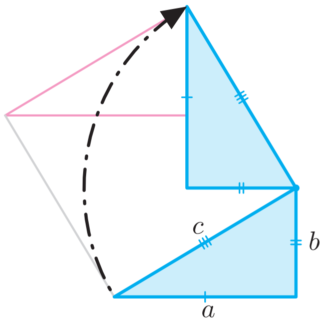
شکل ۱



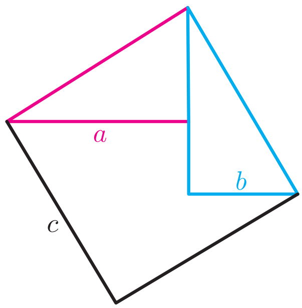
شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

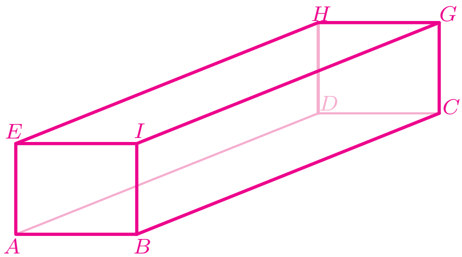


شکل ۵

۲. **پروژه.** روی وب‌گاه «www.webmath.ir» اثبات‌های متعددی از رابطهٔ فیثاغورس قرار داده شده است. این اثبات‌ها را بررسی کنید و مشخص کنید کدام‌یک از آنها مشابه یکدیگرند؟

۳. شخصی ۱ کیلومتر به سمت شمال، ۲ کیلومتر به سمت شرق، ۳ کیلومتر به سمت شمال و ۴ کیلومتر به سمت شرق حرکت می‌کند. او از نقطهٔ شروع چه فاصله‌ای دارد؟

۴. در مکعب‌مستطیل زیر، $AE = ۳$، $AB = ۴$ و $BC = ۱۲$. محیط مثلث BED چقدر است؟



۵. الف) ثابت کنید اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m > n$، آنگاه $m^۲ + n^۲$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن $۲mn$ و $m^۲ - n^۲$ هستند.

ب) با استفاده از روش «الف» شش مثلث قائم‌الزاویهٔ غیر هم‌نهشت با طول اضلاع طبیعی بسازید.

ج) اگر p و q طول ضلع‌های قائم و r طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، نشان دهید برای هر عدد طبیعی k، اعداد kp، kq و kr طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

د) با استفاده از روش «ج» شش مثلث غیر هم‌نهشت (متفاوت از مثلث‌های قسمت «ب») بسازید.

۶. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ابتدا نقطه‌ای مانند C بیابید که مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد به‌طوری‌که $\widehat{C} = ۹۰^\circ$. سپس طول AB را پیدا کنید.

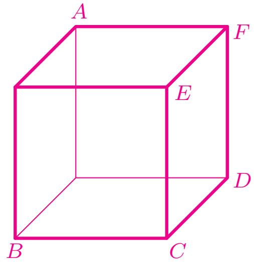
۷. مثلث‌های ABC و PQR با مختصات رأس‌های زیر داده شده‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

کدام مثلث قائم‌الزاویه و کدام مثلث متساوی‌الساقین است؟

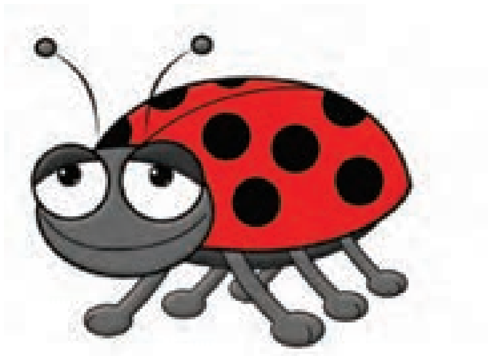
۸. نقاط $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ را روی کاغذ شطرنجی نشان دهید. سپس ثابت کنید زاویه‌های $D\hat{E}C$ و $C\hat{A}B$ برابرند.

۹. در مکعب زیر، چند مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان ساخت به‌طوری‌که رأس‌های آن A، B، C، D، E یا F باشند؟ همهٔ این مثلث‌ها را نام ببرید.



۱۰. یک کفش‌دوزک درون یک اتاق مکعبی شکل به طول یال ۱، حرکت می‌کند. او از یک کنج اتاق شروع به حرکت می‌کند و تا کنج دیگری که در هیچ وجهی با کنج اول مشترک نیست، از طریق سقف و دیوار می‌رود. اگر او کوتاه‌ترین مسیر را پیموده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟

توجه کنید که جواب این مسئله ۳ نیست؛ حتی $\sqrt{2} + 1$ هم نیست!

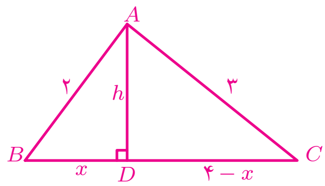


۱۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MOQ، ($\hat{O} = 90^\circ$) نقطهٔ P روی ضلع OQ چنان قرار دارد که $MO = OP$ و $MP = PQ$. اگر $MO = a$، آنگاه طول ضلع MQ را برحسب a به‌دست آورید.

۱۲. نقطهٔ E خارج از مربع $ABCD$ قرار دارد به‌گونه‌ای‌که مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است. نقطهٔ F درون مربع $ABCD$ قرار دارد به‌گونه‌ای‌که مثلث BCF متساوی‌الاضلاع است. اگر $AB = ۱$، آنگاه طول EF را به‌دست آورید.

۱۳. بیژن و خسرو می‌خواستند مساحت مثلثی با طول اضلاع ۲، ۳ و ۴ را حساب کنند. آن دو این مسئله را به‌صورت زیر حل کردند. دربارهٔ این دو راه‌حل بحث کنید و راه‌حل نادرست را اصلاح نمایید.

راه حل بیژن:



از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ABD نتیجه می‌شود:

$$h^۲ = ۲^۲ - x^۲.$$

از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ACD نتیجه می‌شود:

$$h^۲ = ۳^۲ - (۴ - x)^۲.$$

باتوجه‌به دو رابطه‌ای که در بالا به‌دست آمد، داریم:

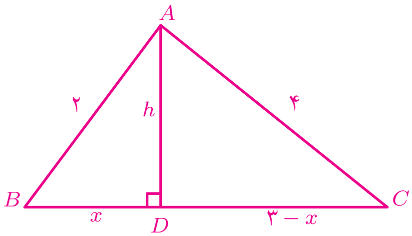
$$\begin{aligned} ۲^۲ - x^۲ = ۳^۲ - (۴ - x)^۲ &\Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۹ - (۱۶ - ۴x - ۴x + x^۲) \\ &\Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۹ - ۱۶ + ۸x - x^۲ \\ &\Longrightarrow ۱۱ = ۸x \\ &\Longrightarrow x = \frac{۱۱}{۸}. \end{aligned}$$

با جایگذاری مقدار x در رابطهٔ فیثاغورس مثلث ABD داریم:

$$h^۲ = ۴ - (\frac{۱۱}{۸})^۲ \Longrightarrow h = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۸}.$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$.

راه حل خسرو:



$$\left.\begin{aligned} h^۲ &= ۲^۲ - x^۲ \\ h^۲ &= ۱۶ - (۳ - x)^۲ \end{aligned}\right\} \Longrightarrow ۲^۲ - x^۲ = ۱۶ - (۳ - x)^۲$$

$$\Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۱۶ - (۹ - ۳x - ۳x + x^۲)$$

$$\Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۱۶ - ۹ + ۶x - x^۲$$

$$\Longrightarrow ۴ = ۷ + ۶x$$

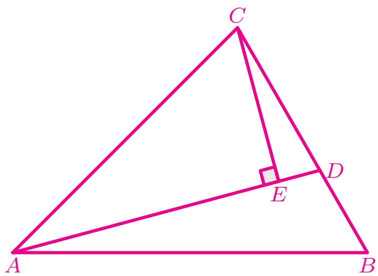
$$\Longrightarrow -۶x = ۳$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{۱}{۲}.$$

پس $h = \frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ و بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۱۵}}{۲} \times ۴ = \sqrt{۱۵}.$$

۱۴. در شکل زیر، CE بر AD عمود است. اگر $AC = \sqrt{۶}$، $BC = ۳$، $AE = \sqrt{۳}$، $DE = ۱$ و $A\hat{D}B = ۱۲۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ هریک از زاویه‌های مثلث ABC را به‌دست آورید.



۱۵. پروژه. عدد ۱۰ را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت:

$$۱۰ = ۱^{۲} + ۳^{۲}.$$

عدد ۷ را می‌توان به‌صورت تفاضل مربعِ دو عدد طبیعی نوشت:

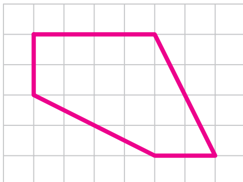
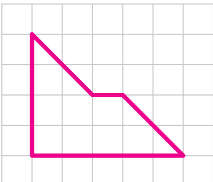
$$۷ = ۴^{۲} - ۳^{۲}.$$

الف) چه اعدادی را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت؟

ب) چه اعدادی را می‌توان به‌صورت تفاضل مربعِ دو عدد طبیعی نوشت؟

هم‌نهشتی

۱. هر یک از شکل‌های زیر را به دو قسمت هم‌نهشت تقسیم کنید. در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.

۲. یک مربع رسم کنید و آن را به دو پنج‌ضلعی هم‌نهشت تقسیم کنید. سپس مشخص کنید چه تبدیل‌هایی این دو پنج‌ضلعی را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.

۳. یک مثلث کاغذی بسازید. مثلث را با قیچی به دو مثلث تقسیم کنید. آیا می‌توانید با کنارهم قرار دادن این دو مثلث، مثلثی بسازید که با مثلث اولیه هم‌نهشت نباشد؟

۴. فرض کنید نقطهٔ E محل برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ باشد. اگر دو مثلث ADE و BCE هم‌نهشت باشند، آنگاه:

الف) چرا مساحت دو مثلث ABC و ABD همواره برابر هستند؟

ب) چرا دو مثلث ABC و ABD همواره هم‌نهشت نیستند؟

۵. آیا می‌توان مثلثی را که طول سه ضلعش متفاوت‌اند، به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم کرد؟

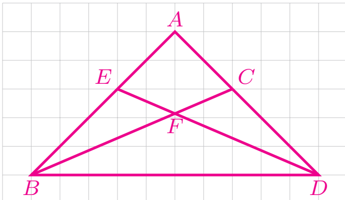
۶. اگر قطر BD در چهارضلعی $ABCD$، آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم کند، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

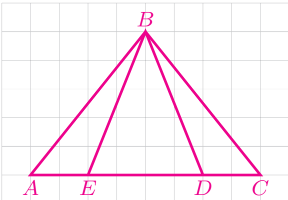
الف) $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ ب) $AB = CD$

ج) $A\hat{B}D = C\hat{D}B$ د) $AB = BC$

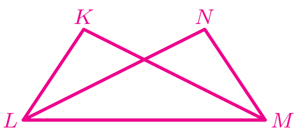
مثلث‌های هم‌نهشت

۱. در هر یک از شکل‌های زیر، حداقل دو جفت مثلث هم‌نهشت وجود دارد. آن مثلث‌ها را نام ببرید و اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

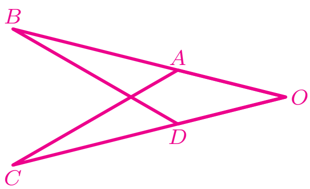




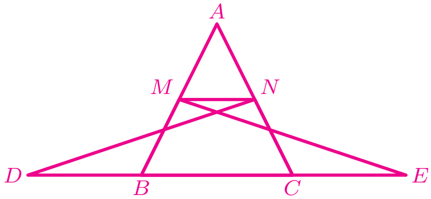
۲. در شکل زیر $KM = NL$ و $N\hat{L}M = K\widehat{M}L$. ثابت کنید دو مثلث KML و NLM هم‌نهشت‌اند و اجزای متناظر آنها را بنویسید.



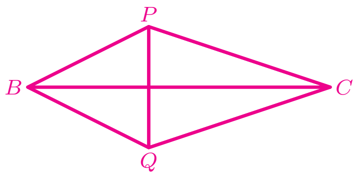
۳. در شکل زیر، $AB = CD$ و $AO = DO$. ثابت کنید $AC = BD$.



۴. در شکل زیر، $BD = CE$، $M\hat{E}C = N\hat{D}B$ و $A\hat{C}B = A\hat{B}C$. ثابت کنید مثلث AMN متساوی‌الساقین است.



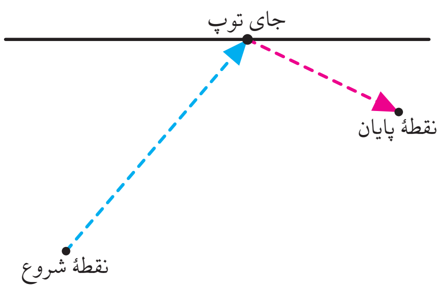
۵. در شکل زیر، $BP = BQ$ و $CP = CQ$. ثابت کنید BC بر PQ عمود است.



۶. ثابت کنید در یک پنج‌ضلعی منتظم همهٔ قطرها باهم برابرند.

۷. دو پاره‌خط AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند به‌طوری‌که $AE = DC$، $AD = BE$ و $A\hat{D}C = D\hat{E}C$. اگر طول AE یک واحد کمتر از طول AB باشد، آنگاه طول EC چقدر است؟

۸. نوشین در یک مسابقه که در حیاط مهدکودک برگزار می‌شود، باید از نقطهٔ شروع به سمت دیوار (خط سیاه) بدود و توپی را که خودش قبلاً آنجا گذاشته به نقطهٔ پایان ببرد. نوشین توپ را کجا قرار دهد تا در کمترین زمان این کار را انجام دهد؟

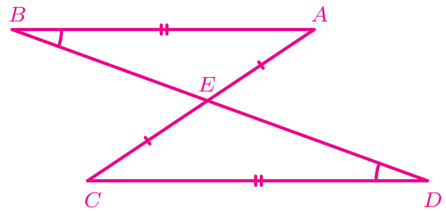


۹. پاره‌خط AB در نقطهٔ O پاره‌خط CD را نصف کرده است. اگر $AD = BC$، آیا می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث AOD و BOC هم‌نهشت‌اند؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

۱۰. پاره‌خط BD در نقطهٔ E، پاره‌خط AC را نصف کرده است به‌طوری‌که $CD = AB$ و $E\hat{D}C = E\hat{B}A$. ثابت کنید $BE = DE$.

بهمن این مسئله را این‌گونه حل کرده است:

چون پاره‌خط BD، پاره‌خط AC را نصف کرده است پس $AE = CE$. از طرفی بنا به صورت مسئله می‌دانیم $E\hat{B}A = E\hat{D}C$ و $AB = CD$. بنابراین دو مثلث ABE و CDE هم‌نهشت‌اند. پس $DE = BE$.



الف) چرا راه‌حل بهمن نادرست است؟

ب) راه‌حل بهمن را اصلاح کنید.

۱۱. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است و کدام‌یک همواره درست نیست.

الف) اگر دو زاویه و یک ضلع مثلثی با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

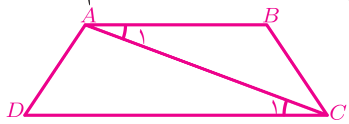
ب) اگر دو زاویه و یک ضلع از مثلثی با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۱۲. اگر دو ضلع و زاویهٔ غیر بین آن دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع و زاویهٔ غیر بین آن دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آیا این دو مثلث همواره هم‌نهشت‌اند؟

۱۳. شقایق و افرا مسئلهٔ قبل را این‌گونه حل کرده‌اند:

راه‌حل شقایق:

با یک مثال نشان می‌دهیم این دو مثلث همواره هم‌نهشت نیستند.



در ذوزنقهٔ $ABCD$، AB با CD موازی است و $AD = BC$.

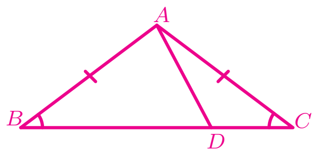
چون $AB \parallel CD$ و AC مورب است پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱$. پس دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ABC با دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ADC نظیر به نظیر برابرند:

$$AC = AC, \quad \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱ \quad AD = BC.$$

اما در ذوزنقه ضلع‌های موازی، مساوی نیستند $(AB \neq CD)$. بنابراین دو مثلث ABC و ACD هم‌نهشت نیستند.

راه‌حل افرا:

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ D را روی BC طوری انتخاب کرده‌ایم که $BD \neq CD$.



پس رابطه‌های زیر برقرار هستند:

$$AB = AC, \quad \widehat{B} = \widehat{C}, \quad AD = AD \quad (\star)$$

چون $BD \neq CD$، پس دو مثلث ABD و ACD هم‌نهشت نیستند؛ در حالی که بنابه روابط $(\star)$ دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ABD با دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ACD نظیر به نظیر برابرند.

الف) دربارهٔ راه‌حل شقایق و راه‌حل افرا بحث کنید.

ب) راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه دهید.

۱۴. در مثلث متساوی‌الساقین ABC نقطه‌های M و N به‌ترتیب روی ساق‌های AB و AC قرار دارند به‌طوری‌که $AM = AN$. اگر نقطهٔ O محل برخورد BN و CM باشد، آنگاه ثابت کنید:

الف) دو مثلث ANB و AMC هم‌نهشت‌اند.

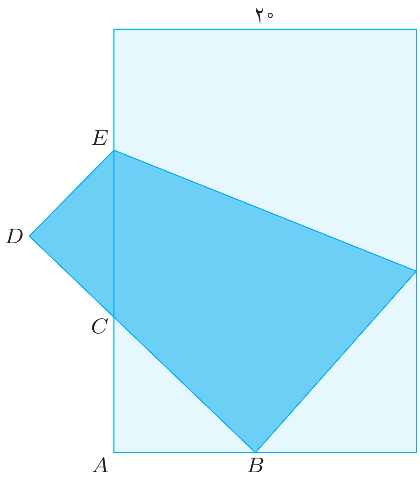
ب) دو مثلث OCN و OBM هم‌نهشت‌اند.

۱۵. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین،

الف) نیم‌ساز زاویه‌های پای ساق باهم برابرند.

ب) میانه‌های وارد بر ساق‌ها باهم برابرند.

۱۶. یک کاغذ مستطیلی به عرض ۲۰ سانتی‌متر را مانند شکل زیر طوری تا کرده‌ایم که یکی از رأس‌ها روی وسط ضلع دیگر افتاده است. حال دو مثلث ABC و CDE هم‌نهشت شده‌اند. طول این مستطیل را بیابید.



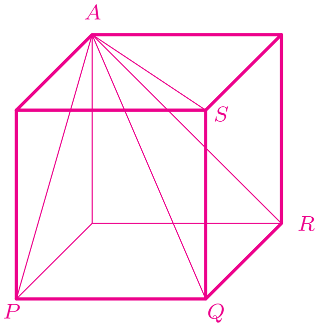
۱۷. ثابت کنید اگر یکی از میانه‌های مثلثی، نیم‌ساز نیز باشد، آنگاه این مثلث متساوی‌الساقین است.

راهنمایی: میانه را به اندازهٔ خودش ادامه دهید.

۱۸. نقطهٔ M وسط ضلع AC از مثلث ABC است. اگر نقطهٔ D چنان روی ضلع BC قرار داشته باشد که $D\widehat{M}C = B\widehat{M}A$ و $CD + DM = BM$، آنگاه ثابت کنید:

$$A\widehat{C}B + A\widehat{B}M = B\widehat{A}C.$$

۱۹. در مکعب زیر، در بین اندازهٔ زاویه‌های $P\widehat{A}Q$، $P\widehat{A}R$، $P\widehat{A}S$، $Q\widehat{A}R$، $Q\widehat{A}S$ و $R\widehat{A}S$ چند مقدار مختلف وجود دارد؟

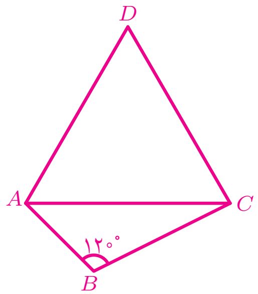


۲۰. در شکل روبه‌رو، مثلث ACD متساوی‌الاضلاع است. ثابت کنید:

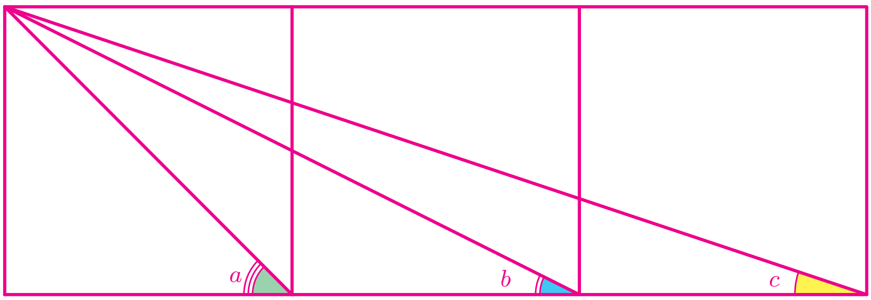
الف) پاره‌خط BD نیم‌ساز زاویهٔ B است.

ب) $BD = AB + BC$.

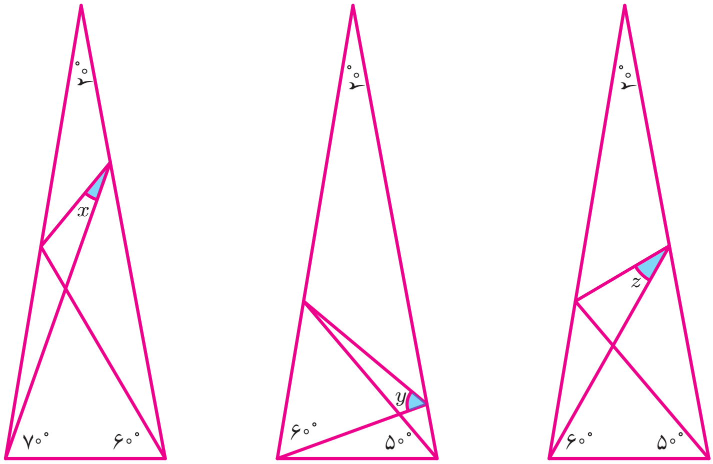
راهنمایی: BC را از طرف B به اندازهٔ AB امتداد دهید و نقطه انتها را E بنامید. سپس ثابت کنید دو مثلث ABD و AEC هم‌نهشت‌اند.



۲۱. شکل زیر از سه مربع به ضلع واحد تشکیل شده است. مطلوب است $a + b + c$.



۲۲. در زیر، سه مثلث متساوی‌الساقین می‌بینید که زاویهٔ رأس آنها ۲۰ درجه است. مقدارهای x، y و z را بیابید.



۲۳. پاره‌خط‌های AB، CD و EF در نقطه O همرس‌اند. اگر CD پاره‌خط EF را نصف کرده باشد و OE و OF به‌ترتیب میانه مثلث‌های BCO و ADO باشند، آیا می‌توان ثابت کرد دو مثلث BOE و AOF هم‌نهشت‌اند؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

۱. یک سرباز کنار رودخانه ایستاده و می‌خواهد بداند عرض رودخانه چند قدم است. او شنیده است می‌تواند بدون اینکه وارد آب شود، عرض رودخانه را با استفاده از کلاهش به‌طور تقریبی اندازه بگیرد. این سرباز چگونه بفهمد عرض رودخانه چقدر است؟

۲. با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

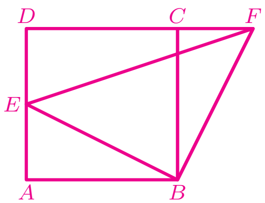
ب) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر نظیر به نظیر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۳. پاره‌خط‌های AB، CD و EF در نقطه O همرس‌اند. اگر OE و OF به‌ترتیب ارتفاع مثلث‌های AOC و BOD باشند، آیا می‌توان ثابت کرد $\triangle AOE \cong \triangle BOF$؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

۴. در مربع $ABCD$، نقطه‌های E و F به‌ترتیب روی اضلاع BC و AB قرار دارند به‌طوری‌که $AE = FC$. اگر $B\hat{A}E = ۱۵^\circ$، آنگاه زاویهٔ CFE چند درجه است؟

۵. ارتفاع AH، نیم‌ساز BD و میانهٔ CM از مثلث ABC در نقطهٔ G همرس‌اند. اگر $AG = BG$، آنگاه ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۶. در شکل زیر، $ABCD$ مربع است. نقطه E روی AD و F روی امتداد DC قرار دارد به‌طوری‌که EB بر FB عمود است. اگر $AB = ۱۶$ و $BE \times BF = ۴۰۰$، آنگاه طول CF چقدر است؟



۷. خط ℓ ضلع‌های AB و BC از مستطیل $ABCD$ را قطع کرده است. اگر فاصلهٔ نقطه‌های A، B و C از خط ℓ به‌ترتیب ۴، ۵ و ۷ سانتی‌متر باشد، آنگاه فاصلهٔ نقطهٔ D از خط ℓ چقدر است؟

راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی با ℓ رسم کنید.

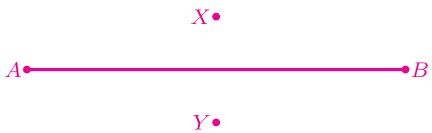
۸. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و دربارهٔ آنها با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

خط d عمودمنصف پاره‌خط AB است و AB را در نقطهٔ H قطع کرده است. نقطهٔ دلخواه M را روی خط d انتخاب می‌کنیم. دو مثلث AMH و BMH هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس می‌توان نتیجه گرفت $AM = BM$.	فاصلهٔ M از دو سر پاره‌خط AB یکسان است؛ یعنی $AM = BM$. میانهٔ MN از مثلث AMB را رسم می‌کنیم. دو مثلث AMN و BMN هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه: هر نقطه دلخواه روی عمودمنصف یک پاره‌خط ....

و برعکس اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط ....

۹. در شکل زیر، $XA = YA$ و $XB = YB$.



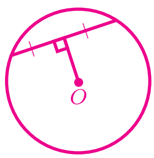
کدام‌یک از جمله‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) AB روی عمودمنصّف XY است.

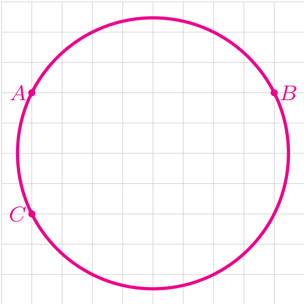
ب) XY روی عمودمنصّف AB است.

۱۰. پاره‌خط AE در نقطه R پاره‌خط BK را قطع می‌کند به‌طوری‌که $AB = AK$. آیا می‌توان ثابت کرد $AE \perp BK$؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان ثابت کرد $AE \perp BK$.

۱۱. در شکل زیر، آیا نقطهٔ O مرکز دایره است؟ چرا؟



۱۲. در شکل روبه‌رو،



الف) داخل دایره، همهٔ نقاطی را مشخص کنید که از A و B فاصلهٔ یکسان دارند.

ب) داخل دایره، همهٔ نقاطی را مشخص کنید که از A و C فاصلهٔ یکسان دارند.

ج) مرکز دایره را پیدا کنید.

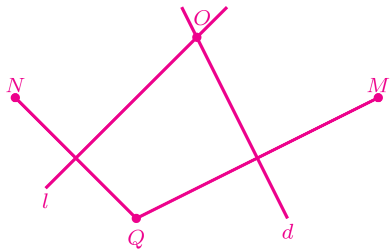
۱۳. دایره‌ای به مرکز P و دایره‌ای به مرکز Q یکدیگر را در دو نقطه X و Y قطع کرده‌اند.

الف) ثابت کنید PQ عمودمنصّف پاره‌خط XY است.

ب) آیا می‌توان گفت XY عمودمنصّف PQ است؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا XY نیز عمودمنصّف PQ باشد.

۱۴. در مثلث ABC، $AB = AC$ و $\widehat{A} = ۱۰۰^\circ$. عمودمنصّف‌های اضلاع AB و AC ضلع BC را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. زاویهٔ EAF چند درجه است؟

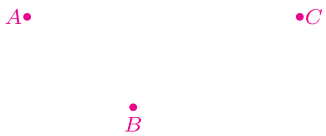
۱۵. در شکل زیر، خطوط d و ℓ عمودمنصّف پاره‌خط‌های QM و QN هستند.



الف) همهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقینی که با رأس‌های M، Q، N و O ساخته می‌شوند را با ذکر دلیل نام ببرید.

ب) با یک پرگار، به مرکز O و شعاع OQ دایره‌ای رسم کنید. چرا این دایره از M و N نیز می‌گذرد؟

۱۶. در زیر، دایره‌ای رسم کنید که هر سه نقطهٔ A، B و C روی آن دایره باشند.



۱۷. سه نقطهٔ دلخواه در یک صفحه داده شده است. آیا همواره می‌توان نقطهٔ چهارمی در همان صفحه پیدا کرد که فاصلهٔ آن از سه نقطهٔ داده شده یکسان باشد؟ اگر پاسخ خیر است شرطی به مسئله اضافه کنید که همیشه آن نقطهٔ چهارم وجود داشته باشد.

۱۸. شرکت مخابرات یک دکل مخابراتی را برای آنتن‌دهی موبایل ساکنین سه روستای نزدیک به‌هم در نظر گرفته است. شرکت مخابرات باید این دکل را در کجا نصب کند؟

۱۹. تفاوت دو مسئلهٔ زیر را مشخص کنید.

مسئلهٔ اول. ثابت کنید اگر در یک مثلث، طول میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.	**مسئلهٔ دوم.** ثابت کنید در همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول میانه‌ای که از زاویهٔ قائمه رسم می‌شود، نصف طول وتر است.

۲۰. فاطمه و مژگان دو مسئلهٔ تمرین قبل را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. دو راه‌حل زیر را با جزئیات کامل، شرح دهید.

راه‌حل فاطمه برای مسئلهٔ اول : فرض کنید در مثلث ABC طول میانهٔ AM نصف ضلع BC باشد. بنابراین دو مثلث ABM و ACM متساوی‌الساقین هستند؛ پس در دو مثلث ABM و ACM اندازهٔ زاویه‌های پای ساق برابرند. از طرفی مجموع زاویه‌های مثلث ABC برابر 180° است. پس می‌توان نتیجه گرفت که زاویهٔ BAC قائمه است.	راه‌حل مژگان برای مسئلهٔ دوم : فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه دلخواه ABC عمودمنصف ضلع AB و وتر BC یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. پس مثلث AMB متساوی‌الساقین است. چون مجموع دو زاویهٔ B و C برابر 90° و مجموع دو زاویهٔ CAM و BAM نیز برابر 90° است، پس دو زاویهٔ CAM و C برابرند و در نتیجه میانهٔ AM نصف وتر BC است.

۲۱. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و دربارهٔ آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

نقطهٔ دلخواه D را روی نیم‌ساز زاویهٔ A انتخاب می‌کنیم. از D دو عمود DH و DK را بر ضلع‌های زاویهٔ A رسم می‌کنیم. دو مثلث AHD و AKD هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس می‌توان نتیجه گرفت $DH = DK$.	نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ A فاصلهٔ یکسان دارد؛ یعنی اگر دو عمود MH و MK را بر ضلع‌های زاویهٔ A وارد کنیم، آنگاه $MH = MK$. در این صورت دو مثلث AMH و AMK هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس AM نیم‌ساز زاویهٔ A است.

نتیجه: هر نقطهٔ دلخواه روی نیم‌ساز یک زاویه ....

و برعکس نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه ....

۲۲. در مستطیل $ABCD$، نقطهٔ M وسط ضلع CD قرار دارد. نقطهٔ K روی ضلع BC چنان قرار دارد که KM نیم‌ساز زاویهٔ AKC است. ثابت کنید AM نیم‌ساز زاویه KAD است.

۲۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$ قطر AC نیم‌ساز زاویه A است. اگر $AB = ۴$، $AD = ۵$ و مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، آنگاه مساحت چهارضلعی $ABCD$ چقدر است؟

۲۴. الف) ثابت کنید در دو مثلث هم‌نهشت ارتفاع‌های نظیر برابرند.

ب) دو پاره‌خط برابر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند؛ همچنین عمودمنصّف‌های دو پاره‌خط AD و BC یکدیگر را در نقطهٔ N قطع کرده‌اند. اگر نقطهٔ N درون زاویهٔ AMC باشد، آنگاه ثابت کنید MN نیم‌ساز زاویهٔ AMC است.

تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۱)

نگاهم رو دوخته بودم به چهره آقای آشتیانی ولی به پویانمایی «ظاهر و باطن» (Inside Out) فکر می‌کردم. از خودم پرسیدم: آیا شخصیتِ شادِ درون ذهن آقای آشتیانی زنده است؟ اگر زنده است، پس چرا ما خندیدن آقای آشتیانی را ندیده‌ایم؟ شاید شخصیتِ شادِ ذهنِ آقای آشتیانی در اعماق ذهن او گم شده باشد. ممکن است شادی و خشمِ ذهن او باهم دعوایشان شده باشد! شاید شخصیت خشم، شادی ذهن او را زندانی کرده باشد! شخصیتِ خشمِ ذهن آقای آشتیانی چه شکلی است؟ چقدر شبیه خود آقای آشتیانی است؟ لحظه‌ای چهرهٔ شخصیتِ خشمِ آقای آشتیانی را تصور کردم، قیافهٔ عجیبی در ذهنم ساخته شد! از این تصور خنده‌ام گرفت؛ خیلی سعی کردم خودم رو کنترل کنم، اما نشد!

آقای آشتیانی با دست راست تسبیحش را از جیبش درآورد و سرش را طوری چرخاند که نگاهش در نگاه من افتاد. او انگشت شستش را پشت دانه‌های تسبیح گذاشت و آنها را فشار داد طوری‌که تسبیحش به من اشاره می‌کرد، گفت: «به چی می‌خندی؟ کلاس که جای خندیدن نیست؟» می‌دانستم که الان با یک پرسش ریاضی به دام آقای آشتیانی می‌افتم. پرسید: «زود بگو ببینم تعداد دانه‌های تسبیح من بیشتر است یا $۴^۴$؟» سعی کردم دانه‌های تسبیح را بشمارم که آقای آشتیانی گفت: «به چی نگاه می‌کنی؟ می‌خوای دانه‌های تسبیح رو بشماری؟ تسبیح‌ها معمولاً ۱۰۱ دانه دارند.» می‌خواستم $۴^۴$ را ذهنی حساب کنم، که چند نفر از بچه‌های کلاس دستشان را بالا بردند که جواب بدهند. همین باعث شد تمرکزم به‌هم بریزد و نتوانم محاسبه کنم. آخر سر هم یکی از همین بچه‌ها گفت که $۴^۴$ می‌شه ۲۵۶. پس $۴^۴$ از تعداد دانه‌های تسبیح شما بیشتره.

ادامه دارد ... (صفحهٔ ۱۱۳)

۷ توان و جذر

تعداد شاخ و برگ درختان به‌صورت توانی زیاد می‌شوند.

توان

۱. الف) عدد $۴^{۴}$ را به چه توانی برسانیم که حاصل $۸^{۸}$ شود؟

ب) عدد $۹^{۹}$ را به چه توانی برسانیم تا به عدد $۲۷^{۱۲}$ برسیم؟

۲. حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $(۳^{۴})^{۲} \times (۵^{۲})^{۴} \times ۱۵^{۴}$

ب) $\dfrac{۳^{۳} \times ۸^{۳} \times ۲۴^{۵}}{۶^{۳} \times ۴^{۳}}$

ج) $\dfrac{(۱/۴)^{۳} \times (۰/۲)^{۳} \times ۷^{۳}}{(۲/۸)^{۶}}$

د) $\dfrac{۲^{۲} \times ۴۸^{۷} \times ۶^{۳} \times ۳^{۲} \times ۸^{۵}}{۱۶^{۱۲}}$

ه) $\dfrac{۳۸^{۲} \times ۲۶^{۵} \times ۱۱^{۷}}{۱۳^{۱۲} \times ۴۴^{۷} \times ۱۹^{۲}}$

و) $\dfrac{۳^{۲} \times ۸^{۴} \times ۲۴^{۵}}{۶^{۲} \times ۴^{۵}}$

ز) $(۳^{۵} + ۳^{۵} + ۳^{۵})(۳^{۱۱} + ۳^{۱۱} + ۳^{۱۱})$

۳. هر یک از اعداد زیر را به‌صورت تجزیه شده به عوامل اول بنویسید.

الف) $(۲^{۲} \times ۳)^{۴} \times ۱۵^{۵}$

ب) $(۱۸^{۱۹} \times ۱۹^{۱۸})^{۳} \times ۳۸^{۶}$

ج) $(۱۲^{۳} \times ۱۴^{۴})^{۵} \times (۲۱^{۲})^{۳}$

۴. در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x و y را بیابید.

الف) $۳^{۴} = ۳ \times ۳^{x}$

ب) $۴^{۳} = ۲^{۳} \times ۲^{x}$

ج) $۹^{۵} = ۳^{۲} \times ۸۱^{y}$

د) $۱۸^{۶} = ۳^{۶} \times ۲^{x} \times ۶^{y}$

ه) $۲۴^{۵} = ۲^{x} \times ۳^{y} \times ۱۲^{۳}$

و) $۱۲^{۸} = ۳^{۴} \times x^{y}$

۵. داخل مربع علامت $\times$ یا $\div$ قرار دهید تا تساوی برقرار شود.

الف) $۶^{۲} \square ۱۸^{۳} \square ۳^{۲} = ۱۸^{۵}$

ب) $۱۸^{۶} \square ۲^{۶} \square ۳^{۶} = ۲۷^{۶}$

ج) $۲۴^{۴} \square ۲^{۶} \square ۲۷ = ۸ \times ۲۴$

د) $۱۸^{۵} \square ۳۲ \square ۹^{۳} = ۹^{۸}$

۶. مقادیر زیر را بیابید.

الف) $۳۳۳۳۳^۳ - ۲۷ \times ۱۱۱۱۱^۳$ ب) $\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right)^{۲۰۰}\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^{۲۰۰}$

۷. اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، آنگاه همهٔ جواب‌های معادلهٔ زیر را بیابید.

$$۶^۸ = ۳^۴ \times a^b$$

۸. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m^n = ۲^{۲۰}$، آنگاه m و n چه اعدادی می‌توانند باشند؟

۹. در هر یک از عبارت‌های زیر توان عدد ۲ را به‌دست آورید.

الف) $۲^{۳^۴}$ ب) $(۲^۳)^۴$ ج) $۲^{۴^۳}$ د) $(۲^۴)^۳$

۱۰. می‌دانیم x، y و z سه عدد متفاوت هستند. اگر این سه عدد ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشند، آنگاه بیشترین و کمترین مقدارِ x^{y^z} و $(x^y)^z$ را به‌دست آورید.

۱۱. با کمک یک (یا چند) پرانتزگذاری، از عدد داده شده به چند عدد متفاوت می‌توان دست یافت؟

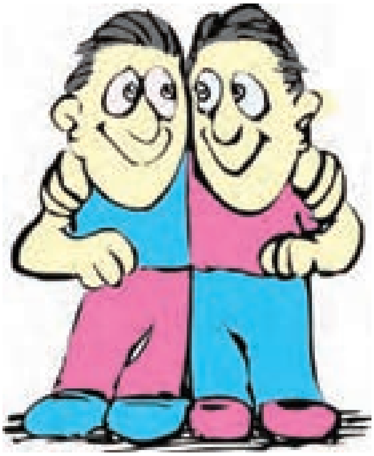
$$۲^{۳^{۴^۵}}$$

۱۲. بزرگ‌ترین عدد طبیعیِ n را بیابید به‌گونه‌ای که:

$$n^{۲۰۰} < ۵^{۳۰۰}.$$

۱۳. در یک مربع، وسط‌های ضلع‌های روبه‌رو را به هم وصل می‌کنیم. در مرحلهٔ بعد همین کار را برای هر یک از مربع‌های حاصل انجام می‌دهیم. اگر این کار را شش مرحله انجام دهیم، تعداد کلّ مربع‌ها چند تا می‌شود؟

اعداد رادیکالی



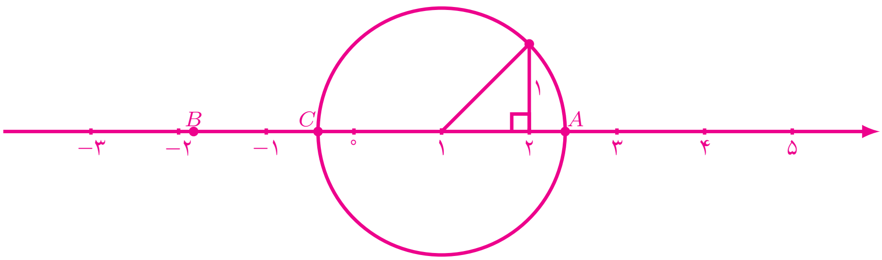
۱. مجید برای نمایش عدد $\sqrt{۷}$ روی محور از تساوی $۴^۲ = (\sqrt{۷})^۲ + ۳^۲$ استفاده کرد.
مهرداد برای نمایش عدد $\sqrt{۷}$ روی محور اعداد از تساوی $(\sqrt{۷})^۲ = ۲^۲ + (\sqrt{۳})^۲$ استفاده کرد. روش مجید و روش مهرداد را با استفاده از محور اعداد شرح دهید.

۲. هر یک از اعداد زیر را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ 　　 ب) $۷ - ۳\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt{۲} + \sqrt{۵}$ 　　 د) $-\sqrt{۱۱} + \sqrt{۳}$

۳. در شکل زیر، $AB = ۳\sqrt{۲}$. نقطه‌های B و C چه اعدادی را نشان می‌دهند؟ طول پاره‌خط BC چقدر است؟



۴. اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشند و طول پاره‌خط AB برابر $\sqrt{۷} - \sqrt{۲}$ و B متناظر با عدد $\sqrt{۲} + ۱$ باشد، A متناظر با چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۵. روی محور زیر، اعداد ۱ و ۱− را مشخص کنید.

۶. از نقطهٔ ۲− روی محور اعداد ۳ واحد به‌طور عمودی بالا رفته‌ایم تا به نقطهٔ A رسیده‌ایم. سپس نوک پرگار را روی نقطهٔ ۱ گذاشته‌ایم و دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از نقطهٔ A می‌گذرد. اگر محل برخورد دایره با محور اعداد را B بنامیم و طول پاره‌خط BC برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، آنگاه نقطهٔ C متناظر با چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۷. الف) هر جفت از اعداد زیر را مقایسه کنید.

- $\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۲},\ \sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۳}$
- $\sqrt{۶}+\sqrt{۱۰},\ \sqrt{۵}+\sqrt{۱۲}$

ب) فرض کنید a، b، c و d چهار عدد طبیعی باشند و

$$۰ < (\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{c}+\sqrt{d}) < ۰/۱.$$

تمام مقادیر ممکن کوچک‌تر از ۳۰ را برای این چهار عدد بیابید.
برای به‌دست‌آوردن جواب‌ها، می‌توانید از یکی از نرم‌افزارهای مناسبی که بر روی «www.webmath.ir» معرفی شده است، کمک بگیرید.

تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۲)

آقای آشتیانی گفت: «درسته!» بعد کنار میز معلم رفت، خودنویسش را از جیب پیراهنش درآورد، لیست کلاس را برداشت و داخل آن یادداشتی نوشت. بعد پرسید: «کسی می‌تونه بگه حاصل $۴^{۴^{۴}}$ چی می‌شه؟» برای اینکه جبران کنم، سریع قلم و کاغذ برداشتم و شروع کردم به محاسبه! ولی بلافاصله آقای آشتیانی گفت: «لازم نیست دستی حساب کنید. این عدد خیلی بزرگه! با استفاده از جئوجبرا محاسبه‌اش می‌کنیم.» بعد رایانه کلاس رو روشن کرد و عدد را داخل محیط جئوجبرا نوشت. حاصل عدد خیلی بزرگی بود!

$$۴^{۴^{۴}} = ۱۳۴۰۷۸۰۷۹۲۹۹۴۲۵۹۷۰۹۹۵۷۴۰۲۴۹۹۸۲۰۵۸۴۶۱۲۷۴۷۹۳۶۵۸۲۰۵۹۲۳۹۳۳$$
$$۷۷۷۲۳۵۶۱۴۴۳۷۲۱۷۶۴۰۳۰۰۷۳۵۴۶۹۷۶۸۰۱۸۷۴۲۹۸۱۶۶۹۰۳۴۲۷۶۹۰۰$$
$$۳۱۸۵۸۱۸۶۴۸۶۰۵۰۸۵۳۷۵۳۸۸۲۸۱۱۹۴۶۵۶۹۹۴۶۴۳۳۶۴۹۰۰۶۰۸۴۰۹۶.$$

آقای آشتیانی پرسید: «حالا کی می‌تونه بگه حاصل $۴^{۴^{۴^{۴}}}$ چی می‌شه؟» یکی از بچه‌ها گفت: «آقا

اجازه! جئوجبرا.» آقای آشتیانی گفت: «نه! جئوجبرا هم نمی‌تونه حاصل این عدد رو حساب کنه!» و شروع کرد به یه سری محاسبات که من چیزی از اونا سر در نیاوردم. نتیجه محاسبات این شد:

$$۴^{۴^{۴^{۴}}} > ۱۰^{۲۴\times ۱۰^{۱۵۲}} > ۱۰^{۱۸\times ۱۰^{۱۵۲}} = \left(۱۰^{۹}\right)^{۲\times ۱۰^{۱۵۲}}.$$

بعد گفت:

> اگه بخواهیم با کلمه میلیارد این عدد رو بنویسیم باید بیشتر از $۱۰^{۱۵۲} \times ۲$ بار کلمه میلیارد رو بنویسیم. مساحت کره زمین تقریباً $۱۰^{۲۱}$ سانتی‌متر مربع است، اگه در هر سانتی‌متر مربع ۱۰ بار بتونیم بنویسیم میلیارد، یعنی روی کره زمین فقط $۱۰^{۲۲}$ بار می‌تونیم بنویسیم میلیارد! فکر می‌کنید برای نوشتن چهار به توان چهار به توان چهار به توان چهار چندتا کره زمین لازمه؟!
>
> یه مثال دیگه می‌زنم. فکر می‌کنید $۱۰^{۲۴\times ۱۰^{۱۵۲}}$ چند میلیون تومان است؟ فرض کنید اسکناس‌های یک میلیون تومانی داشته باشیم و ضخامت هر ۱۰۰ اسکناس یک سانتی‌متر باشد. فاصله زمین تا خورشید تقریباً $۱۰^{۲۲}$ سانتی‌متر است. یعنی می‌توانیم از زمین تا خورشید یک برج $۱۰^{۲۴}$ میلیون تومانی با اسکناس‌های یک میلیون تومانی بسازیم! حالا با این همه پول، چندتا برج تا خورشید می‌تونیم بسازیم؟! حالا فهمیدید این عدد چقدر بزرگه یا نه؟ بچه‌ها این عدد خیــــــــــــــــــــلی بزرگه! خیلی خیلی خیلی بزرگـــــــه!

یکی از بچه‌ها گفت: «آقا اجازه! یعنی $۴^{۴^{۴^{۴}}}$ از $۱۰^{۱۰^{۱۰^{۱۰}}}$ هم بزرگ‌تره؟»

آقای آشتیانی از این سؤال خنده‌اش گرفت طوری‌که نتوانست خودش را کنترل کند و من برای اولین بار سفیدی دندان‌های آقای آشتیانی را دیدم! همه بچه‌ها هم خندیدند! من هم خندیدم. بعد از ۲، ۳ دقیقه، خنده آقای آشتیانی و بچه‌ها تمام شد ولی آقای آشتیانی جوابی به آن سؤال نداد؛ و من نفهمیدم چرا آقای آشتیانی و بچه‌ها خندیدند و خجالت می‌کشیدم که بپرسم چه چیزی خنده‌دار بود!

۸
آمار و احتمال

راهپیمایی اربعین در سال ۱۳۹۳ بیست میلیون نفر تخمین زده شده است. به‌نظر شما این عدد را چگونه به‌دست آورده‌اند؟

گفت‌وگو

غزاله: فائزه جان! لطفاً میانگین سه عدد ۱۶، ۱۷ و ۱۲ را حساب می‌کنی؟

فائزه: وا! خجالت نمی‌کشی تنبل خانم! این را هم بلد نیستی؟

غزاله: [با لبخند] چی شد؟!

فائزه: خب یک دقیقه صبر کن. کامپیوتر که نیستم! دارم جمع می‌کنم.

غزاله: آفرین! ادامه بده. حتماً بعدش هم می‌خواهی تقسیم کنی؟!

فائزه: خب معلومه. اشکالش چیه؟

غزاله: اشکال که چه عرض کنم! نمی‌خواد خودت را به زحمت بندازی. میانگین ۱۵ است.

فائزه: خب تو که قبلاً حساب کرده بودی برای چی منو به زحمت انداختی؟!

غزاله: من بدون محاسبه جواب دادم؛ یا حداقل می‌شود گفت که محاسباتم خیلی راحت‌تر و خلاقانه‌تر بود.

فائزه: چه جوری؟!

غزاله: مگر در تمرین‌های کتاب یاد نگرفتیم که مجموع فواصل اعداد با میانگین برابر صفر است؟

فائزه: خب بله. حالا چه ربطی دارد؟!

غزاله: حدس زدم که میانگین این سه عدد باید ۱۵ باشد. بعد فاصلهٔ میانگین را با سه عدد ۱۶، ۱۷ و ۱۲ حساب کردم:

$$۱۶ - ۱۵ = ۱, \qquad ۱۷ - ۱۵ = ۲, \qquad ۱۲ - ۱۵ = -۳,$$

مجموع سه مقدارِ حاصل، صفر است ($0 = 1 + 2 + 3-$). بنابراین حدس من درست بوده است.

فائزه: غزاله جان! روش شما کارآمد نیست. فرض کن من حدس می‌زدم که میانگین این سه عدد ۱۵/۵ است. حدس است دیگر!! آن وقت چه می‌کردی؟

غزاله: به نکتهٔ خوبی اشاره کردی دوست جان! تفاضل میانگین حدسی را از سه عدد داده شده حساب کن:

$$16 - 15/5 = 0/5, \qquad 17 - 15/5 = 1/5, \qquad 12 - 15/5 = -3/5,$$

مجموع سه مقدار به‌دست آمده را حساب می‌کنیم:

$$-3/5 + 1/5 + 0/5 = -1/5.$$

برای به‌دست آوردن مقدار واقعی میانگین، مقدار حاصل را بر تعداد تقسیم می‌کنیم: $-1/5 \div 3 = -0/5$. حالا $-0/5$ را با میانگین حدسی جمع می‌زنیم: $15/5 + (-0/5) = 15$.

فائزه: وای غزاله تو یک شعبده‌باز واقعی هستی!

غزاله: فائزه جان! کافی است کمی به عقب برگردی و در مورد مفاهیم اولیه که به نظرت بدیهی و خسته کننده می‌رسد کمی بیشتر فکر کنی. برای مثال، وقتی می‌گوییم میانگین سه عدد ۱۵/۵ است یعنی $15/5 \times 3$ باید مجموع سه عدد باشد.

تمرین. با روش غزاله میانگین هر دسته از اعداد زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱۵۹, ۱۶۳, ۱۵۷/۵, ۱۵۵, ۱۶۲

ب) ۱۶/۵, ۲۰, ۱۹, ۱۵, ۱۶, ۱۷/۵

دسته‌بندی داده‌ها و میانگین

۱. با مراجعه به وبگاه «www.webmath.ir» می‌توانید به اطلاعاتِ مربوط به هر یک از بازیکنان حاضر در لیگ جهانی والیبال دسترسی پیدا کنید.

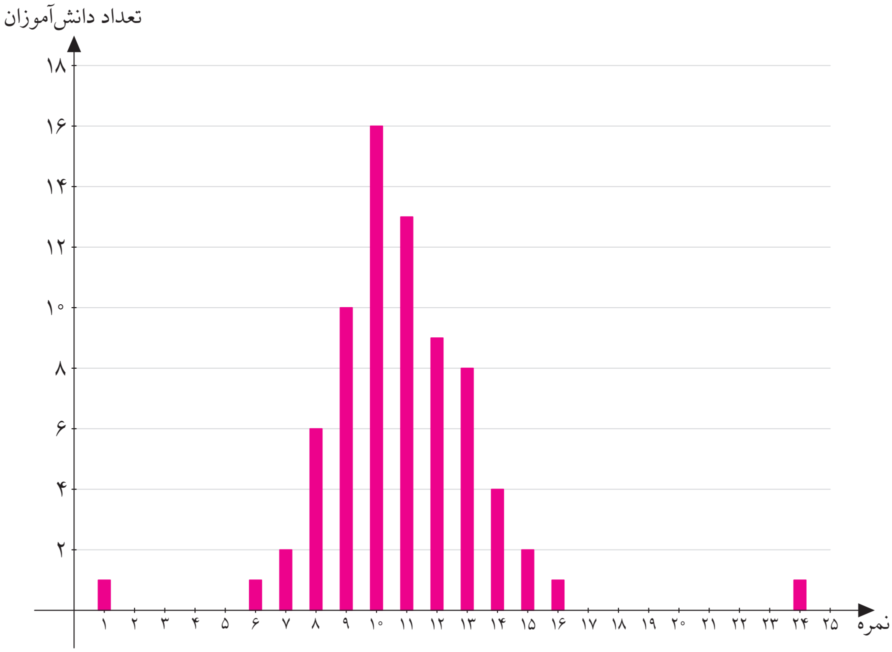
الف) قد والیبالیست‌هایی که بین ۱۹۵ تا ۲۱۰ است را به پنج دستهٔ مساوی تقسیم کنید و سپس جدول فراوانی مربوط به این پنج دسته را تشکیل دهید.

ب) میانگین قد والیبالیست‌ها در کدام دسته قرار دارد؟

ج) نمودار ستونی مربوطه را رسم کنید. در نمودار ستونی رسم شده، کدام دسته بلندترین ارتفاع را دارد و این چه معنایی دارد؟

د) آیا نمودار رسم شده متقارن است؟

۲. نمودار زیر، نمودار نمره‌های تعدادی دانش‌آموز در یک آزمون ۲۵ نمره‌ای است.



الف) تعداد دانش‌آموزان شرکت کننده در آزمون چندتا است؟

ب) نمرهٔ چند دانش‌آموز از میانگین بیشتر است؟

ج) اگر دو نفری را که کمترین و بیشترین نمره را گرفته‌اند، حذف کنیم، میانگین و دامنهٔ تغییرات چگونه تغییر می‌کند؟

د) این ۲۵ نمره را به ۵ دستهٔ مساوی تقسیم کنید. جدول فراوانی تشکیل دهید که شامل فراوانی هر دسته، مرکز دسته و مرکز دسته × فراوانی آن باشد. برای این جدول نمودار ستونی رسم کنید.

هـ) این بار میانگین نمرات را باتوجه‌به جدول فراوانی قسمت قبل به‌دست آورید. میانگین جدید چقدر با میانگین واقعی اختلاف دارد؟

۳. به نظر شما چرا از مرکز دسته برای میانگین‌گیری استفاده می‌کنیم؟

۴. فرض کنید ۱۰۰ نمره بین ۰ تا ۲۰ داریم. این ۱۰۰ نمره را به ۵ دستهٔ مساوی تقسیم کرده‌ایم و برای آنها جدول فراوانی تشکیل داده‌ایم. یک‌بار میانگین واقعی این ۱۰۰ داده را به‌دست می‌آوریم و بار دیگر با استفاده از جدول فراوانی و مرکز دسته، میانگین را به‌دست می‌آوریم. حداکثر اختلاف میانگین واقعی و میانگین به‌دست آمده از جدول فراوانی چقدر می‌تواند باشد؟ با تغییر تعداد دسته‌ها، این اختلاف چگونه تغییر می‌کند؟

۵. در روزنامه‌ای مطلبی در مورد یکی از دانشگاه‌هایی که بدون آزمون دانشجو می‌پذیرد، اعلام شده است. بنابه آمار ۶۸٪ پسرانی که جهت پذیرش در یکی از رشته‌های معماری و مهندسی اقدام می‌کنند در رشتهٔ مورد علاقهٔ خود پذیرفته می‌شوند. درحالی‌که فقط ۵۱٪ از متقاضیان خانم که در رشته‌های معماری و مهندسی خواهان پذیرش در این دانشگاه هستند، پذیرفته می‌شوند.

	دانشکدهٔ معماری		**دانشکدهٔ مهندسی**	
	متقاضیان	پذیرفته‌شدگان	متقاضیان	پذیرفته‌شدگان
خانم	۵۰۰	۱۰۰	۴۰۰	۳۶۰
آقا	۲۰۰	۲۰	۱۰۰۰	۸۰۰

الف) باتوجه‌به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکدهٔ مهندسی پذیرفته شده‌اند؟

ب) باتوجه‌به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکدهٔ معماری پذیرفته شده‌اند؟

ج) توضیح دهید که چگونه ممکن است مطلب روزنامه و مقدارهایی که در قسمت‌های «الف» و «ب» به‌دست آوردید، همگی درست باشند؟

۶. در اواخر قرن نوزدهم میلادی، جنگی بین آمریکا و اسپانیا درگرفت. در این جنگ، در نیروی دریایی آمریکا از هر هزار نفر، نُه نفر جان خود را از دست داده بودند. در همین زمان در شهر نیویورک، آمار مرگ‌ومیر شانزده نفر در هر هزار نفر بوده است. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا زندگی در نیویورک آنقدر پرخطر بوده که رفتن به میدان جنگ بهتر از قدم زدن در خیابان‌های نیویورک بوده است؟!

۷. میانگین درآمد ۱۰ نفر از کارمندان یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲,۹۰۰,۰۰۰ تومان است. آقای پول‌پرست فکر کرد که اگر در این شرکت کار کند، خوشبخت می‌شود! به‌همین‌خاطر به سرعت در این شرکت مشغول به‌کار شد. پس از چند روز آقای پول‌پرست متوجه شد که حقوق مدیرعامل شرکت که ماهیانه بیست میلیون تومان است نیز در میانگین حقوق کارمندان محاسبه شده است.

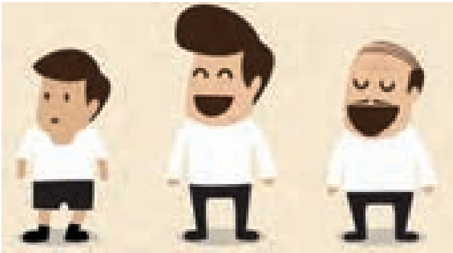
الف) بدون در نظر گرفتن حقوق مدیرعامل، میانگین حقوق افراد دیگر شرکت، ماهانه چقدر است؟

ب) در چه شرایطی نمی‌توان به میانگین اعتماد کرد؟

۸. میانگین سن چهار نفر ۲۲ سال است. سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرد به‌ترتیب ۴۵ و ۷ سال است.

الف) برای سن دو نفر دیگر سه مثال بیاورید.

ب) اگر دو نفر دیگر هم‌سن باشند، سن هر کدام چند سال است؟



۹. فرض کنید میانگین ده عدد که کوچک‌ترین آنها ۳ است، ۷/۵ باشد.

الف) بزرگ‌ترین عدد حداقل چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

ب) بزرگ‌ترین عدد حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۱۰. ده عدد طبیعی متمایز مثال بزنید که بیش از ۵ عدد از این اعداد، از میانگین بزرگ‌تر باشد.

۱۱. الف) سه نقطه روی محور اعداد صحیح بیابید که میانگین آنها صفر باشد. این مسئله چند جواب دارد؟

ب) هر یک از سه نقطهٔ قسمت قبل را ۴ واحد به سمت راست منتقل کنید. میانگین سه نقطهٔ جدید را به‌دست آورید.

ج) پنج نقطه روی محور اعداد بیابید که میانگین آنها ۲/۵− باشد.

د) چهار نقطه غیر صحیح روی محور اعداد بیابید که میانگین آنها ۱۸− باشد.

هـ) اگر میانگین ده عدد دلخواه برابر $\overline{x}$ باشد و هر یک از این ده عدد را با ۷/۲۳ جمع بزنیم، میانگین ده عدد جدید را برحسب $\overline{x}$ به‌دست آورید.

۱۲. در جدول زیر، رابطه‌ای بین اعداد سطر اول، سطر دوم و سطر سوم برقرار است. اگر در سطر اول عدد x را قرار دهیم، در سطر دوم و سطر سوم چه عددی برحسب x قرار می‌گیرد؟ میانگین اعداد سطر اول چه ارتباطی با میانگین اعداد سطر دوم و سوم دارد؟

۶	۱	۲	۴
۷۲	۱۲	۲۴	۴۸
۱۷۲	۱۱۲	۱۲۴	۱۴۸

۱۳. حمید و عماد هر کدام در پنج درس امتحان داده‌اند. میانگین هر یک از آنها در این پنج درس، ۸۰ از ۱۰۰ بوده است. نمرهٔ حمید در چهار درس از عماد بهتر بوده و عماد فقط در یک درس نمرهٔ بهتری از حمید گرفته است. مثالی از نمره‌های حمید و عماد در این پنج درس ارائه دهید.

۱۴. فائزه و غزاله برای به‌دست آوردن میانگین اعداد ۱۷۶۶، ۱۷۶۰، ۱۷۵۵ و ۱۷۵۰، راه‌حل‌های زیر را ارائه داده‌اند. درستی راه‌حل این دو نفر را بررسی کنید و هریک را شرح دهید.

راه‌حل فائزه:

$$\frac{۱۷۵۰ + ۱۷۵۵ + ۱۷۶۰ + ۱۷۶۶}{۴} = \frac{۷۰۳۱}{۴} = ۱۷۵۷/۷۵.$$

راه‌حل غزاله:

$$۱۷۵۰ + \frac{۰ + ۵ + ۱۰ + ۱۶}{۴} = ۱۷۵۰ + \frac{۳۱}{۴} = ۱۷۵۰ + ۷/۷۵ = ۱۷۵۷/۷۵.$$

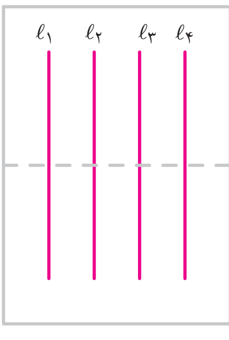
۱۵. هوشنگ در چهار آزمون نمره‌های ۸۵، ۸۰، ۶۵ و ۹۵ را کسب کرده است.

الف) هوشنگ در آزمون بعدی چه نمره‌ای بگیرد تا میانگین نمراتش حداقل ۸۰ بشود؟

ب) اگر هوشنگ سه آزمون دیگر داشته باشد، میانگین این سه آزمون چقدر باشد تا میانگین هفت آزمون هوشنگ حداقل ۸۰ شود؟ برای نمره‌های هوشنگ دو حالت مختلف مثال بزنید.

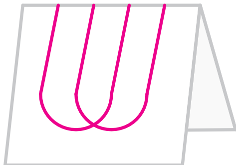
کارگاه بازی ــ حلقهٔ شانس

این بازی، یک بازی دو نفره است. برای این بازی به یک کاغذ که چهار پاره‌خط موازی روی آن رسم شده است، نیاز دارید. ابتدا کاغذ را از وسط تا بزنید.

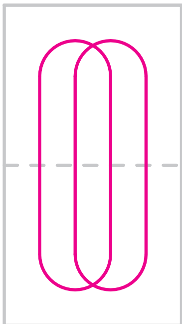


نفر اول دو جفت نیم‌خط انتخاب می‌کند و هر جفت را به هم وصل می‌نماید. برای نمونه نفر اول می‌تواند جفت‌های $\ell_1\ell_3$ و $\ell_2\ell_4$ را انتخاب کند.

نفر اول کاغذ را برمی‌گرداند و به نفر دوم می‌دهد. نفر دوم، بدون اینکه از نحوهٔ اتصال خطوط نفر اول مطلع باشد، دو جفت نیم‌خط از طرف دیگر کاغذ انتخاب می‌کند و هر جفت را به‌هم وصل می‌نماید. برای نمونه نفر دوم می‌تواند جفت‌های $\ell_1\ell_3$ و $\ell_2\ell_4$ را انتخاب کند.



سپس کاغذ را از محل تا باز کنید. اگر دو حلقه تشکیل شده باشد، نفر اول برنده است و در غیر این‌صورت نفر دوم برنده است.



در مثال بالا، نفر اول برنده شده است. زیرا در تصویر آخر دو حلقه مشاهده می‌شود.

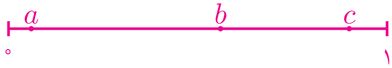
با برگزاری یک قرعه‌کشی و یک لیگ حذفی، نفر برتر کلاس را مشخص کنید. جایزهٔ او افزایش یک نمرهٔ امتحان ریاضی است.

برای دیدن یک بازی شانسی دیگر به «www.webmath.ir» بیایید.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. در بازی حلقهٔ شانس، شانس برد نفر اول چقدر است؟

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، «صفر»، «یک» یا «بین صفر و یک» بودنِ احتمالِ پیشامد داده شده را بررسی کنید. در مواردی که احتمال بینِ صفر و یک است دربارهٔ نزدیک بودن آن به عددهای a، b یا c (که در شکل زیر مشخص شده‌اند) بحث کنید.



الف) پیشامد اینکه در ده سال آینده آب خوراکی جیره‌بندی شود. (به شرط آنکه الگوی مصرف اصلاح نگردد.)

ب) پیشامد اینکه آب در صفر درجهٔ سانتی‌گراد بجوشد.

ج) پیشامد اینکه با سه تکه چوب به اضلاع ۲، ۷ و ۴ سانتی‌متر بتوانیم مثلث بسازیم.

د) پیشامد متولد شدن نوزاد در فصل تابستان

۳. در یک جشن با ۱۳۵ مهمان، هنگام ورود هر فرد یک دستبند به او داده می‌شود. سه نوع دستبند به رنگ‌های بنفش، زرد و آبی و از هر نوع دستبند ۴۵تا وجود دارد. هر رنگ از ۱ تا ۴۵ شماره‌گذاری شده است. در انتهای جشن قرار است یک نفر به‌تصادف انتخاب شود و جایزه‌ای بگیرد.

الف) احتمال اینکه فردی با دستبند زرد و شمارهٔ ۲۴ انتخاب شود، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فردی با دستبند بنفش و شماره‌ای بین ۱۳ و ۲۰ انتخاب شود، چیست؟

ج) احتمال اینکه فردی انتخاب شود که دستبند آبی داشته باشد یا شمارهٔ دستبند او شمارندهٔ ۱۲ باشد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه فردی انتخاب شود که شمارهٔ دستبند او عدد اول نباشد، چیست؟

۴. اعداد ۱ تا ۳۰ روی ۳۰ گوی نوشته شده‌اند و گوی‌ها داخل یک کیسه قرار دارند. یک گوی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) چقدر احتمال دارد عدد نوشته شده روی گویی که انتخاب می‌کنیم، بزرگ‌تر از ۱۵ باشد؟

ب) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده فرد باشد؟

ج) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده عددی اول باشد؟

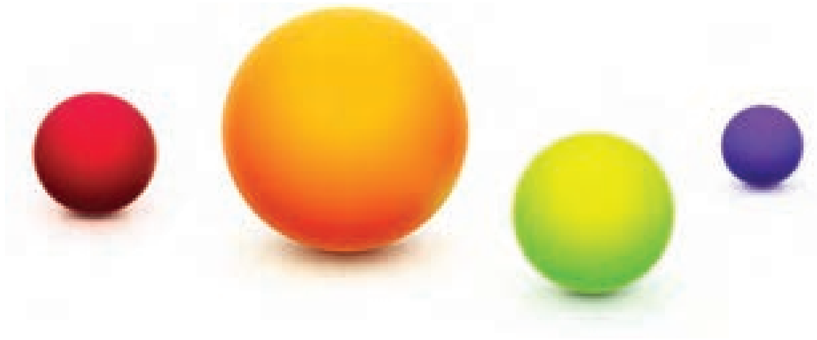
د) آیا می‌توانید مسئله‌ای بسازید که جواب آن با مجموع مقدارهای به‌دست آمده در قسمت «الف»، «ب» و «ج» برابر باشد.

۵. در ظرفی تعدادی مهرهٔ رنگی وجود دارد. اگر بخواهیم یک مهره به‌تصادف از این ظرف انتخاب کنیم، احتمال انتخاب شدن مهرهٔ آبی، قرمز و زرد به‌ترتیب $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱}{۷}$ و $\frac{۱}{۶}$ خواهد بود.

الف) آیا در این ظرف به غیر از رنگ‌های آبی، قرمز و زرد، مهره‌ای با رنگ دیگر وجود دارد؟

ب) اگر پاسخ قسمت «الف» بلی است، آیا می‌توان گفت چند رنگ در این ظرف دیده می‌شود؟

ج) آیا می‌توان گفت در این ظرف از هر رنگ چند مهره وجود دارد؟



۶. الف) در صفحهٔ مختصات همهٔ نقاط صحیحی را مشخص کنید که $0 < x < 4$ و $0 < y < 4$ باشد.

ب) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. اگر نقطهٔ C را به‌طور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از نقطهٔ A و B) انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که ABC یک مثلث باشد؟

ج) فرض کنید $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. دو نقطهٔ متمایز Y و Z را به‌طور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از X) انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که XYZ یک مثلث نباشد؟

۷. امیرحسین به‌تازگی با احتمال آشنا شده است. خواهر بزرگ او غزاله از امیرحسین می‌خواهد یک عدد سه رقمی تصادفی انتخاب کند و آن را تکرار کند تا یک عدد شش رقمی به‌دست آید. برای مثال اگر ۲۴۳ را انتخاب کرد، بنویسد ۲۴۳۲۴۳. غزاله به امیرحسین گفت: اگر تقسیم عدد شش رقمی تو بر ۷ باقی‌مانده‌ای به غیر از صفر داشت، تو برندهٔ بازی هستی و اگر باقی‌مانده صفر بود من برنده‌ام.

الف) چقدر احتمال دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد سه رقمی تصادفی بر ۷ برابر صفر نباشد؟

ب) چقدر احتمال دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد شش رقمی امیرحسین بر ۷ برابر صفر نباشد؟

۸. متن زیر[1] را با دقت بخوانید و دربارهٔ آن با همکلاسی‌های خود بحث کنید.

یک سکه را ده بار می‌اندازیم. هر ده بار پشت می‌آید. شما انتظار دارید در پرتاب یازدهم رو بیاید یا پشت؟

دو حالت وجود دارد:

۱. ایراد از سکه است و بنابراین باید انتظار داشت که بار یازدهم نیز پشت بیاید.

۲. این ده بار به‌طور اتفاقی پشت آمده و بنابراین احتمال پشت یا رو آمدن در بار یازدهم یکسان است.

اما عده‌ای از مردم انتظار دارند که در پرتاب یازدهم رو بیاید. آنها چنین استدلال می‌کنند: «احتمال یازده بار پشت آمدن خیلی کمتر از ده بار پشت آمدن است، پس در پرتاب یازدهم رو می‌آید.» مردم با همین استدلال، گاهی اوقات به زیر درختان صاعقه زده پناه می‌برند و گمان می‌کنند که صاعقه به‌ندرت دو بار بر یک جا اصابت می‌کند. در بمباران‌ها نیز بعضی اشخاص داخل گودال‌های بمب خورده می‌نشینند و تصور می‌کنند که احتمال دو بار اصابت بمب در یک مکان بسیار کم است. روان‌شناسانی که نحوهٔ استدلال اشخاص در مورد احتمالات را بررسی می‌کنند، می‌گویند: «تقریباً هرکس در معرض چنین اشتباهی قرار دارد. این استدلال اگرچه درست نیست، اما با عادت ذهنی آدمی مطابقت دارد.»

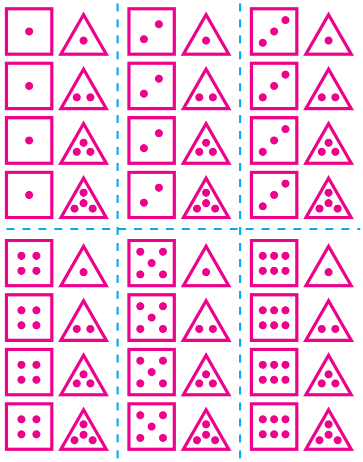
بررسی حالت‌های ممکن

۱. یک تاس شش‌وجهی و یک تاس چهاروجهی را باهم پرتاب می‌کنیم. (روی تاس شش‌وجهی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و روی تاس چهاروجهی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشته شده است.)

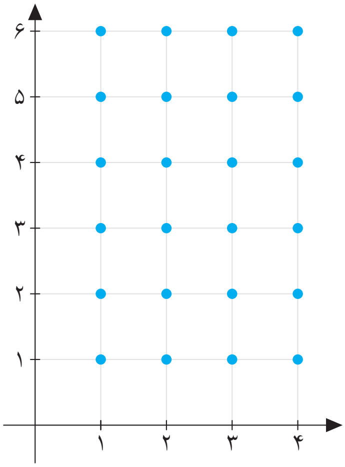
[1] برگرفته از کتاب «فلسفه در عمل» نوشتهٔ ادم مورتون، ترجمهٔ فریبرز مجیدی.

الف) فائزه و غزاله حالت‌هایی را که ممکن است در پرتاب دو تاس دیده شود، به‌صورت زیر نمایش داده‌اند. راه‌حل این دو نفر را توضیح دهید.

راه‌حل فائزه:



راه‌حل غزاله:



ب) تعداد کل حالت‌ها چند تاست؟

ج) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس شش‌وجهی ۴ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ آبی در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

د) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس چهاروجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ زرد در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

هـ) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس شش‌وجهی ۴ باشد، چقدر است؟

و) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس چهاروجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد، چقدر است؟

ز) خانه‌هایی که هم با رنگ آبی و هم با رنگ زرد رنگ شده‌اند چه کسری از کل شکل را نشان می‌دهند؟

ح) آیا می‌توانید با دو تاس بالا مسئله‌هایی بسازید که پاسخ آنها برابر صفر، $\frac{1}{5}$، $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{4}$ باشد؟

۲. دو تاس شش‌وجهی را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را نمایش دهید.

ب) احتمال اینکه حداقل یکی از دو تاس ۶ بیاید چقدر است؟ احتمال اینکه دقیقاً یک تاس ۶ بیاید چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هیچ‌یک از تاس‌ها عدد اول نباشد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه فقط روی یکی از تاس‌ها عدد اول ظاهر شود، چقدر است؟

هـ) احتمال اینکه یک تاس زوج و دیگری فرد بیاید، چقدر است؟

و) احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس عددی اول باشد، چقدر است؟

ز) در صورت وجود، پیشامدهایی را بیان کنید که احتمال وقوع آنها $\frac{1}{36}$، $\frac{1}{7}$، $\frac{1}{4}$، $\frac{3}{4}$ و $\frac{4}{3}$ باشد. برای هر یک از این پیشامدها مسئله بسازید و آنها را در جدول یا نموداری که در قسمت «الف» رسم کرده‌اید، نمایش دهید.

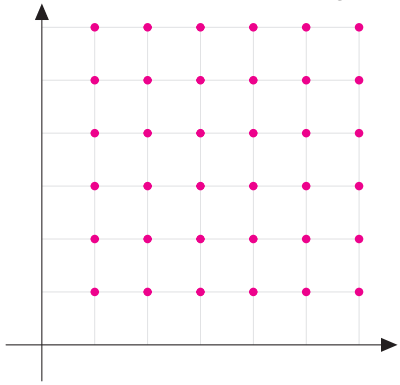
۳. روی یک قطعه چوب شش خطِّ برش طوری انتخاب شده که چوب را به هفت قسمت برابر تقسیم کرده است.

الف) به چند حالت می‌توان این تکه چوب را با دو برش، سه تکه کرد؟

ب) اگر دو خطِّ برش را به‌تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد بتوان با سه قطعه چوب حاصل، مثلث ساخت؟

۴. فائزه و غزاله قسمت «الف» مسئلهٔ قبل را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. دربارهٔ این راه‌حل‌ها بحث کنید.

راه‌حل فائزه:



راه‌حل غزاله:

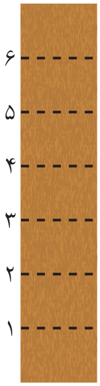
(۱, ۲) (۱, ۳) (۱, ۴) (۱, ۵) (۱, ۶)

(۲, ۳) (۲, ۴) (۲, ۵) (۲, ۶)

(۳, ۴) (۳, ۵) (۳, ۶)

(۴, ۵) (۴, ۶)

(۵, ۶)



۵. یک عدد طبیعی را «فردچهره» می‌نامیم هرگاه همهٔ رقم‌هایش فرد باشد.

الف) چند عدد چهار رقمی فردچهره وجود دارد؟

ب) یک عدد پنج رقمی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد فردچهره باشد؟

ج) ابتدا تعریفی برای عدد «زوج‌چهره» ارائه دهید. سپس پاسخ پرسش قسمت «ب» را این‌بار برای عدد زوج‌چهره به‌دست آورید.

۶. سکه‌ای را سه‌بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل دو بار رو ظاهر شود؟

۷. خانه‌های یک جدول ۲ × ۲ را به‌تصادف با رنگ سیاه یا سفید رنگ می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که هر دو خانهٔ ردیف اول این جدول سفید باشد؟

۸. در درس فیزیک بچه‌ها یاد گرفته‌اند که به کمک منشور می‌توانند طیف نور سفید (هفت رنگی که رنگ سفید ترکیب آنهاست) را تشکیل دهند. سپهر در فکر فرو رفته است که آیا او می‌تواند با استفاده از این هفت رنگ برای خودش و دوستش رمزهایی بسازد. برای مثال (بنفش، نیلی، آبی، سبز، زرد، نارنجی، قرمز) برای آنها معنای خاصی داشته باشد و (نیلی، سبز، زرد، آبی، بنفش، نارنجی، قرمز) معنای دیگری داشته باشد.

الف) سپهر چند رمز هفت رنگی می‌تواند بسازد؟

ب) اگر سپهر بخواهد از این هفت رنگ فقط از چهار رنگ استفاده کند، چند رمز چهار رنگی مختلف با این هفت رنگ می‌تواند بسازد؟

ج) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به‌تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ اول رمز آبی و رنگ دوم سبز باشد چقدر است؟

د) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به‌تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ آبی بین دو رنگ سبز و قرمز باشد چقدر است؟ (لزومی ندارد آبی و سبز یا آبی و قرمز کنار هم باشند.)

۹. طاقه‌هایی از شش رنگ پارچه داریم. می‌خواهیم با سه تکه پارچهٔ هم‌عرض، پرچمی با سه رنگ متفاوت بدوزیم که در آن سه تکه افقی دوخته شوند.

الف) چند پرچم متفاوت می‌توان ساخت؟

ب) فرض کنید یکی از طاقه‌ها قرمز باشد. اگر به‌طور تصادفی سه رنگ برای دوخت پرچم انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد رنگ قرمز در پرچم به‌کار رفته باشد؟

۱۰. شش نامه و سه نفر پیک نامه‌رسان داریم. اگر این شش نامه را به‌تصادف بین سه نفر تقسیم کنیم، چقدر احتمال دارد که به پیک اول هیچ نامه‌ای نرسد؟

۱۱. یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل یک‌بار شش بیاید؟

۱۲. الف) در چند عدد هشت رقمی مجموع رقم‌ها زوج است؟

ب) یک عدد نه رقمی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع رقم‌های این عدد زوج باشد؟

۱۳. مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان تصمیم دارد از چهار نفر از دبیران دبیرستان فرزانگان برای شرکت در جلسهٔ طرح سؤال دعوت کند. نامه‌ای رسمی برای هر یک از این چهار دبیر برجسته نوشته شده و روی چهار پاکت نیز نام این دبیران نوشته شده است. اگر یکی از کارکنان مرکز، نامه‌ها را به‌طور تصادفی در پاکت‌ها قرار دهد،

الف) احتمال اینکه فقط نامهٔ یکی از دبیران در پاکتی اشتباه (که نام ایشان نیست) قرار بگیرد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نامهٔ دو نفر از دبیران در دو پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه نامهٔ چهار نفر دبیر در چهار پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه حداقل یک نامه در پاکت درست قرار بگیرد، چقدر است؟

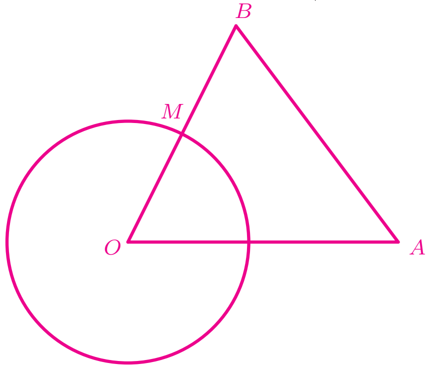
۹
دایره

قوس پیچ‌های راه‌آهن معمولا قسمتی از یک دایره است که قسمت‌های مستقیم بر آن مماس هستند. معمولا شعاع این دایره را بزرگ‌تر از ۶۰۰ متر در نظر می‌گیرند.

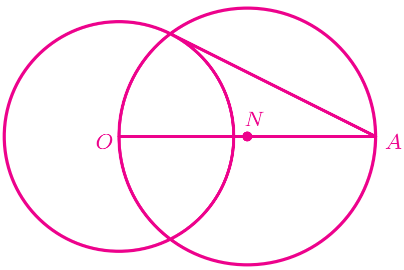
خط و دایره

۱. دایرهٔ c به مرکز O و شعاع r مفروض است. از نقطهٔ A خارج از دایرهٔ c، یک مماس بر دایره رسم کنید.

راه‌حل مرضیه: مثلث متساوی‌الساقین AOB به ساق OA و قاعدهٔ $OB = ۲r$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد OB با دایره را M می‌نامیم. AM بر دایره مماس است.



راه‌حل سمیه: وسط پاره‌خط OA را N بنامید. به مرکز N و شعاع ON دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خطی که A را به محل برخورد دو دایره وصل می‌کند، بر دایره مماس است.



الف) درستی روش‌های سمیه و مرضیه را بررسی کنید.

ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای رسم خط مماس از یک نقطه خارج از دایره، ارائه دهید؟

۲. از نقطهٔ A خارج از دایره‌ای به مرکز O، دو مماس AM و AN بر دایره رسم شده است.

الف) ثابت کنید OA عمودمنصّف MN است.

ب) چه شرطی به مسئله اضافه کنیم تا MN عمودمنصّف OA باشد؟

۳. ثابت کنید اگر خطی دو دایرهٔ هم‌مرکز را قطع کند، دو پاره‌خط که بین دو دایره قرار می‌گیرند، باهم برابرند.

۴. در محور زیر، هر واحد به‌اندازهٔ $\sqrt{۲}$ است. می‌خواهیم عدد ۱ را روی این محور مشخص کنیم.

آرش و سهراب مسئلهٔ بالا را این‌گونه حل کرده‌اند:

<u>راه‌حل آرش</u>: نقطهٔ صفر را P و نقطهٔ $-\sqrt{۲}$ را C می‌نامیم. به مرکز نقطهٔ C و شعاع CP دایره‌ای رسم می‌کنیم. از نقطهٔ C خطی عمود بر محور اعداد رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های Q و T قطع کند. از نقطهٔ C عمودی بر خط PQ رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد را M می‌نامیم. به مرکز P و شعاع PM دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ این دایره محور اعداد را در نقاط ۱ و ۱− قطع می‌کند.

<u>راه‌حل سهراب</u>: به مرکز $-۳\sqrt{۲}$ و شعاع $\sqrt{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ صفر مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و محل برخورد آن مماس با دایره را P می‌نامیم. نقطهٔ صفر را O می‌نامیم و با استفاده از رسم عمودمنصف، ابتدا وسط پاره‌خط OP (نقطهٔ N) و سپس وسط پاره‌خط ON (نقطهٔ M) را مشخص می‌کنیم. اکنون دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع OM رسم می‌کنیم؛ این دایره محور اعداد را در نقاط ۱ و ۱− قطع می‌کند.

الف) درستی روش‌های آرش و سهراب را بررسی کنید.

ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای این مسئله ارائه دهید؟

۵. در یک دایره وتری به طول ۸ مفروض است. اگر طول بزرگ‌ترین وتر این دایره ۱۲ باشد، آنگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر مفروض چقدر است؟

۶. دو مسئلهٔ زیر چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟ هریک را حل کنید.

<u>مسئلهٔ اول</u> : ثابت کنید مرکز دایره از دو وتری که باهم برابرند، فاصلهٔ یکسان دارد.

<u>مسئلهٔ دوم</u> : ثابت کنید دو وتری که از مرکز دایره فاصلهٔ یکسان دارند، باهم برابرند.

تمرین‌های بعدی این بخش را با کمک مسئلهٔ اول و مسئلهٔ دوم تمرین قبل حل کنید و در هر مورد مشخص کنید که از مسئلهٔ اول استفاده کرده‌اید یا مسئلهٔ دوم.

۷. وترهای AC و BD یکدیگر را داخل دایره‌ای به مرکز O، در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. اگر AB قطر دایره باشد و $MO \perp AB$، آنگاه ثابت کنید $AC = BD$.

۸. دو وتر برابر و غیر متقاطع AB و CD در دایره‌ای به مرکز O مفروض‌اند. اگر امتداد این دو وتر یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، ثابت کنید OM نیم‌ساز زاویهٔ AMC است.

۹. ثابت کنید در یک دایره پاره‌خط‌های جداشده روی دو وتر متقاطع و مساوی، باهم برابرند.

۱۰. نقطه‌های A، B و C روی یک دایره قرار دارند. اگر نیم‌ساز زاویه‌های BAC و ACB یکدیگر را در مرکز دایره قطع کنند، ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

زاویهٔ مرکزی و زاویهٔ محاطی

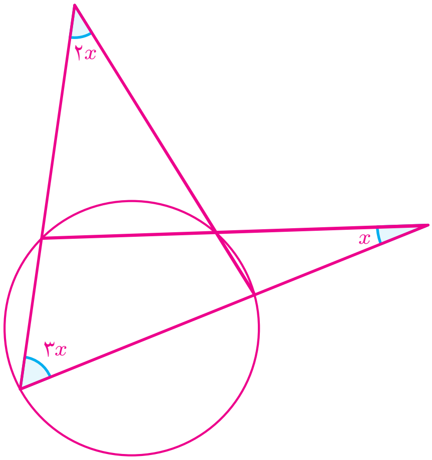
۱. در دایره‌ای به شعاع r، دو وتر AB و AC مفروض‌اند. در هر یک از حالت‌های زیر بررسی کنید که AC بر AB عمود است یا خیر؟

الف) $AB = ۸,\ AC = ۱۵,\ r = ۱۷$ ب) $AB = ۲۴,\ AC = ۹,\ r = ۲۶$

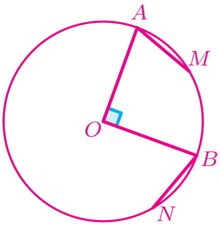
ج) $AB = ۱۰,\ AC = ۲۴,\ r = ۱۳$

۲. در دایرهٔ c به مرکز O، AB قطر و M وسط کمان AB است. نقطهٔ P روی قطر DM طوری قرار دارد که $MP = MB$. اگر K محل برخورد امتداد BP با دایره باشد، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ KMO چقدر است؟

۳. در شکل زیر مقدار x چقدر است؟

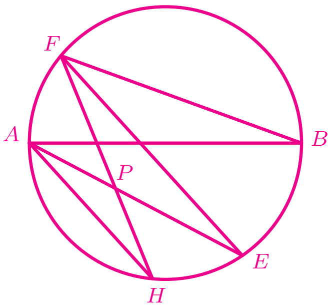


۴. در دایرهٔ زیر دو شعاع OA و OB برهم عمودند. اگر طول کمان‌های AM و BN برابر باشند، آنگاه ثابت کنید امتداد پاره‌خط‌های AM و BN برهم عمودند.



۵. الف) ثابت کنید کمان‌های محصورِ بین دو وتر موازی، باهم برابرند.

ب) در دایرهٔ زیر، وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $F\hat{B}A = ۲۰^\circ$، آنگاه زاویهٔ HPE چند درجه است؟

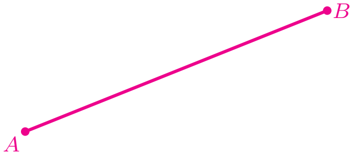


۶. الف) چرا جملهٔ زیر درست نیست؟ سعی کنید آن را اصلاح کنید.

اگر کمان‌های محصورِ بین دو وتر برابر باشند، آن دو وتر موازی‌اند.

ب) رئوس چهارضلعی $ABCD$ روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. اگر قطرهای $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند و OM نیم‌ساز زاویهٔ CMD باشد، آنگاه ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

۷. الف) در شکل زیر، همهٔ نقاطی در صفحه، مانند C، را مشخص کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد به‌طوری‌که $\widehat{C} = ۹۰^\circ$.



ب) کدام‌یک از مثلث‌هایی که در «الف» ساخته‌اید متساوی‌الساقین هستند؟

۸. مژگان و فاطمه دو مسئلهٔ زیر را این‌گونه حل کرده‌اند:

مسئلهٔ اول. ثابت کنید اگر در یک مثلث، میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

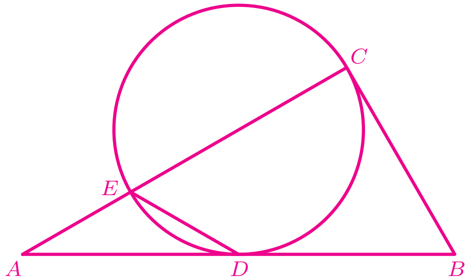
راه‌حل مژگان: فرض کنید در مثلث ABC نقطهٔ M روی ضلع BC باشد به‌طوری‌که سه پاره‌خط AM، BM و CM باهم برابر باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم زاویهٔ A قائمه است. برای این کار دایره‌ای به مرکز M و شعاع AM رسم می‌کنیم. چون BC قطر این دایره است پس $\widehat{A} = ۹۰^\circ$.

مسئلهٔ دوم. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

راه‌حل فاطمه: فرض کنید در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم میانه وارد بر BC، نصف آن است. می‌دانیم که از رئوس هر مثلث، دایره‌ای می‌گذرد. اگر این دایره را رسم کنیم چون کمان روبه‌رو به $\widehat{A}$ برابر ۱۸۰° است پس مرکز دایره روی BC قرار دارد که اگر مرکز را به نقطهٔ A وصل کنیم، اثبات کامل می‌شود.

۹. در شکل زیر، EC قطر دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. اگر $\widehat{ED} = ۶۰^\circ$، آنگاه ثابت کنید:

$$AD = BC = \frac{۱}{۲}AB.$$



۱۰. سه نقطهٔ A، B و C روی یک دایره چنان قرار دارند که دو وتر AB و BC برابرند. اگر نقطهٔ D را روی این دایره چنان انتخاب می‌کنیم که $ABCD$ یک چهارضلعی باشد،

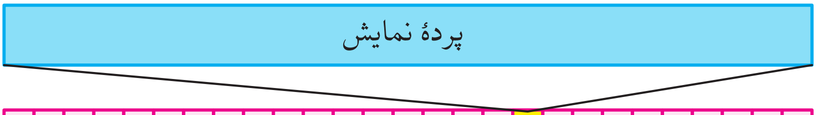
الف) آیا می‌توان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AB و BC فاصلهٔ یکسان دارد؟ اگر پاسخ خیر است چه شرطی به مسئله اضافه کنیم که بتوان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AB و BC فاصلهٔ یکسان دارد.

ب) آیا می‌توان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AD و CD فاصلهٔ یکسان دارد؟ اگر پاسخ خیر است چه شرطی به مسئله اضافه کنیم که بتوان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AD و CD فاصلهٔ یکسان دارد.

۱۱. روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB دو کمان مساوی BC و CD جدا شده‌اند. خط عمود بر CD که از نقطهٔ D خارج شده است، AC را در نقطهٔ F قطع می‌کند. اگر محل برخورد AC و BD نقطهٔ E باشد، آنگاه ثابت کنید نقطهٔ F وسط AE است.

۱۲. کاظم برای دیدن یک فیلم خارجی به سینما رفته بود. او که به زبانِ فیلم تسلط نداشت، مجبور بود زیرنویس فیلم را بخواند. صندلی کاظم (همان‌طور که در تصویر صفحهٔ بعد می‌بینید) نزدیک پردهٔ نمایش فیلم بود و او برای خواندن هر خطِّ زیرنویس، باید سرش را به‌اندازهٔ فاصلهٔ دو کتفش (از راست به چپ) می‌چرخاند!

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر از صندلی کاظم دو پاره خط به دو سر پردهٔ نمایش رسم کنیم، زاویه‌ای در حدود ۱۶۰ درجه ساخته می‌شود.



۱۸	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۶	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۴	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۳	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۹	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۸	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۷	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۶	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۴	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۳	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۲	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷
۱	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷

کاظم اواسط فیلم گردن‌درد گرفت. او فیلم را نیمه‌کاره رها کرد و از سینما بیرون آمد ولی دلش می‌خواست بداند آخر فیلم چه می‌شود.

کاظم تصمیم گرفت این‌بار بلیت فیلم را اینترنتی تهیه کند تا بتواند خودش صندلی‌اش را انتخاب کند. او با خود فکر کرد که اگر از روی صندلی حداکثر زاویهٔ ۶۰ درجه با دو سر پردهٔ سینما داشته باشد، می‌تواند به‌راحتی فیلم را ببیند.

در شکل بالا، کاظم چه صندلی‌هایی را انتخاب کند تا خواسته‌اش برآورده شود؟

کاربردهایی از دایره

۱. در یک دایره، وتر AB بر قطر CD در نقطهٔ M عمود است. ثابت کنید:

$$AM^2 = CM \times DM.$$

۲. عدد $\sqrt{\sqrt{2}}$ را روی محور نشان دهید.

راهنمایی: می‌توانید از مسئلهٔ قبل کمک بگیرید.

۳. جاده و راه‌آهن هرگز یک‌باره نمی‌پیچند بلکه از یک جهت به جهت دیگر به ملایمت و روی قوسی که شکستگی نداشته باشد، تغییر مسیر می‌دهند. این قوس، معمولاً قسمتی از یک دایره است که قسمت‌های مستقیم جاده، بر آن مماس هستند. (تصویر ابتدای این فصل را ببینید.)

معمولاً شعاع قسمت منحنی جاده را بزرگ می‌گیرند که در مورد راه‌آهن کمتر از ۶۰۰ متر نیست و در بعضی موارد به ۱۰۰۰ و حتی ۲۰۰۰ متر می‌رسد.

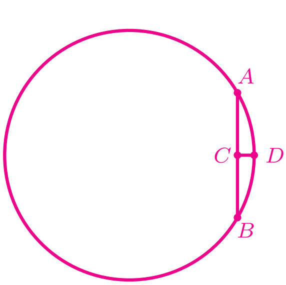
الف) با استفاده از تمرین ۱ روشی برای یافتن مرکز قوس یک جادهٔ کوهستانی بیابید. (فرض کرده‌ایم قوس جاده، قسمتی از یک دایره است.)

ب) در برخی جاده‌ها پیچ‌های خطرناکی وجود دارند که در ایران به «پیچ‌های غریب‌کُش» معروف‌اند. ویدئوی یک پیچ غریب‌کُش در «www.webmath.ir» قرار داده شده است. دربارهٔ نحوهٔ اصلاح این پیچ، در کلاس گفت‌وگو کنید.

۴. می‌دانیم عمیق‌ترین قسمت اقیانوس اطلس در گودال پورتوریکو به عمق ۸۶۰۵ متر است و عرض اقیانوس اطلس در نزدیکی خط استوا تقریباً $\frac{۱}{۴}$ محیط دایره‌ای است که خط استوا روی آن قرار دارد.

می‌خواهیم بدانیم کف اقیانوس اطلس چگونه است: محدب، مقعر یا مسطح؟

فرض کنید کف اقیانوس اطلس مسطح باشد. اگر دایرهٔ زیر را خط استوا در نظر بگیریم و نقاط A و B ابتدا و انتهای اقیانوس اطلس روی این دایره باشند، حداکثر عمق اقیانوس اطلس برابر با طول پاره‌خط CD است. اگر شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیریم، طول تقریبی پاره‌خط CD (برحسب کیلومتر) با دوتا از اعداد زیر برابر است. آن دو عدد کدام‌اند؟



الف) $۶۴۰۰ - ۳۲۰۰\sqrt{۳}$

ب) $۶۴۰۰ + ۳۲۰۰\sqrt{۳}$

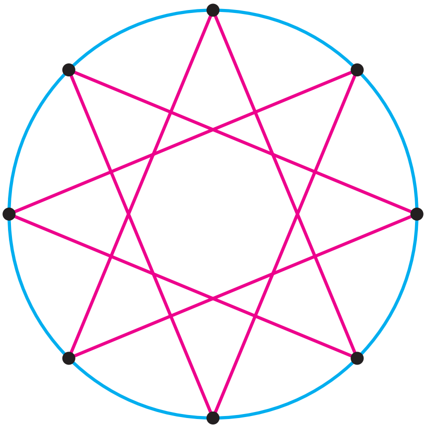
ج) ۸/۶۰۵

د) ۸۵۷/۴۳۷

اکنون باتوجه‌به تخمینی که برای طول پاره‌خط CD به‌دست آمد، تعیین کنید که کف اقیانوس اطلس، محدب است یا مقعر یا مسطح؟

۵. اگر n نقطه روی دایره، کمان‌های برابر ایجاد کرده باشند و آنها را mتا در میان به یکدیگر وصل کرده باشیم، شکل حاصل چند محور تقارن دارد؟

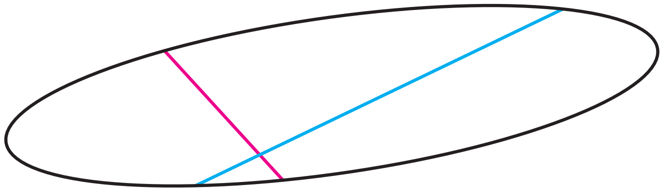
برای مثال، در شکل زیر، هشت نقطه روی دایره کمان‌های برابر ایجاد کرده‌اند ($n = ۸$). این نقاط دوتا در میان به یکدیگر وصل شده‌اند ($m = ۲$).



۶. در یک دایره نقطهٔ دلخواه M روی وتر دلخواه AB مفروض است. چند وتر برابر با AB از نقطهٔ M می‌گذرد؟

۷. پروژه. یک شکل را محدبِ بسته می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطهٔ P و Q که درون شکل باشند، پاره‌خط PQ نیز کاملاً درون آن شکل قرار گیرد.

پاره‌خطی که دو نقطه روی یک شکل محدب بسته (مانند شکل زیر) را به‌هم وصل می‌کند، وتر می‌نامیم. در شکل زیر، دو پاره‌خط آبی و صورتی، وتر هستند.



اگر همهٔ وترهایی که از یک نقطه می‌گذرند باهم برابر باشند، آن نقطه را نقطهٔ هم‌وتری می‌نامیم. برای مثال، در یک دایره، تمام وترهایی که از مرکز دایره می‌گذرند باهم برابرند؛ یعنی مرکز دایره، نقطهٔ هم‌وتری دایره است.

الف) چند نوع شکل محدب بسته‌ای را که نقطهٔ هم‌وتری دارند، بیابید.

ب) آیا شکل محدب بسته‌ای با دو نقطهٔ هم‌وتری وجود دارد؟

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

بیتی از حافظ

دل چو پرگار به هر سو دَوَرانی می‌کرد

واندر آن دایره، سرگشتهٔ پابرجا بود

کتاب‌نامه

[۱] محمد حسین احمدی و نرگس اخلاقی‌نیا، *خودآموز هندسه ۱* ، *جلد اول*، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۹۲.

[۲] محمد حسین احمدی، سعید صدری و علیرضا تاج‌بخش، *ریاضی تکمیلی سال اول دوره راهنمایی*، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.

[۳] *ریاضیات کانگورو ۷ و ۸* ، ترجمه مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.

[۴] شه‌پان النسکی، *در پی فیثاغورث*، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۴.

[۵] مارتین ایگنر و گونتر تسیگلر، *کتاب اثبات*، ترجمه سیامک کاظمی، انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ۱۳۷۹.

[۶] دیوید برتن، *نظریه مقدماتی اعداد*، ترجمه محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۱.

[۷] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، *مسئله‌های تاریخی ریاضیات*، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.

[۸] *ریاضیات کانگورو ۹ و ۱۰* ، ترجمه بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.

[۹] امیرحسین حمداوی، محسن کیهانی، علی قصاب و علیرضا شیخ‌عطار، *ریاضیات پایه دوم راهنمایی*، نشر سمپاد، تهران، ۱۳۸۷.

[۱۰] ارشک حمیدی، *هندسه از ابتدا تا ...*، جلد اول، نشر علوم ریاضی ره‌آورد، تهران، ۱۳۹۴.

[۱۱] الکساندر پترویچ دوموریاد، *در قلمرو ریاضیات*، ترجمه پرویز شهریاری، موسسه انتشارات امیرکبیر، چاپ دوم، تهران، ۱۳۶۳.

[۱۲] عبدالرضا زارع شحنه، *ریاضی تکمیلی سال دوم دوره راهنمایی*، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.

[۱۳] پرویز شهریاری، *۹۹ مسئله ریاضی*، موسسه چاپ سوره، تهران، ۱۳۷۹.

[۱۴] دمیتری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، *محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)*، ترجمه ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.

[۱۵] علی قصاب، *ریاضیات تکمیلی سال اول دبیرستان*، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.

[۱۶] استیون ج.کرانتس، *فنون مسئله حل کردن*، ترجمه مهران اخباری‌فر، انتشارات فاطمی، چاپ سوم، تهران، ۱۳۸۴.

[۱۷] بوریس آناستاسیویچ کوردمسکی، *اندیشه ریاضی*، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۱.

[۱۸] مارتین گاردنر، *معماهای ابوالهول*، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.

[۱۹] ادوین مویز و فلوید دانز، *هندسه*، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.

[۲۰] راجر نلسن، *اثبات بدون کلام*، ترجمه سپیده چمن آرا، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.

[۲۱] تارل هاف، *چگونه با آمار دروغ می‌گویند*، ترجمه مهدی تقوی، نشر آفتاب، تهران، ۱۳۷۱.

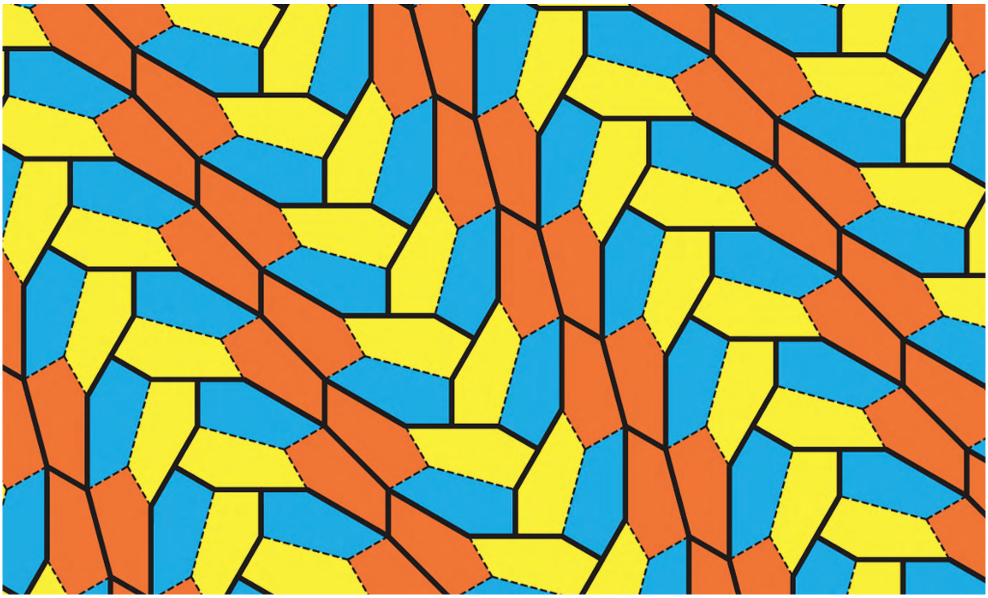
[22] Martin Erickson, *AHA Solutions*!, MAA, 2009.

[23] R. Hatcher and G. Gilbert, *Mathematics Beyond the Numbers*, Kendall Hunt, 2012.

دربارهٔ طرح روی جلد

کشور ایران با تاریخ و تمدن کهن در هنر و صنعت از دیرباز به عنوان بستری مناسب برای صنعت کاشی و هنر کاشی‌کاری مطرح بوده است. قدمت این صنعت و هنر به بیش از ۳۲۰۰ سال پیش باز می‌گردد. تا سال‌های سال هنر و ریاضی کاشی‌های ایرانی زبانزد خاص و عام بود؛ اما در سال‌های اخیر این ایرانی‌ها نبودند که روش‌های کاشی‌کاری را توسعه داده‌اند!

طرح روی جلد این کتاب، الگویی از تصویر کاشی‌کاری زیر است که اخیرا کشف شده است. برای مطالعه بیشتر، تمرین ۱۳ صفحه ۵۰ از فصل سه را ببینید.



معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند

نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران،

خیابان سپهبد قرنی، نبش سمیه، وزارت آموزش و پرورش، ساختمان

مرحوم علاقمندان، طبقهٔ هفتم، کدپستی ۵۸۱۱۱-۱۵۹۹۹ و یا به نشانی رایانامهٔ

sampad@medu.ir ارسال نمایند.

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان