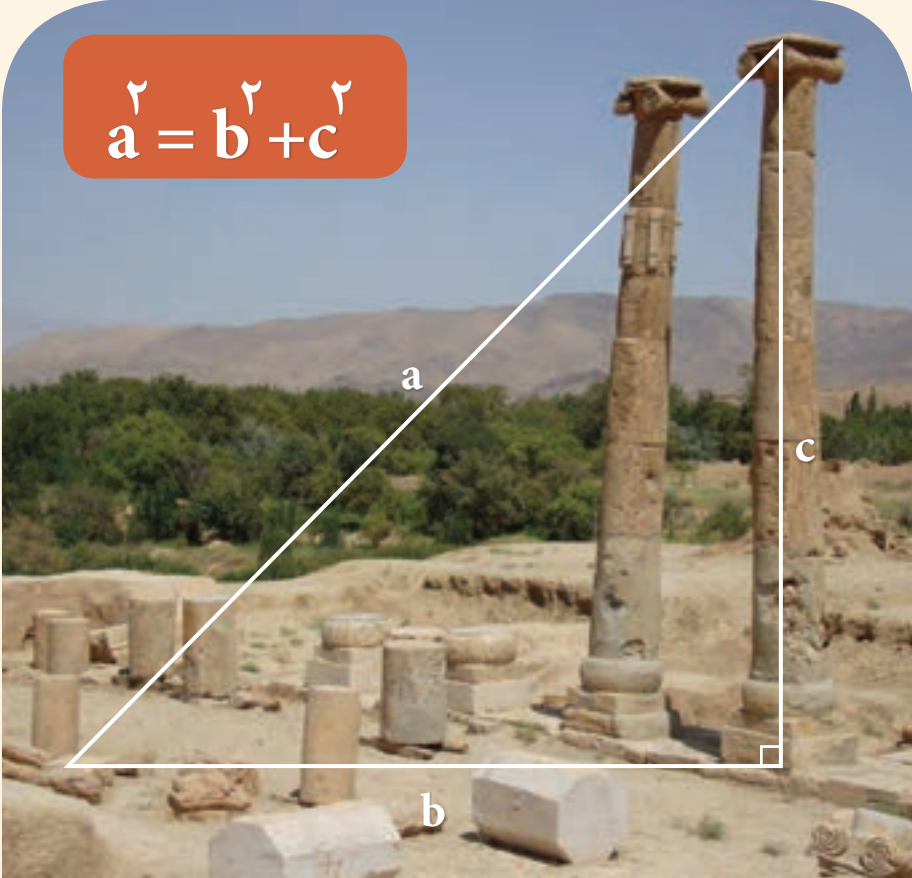




عبارت‌های جبری

$$a^2 = b^2 + c^2$$



عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال رابطه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، تک جمله ای^۱ (یک جمله ای) می نامیم.
عبارت های زیر همگی تک جمله ای هستند.

$$7, x, 5x^3, -\sqrt{3}a^3x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{v}$$

و عبارت های زیر تک جمله ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه قسمت های حرفی دو یا چند تک جمله ای یکسان باشند، به آنها تک جمله ای های متشابه گفته می شود؛ به عنوان مثال تک جمله ای های $4x^2y$ و $\frac{5}{4}x^2y$ و $-3x^2y$ متشابه اند، اما تک جمله ای های $3x^2$ و $3x$ متشابه نیستند.

۱- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

$$۱) 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$۲) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$۳) (-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 =$$

$$۴) \left(\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{v}a^2c^5\right) =$$

$$۵) 2(5xy^4)^2(-2x^5y^2) =$$

$$۶) (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) =$$

در تک جمله ای $5a^2x^2y$ ، توان متغیر a برابر با ۲ است؛ بنابراین درجه این تک جمله ای نسبت به متغیر a ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به x ، ۳ و درجه نسبت به y ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با $4 = 3 + 1$ تعریف می کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

تک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	۲+۴=۶
$5x^4y^3z^2$				
$-12x^2u$				
$\frac{3}{5}$				

تک جمله‌ای‌های $3x^2y^3$ و $5x^2y^2$ را که متشابه نیستند، تک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم. چنانچه تعدادی تک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند تک جمله‌ای یا جمع جبری چند تک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند:

$$4x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{2}axy^2 - axy, \quad 3x^4$$

در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای $-2xy^2 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجه تک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۴ است. معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف) $3x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 3x^2 - 2x + 5$

ب) $-3bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2$ ج) $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^3y - 4$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-5a^2 - 3ax + x^2 - (4x^2 + 5ax - 3a^2)$

ب) $-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)]$

ج) $(4x + 5x^2)(x^2 - x + 1) =$

د) $(x + x^2)(x^2 + x^2 + 1) =$

هـ) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x^2 - 2) =$

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x ، جدول زیر را کامل کنید :

x	x^2	$6x$	$x^2 + 6x + 9$	$(x+3)^2$
۰				
۵				
$\frac{3}{2}$				

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری $x^2 + 6x + 9$ مقایسه کنید.

$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = \text{_____}$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل

یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$ یک اتحاد است.

برابری $3x - 3 = x + 1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$ ، به دست آورید.

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید.

همان طور که می‌دانید، به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

$$\text{ب) } (5x+2)^2 = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad = 25x^2 + 20x + 4$$

$$\text{ج) } (a+b)^2 = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad = a^2 + 2ab + b^2$$

۳- با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است، به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

– جمله اول سمت راست برابری؛ یعنی $25x^2$ ، چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟

– جمله دوم سمت راست برابری؛ یعنی $20x$ ، چه رابطه‌ای با $5x$ و 2 دارد؟

– جمله سوم سمت راست برابری؛ یعنی 4 ، چه رابطه‌ای با 2 دارد؟

عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم. برای سرعت بخشیدن

به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد :

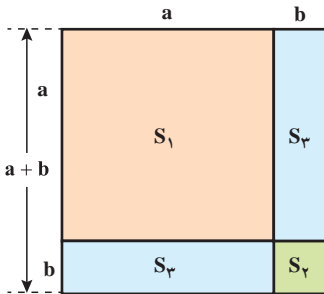
$$(5x + 2)^2 = (5x)^2 + \underbrace{2 \times 5x \times 2}_{\text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله}} + 2^2$$

\swarrow جمله اول \swarrow جمله دوم \swarrow مربع جمله اول \swarrow مربع جمله دوم

برای هر دو عدد مثبت a و b ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مقابل را نشان دهید.



$$\text{مساحت کل شکل} = (a+b)^2 = S_1 + 2S_2 + S_4$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) =$

ب) $(3-5x)^2 =$

ج) $(a-b)^2 =$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده

در سمت چپ آنها را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

کار در کلاس

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(2x+1)^2 =$

ب) $(4a+3b)^2 =$

ج) $(x^2 - \frac{1}{4})^2 =$

د) $(2xy - \frac{1}{4}x^3)^2 =$

هـ) $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 =$

و) $(5 - 2\sqrt{2})^2 =$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

$$(\dots + 3b^2)^2 = 4a^2 + \dots + 9b^4$$

مربع جمله دوم دو برابر مربع حاصل ضرب جمله اول
 جمله دوم جمله اول
 جمله دوم جمله اول
 جمله دوم جمله اول
 جمله دوم جمله اول

$$2a = \text{جمله اول} \Rightarrow (2a)^2 = 4a^2 = \text{مربع جمله اول}$$

$$12ab^2 = 2(2a)(3b^2) = \text{دو برابر حاصل ضرب جمله ها}$$

$$(2a+3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$$

در نتیجه داریم :

الف) $(1+b)^2 = 1 + \dots + b^2$

ب) $(xy - \frac{1}{4})^2 = \dots - \dots + \frac{1}{4}$

ج) $(\dots - \dots)^2 = x^4 - \dots + \frac{1}{x^4} (x \neq 0)$ د) $(\dots - \dots)^2 = 36x^2 - 12xy + \dots$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها خوانده‌اید.

حاصل ضرب

$$a(b+c) = ab+ac$$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای $ab+ac$ را به ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده ایم:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ ab+ac=a(b+c) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{(ب.م.م) (بزرگ‌ترین مقسوم علیه عامل) مشترک} \end{array}$$

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف) $8x^2 + 12x = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{(ب.م.م)} = 4x$
 $= 4x(2x + 3)$ (با توجه به خاصیت پخش)

ب) $6a^4 - 18a^2 =$ ج) $7x^4 - 14x^2 + 21x^2 =$

د) $5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y =$

کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای $a^2 + 2ab + b^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^2$ بنویسیم، در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده ایم؛ زیرا:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) \end{array}$$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = (x+3)(x+3)$
 $\quad \quad \quad \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$
 مربع کامل (x) (3) مربع کامل $2(x)(3)$ مربع کامل

ب) $x^2 - 4x + 4 = (\quad - \quad)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

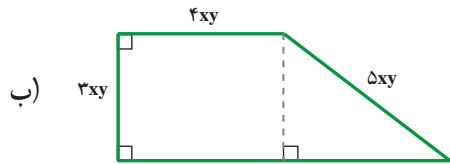
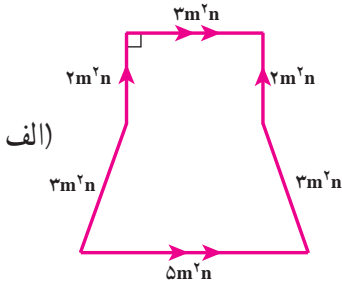
ج) $n^4 - 10n^2 + 25 = (\quad - \quad)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

د) $4ax^2 + 24axy + 18ay^2 = 2a(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 2a(\quad + \quad)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad \text{(ب.م.م)} = 2a$

۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^3 - (\frac{1}{2}m)^2(-2m)^3$ ب) $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$
 ج) $(x^m - 1)(x^m - 1)$ د) $x - [(y-x) - (y-1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(5y - 3x)^2 =$ ب) $(-3a^2 - a)^2 =$
 ج) $(8x - \frac{1}{3})^2 =$ د) $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{3}) + (\frac{3}{3})^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ ب) $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2 + 8x^2 + 8x$ ب) $3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2$
 ج) $a(x+1) + b(x+1)^2$ د) $a^3 - 2a^2 + a$
 هـ) $x^2y^2 - 4xy + 4$ و) $25x^2 + 30x^2 + 9x^2$

۶- با تبدیل b به $-b$ در اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\underbrace{(a + (-b))^2}_{(a-b)^2} =$$