فصل ۲ـ تابع

درس ۱ توابع ثابت، چند ضابطه‌ای و همانی

درس ۲ توابع پلکانی و قدرمطلق

درس ۳ اعمال بر روی توابع

اجرای طرح کانال اتصال زرینه‌رود به سیمینه‌رود / احیای دریاچه ارومیه

عکس : بیژن شیخ‌علیزاده

درس ۱

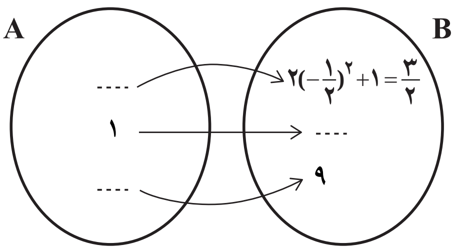
توابع ثابت، چندضابطه‌ای و همانی

در سال گذشته با مفاهیم تابع، دامنه و برد آشنا شدیم.

فعالیت

اگر $A=\{-\frac{1}{2},1,2\}$ و $\begin{cases} f:A\to B \\ f(x)=2x^2+1 \end{cases}$ باشد، با توجه به نمایش‌های خوانده‌شده در سال قبل برای بیان یک رابطه :

الف. در نمایش پیکانی با توجه به ضابطهٔ f و مجموعهٔ A، داریم :

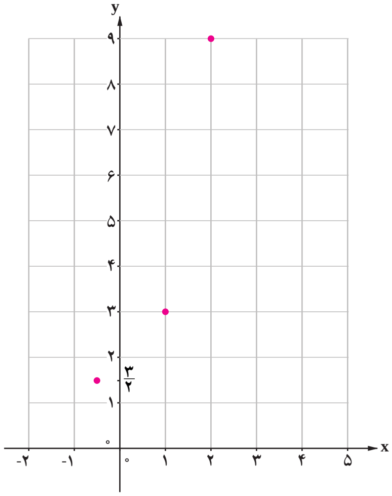


بنابراین برد f مجموعهٔ $B=\{\quad,\quad,\quad\}$ است. نمایش پیکانی رابطهٔ فوق بیانگر یک تابع است؛ زیرا از هر عضو مجموعهٔ A، دقیقاً .... خارج شده است.

ب. نمایش زوج‌مرتبی مثال بالا به‌صورت $f=\{(\quad,\frac{3}{2}),(1,\quad),(\quad,9)\}$ است که :

$D_f=\{\quad,1,\quad\}$ و $R_f=\{\frac{3}{2},\quad,9\}$

مجموعه‌های دامنه و برد تابع f را تشکیل می‌دهند.



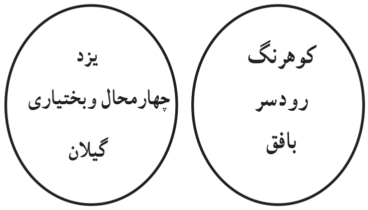
ج. نمایش مختصاتی آن نیز چنین است : تصویر این نقاط بر روی محور xها؛ یعنی $\{\quad,1,\quad\}$ دامنهٔ تابع و تصویر همین نقاط بر روی محور yها $\{9,\quad,\frac{3}{2}\}$ برد تابع نامیده می‌شود.

کار در کلاس

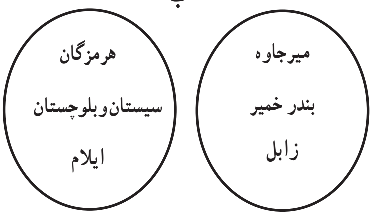
ابتدا با پیکان‌های مناسب رابطهٔ خواسته‌شده را کامل کنید.

۱. رابطه‌ای که به هر استان، شهری از خود استان را نسبت می‌دهد.

الف

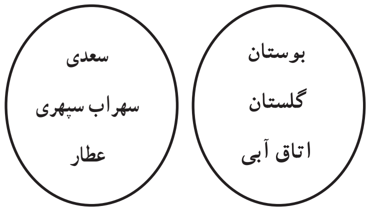


ب

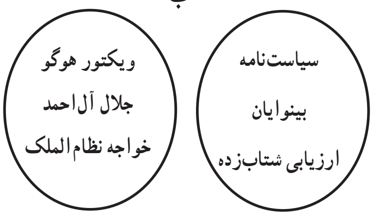


۲. رابطه‌ای که به خالق کتاب، کتابش را نسبت می‌دهد.

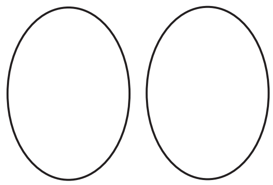
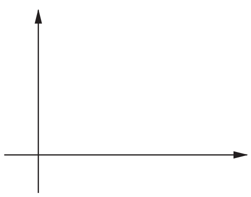
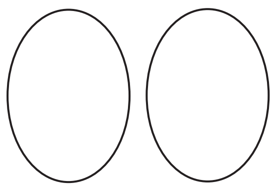
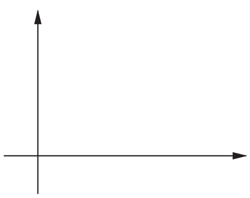
الف



ب



حال جدول زیر را با توجه به رابطه‌هایی که در قسمت ۱ و ۲ «تابع» هستند، کامل کنید.

	نمایش پیکانی	نمایش زوج مرتبی	نمایش مختصاتی
۱		{(,),(,),(,)}	
۲		{(,),(,),(,)}	

با توجه به جدول بالا :

الف. نمایش پیکانی یک رابطه، وقتی تابع است که ....

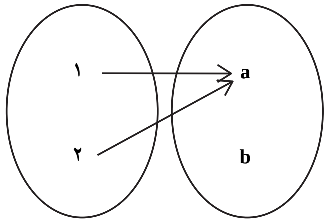
ب. نمایش زوج مرتبی یک رابطه، وقتی تابع است که ....

ج. نمایش مختصاتی یک رابطه، وقتی تابع است که ....

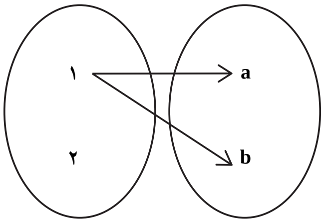
تمرین

۱. کدام‌یک از رابطه‌های زیر که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع نیست؟ چرا؟

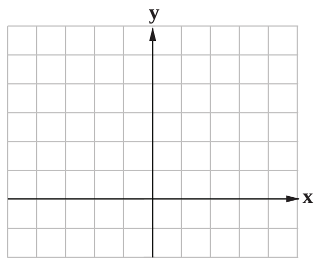
الف



ب

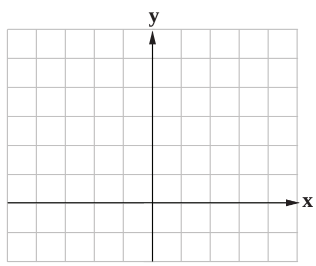


۲. کامل کنید :



$$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = x^{۲} - ۱ \end{cases}$$

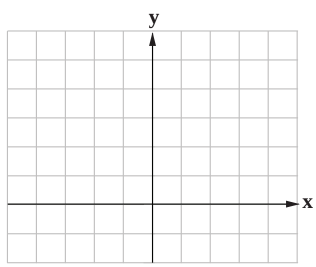
$D_f = A = \{۲,-۱,-۲\}$ $\quad R_f = \{\ \ ,\ \ ,\ \ \}$



f تابعی خطی از A به B

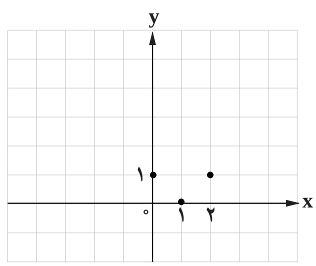
$f(x) =$

$D_f = \{-\frac{۱}{۲}, ۰, ۲\}$ $\quad R_f = \{-\frac{۳}{۲}, ۰, ۶\}$



$$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = \frac{۱}{x} \end{cases}$$

$D_f = \{\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ $\quad R_f = \{۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۵}\}$



$$\begin{cases} f: A \to B \\ f(x) = (x-۱)^{۲} \end{cases}$$

$D_f = \{\ \ ,\ \ ,\ \ \}$ $\quad R_f = \{\ \ ,\ \ \}$

انواع توابع (ثابت، چندضابطه‌ای و همانی)

یکی از کاربردهای تابع، «مدل‌سازی مسائل واقعی» است. به مثال زیر توجه کنید :

مدیران یک فروشگاه به دلایلی* تصمیم گرفته‌اند هزینهٔ استفاده از توقفگاه فروشگاه را برای مشتریان خود به‌صورت هوشمند تعیین کنند. پیش از این، هزینهٔ استفاده از توقفگاه ثابت بوده است (مستقل از ساعت و روز هفته).

برای اجرای این تصمیم ابتدا به کمک دوربین‌های مداربسته، در ورودی توقفگاه و به کمک «روش مشاهده» تعداد خودروهای ورودی در سومین هفتهٔ هر فصل شمارش شده است. با توجه به نبود دادهٔ دورافتاده، برای تعیین تعداد خودروهای ورودی در هر ساعت از روزهای کاری فروشگاه از شاخص آماری میانگین استفاده شده است. این اطلاعات در جدول ۱ نمایش داده شده است :

جدول ۱. میانگین ورود خودرو به توقفگاه در هر ساعت کاری فروشگاه

روز هفته	نخستین ساعت (۸ـ۹)	دومین ساعت (۹ـ۱۰)	سومین ساعت (۱۰ـ۱۱)	چهارمین ساعت (۱۱ـ۱۲)	پنجمین ساعت (۱۲ـ۱۳)	ششمین ساعت (۱۳ـ۱۴)	هفتمین ساعت (۱۴ـ۱۵)	هشتمین ساعت (۱۵ـ۱۶)	نهمین ساعت (۱۶ـ۱۷)	دهمین ساعت (۱۷ـ۱۸)	یازدهمین ساعت (۱۸ـ۱۹)	دوازدهمین ساعت (۱۹ـ۲۰)
شنبه	۳۰	۴۰	۵۰	۴۰	۵۰	۴۰	۳۰	۳۰	۵۰	۵۰	۵۰	۶۰
یک‌شنبه	۱۱۰	۱۳۰	۱۵۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۷۰	۱۶۰
دوشنبه	۲۱۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۱۰	۲۳۰	۲۰۰	۲۰۰	۲۱۰	۲۴۰	۲۴۰	۲۳۰	۲۵۰
سه‌شنبه	۱۲۰	۱۱۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۸۰	۱۶۰	۱۵۰	۱۴۰	۳۲۰	۳۴۰	۳۴۰	۳۶۰
چهارشنبه	۳۰	۴۰	۹۰	۹۰	۶۰	۵۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۵۰	۴۹۰	۵۷۰	۶۸۰
پنج‌شنبه	۲۰	۱۲۰	۲۳۰	۳۴۰	۴۱۰	۵۱۰	۶۱۰	۷۲۰	۸۹۰	۹۳۰	۱۰۷۰	۱۱۲۰
جمعه	۱۲۰	۲۱۰	۳۴۰	۴۲۰	۵۱۰	۶۲۰	۷۱۰	۸۲۰	۹۴۰	۱۰۹۰	۵۲۰	۴۱۰

با در نظر گرفتن جدول ۱، هزینهٔ توقفگاه از روز **شنبه تا چهارشنبه** مطابق جدول ۲ تعیین شده است :

جدول ۲. هزینهٔ توقفگاه با توجه به میانگین خودروهای ورودی

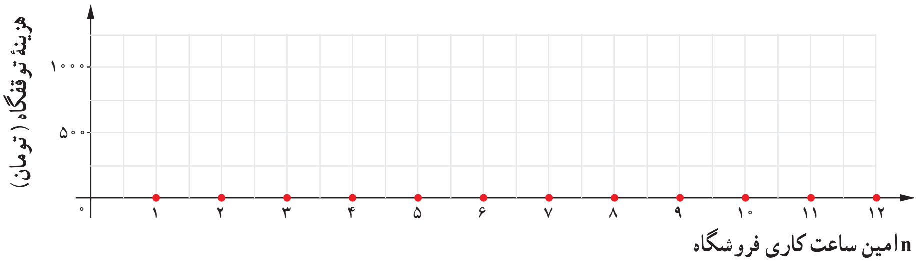
میانگین خودروهای ورودی در هر ساعت	هزینهٔ دریافتی از هر خودرو (تومان)
۱۰۰ـ۰	(رایگان)
۲۰۰ـ۱۰۰	۵۰۰ تومان
۳۰۰ـ۲۰۰	۱۰۰۰ تومان
۴۰۰ـ۳۰۰	۱۵۰۰ تومان
۵۰۰ـ۴۰۰	۲۰۰۰ تومان
۶۰۰ـ۵۰۰	۲۵۰۰ تومان
۷۰۰ـ۶۰۰	۳۰۰۰ تومان

* ۱. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان نیست، هزینهٔ اندک توقفگاه می‌تواند تشویقی برای خرید از فروشگاه نزد مشتریان باشد.
۲. در زمان‌هایی که تعداد مشتریان فروشگاه فراوان است، هزینهٔ بالاتر استفاده از توقفگاه درآمد بیشتری را برای فروشگاه فراهم می‌کند.
۳. در زمان‌هایی که‌تعداد مشتریان از ظرفیت پذیرش فروشگاه بیشتر است و این مسئله باعث تعجیل مشتریان در خرید از فروشگاه می‌شود، سوق دادن بخشی از این مشتریان به ساعت‌های خلوت فروشگاه به دلیل هزینهٔ رایگان یا اندک توقفگاه می‌تواند در افزایش درآمد فروشگاه بسیار تأثیرگذار باشد. به بیان دیگر نه‌تنها هزینهٔ متغیر توقفگاه به‌تنهایی می‌تواند درآمد فروشگاه را ارتقا بخشد، بلکه این مسئله بر میزان خرید مشتریان از فروشگاه نیز تأثیرگذار است که نتیجهٔ آن سود بیشتر فروشگاه خواهد بود.

تابع ثابت (Constant Function)

بر اساس اطلاعات آماری جدول ۱ و ۲، نمودار «nامین ساعت کاری فروشگاه ــ هزینهٔ دریافتی» را برای روزهای شنبه تا چهارشنبه در نخستین هفتهٔ هوشمندسازی رسم می‌کنیم.[۱]

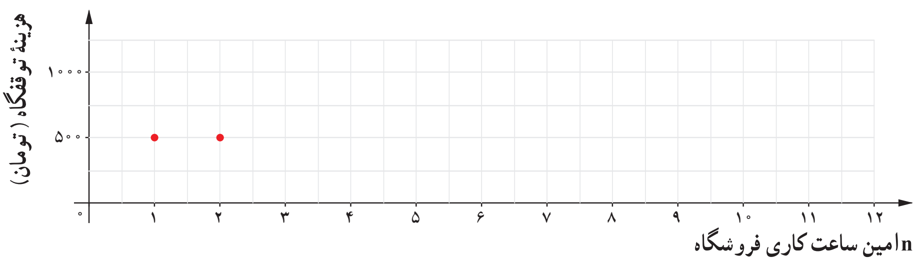
شنبه : در نخستین روز هفته تعداد خودروهای ورودی به توقفگاه همواره در دستهٔ ۱۰۰ــ۰ قرار می‌گیرند. بنابراین مطابق جدول دو، نمودار زیر به‌دست می‌آید :



این نوع تابع که به ازای $n=1$ تا $n=12$؛ یعنی در تمام ۱۲ ساعت کاری فروشگاه، مقدار ثابت صفر را اختیار کرده است، تابع ثابت نامیده می‌شود. پس ضابطهٔ تابع «هزینهٔ توقفگاه» در این روز به‌صورت $\begin{cases} C: A \to B \\ C(n)=0 \end{cases}$ است که در آن $D=\{n \in N \mid 1 \le n \le 12\}$ دامنهٔ تابع و $R=\{0\}$ برد تابع C را تشکیل می‌دهند.

کار در کلاس

یکشنبه : با توجه به میانگین خودروهای ورودی در جدول ۱ و هزینهٔ دریافتی مطابق جدول ۲، نمودار زیر را کامل کنید.



تابع $\begin{cases} f: A \to B \\ f(x)=c \end{cases}$ را که در آن مجموعه $R=\{c\}$ برد تابع است، تابع ثابت می‌نامند. در تابع ثابت، برد تابع تنها شامل یک عضو است.

---

۱. با توجه به آنکه مدت زمانی طول می‌کشد تا مشتریان فروشگاه از نرخ جدید هزینهٔ توقفگاه آگاهی یابند، در نخستین هفتهٔ هوشمندسازی توقفگاه، میانگین ورودی خودرو تغییر محسوسی نکرده است و اطلاعات جدول ۱ در این هفته معتبر است.

فعالیت

دوشنبه : با استفاده از جدول ۱ و ۲ همانند روزهای شنبه و یک‌شنبه، نمودار زیر را برای روز دوشنبه کامل کنید و دامنه و برد و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

توجه داشته باشید که در این نمودار محور x برخلاف روزهای شنبه و یک‌شنبه بیانگر زمان ورود خودرو به توقفگاه است.

$$\begin{cases} C: A \to B \\ C(x) = \end{cases} \qquad D = \{x \in \mathbb{R} \mid \qquad \} \qquad R = \{ \quad \}$$

ــ دامنهٔ نمودار در روز دوشنبه چه تفاوتی با دامنه نمودار در روزهای شنبه و یک‌شنبه دارد؟

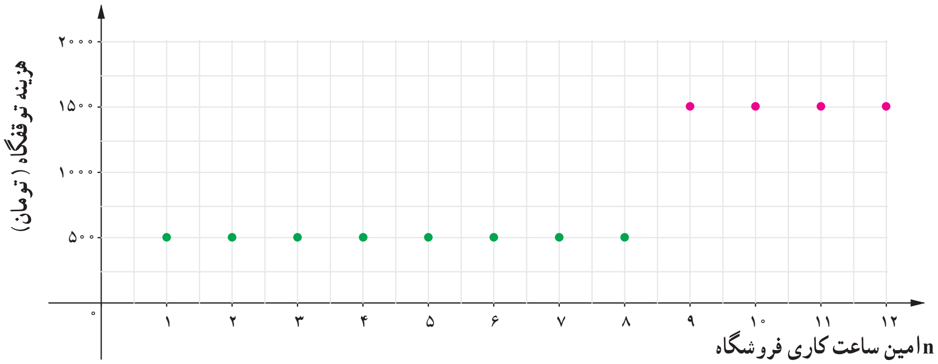
ــ تفاوت این دامنه‌ها چه تأثیری بر نمودار تابع دارد؟ چرا؟

تابع چندضابطه‌ای (Piecewise Function)

سه‌شنبه : با بررسی جدول ۱ تعداد خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری فروشگاه تا هشتمین ساعت کاری در دستهٔ ۲۰۰ــ۱۰۰ و در چهار ساعت پایانی ساعت کاری فروشگاه در دستهٔ ۴۰۰ــ۳۰۰ قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن جدول ۲، هزینهٔ استفاده از توقفگاه برای خودروها در این روز از این تابع پیروی می‌کند :

$$C(n) = \begin{cases} ۵۰۰ & ۱ \le n \le ۸ & (۱) \\ ۱۵۰۰ & ۹ \le n \le ۱۲ & (۲) \end{cases}$$

که ضابطهٔ ۱ مربوط به ساعت ورودی اول تا هشتم و ضابطهٔ ۲ مربوط به ساعت ورودی نهم تا دوازدهم است و نمودار آن :



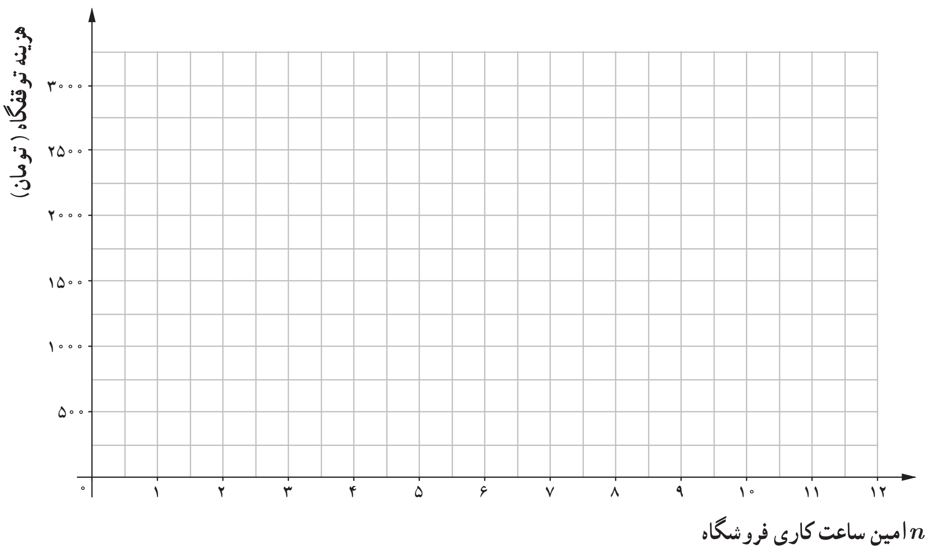
توابعی که در بخش‌های مختلف دامنه، ضابطه‌های مختلف دارند، توابع چندضابطه‌ای نامیده می‌شوند؛ مثلاً اگر یک تابع از دو ضابطه پیروی کند، یک تابع دوضابطه‌ای نامیده می‌شود.

کار در کلاس

چهارشنبه : در این روز با توجه به جدول ۱ و ۲ ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر مشخص می‌شود :

$$C(n)=\begin{cases} ۰ & ۱\le n\le ۶ \\ ۵۰۰ & n=۷ \\ ۱۰۰۰ & n=۸ \\ ۱۵۰۰ & n=۹ \\ ۲۰۰۰ & n=۱۰ \\ ۲۵۰۰ & n=۱۱ \\ ۳۰۰۰ & n=۱۲ \end{cases} \Leftrightarrow C(n)=\begin{cases} ۰ & ۱\le n\le ۶ \\ (n-۶)\times ۵۰۰ & ۷\le n\le ۱۲ \end{cases}$$

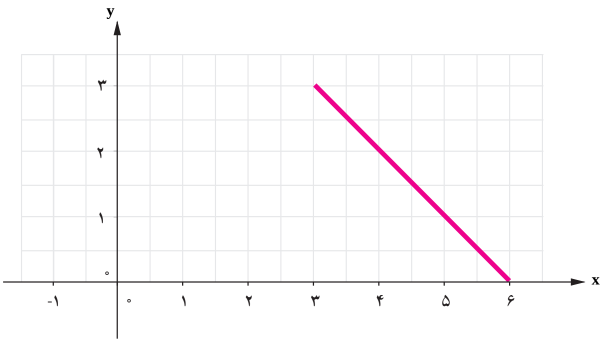
۱. نمودار این تابع را رسم کنید :



۲. درآمد توقفگاه فروشگاه در این روز چقدر است؟

کار در کلاس

ضابطهٔ تابع و نمودار آن را کامل کنید.



$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & -۱\leq x<۳ \\ ... & ۳\leq x\leq ۶ \end{cases}$$

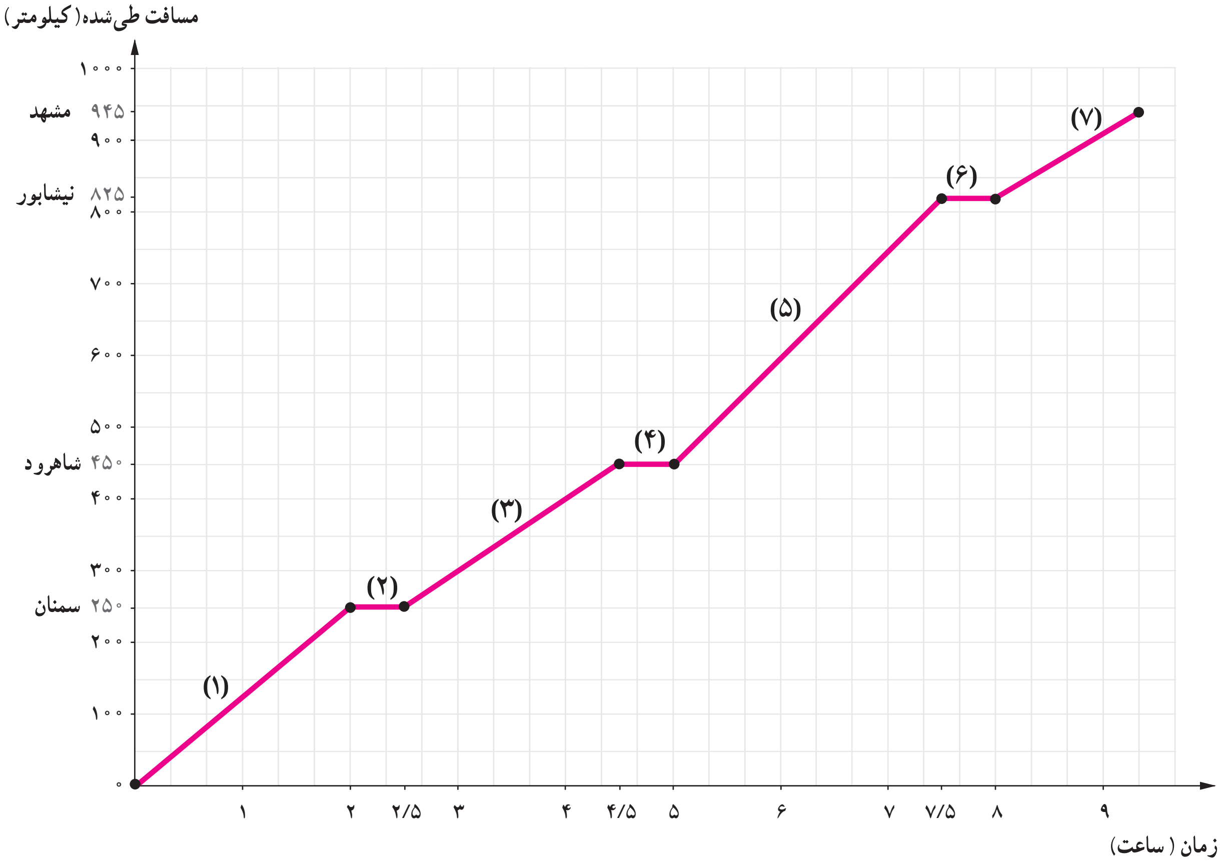
فعالیت

نمودار زیر قطاری را نشان می‌دهد که از تهران به مشهد رفته است.

۱. مفهوم قسمت‌هایی که نمودار تابع ثابت است چیست؟

۲. ضابطهٔ تابع «مکان ــ زمان» قطار از لحظهٔ رسیدن به شاهرود تا لحظهٔ ترک نیشابور را به‌دست آورید.

۳. اگر قطار مطابق ضابطه بخش ۵ و بدون توقف در نیشابور به مسیر خود ادامه دهد، در چه زمانی به مشهد می‌رسد؟

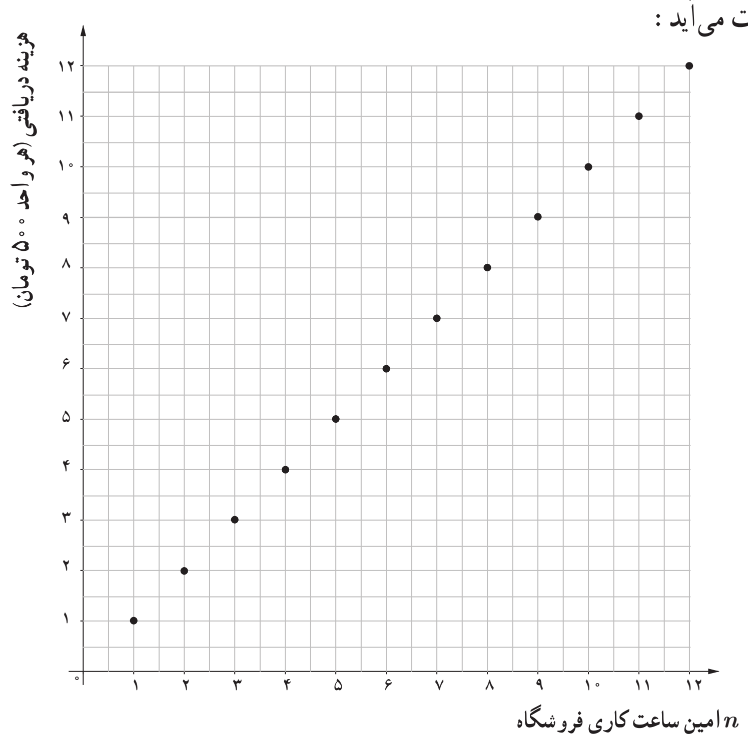


تابع همانی (Identity Function)

فعالیت

پنج‌شنبه : به‌دلیل افزایش مرتب خودروهای ورودی از نخستین ساعت کاری تا دوازدهمین ساعت کاری فروشگاه، مدیران شرکت تصمیم گرفته‌اند که از یک مدل «تابع خطی» برای دریافت هزینه از خودروها استفاده کنند. به این معنا که اگر خودرو در nامین ساعت کاری وارد توقفگاه شود، هزینهٔ دریافتی n واحد (هر واحد ۵۰۰ تومان) باشد.

بنابراین نمودار زیر به‌دست می‌آید :

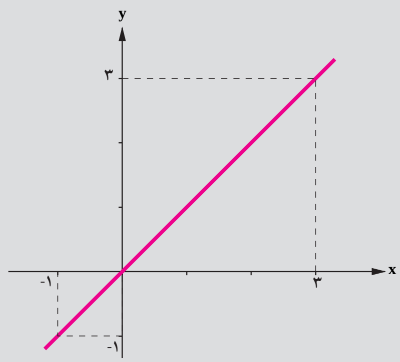


مجموعه نقاط نمودار را به‌صورت زوج‌مرتب نشان دهید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. چه رابطه‌ای میان دامنه و برد این تابع برقرار است؟ آیا می‌توانید ضابطهٔ این تابع را حدس بزنید؟

اگر این مجموعه نقاط را در نمودار به یکدیگر وصل کنیم، این نمودار بیانگر چه مفهومی است؟ در این حالت دامنه و برد آن چه تغییری می‌کند؟

تابع با ضابطهٔ $f(x) = x$ را تابع همانی می‌نامند. با توجه به ضابطهٔ تابع، در تابع همانی دامنه و برد همواره با یکدیگر برابرند. از لحاظ هندسی نمودار این تابع نیمساز ناحیهٔ اول و سوم است.

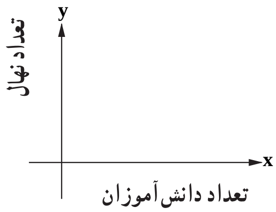
$D_f = \mathbb{R} \quad R_f = \mathbb{R}$



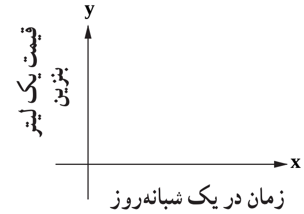
تمرین

۱. با توجه به معرفی محور x و y در هر دستگاه مختصات، با هرکدام از توضیحات زیر کدام‌یک از توابع ثابت، چند ضابطه‌ای یا همانی معرفی می‌شود؟ نمودار هر حالت را با توجه به توضیحات کامل کنید.

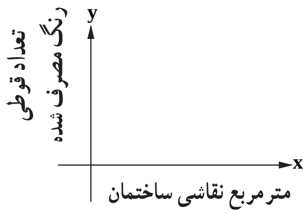
الف. به مناسبت روز درخت‌کاری، در یک مدرسه هر دانش‌آموز یک نهال می‌کارد.



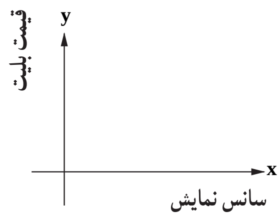
ب. هزینهٔ یک لیتر بنزین عادی در هر زمان از شبانه‌روز در یک پمپ بنزین ۱۰۰۰ تومان است.



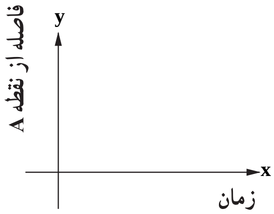
ج. برای هر یک متر مربع نقاشی یک ساختمان یک قوطی رنگ کوچک استفاده می‌شود.

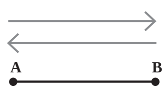


د. بلیت یک سینما در سه سانس اول ۲۰۰۰ تومان، در چهار سانس بعدی ۳۰۰۰ تومان و در دو سانس آخر ۱۵۰۰ تومان است.



هـ. دونده‌ای، کنار یک زمین فوتبال، با سرعت ثابت از نقطهٔ A تا نقطهٔ B شروع به دویدن می‌کند و دوباره به نقطهٔ A برمی‌گردد.





۲. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟ چرا؟

الف. اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشد، آن تابع همانی است.

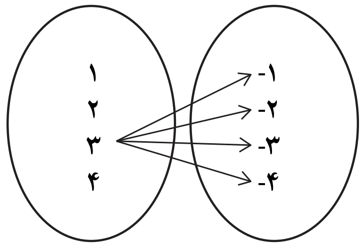
ب. اگر دامنهٔ یک تابع همانی مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد، آن‌گاه حاصل $f(x) + f(-x)$ همواره برابر صفر است.

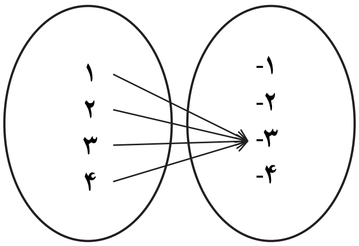
ج. اگر f یک تابع ثابت باشد، آن‌گاه $f(kx) = kf(x)$.

۳. اگر $A = \{(۲, b), (a, ۴), (۷, a+b)\}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار a کدام است؟

۴. اگر $A=\{(x_۱, y_۱), (x_۲, y_۲), (x_۳, y_۳)\}$ یک تابع ثابت باشد، میانگین، میانه و واریانس مقادیر $y_۱$،$y_۲$،$y_۳$ را به‌دست آورید.

۵. کدام‌یک از نمایش‌های پیکانی زیر یک تابع ثابت را معرفی می‌کند؟





۶. در تابع ثابت $f(x) = c$:

الف. مقادیر $f(a)$ ، $f(b)$ و $f(a+b)$ را مشخص کنید.

ب. اگر در این تابع $f(a+b) = f(a) \times f(b)$ باشد، c چه مقادیری را اختیار می‌کند؟

۷. اگر $A = \{(a,۱), (b,۲), (c,۵)\}$ یک تابع همانی باشد، میانگین a و b و c را به‌دست آورید.

۸. در هر یک از زوج‌مرتب‌های زیر $n \in \mathbb{N}$ را به‌گونه‌ای تعیین کنید که زوج‌مرتب داده‌شده روی نیمساز ناحیهٔ اول و سوم باشد.

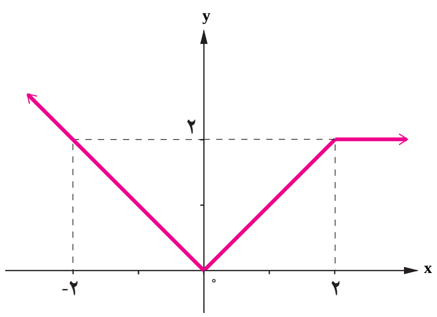
$(۲, n^۲ - ۳n + ۴)$

$(-۱, n^۲ - ۴n + ۲)$

۹. اگر f یک تابع ثابت با دامنهٔ دو عضوی و $n \in \mathbb{N}$ و m باشد، مقدار $m + t$ را به‌دست آورید.

$$f = \{(-۱, n^۲ - ۲n), (m - ۴, ۳), (m + n, t)\}$$

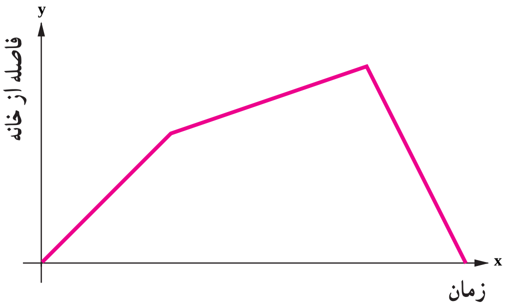
۱۰. ضابطهٔ تابع زیر را مشخص کنید.



۱۱. در تابع $f(x)=\begin{cases} x & x<-۱ \\ x^{۲} & -۱\leq x\leq ۲ \\ ۵ & x>۲ \end{cases}$ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$f(\sqrt{۲})+f(۵)$ $f(-\sqrt{۲})+f(\sqrt{۳})$ $f(۳)+f(-۱)$ $f(۲)$

۱۲. نمودار زیر به کدام داستان مربوط است؟



الف. آوا و مادربزرگش برای قدم زدن در بوستان، از خانه خارج شدند. آنها در ابتدا آهسته قدم می‌زدند و سپس سرعتشان را بیشتر کردند تا به بوستان رسیدند. سپس، از مسیری که آمده بودند، برگشتند و به خانه رسیدند.

ب. علی با دوچرخه‌اش از خانه به سمت بالای تپه روبه‌روی خانه‌شان حرکت کرد. پس از مدتی شیب تپه کمتر شد تا به بالای تپه رسید. سپس از آنجا از سمت دیگر به پایین تپه سرازیر شد.

ج. محمدرضا برای دویدن روزانه‌اش از خانه خارج شد. هنگام دویدن با دوست خود که در حال دویدن بود، برخورد کرد که باعث شد از سرعت دویدنش کم شود؛ اما بعد از آن با سرعت بیشتری به سمت خانه حرکت کرد و به خانه رسید.

۱۳. اگر هزینهٔ توقفگاه در روز جمعه بر اساس مدت زمان سپری شده از بازگشایی فروشگاه از ساعت ۸ صبح از تابع

$$C(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\leq x<۲ \\ x+۱ & ۲\leq x<۱۰ \\ ۰ & ۱۰\leq x\leq ۱۲ \end{cases}$$

پیروی کند، با رسم نمودار تابع، هزینهٔ توقفگاه هر خودرو را با توجه به ساعت و زمان ورودش به توقفگاه به کمک نمودار تابع محاسبه کنید. (هر واحد بر روی محور yها معادل ۵۰۰ تومان است).

* ۱۴. درآمد فروشگاه از توقفگاه را از روز شنبه تا چهارشنبه در دو حالت زیر مقایسه کنید.

الف. قبل از هوشمندسازی و بر اساس هزینهٔ ثابت ۷۰۰ تومان برای هر خودرو که مستقل از روز و ساعت ورود به توقفگاه است.

ب. بر اساس هوشمندسازی

در هر دو حالت از اطلاعات جدول ۱ استفاده کنید.

حل تمرین * دار اجباری نیست.

درس ۲

توابع پلکانی و قدرمطلقی

تابع پلکانی $(Step\ \ Function)$

روش محاسبهٔ قبض برق

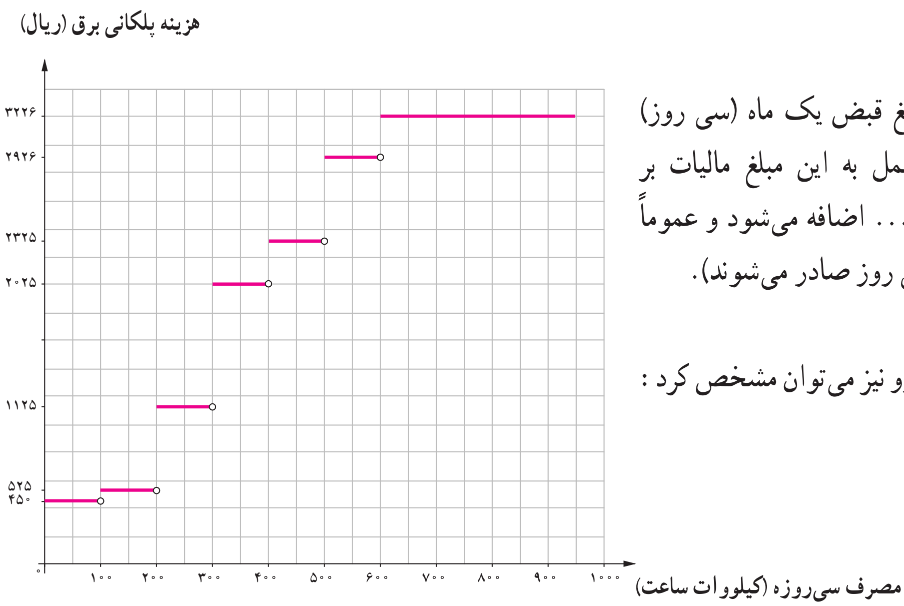
محاسبهٔ هزینهٔ برق مصرفی در هر خانه بر اساس میزان «کیلووات ساعت» برقی است که در هر سی روز در یک خانه مصرف می‌شود. یک کیلووات ساعت (kwh) در واقع مصرف یک وسیلهٔ هزار واتی در مدت زمان یک ساعت است، مثلاً اگر ۱۰ لامپ صد واتی را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلووات ساعت برق مصرف کرده‌ایم.

اگر فرض کنیم مصرف برق یک خانه در سی روز kwh ۲۴۶/۲۳ بوده است، برای محاسبهٔ هزینهٔ مصرف برق، میزان کیلووات ساعت مصرفی مطابق این جدول به صورت پلکانی تقسیم می‌شود.

پله های مصرف ۳۰ روزه	نرخ (ریال)	مصرف ۳۰ روزه	مبلغ ۳۰ روزه
مصرف ۰ تا ۱۰۰	۴۵۰	۱۰۰	۴۵۰۰۰
مازاد بر ۱۰۰ تا ۲۰۰	۵۲۵	۱۰۰	۵۲۵۰۰
مازاد بر ۲۰۰ تا ۳۰۰	۱۱۲۵	۴۶/۲۳	۵۲۰۰۹
مازاد بر ۳۰۰ تا ۴۰۰	۲۰۲۵	۰	۰
مازاد بر ۴۰۰ تا ۵۰۰	۲۳۲۵	۰	۰
مازاد بر ۵۰۰ تا ۶۰۰	۲۹۲۶	۰	۰
مازاد بر ۶۰۰	۳۲۲۶	۰	۰

مجموع مبالغ ستون آخر، مبلغ قبض یک ماه (سی روز) را مشخص می‌کند(البته در عمل به این مبلغ مالیات بر ارزش افزوده و عوارض برق و... اضافه می‌شود و عموماً قبض‌های برق برای بیشتر از سی روز صادر می‌شوند).

جدول بالا را با نمودار روبه‌رو نیز می‌توان مشخص کرد :



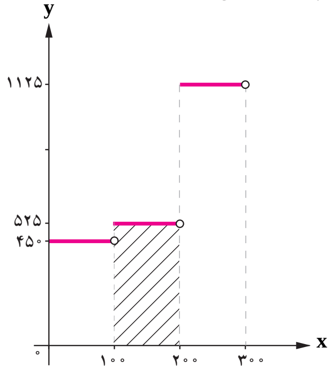
نمودار بالا نمودار یک تابع چندضابطه‌ای است که در هر ضابطه مقدار تابع عددی ثابت است. این نوع توابع را توابع پلکانی می‌نامند.

فعالیت

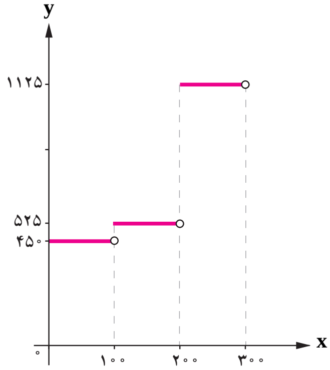
به کمک نمودار پلکانی رسم‌شده برای محاسبه هزینهٔ برق مصرفی یک خانه :

۱. هزینهٔ $100\ kwh$ اول چگونه محاسبه می‌شود؟ آیا می‌توانیم مساحتی را در نمودار داده شده، مشخص کنیم که این هزینه را تعیین کند؟

۲. مساحت قسمت هاشورخوردهٔ زیر بیانگر چه مفهومی است؟



۳. هزینهٔ کل برق مصرفی این خانه معادل چه مساحتی است؟ این مساحت را هاشور بزنید و مقدار هزینه را مشخص کنید.

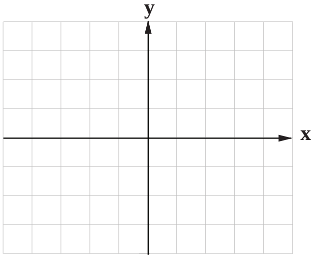


تابع علامت $(Sign\ \ Function)$

کار در کلاس

بر اساس ضابطهٔ تابع پلکانی $y=f(x)$، نمودار آن را رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.

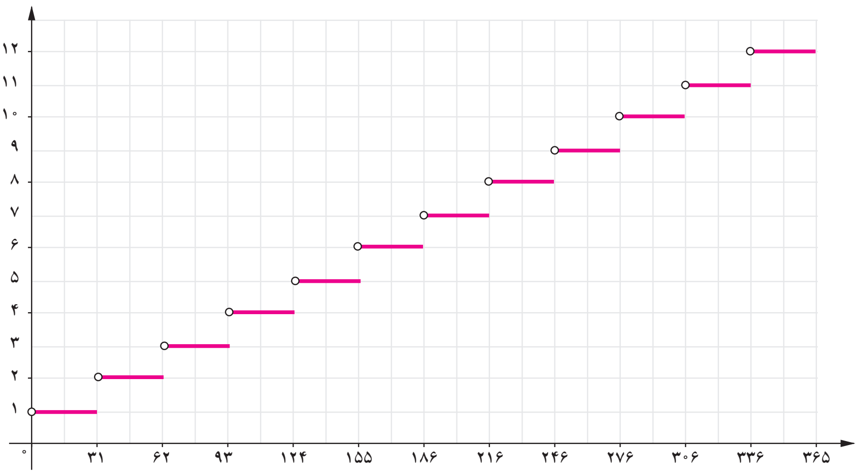
$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$$



تابع بالا را تابع علامت یا تابع $y = sign(x)$ می‌نامند.

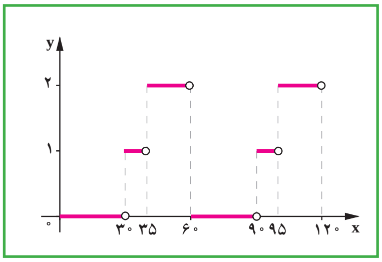
کار در کلاس

۱. نمودار زیر مدل ریاضی چه مفهومی را بیان می‌کند؟ محورهای x و y بیانگر چه کمیت‌هایی هستند؟ واحدهای آنها را مشخص کنید. ضابطهٔ تابع را بنویسید؟

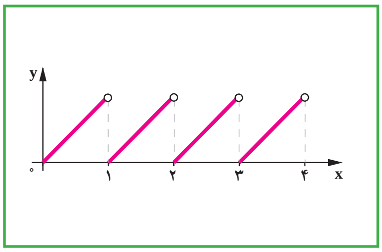


۲. هر کدام از نمودارهای توابع سمت چپ را به تصویری که بیانگر آن مفهوم است، مرتبط کنید.

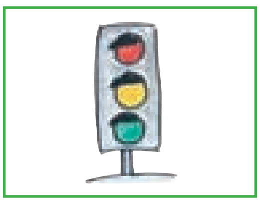
یک ساعت شنی که شن با سرعت ثابت از قسمت بالا در مدت یک ساعت به قسمت پایین می‌ریزد.

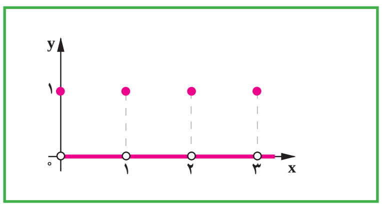


پرنده‌ای که در یک ساعت دیواری در رأس هر ساعت از ساعت بیرون می‌آید.



چراغ راهنمایی و رانندگی سه حالته.





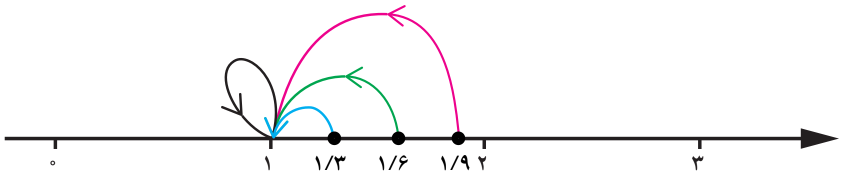
تابع جزء صحیح (*Greatest Integer Function*)

فعالیت

فرض کنید g تابعی است که به هر عدد صحیح، خود همان عدد را نسبت می‌دهد و به هر عدد بین دو عدد صحیح متوالی، عدد صحیح کوچک‌تر را نسبت می‌دهد.

برای مثال، در این تابع اگر x عدد صحیح ۱ انتخاب شود یا عددی بین ۱ و ۲ باشد، تابع g، این اعداد را به عدد ۱ نسبت می‌دهد.

به بیانی دیگر :



(شکل ۱)

$$۱ \leq x < ۲ \quad \Rightarrow \quad g(x) = ۱$$

مطابق تعریف تابع g، اگر x عددی بین دو عدد صحیح متوالی ۲− و ۳− باشد، این تابع مقادیر x را به عدد ... نسبت می‌دهد (شکل ۲).

و اگر x عددی بین اعداد ۲ و ۳ باشد، این تابع مقادیر x را به عدد ... نسبت می‌دهد(شکل ۳).

$$\ldots \leq x < \ \ldots \ \Rightarrow \quad g(x) = \ldots$$

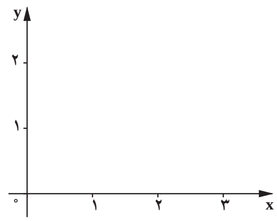
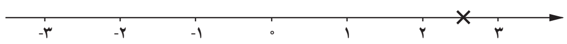
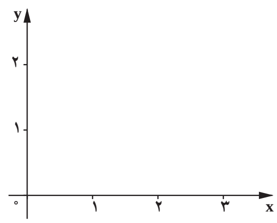
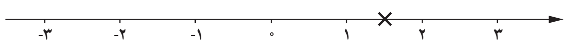
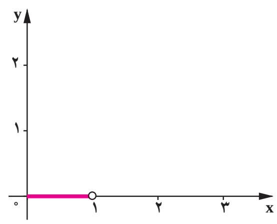
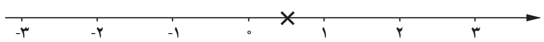
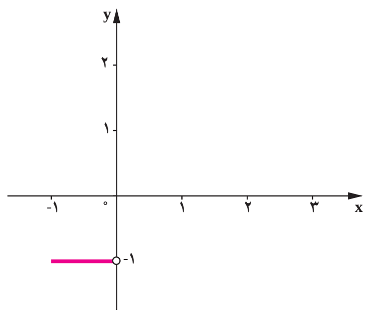
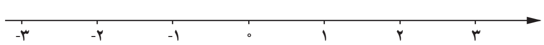
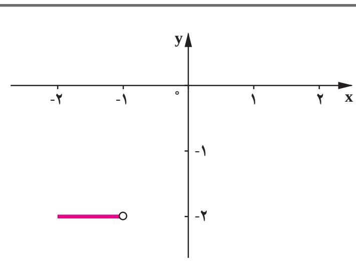
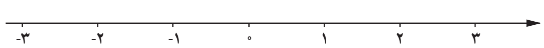
(شکل ۲)

$$\ldots \leq x < \ \ldots \ \Rightarrow \quad g(x) = \ldots$$

(شکل ۳)

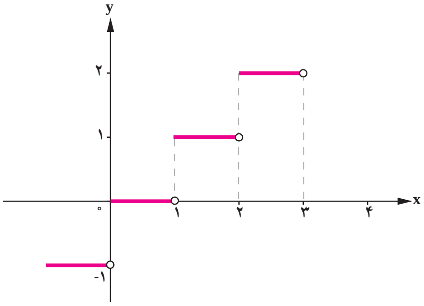
کار در کلاس

به کمک تابع g که در فعالیت صفحهٔ قبل تعریف شده است، جدول زیر را کامل کنید.

نمودار تابع	جواب تابع g	حدود x
	$g(x) =$	 $۲\leq x<۳$
	$g(x)= ۱$	 $۱\leq x<۲$
	$g(x) =$	 $۰\leq x<۱$
	$g(x) = -۱$	 $\leq x<$
	$g(x) =$	 $\leq \mathrm{x} <$

این حالت‌ها را می‌توانیم با یک تابع چندضابطه‌ای و نمودار متناظرش به‌صورت زیر بیان کنیم :

$$g(x)=\begin{cases} \vdots & \\ -۱ & -۱\leq x<۰ \\ ۰ & ۰\leq x<۱ \\ ۱ & ۱\leq x<۲ \\ ۲ & ۲\leq x<۳ \\ \vdots & \end{cases}$$

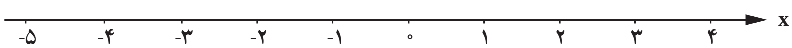


تابعی را که به هر عدد صحیح k خود همان عدد و به تمام اعداد میان دو عدد صحیح متوالی k و $k+۱$، عدد صحیح k را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح می‌نامند. ضابطهٔ این تابع را با $g(x)=[x]$ (بخوانید جزء صحیح x) معرفی می‌کنند.

کار در کلاس

به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور اعداد، حاصل عبارت‌های خواسته‌شده را به‌دست آورید.

$[-۲/۷]$	$[۲/۷]$	$[۲]$
$[-۰/۰۷]$	$[-۰/۷]$	$[۰/۷]$
$[-۲/۲]$	$[-\pi]$	$[-۳/۲]$

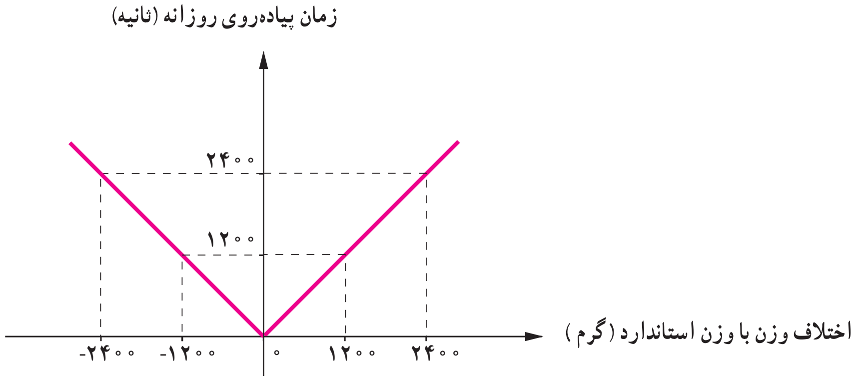


تابع قدر مطلق ($Absolute\ \ Value\ \ Function$)

فعالیت

فعالیت ۱. هر چند امروزه بخش عمده‌ای از افراد از اضافه وزن رنج می‌برند، بخش دیگری نیز دچار کمبود وزن نسبت به وزن استاندارد هستند. هر دو گروه باید تلاش کنند که وزن خود را استاندارد کنند. یک روش برای این کار، پیاده‌روی منظم روزانه است. فرض کنیم یک گروه خاص از افراد در یک روز، به ازای هر یک گرم افزایش یا کاهش وزن باید یک ثانیه پیاده‌روی کند. بر این اساس فردی با ۱۲۰۰ گرم اضافه وزن یا ۱۲۰۰ گرم کمبود وزن باید ۱۲۰۰ ثانیه، یعنی ۲۰ دقیقه روزانه به‌صورت منظم پیاده‌روی کند و فردی با ۲۴۰۰ گرم اضافه وزن یا ۲۴۰۰ گرم کمبود وزن باید روزانه ۲۴۰۰ ثانیه یعنی ۴۰ دقیقه به‌صورت منظم پیاده‌روی کند.

این مفهوم را می‌توان به کمک نمودار زیر نشان داد :



اگر مقدار اضافه وزن را با علامت مثبت و مقدار کمبود وزن را با علامت منفی نشان دهیم و f بیانگر تابعی باشد که میزان پیاده‌روی بر حسب ثانیه را نشان می‌دهد، اطلاعات پیش‌گفته را به صورت زیر می‌توانیم بیان کنیم :

$f(۱۲۰۰) = \cdots\cdots$ $\qquad$ $f(-۱۲۰۰) = \cdots\cdots$ $\qquad$ $f(\cdots\cdots) = ۲۴۰۰$ $\qquad$ $f(\cdots\cdots) = -۲۴۰۰$

که این مفهوم را در یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

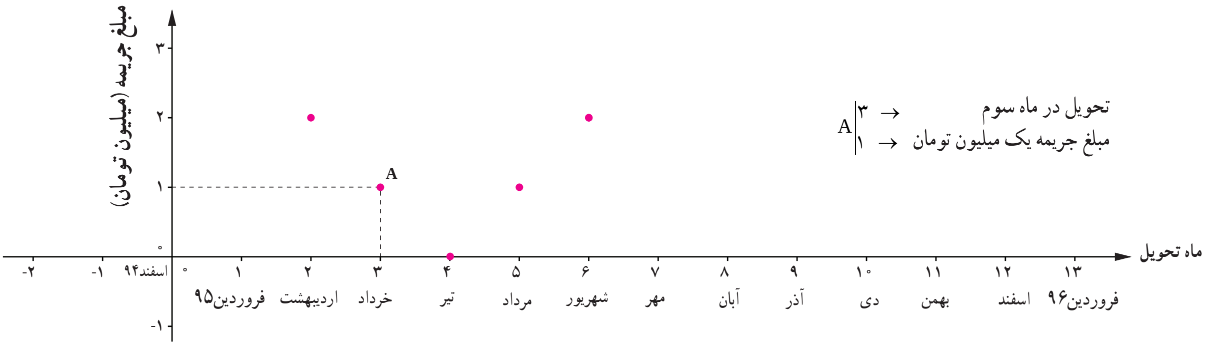
این تابع را می‌توان چنین تعبیر کرد که هر مقدار در دامنه را، به قدر مطلق همان مقدار در برد نظیر می‌کند.

تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x|$ ، تابع قدر مطلق نامیده می‌شود و مطابق تعریف :

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

فعالیت ۲. پلی که روی رودخانهٔ سیمینه‌رود در استان آذربایجان غربی ساخته شده، طبق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه باید در تیر **۱۳۹۵** افتتاح شود. اگر احداث این پل زودتر از موعد مقرر انجام شود، به دلیل هزینهٔ نگهداری پل و عدم استفاده از آن (به‌خاطر پایان نیافتن بقیهٔ جادهٔ مواصلاتی به پل) به ضرر است. همچنین تأخیر در زمان افتتاح پل نیز موجب خسارت به صاحب کار (وزارت راه) است. بر این اساس مطابق قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه به ازای هر یک ماه اختلاف با زمان تحویل، پیمانکارمتعهد است یک‌میلیون تومان جریمه پرداخت کند. تحویل پروژه به روز بستگی ندارد؛ بلکه به ماه تحویل بستگی دارد.

الف. نمودار تابع جریمه برحسب زمان تحویل پروژه در ماه‌های مختلف را کامل کنید.



ب. آیا می‌توانید این نمودار را به زبان یک تابع قدر مطلقی بیان کنید؟

ج. اگر پیمانکار چهارمیلیون تومان جریمه پرداخت کرده باشد، تحویل پروژه در چه ماه یا ماه‌هایی می‌تواند انجام شده باشد؟ چرا؟ پاسخ این پرسش را به کمک نمودار بالا و ضابطهٔ تابع قدر مطلق به‌دست‌آمده توضیح دهید.

کار در کلاس

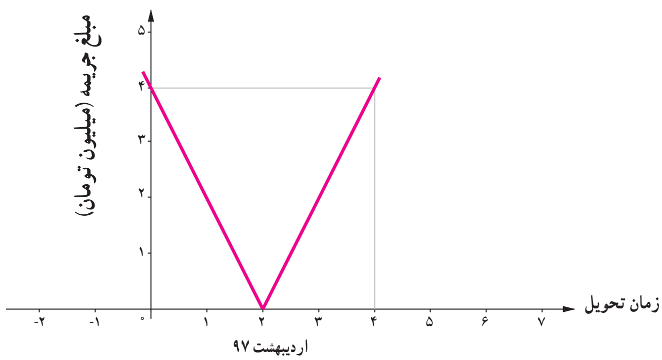
با توجه به نمودار

الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطهٔ هریک از نیم‌خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به‌دست آورید.

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د. شیب خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟



حل یک مسئله

نمودار تابع $y=|۲x-۶|$ را رسم کنید.

با توجه به تعریف قدرمطلق $|u|=\begin{cases} u & u\geq ۰ \\ -u & u<۰ \end{cases}$

$$y=|۲x-۶|=\begin{cases} ۲x-۶ & ۲x-۶\geq ۰ \quad (۱) \\ -(۲x-۶) & ۲x-۶<۰ \quad (۲) \end{cases}$$

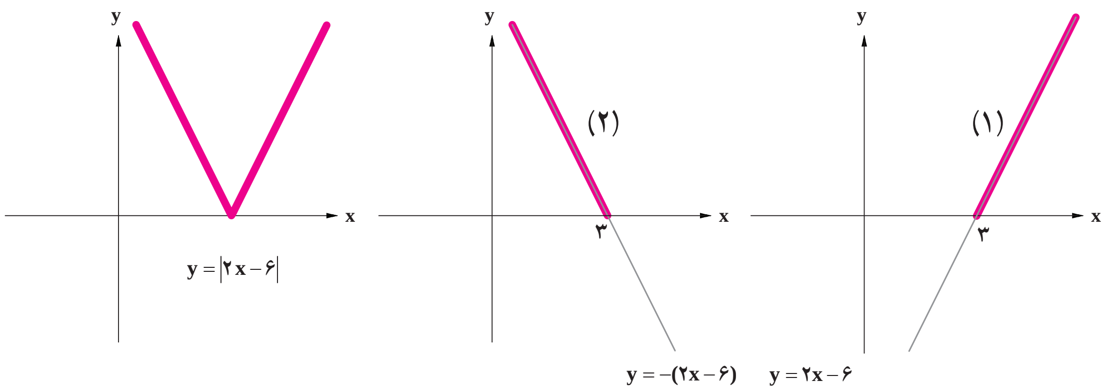
برای تعیین حدود x برای هرکدام از ضابطه‌های بالا، به کمک قوانین نامساوی‌ها در ریاضی نهم :

$$\begin{cases} ۲x-۶\geq ۰\,,\ ۲x\geq ۶\Rightarrow x\geq ۳ & (۱) \\ ۲x-۶<۰\,,\ ۲x<۶\Rightarrow x<۳ & (۲) \end{cases}$$

پس ضابطهٔ تابع این‌گونه مشخص می‌شود :

$$y=|۲x-۶|=\begin{cases} ۲x-۶ & x\geq ۳ \quad (۱) \\ -(۲x-۶) & x<۳ \quad (۲) \end{cases}$$

و نمودار تابع به‌صورت زیر رسم می‌شود :



کار در کلاس

الف. نمودار $y=|x-۴|$ را رسم کنید.

ب. نمودار $y=|x|$ را در همین صفحهٔ مختصات رسم کنید.

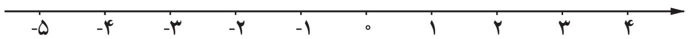
ج. آیا می‌توان بدون مراحل حل بالا، بر اساس نمودار $y=|x|$ ، نمودار $y=|x-۴|$ را رسم کرد؟ چگونه؟

د. نمودار $y=|x-۳|$ و $y=|x+۱|$ را با توجه به «ج» رسم کنید.

هـ. نمودار $y=|x|+۱$ را چگونه می‌توان براساس نمودار $y=|x|$ رسم نمود؟

تمرین

۱. به کمک تعریف تابع جزء صحیح و با استفاده از محور زیر حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.



$[۳/۹۹] =$ $[-۴/۲] =$ $[۴/۲] =$

$[\pi] =$ $[-۲] =$ $[-۱/۲] =$

۲. باتوجه به تعریف تابع جزء صحیح، جدول زیر را کامل کنید.

ضابطه تابع	مقدار x	مقدار $f(x)$
$f(x) = [x]$	$x = -۲/۳$ $x = ۵$	
$f(x) = [-x]$	$x = ۱/۷$ $x = ۲/۳$	
$f(x) = [x] + [-x]$	$x = ۱$ $x = ۱/۳$ $x = ۱/۷$ $x = ۲$	
$f(x) = [۳x]$	$x = ۱$ $x = ۰/۲$ $x = ۱/۳$	

۳. جدول مالیاتی زیر را که توسط هیئت مدیرهٔ یک شرکت برای سال جدید مالی آماده و تصویب شده است، در نظر بگیرید :

حقوق ماهیانه (تومان)	نرخ مالیات (درصد)
حقوق تا ۱/۳۰۰/۰۰۰	معاف از مالیات
مازاد بر ۱/۳۰۰/۰۰۰ تا ۲/۵۰۰/۰۰۰	۱۰
مازاد بر ۲/۵۰۰/۰۰۰ تا ۴/۵۰۰/۰۰۰	۱۵
مازاد بر ۴/۵۰۰/۰۰۰	۲۵

الف. نمودار پلکانی متناظر با جدول مالیاتی را رسم کنید.

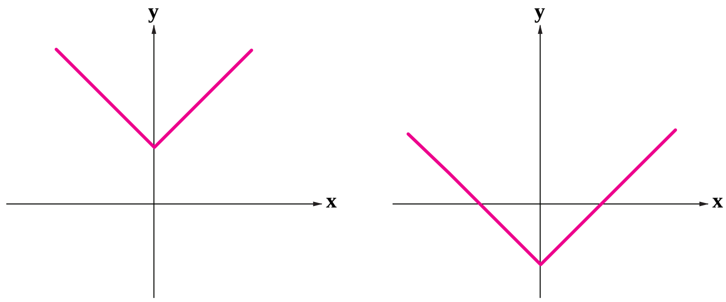
ب. به کمک نمودار پلکانی و محاسبهٔ سطح متناظر با هر یک از حقوق‌های ماهیانه، مبلغ مالیات هر کدام از کارمندان زیر را محاسبه کنید.

- کارمندی با حقوق ۱/۲۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۲/۴۰۰/۰۰۰ تومان
- کارمندی با حقوق ۶/۰۰۰/۰۰۰ تومان

۴. با توجه به نمودارهای زیر، کدام نمودار، تابع الف و کدام نمودار، تابع ب را مشخص می‌کند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

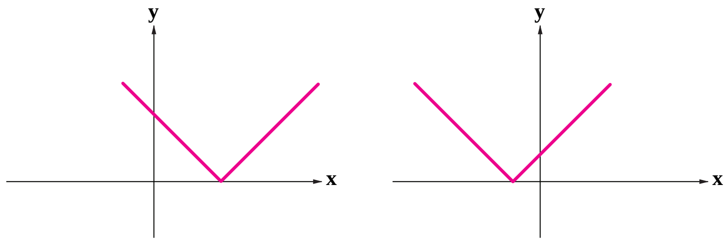
الف) $y = |x| + 2$

ب) $y = |x| - 3$



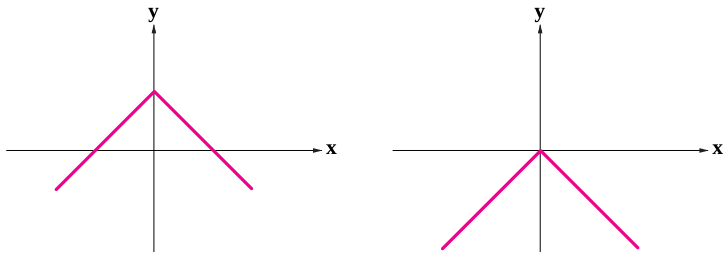
الف) $y = |x + 1|$

ب) $y = |x - 4|$



الف) $y = -|x|$

ب) $y = -|x| + 1$



۵. نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = |2x - 3|$

ب) $y = |3x + 1|$

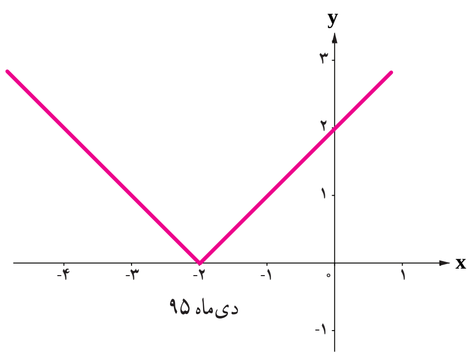
۶. با توجه به نمودار

الف. شرایط تحویل ندادن به موقع پروژه میان پیمانکار و وزارت راه را بیان کنید.

ب. به کمک نقاط مندرج در نمودار، ضابطهٔ هر یک از نیم‌خط‌ها با شیب مثبت و منفی را به‌دست آورید.

ج. به کمک تعریف تابع قدر مطلق، دو ضابطه را با یک ضابطه بیان کنید.

د. شیب خط در تابع به‌دست‌آمده در قرارداد میان پیمانکار و وزارت راه چه معنایی دارد؟ افزایش یا کاهش شیب‌خط به چه معناست؟



درس ۳

اعمال بر روی توابع

فعالیت

علیرضا، دانشجوی رشتهٔ اقتصاد است و با پدر و مادر و خواهرش مریم (دوازده‌ساله) زندگی می‌کند. وی می‌خواهد در جشنوارهٔ فیلم و تئاتر دههٔ فجر امسال اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک فیلم یا تئاتر دعوت کند. با توجه به تفاوت علاقه‌مندی اعضای خانواده‌به سبک‌های مختلف فیلم و تئاتر و تنوع موارد نمایش داده‌شده در سینما و تئاتر، برخلاف تصور اولیه‌اش، نتوانست به‌سادگی تصمیم بگیرد که چه فیلمی را می‌تواند با اعضای خانواده‌اش ببیند. بنابراین :

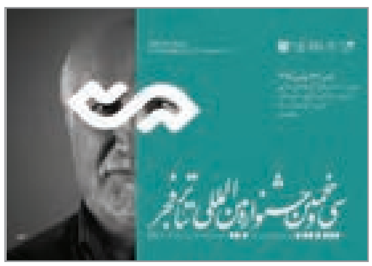
۱. ابتدا با یک پرسش‌نامه سبک دلخواه هر یک از اعضای خانواده را مشخص کرد؛ زیرا بدیهی است که او تمایل دارد با هر کدام از اعضای خانواده‌اش به دیدن فیلم یا تئاتری برود که سلیقهٔ سینمایی آنها و خودش را تأمین کند.

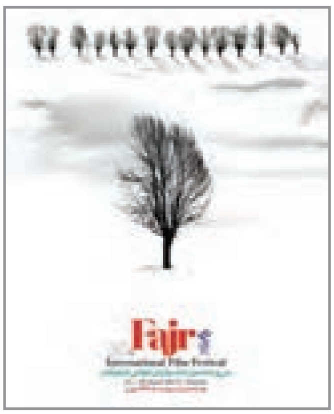
۲. با توجه به بودجهٔ محدودی که برای این اقدام در نظر گرفته است، تمایل دارد که بداند هزینهٔ صرف‌شده در این هفته چقدر خواهد بود.

جدول زیر هزینهٔ بلیت سینما و تئاتر را برای گروه‌های مختلف مشخص کرده است. مسئولان جشنواره در بخش‌هایی برای کودک و نوجوان و نیز دانشجویان تخفیف‌هایی قائل شده‌اند. لطفاً جدول را کامل کنید.

جدول ۱. هزینهٔ بلیت با توجه به گروه‌های مختلف

مکان نمایش / گروه سنی	سینما	تئاتر	سینمای کودک و نوجوان
فرد عادی	۱۰۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۰۰۰
دانشجو	=۲۰٪ تخفیف	=۲۰٪ تخفیف	۴۰۰۰
کودک و نوجوان	۱۰۰۰	=۵۰٪ تخفیف	=۵۰٪ تخفیف





علیرضا نتایج پرسش‌نامه داده شده به اعضای خانواده را در جدول‌های زیر مشخص نمود :

جدول ۲ . علاقه‌مندی به سینمای کودک و نوجوان

سبک فیلم / اعضای خانواده	کمدی	تاریخی	انیمیشن	علمی ــ تخیلی
مریم	✓		✓	✓
علیرضا		✓	✓	✓

جدول ۳ .علاقه‌مندی به سینما

سبک فیلم / اعضای خانواده	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی	حادثه‌ای	علمی ــ تخیلی
مادر	✓			✓		✓
پدر		✓	✓	✓		
مریم						
علیرضا		✓		✓		✓

جدول ۴ . علاقه‌مندی به تئاتر

سبک تئاتر / اعضای خانواده	کمدی	دفاع مقدس	تاریخی	اجتماعی
مادر	✓	✓	✓	
پدر		✓	✓	✓
مریم	✓		✓	
علیرضا			✓	

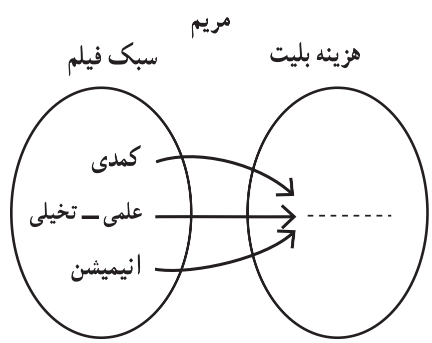
در نخستین روز هفته (شنبه)، علیرضا می‌خواهد خواهرش را به تماشای یک فیلم در سینمای کودک ونوجوان ببرد.

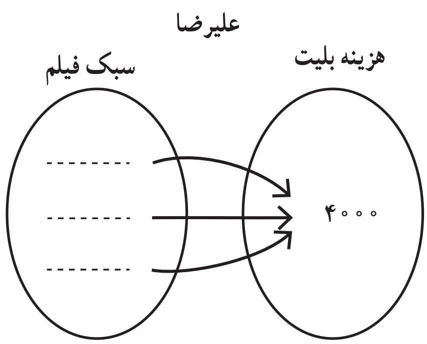
او باید دو نکته را مشخص کند :

۱ . به دیدن چه سبک فیلمی می‌روند؟

۲ . هزینهٔ بلیت آنها چقدر است؟

طبیعی است که علیرضا و خواهرش به دیدن سبک فیلمی خواهند رفت که هر دو به آن علاقه‌مند باشند؛ به بیان دیگر این سبک فیلم در اشتراک علاقهٔ، دو نفرشان باشد. با توجه به جدول‌های ۱ و ۲ اگر این دو نفر را تابعی در نظر بگیریم که «دامنهٔ» آن سبک فیلم مورد علاقه هرکدام باشد و «برد» آن هزینهٔ خرید بلیت، نمایش‌های پیکانی این دو تابع به صورت زیر است :





پس اشتراک فیلم مورد علاقه‌شان دو سبک فیلم .... و ....است و برای تماشای یکی از این دو سبک یا هر دو نوع آنها می‌توانند به سینما بروند. این مطلب را می‌توانیم چنین نشان دهیم :

علیرضا = {(,۴۰۰۰) و (,۴۰۰۰) و (,۴۰۰۰)}

مریم = {(کمدی ,   ) و (انیمیشن,   ) و (علمی ــ تخیلی ,   )}

علیرضا + مریم = {(,۴۰۰۰ +   ) و (,۴۰۰۰ +   )}

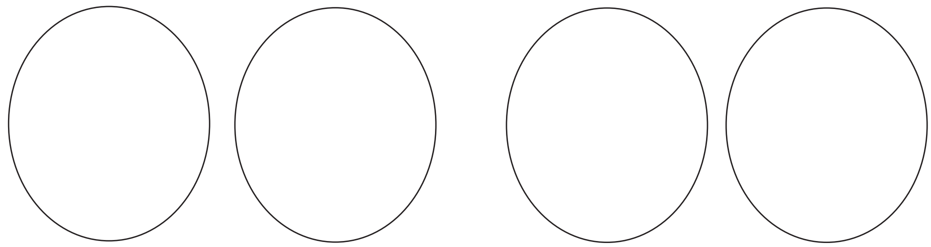
کار در کلاس

۱. اگر در روز دوشنبه علیرضا بخواهد مادرش را به تماشای یک فیلم در سینما دعوت کند، با توجه به جدول ۱ و جدول۳ :

الف. نمایش‌های پیکانی مشابه فعالیت صفحهٔ قبل را برای هرکدام رسم کنید.

علیرضا — هزینه بلیت، سبک فیلم

مادر — هزینه بلیت، سبک فیلم



ب. با توجه به اشتراک سبک فیلم موردعلاقهٔ هرکدام، نمایش زوج‌مرتبی تابعی را بنویسید که علیرضا و مادرش می‌توانند به تماشای فیلمی در سینما بنشینند.

ج. هزینه‌ای که در این روز علیرضا صرف می‌کند، چقدر است؟

۲. پنج‌شنبه علیرضا می‌خواهد همهٔ اعضای خانواده‌اش را به تماشای یک تئاتر ببرد. با استفاده از جدول۱ و جدول۴،

الف. نمایش زوج‌مرتبی هرکدام از اعضای خانواده و سپس نمایش زوج‌مرتبی شرایطی را که همهٔ آنها به تماشای یک تئاتر می‌روند، مشخص کنید.

ب. علیرضا در این روز چه میزان هزینه می‌کند؟

با توجه به فعالیت مطرح‌شده پرسش مهم زیر را پاسخ می‌دهیم :

با چه شرایطی می‌توان دو تابع f و g را با یکدیگر جمع کرد؟

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این اشتراک داریم :

$$(f+g)(x) = f(\mathrm{x}) + g(x)$$

برای مثال اگر :

$f = \{(۱ , ۲)$ و $(-۳ , ۴)$ و $(۳$ و $۵)$ و $(۷ , -۱)\}$

و

$g = \{(۲ , ۱)$ و $(۳ , -۱)$ و $(۷ , ۲)\}$

فرض شود با توجه به دامنه‌های دو تابع f و g :

$D_f = \{۱ , -۳ , ۳ , ۷\}$

$D_g = \{۲ , ۳ , ۷\}$

اشتراک دو دامنه برابر است با :

$D_f \cap D_g = \{۳ , ۷\}$

پس تابع $f+g$ این‌گونه مشخص می‌شود :

$f+g = \{(۳, -۱ + ۵)$ و $(۷,۲+(-۱))\} = \{(۳,۴)$ و $(۷,۱)\}$

فعالیت

با توجه به ضابطه‌های $f_1(x) = x^2-1$ و $f_2(x) = x+1$ ، ضابطهٔ توابع زیر را به دست آورید :

$f_3(x) = f_1(x)+f_2(x) = (x^2-1)+(x+1) =$ $\qquad$ $f_3(x) =$

$f_4(x) = f_1(x)-f_2(x) =$ $\qquad$ $f_4(x) =$

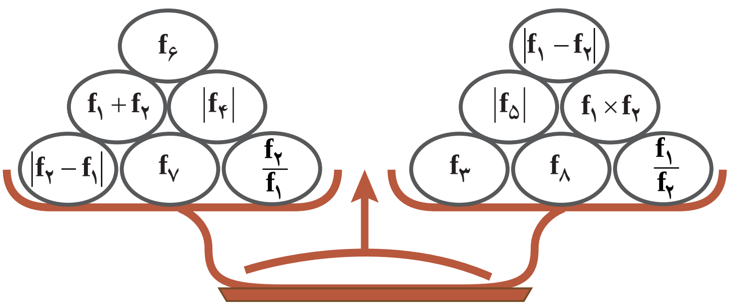
$f_5(x) = f_2(x)-f_1(x) =$ $\qquad$ $f_5(x) =$

$f_6(x) = f_1(x)\times f_2(x) =$ $\qquad$ $f_6(x) =$

$f_7(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} =$ $\qquad$ $f_7(x) =$

$f_8(x) = \dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} =$ $\qquad$ $f_8(x) =$

اگر مقادیر تابع‌های f_3 تا f_8 به ازای $x=2$ نمادهای وزنه‌های کفه‌های ترازو باشند، چرا دو کفهٔ ترازو با هم برابرند؟ از این پاسخ چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آید؟



عمل‌های جمع، تفریق، ضرب وتقسیم روی دو تابع به صورت زیر تعریف می‌شوند :

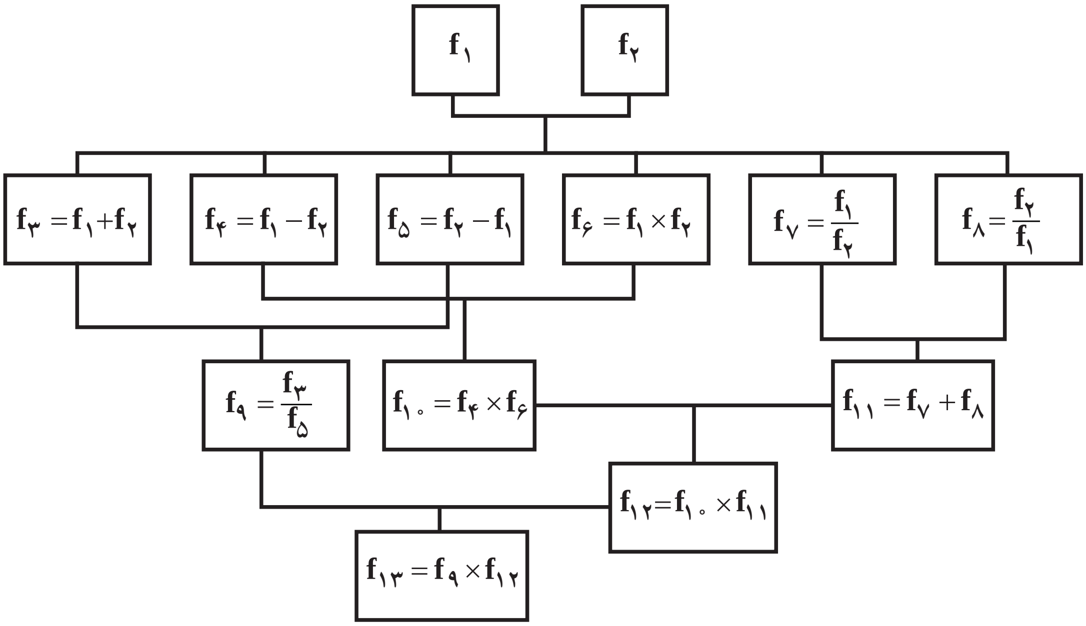
$(f\pm g)(x) = f(x)-g(x)$ $\qquad$ $D_{f\pm g} = D_f\cap D_g$

$(f\times g)(x) = f(x)\times g(x)$ $\qquad$ $D_{f\times g} = D_f\cap D_g$

$(\dfrac{f}{g})(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $\qquad$ $D_{\frac{f}{g}} = D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$

کار در کلاس

۱. باتوجه به ضابطهٔ $f_1(x) = x+1$ و $f_2(x) = x-1$ درخت زیر را به ازای $x=2$ کامل کنید.



۲. اگر {(۳و۱–) و (۱– و۴) و (۰و۲)} = f و {(۲و۱–) و(۱–و۳) و (۵و۲)} = g باشد، توابع زیر را مشخص کنید.

$f+g =$

$f \times g =$

$\frac{g}{f} =$

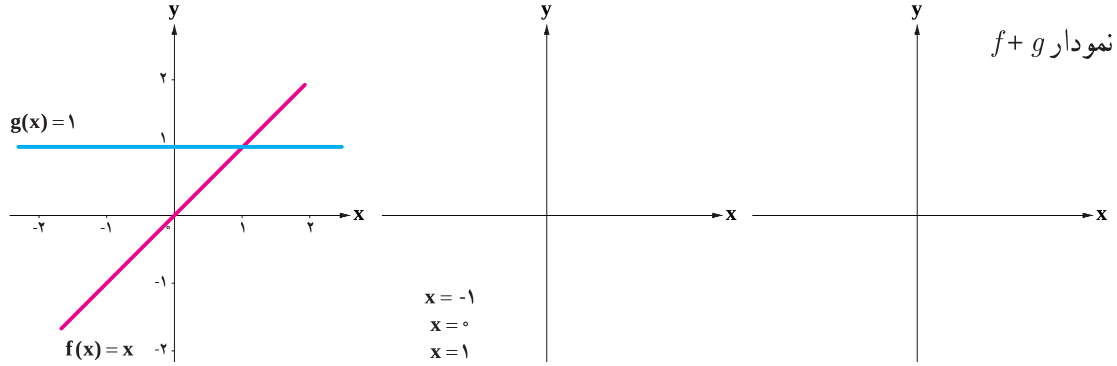
$\frac{f}{g} =$

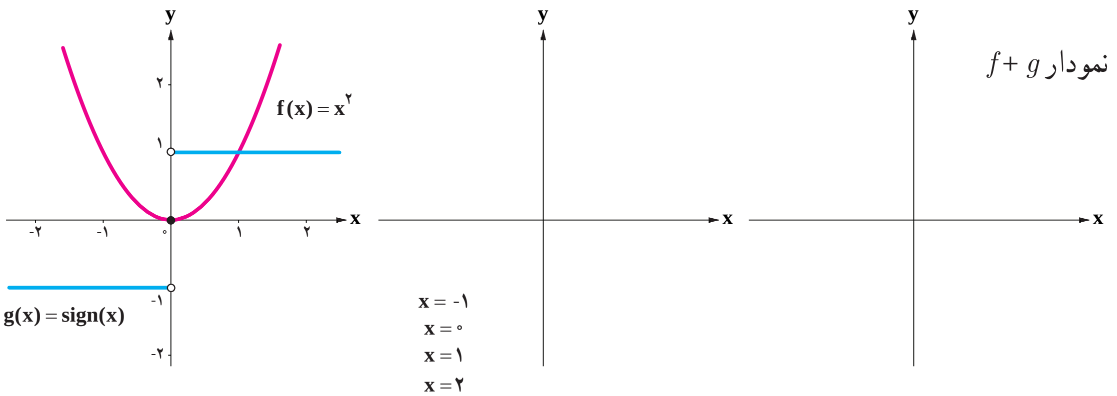
$f-g =$

$g-f =$

فعالیت

به کمک نمودارهای رسم‌شدهٔ توابع f و g، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده‌شده مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $f+g$ را به کمک ضابطهٔ تابع آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید.

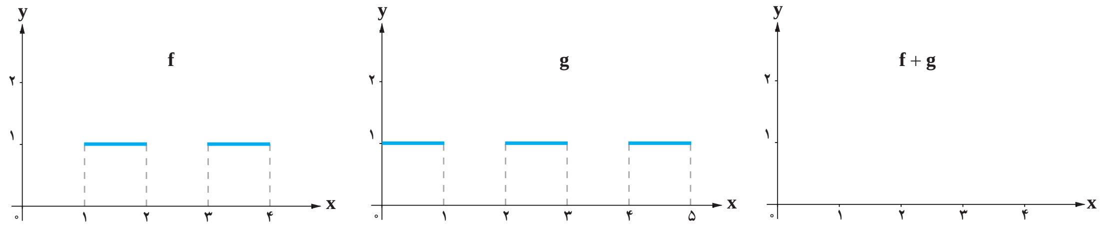




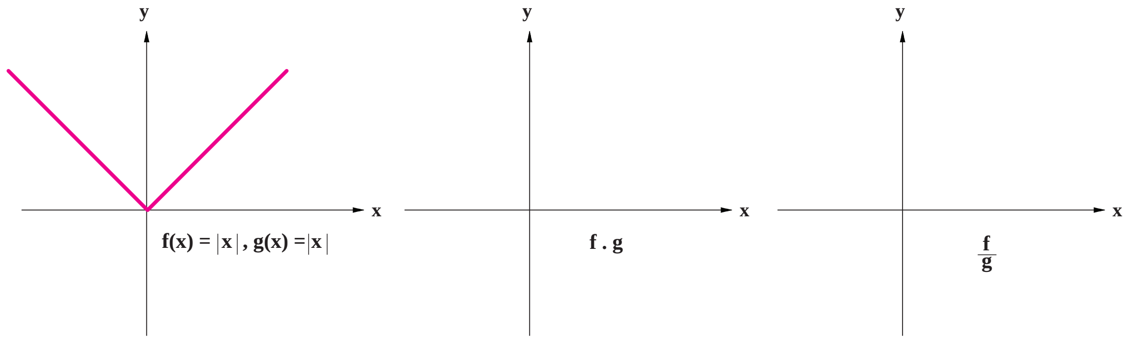
تمرین

۱. در هر حالت با توجه به نمودارتوابع f و g، نمودار توابع خواسته‌شده را رسم کنید.

الف)



ب)



۲. یک شرکت هولدینگ[1] دارای دو کارخانه A و B است. اگر توابع درآمد و هزینه برای تولید x تن کاشی در کارخانهٔ A به ترتیب $-2x^2+16x$ و $6x+8$ و در کارخانهٔ B به ترتیب $-x^2+12x$ و $2x+9$ واحد باشد (هر واحد معادل یک میلیون تومان):

الف. تابع سود شرکت هولدینگ را به‌دست آورید.

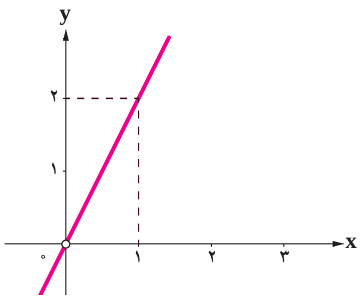
ب. این هولدینگ با چه میزان تولید کاشی به سود ماکزیمم خود می‌رسد؟

۳. اگر $f(x)=[x]$ با دامنهٔ $0 \leq x \leq 1$ و $g(x) = |x|$ با دامنهٔ $1 \leq x \leq 2$ و $h(x) = x^2-4$ با دامنهٔ $-1 \leq x \leq 1$ در نظر گرفته شود، جدول زیر را کامل کنید.

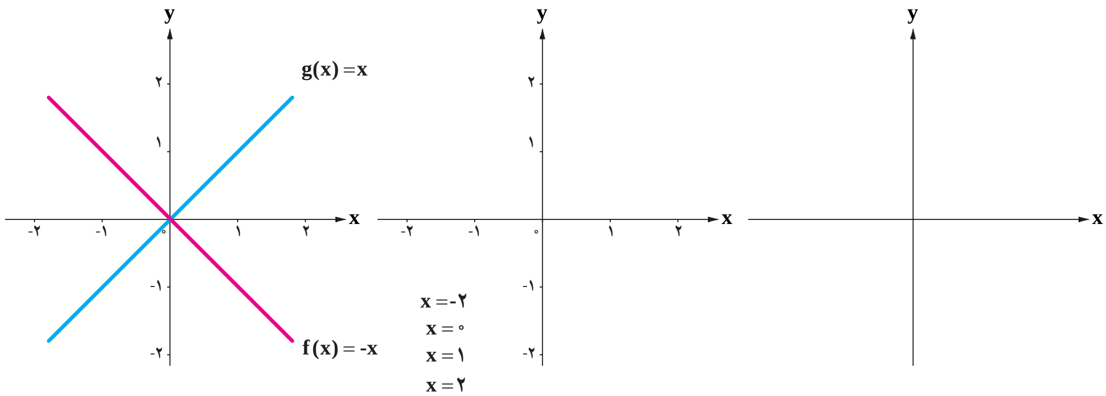
تابع	ضابطه	نمودار
$s(x) = f(x) + g(x)$	$s(x) =$	
$q(x) = \dfrac{h(x)}{f(x)}$	$q(x) =$	
$p(x) = h(x) \times g(x)$	$p(x) =$	

۱. هولدینگ از واژهٔ لاتین Hold به معنای نگه داشتن می‌آید. شرکت هولدینگ یا مادر، شرکتی سهامی است که دارای «شرکت‌های زیرمجموعه» است. کنترل شرکت‌های زیرمجموعه مستقیماً زیر نظر مدیران و هیئت مدیره شرکت اصلی است.

۴. اگر $f(x) = x^{2}$ و تابع $(\frac{f}{g})(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطهٔ تابع $g(x)$ را بدست آورید؟



۵. به کمک نمودارهای رسم‌شدهٔ توابع f و g، نمودار تابع $f+g$ را ابتدا فقط در نقاط داده‌شده، مشخص کنید. سپس نمودار کلی تابع $(f+g)$ را به کمک ضابطهٔ آن و نیز نقاط مشخص‌شده از تابع، رسم کنید.



خواندنی ۱

چرا در عبارات جبری به جای متغیر از حرف x استفاده می کنیم؟

در آثار ریاضی اسلامی برخی از اصطلاحات مانند نماد استفاده می‌شدند. یکی از این اصطلاحات کلمهٔ «شی» است که آن را به جای مجهول به‌کار می‌بردند. اولین ترجمهٔ کتاب‌های ریاضی دورهٔ اسلامی به زبان اسپانیایی انجام گرفت. مشکل علمای قرون وسطایی اسپانیا که وظیفه‌شان ترجمهٔ چنین متونی بود، در این زمینه این بود که حرف «ش» و کلمهٔ «شی» قابل تبدیل به زبان اسپانیایی نبود. به دلیل آنکه در اسپانیا صدای «ش» یا «sh» وجود ندارد. صدای «ck» یا «ک» را از یونانی قدیم به شکل χ یا «کای» جایگزین صدای «ش» یا «sh» کردند و بعدها که این متون به زبان‌های رایج‌تر اروپایی ترجمه شد، حرف یونانی «کای» χ ، با حرف لاتین x جایگزین شد.

خواندنی ۲

صنعت کشاورزی که حتی در نگاه نخستین نیز ساده به‌نظر نمی‌رسد، امروزه برای پاسخ‌گویی به تقاضای روزافزون صنایع غذایی، نیازمند تجزیه و تحلیل دقیق‌تر و فناوری پیشرفته‌تر است. به همین دلیل در سال ۲۰۱۶ و در یک پروژه دانشگاهی، در طرحی جالب، کاری گروهی میان کشاورزان، ریاضی‌دانان و متخصصان مهندسی آب با هدف کاهش مصرف آب و البته تمرکز بر کم نشدن میزان محصول شکل گرفت؛ چنان‌که در تأمین بازار و سود کشاورزان خللی به‌وجود نیاید.

برای این هدف یک مدل ریاضی آبیاری طراحی شد که موارد زیر در آن به دقت در نظر گرفته شده بود :

ــ رابطهٔ میان رشد گیاه و مصرف آب در هر مرحله از رشد

ــ بهترین زمان کاشت

ــ مناسب‌ترین مکان کاشت (اینکه در چه زمین‌هایی کاشت انجام شود و در چه زمین‌هایی بستر کاشت مهیا نیست)

نقطهٔ عطف این طرح این بود که کشاورزان هرگز تصور نمی‌کردند چه اطلاعات مهم و تعیین کننده‌ای در اختیار دارند که با این اطلاعات می‌توان به یک مدل ریاضی برای کاشت محصول دست یافت.

امروزه کمک گرفتن از مدل‌های ریاضی در کشاورزی که بر اساس اطلاعات دقیق کشاورزان طراحی می‌شوند، در صنعت کشاورزی نوین به شکل‌گیری شاخه‌ای به نام «کشاورزی دقیق» (Precision farming) انجامیده است. در این شاخه به جمع‌آوری و بررسی داده‌ها بسیار اهمیت داده می‌شود.

مثالی دیگر در این زمینه، طراحی مدلی برای استفاده از کودهای شیمیایی است. در حال حاضر به کمک ماشین‌آلات مجهز به GPS برای نمونه‌برداری از خاک زمین‌های کشاورزی و اطلاعات تجربی کشاورزان می‌توان فهمید که چه بخشی از زمین به کود شیمیایی بیشتر و چه بخشی به کود کمتر نیاز دارد. برآیند این اطلاعات سبب می‌شود که تا میزان قابل توجهی از استفادهٔ بی‌رویهٔ کود شیمیایی جلوگیری شود که نتیجهٔ مستقیم و مفید آن کمتر شدن چشمگیر نیترات در منابع آبی؛ به‌ویژه آب‌های کشاورزی است.