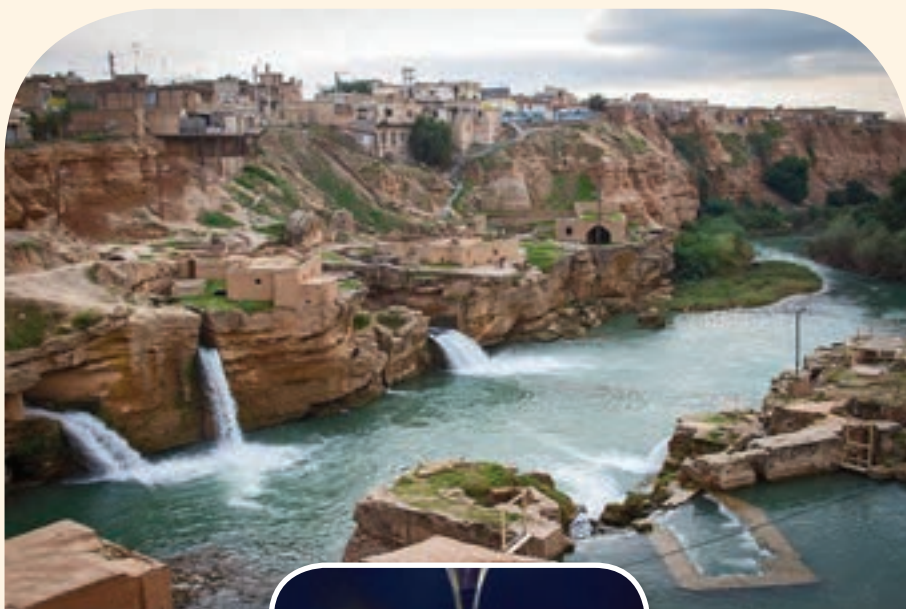




توان و ریشه

وَ جَعَلْنَا مِنَ الْمَاءِ كُلَّ شَيْءٍ حَيٍّ
هر چیز زنده‌ای را از آب پدید آوردیم
(سوره انبیا، آیه ۳۰)



یک قطره آب شامل حدود ۳۳ میلیارد میلیارد مولکول یا به عبارت دیگر
۳۳,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ مولکول است که می‌توان آن را به صورت $3/3 \times 10^{19}$
نمایش داد. هر گونه حیاتی به آب نیاز دارد. قدر این نعمت الهی را بدانیم.

درس اول: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر a عددی غیرصفر باشد، $a^0=1$.

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل 2^{-3} چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2°	2°	2°	2°	2°

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا 2^0 با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

ه) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} =$$

$$2^{-4} =$$

$$2^{-5} =$$

به طور کلی اگر a یک عدد غیرصفر باشد و n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال:

الف) $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د) $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

۱- با توجه به مثال‌های حل شده‌ی زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان

طبیعی بنویسید :

الف) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$ ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج) $(-6)^{-3} = \frac{1}{\quad} = \quad = \quad$ د) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \quad = \quad = \quad$

به طور کلی اگر n یک عدد طبیعی و $a \neq 0$ آن‌گاه: $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارتهای برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید: $(x \neq 0, y \neq 0)$

2^{-2}	x^{-1}	$(xy)^{-1}$	$(-2)^2$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$	xy^{-1}	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$
$\frac{1}{x}$	5^3	$\frac{1}{4}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{5}{2}$	4

←————→

۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} =$

و) $1^{-2} =$

ب) $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} =$

ز) $\frac{(-3)^0}{3} =$

ج) $-(-5)^2 =$

ح) $-\frac{1}{2^{-2}} =$

د) $-(-5)^{-2} =$

ط) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$

ه) $-5^{-2} =$

ی) $2^0 - 2^{-1} =$

اگر m و n دو عدد طبیعی باشند، و a یک عدد دلخواه باشد، داریم: $a^m \times a^n = a^{m+n}$
 آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟
 با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^3 \times 5^{-7} = \dots\dots\dots$$

در حالت کلی اگر m و n دو عدد صحیح باشند و a یک عدد دلخواه (غیرصفر)،
 رابطه زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^4) \times (4x^3) = 24x^{-1+4+3} = 24x^6 \quad (x \neq 0)$$

کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: ($b, x, y \neq 0$)

$$5^{-7} \times 5^{10} =$$

$$(-4)^{-9} \times (-4)^{-1} =$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} =$$

$$(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} =$$

$$b^{-2} \times b^{-3} =$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} =$$

اگر a و b دو عدد مخالف صفر و m و n دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; \quad a^0 = 1$$

کار در کلاس

حاصل عبارتهای زیر را به صورت توان دار بنویسید.

الف) $\frac{7^3}{5^5} =$

ب) $2^{-2} \times 5^{-2} =$

ج) $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} =$

د) $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} =$

ه) $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^4 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^4} \times \frac{5^{10}}{5^6} =$

و) $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} =$ $x, y, z \neq 0$

تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$

ب) $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

ج) $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$

د) $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$

ه) $5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$

و) $(-2)^2 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود 10^{-24} گرم است. جرم یک وزنه 100 کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- عددهای 16^2 و 8^4 و 2^{11} را با یکدیگر مقایسه کنید.

۴- در جاهای خالی علامت $>$ ، $<$ یا $=$ قرار دهید:

الف) $3^{-1} \bigcirc 3^{-2}$

ب) $2^0 \bigcirc 2^{-5}$ ج) $(0/5)^{-2} \bigcirc (0/6)^{-2}$

د) $5^{-1} \bigcirc 5^0$

ه) $\left(\frac{-8}{15}\right)^0 \bigcirc 1$ و) $-5^{-2} \bigcirc (-5)^{-2}$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر x چه عددی است؟

الف) $5^x \times 5^{-2} = 5^4$

ب) $5^x \div 5^{-2} = 5^4$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف) $a^4 \times a^5 = a^{20}$

ه) $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$

ب) $a^4 \times a^5 = a^9$

و) $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$

ج) $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > 0$

ز) $6^{-2} = -\frac{2}{6}$

د) $3^{-2} = -9$

ح) $3^{-1} < 3^{-1}$

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 27^{-3}$

ب) $(0/2)^{-4} \times 25^{-2}$

ج) $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4$

د) $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

2^{-2} و 1^{-9} و $(-1)^{21}$ و $(-7)^2$ و $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$ و 2^3 و 5^{-2} و 2^{-3}

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^0 < 1^0$ $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$ $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < (0/7)^2$ $\left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0/75)^2$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}}$

ب) $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$

فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های 10^0 یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های 10^0 خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

عدد	تقسیم بر 10^0	ضرب در 10^0	تقسیم بر 10^0	ضرب در 10^0	تقسیم بر 10^0	ضرب در 10^4	تقسیم بر 10^4	ضرب در 10^5	تقسیم بر 10^5
۱۵									
0.02									
$9/3$									

۲- سرعت نور $300,000,000$ متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در 100 ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که پاسخ چگونه به دست آمده است.

$$\text{فاصله‌ای که نور در } 100 \text{ ساعت می‌پیماید} = 300000000 \times 360000 = 1 \text{ ساعت}$$

$$\text{ثانیه } 360000 = 100 \text{ ساعت}$$

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد 10^0 نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند؛ بنابراین:

$$300000000 = 3 \times 10^8$$

$$360000 = 3/6 \times 10^5$$

$$\Rightarrow 3 \times 10^8 \times 3/6 \times 10^5 = 10/8 \times 10^{13} = 1/0.8 \times 10^{14}$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

مثال:

$$124000 = 1/24 \times 10^5$$

$$1700000000 = 1/7 \times 10^9$$

$$1393 = 1/393 \times 10^2$$

$$9204000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^2$$

قطر متوسط یک یاخته (سلول) گویچه^۱ (گلبول) قرمز 7×10^{-7} میلی متر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند 7×10^{-7} را هم می توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی:

$$7 \times 10^{-7} = 7 \times 10^{-6}$$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود 16×10^{-6} سانتی متر است که با نماد علمی، آن را به صورت $1/6 \times 10^{-3}$ نمایش می دهیم.

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times 10^n$ است که در آن $1 \leq a < 10$ و n عددی صحیح است.

$$1275000 = 1/275 \times 10^{-5}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

مثال:

$$13700 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$290000 = 2/9 \times 10^4$$

کار در کلاس

۱- هریک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$245000 =$$

$$150000000 =$$

$$0/005 =$$

$$0/000061 =$$

$$1404 =$$

$$0/1275 =$$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید:

$$5/2 \times 10^{-3} =$$

$$7/304 \times 10^{-5} =$$

$$2/28 \times 10^8 =$$

$$9/4612 \times 10^9 =$$

$$6/02 \times 10^{-2} =$$

$$1/1 \times 10^4 =$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

$$\text{الف) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$$

$$\text{ب) } \frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}}$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$$

$$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$$

$$4/3 \times 10^2 = 4300$$

$$7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$$

$$6/18 \times 10^7 = 61800000$$

$$8/2570 \times 10^4 = 82570$$

۳- شعاع خورشید تقریباً 695000 کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴- اندازه یک باکتری 0.0000005 متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵- قطر خورشید حدود $1/4 \times 10^9$ متر و قطر زمین حدود $1/3 \times 10^7$ متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9$$

$$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}}$$

۷- فاصله مریخ از زمین $9/17 \times 10^7$ کیلومتر و فاصله کیوان از زمین $6/287 \times 10^8$ کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2/7 \times 10^0 > 0.2 \quad 0.3 > 0.03 \times 10^0$$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$$