

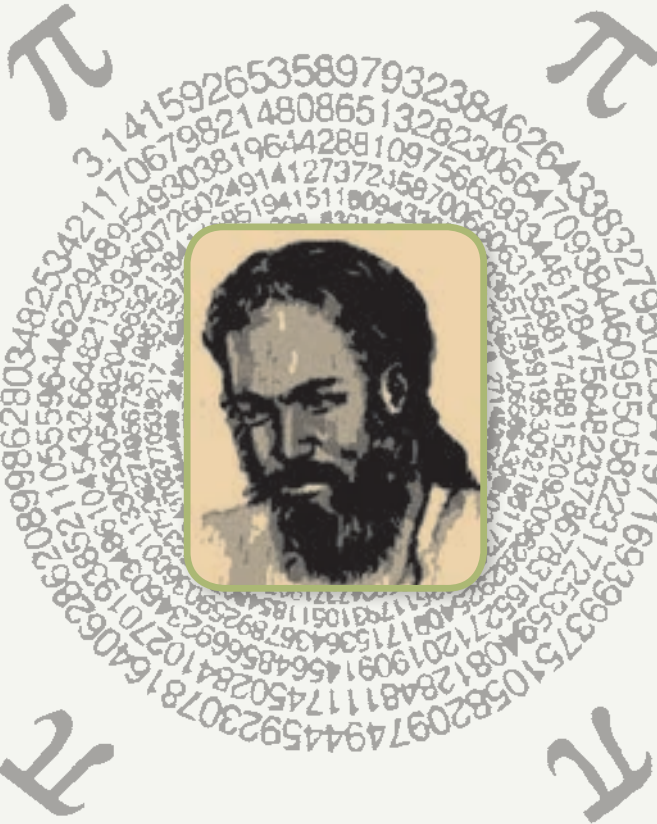


# عددهای حقیقی

«... وَ أَحَاطَ بِمَا لَدَيْهِمْ وَ أَحْصَى كُلَّ شَيْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه چیز را به عدد

شمارش کرده است.» (سوره جن، آیه ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دوره اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد  $\pi$  که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رساله محیطیه خود به زبان ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:  
«به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

۱- در فصل گذشته با نمایش‌های مختلف مجموعه‌های اعداد آشنا شدید. عبارت‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید:

ردیف	عبارت کلامی	زبان نمادین	محور
۱	عددهای طبیعی بیشتر یا مساوی ۳	$\{x \in \mathbb{N}   x \geq 3\}$ $\{3, 4, 5, \dots\}$	
۲	عددهای حسابی	$\{x \in \mathbb{W}   x \leq 2\}$	
۳	عددهای صحیح بین -۳ و ۲	$\{x \in \mathbb{Z}   \dots\}$	
۴	عددهای صحیح بزرگ‌تر از -۱	$\{ \dots \}$	

نامساوی  $x \geq 3$  برای کدام یک از عددهای زیر درست است؟

۱، ۲، ۳، ۴، ۵

۲- می‌خواهیم بین  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{1}{2}$  چند کسر بنویسیم. روش‌های مختلفی را که چهار دانش‌آموز نوشته‌اند، بررسی و کامل کنید؛ راه حل هر کدام را توضیح دهید.

روش بهار

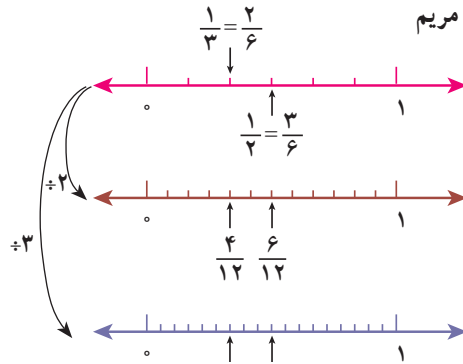
$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{6} < ? < \frac{3}{6}$$

$$\frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12}$$

$$\frac{6}{18} < \frac{7}{18}, \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

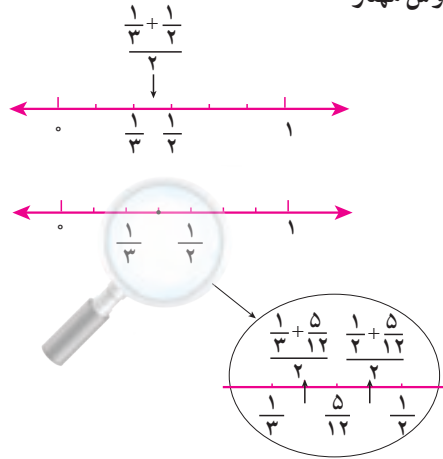
روش مریم



$$\frac{1}{3} < ? < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$$



الف) با یکی از روش‌ها توضیح دهید که چرا بین دو کسر می‌توان بی‌شمار، کسر پیدا کرد.

ب) آیا مجموعه عددهای گویا را می‌توان با نوشتن عضوها نشان داد؟ چرا؟

ج) آیا می‌توان مجموعه عددهای گویا را با محور اعداد نمایش داد؟

د) عددهای گویا را به زبان نمادین معرفی کنید.

$$\left\{ \frac{a}{b} \mid \right\}$$

## کار در کلاس

۱- بین  $\frac{2}{5}$  و  $\frac{3}{4}$  سه کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

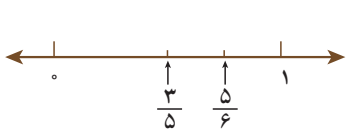
۲- بین  $-\frac{1}{2}$  و  $-1$  دو کسر پیدا کنید؛ روش خود را توضیح دهید.

## فعالیت

۱- می‌خواهیم کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  و  $\frac{7}{8}$  و  $\frac{5}{9}$  را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسیم.

روش‌های مختلفی را که دانش‌آموزان به کار برده‌اند، با هم مقایسه کنید؛ هر کدام را توضیح دهید و در

صورت لزوم کامل کنید.



روش شاهد: شاهد به صورت تقریبی کسرهای  $\frac{3}{5}$  و  $\frac{5}{6}$  را روی محور مشخص کرده است. آیا به نظر شما استفاده از این روش برای نمایش دو کسر دیگر مناسب است؟

روش مرتضی: مرتضی مخرج مشترک کسرها را پیدا کرد و با هم مخرج کردن کسرها، آنها را مقایسه می‌کند. توضیح دهید که عدد  $36^\circ$  چگونه به دست می‌آید. کار مرتضی را کامل کنید:

$$\frac{5}{9} = \frac{\quad}{36^\circ} \quad \frac{7}{8} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{5}{6} = \frac{\quad}{\quad} \quad \frac{3}{5} = \frac{\quad}{\quad}$$

روش مجید: مجید به کمک ماشین حساب، نمایش اعشاری هر کسر را تا دو رقم اعشار نوشت. شما کار او را کامل، و کسرها را مقایسه کنید:

$$\frac{5}{9} = 0.\underline{\quad}\underline{\quad} \quad \frac{7}{8} = \underline{\quad} \quad \frac{5}{6} = \underline{\quad} \quad \frac{3}{5} = \underline{\quad}$$

در مورد روش‌های مختلف و ویژگی‌های هر کدام در کلاس گفت‌وگو کنید.

۲- با استفاده از تقسیم، نمایش اعشاری کسرهای زیر را بنویسید:

$$\frac{3}{8} = \underline{\quad} \quad \frac{1}{3} = \underline{\quad} \quad \frac{7}{6} = \underline{\quad}$$

الف) بین نمایش اعشاری این کسرها چه تفاوتی هست؟

$$1 \div 3 = 0.33333$$

در نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{3}$ ، رقم ۳ به‌طور متناوب تکرار می‌شود و انتها ندارد؛ ولی نمایش اعشاری کسر  $\frac{1}{5}$  متناهی یا مختوم است؛ چون تمام رقم‌های اعشار آن مشخص است و به انتها می‌رسد. از نماد زیر برای نمایش عددهای اعشاری متناوب استفاده می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} = 0.\underline{3}\underline{3}\underline{3}\dots = 0.\underline{3} \quad \frac{7}{6} = 1.\underline{1}\underline{6}\underline{6}\underline{6}\dots = 1.\underline{1}\underline{6}$$

نمایش اعشاری هر یک از کسرهای زیر را بنویسید :

$$\frac{5}{11} =$$

$$\frac{7}{9} =$$

$$\frac{5}{6} =$$

$$\frac{7}{22} =$$

$$\frac{3}{20} =$$

$$\frac{5}{16} =$$

اگر به نمایش اعشاری کسرهای بالا دقت کنید، خواهید دید که فقط کسرهایی نمایش اعشاری مختوم دارند که (پس از ساده شدن) مخرج آنها شمارنده اولی به جز ۲ و ۵ ندارد.

### تمرین

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و تا حد امکان ساده کنید :

$$\left(-2\frac{5}{6} + 3\frac{1}{2}\right) \div \left(-1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$\frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}} \div 5\frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{-5}{6} \div \frac{7}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{-1 - \frac{1}{-1 - \frac{1}{3}}}$$

۲- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

الف)  $\frac{7}{8}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, -3\frac{5}{6}$

ب)  $\frac{16}{7}, -\frac{3}{4}, 2/75, -\frac{5}{6}, 4\frac{3}{5}, \frac{56}{13}$

۳- بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف)  $\frac{1}{11}, \frac{12}{13}$

ب)  $0, -\frac{1}{3}$





مثال:  $\sqrt{7}$  بین دو عدد صحیح ۲ و ۳ قرار دارد.

می‌دانیم ۴ و ۹ دو عدد مجذور کامل قبل و بعد از ۷ است؛ یعنی:

$$4 < 7 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{7} < 3$$

## کار در کلاس

۱- بین  $\sqrt{5}$  و  $\sqrt{10}$ ، چهار عدد گنگ بنویسید.

۲- بین دو عدد ۲ و ۳، چهار عدد گنگ بنویسید.

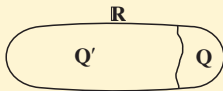
۳- الف) مجموعه  $A$  به صورت  $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 2 \leq x \leq 3\}$  را در نظر بگیرید. آیا نمایش  $A$  به

صورت زیر درست است؟



ب) نقطه نمایش  $\sqrt{5}$  را روی محور مشخص کنید.

عددها به دو دسته، عددهای گویا و عددهای گنگ



دسته‌بندی می‌شود. اجتماع مجموعه عددهای گویا و عددهای اصم را مجموعه عددهای حقیقی می‌نامیم و آن را با  $\mathbb{R}$  نمایش

می‌دهیم. داریم:  $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$

مثال:

$$0 \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{10} \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{5}{6} \in \mathbb{Q}$$

$$0.75 \in \mathbb{R}$$

$$0.2022022202222\dots \in \mathbb{R}$$

$$\pi \in \mathbb{R}$$

$$\frac{5}{\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

## کار در کلاس

۱- داخل  $\circ$  علامت  $\in$  یا  $\notin$  بگذارید:

$$4 \circ \mathbb{Z}$$

$$0.2 \circ \mathbb{Q}$$

$$\sqrt{18} \circ \mathbb{R}$$

$$\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \circ \mathbb{R}$$

$$-5 \circ \mathbb{R}$$

$$-\frac{7}{3} \circ \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{25} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\frac{0}{6} \circ \mathbb{R}$$

$$\sqrt{3/5} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0/9} \circ \mathbb{Q}'$$

$$\sqrt{0.09} \circ \mathbb{Q}$$

$$\frac{9}{-1} \circ \mathbb{Z}$$



۲- مجموعه‌های سطر اول را به مجموعه مناسب در سطر دوم وصل کنید. هر مجموعه در سطر اول با یک مجموعه در سطر دوم مساوی است.



## فعالیت

با توجه به اینکه مجموعه عددهای حقیقی تمام عددها را شامل می‌شود، مجموعه‌های زیر را



مانند نمونه روی محور نشان دهید:

با توجه به مجموعه  $A$  چرا نقطه ۲ روی محور توپر و نقطه ۳ روی محور توخالی است؟

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 6\}$$

## کار در کلاس

۱- مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید و یا با توجه به محور، مجموعه متناظر آن را بنویسید:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\} \quad \text{(الف)}$$

$$B = \{ \quad \quad \quad \} \quad \text{(ب)}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\} \quad \text{(ج)}$$

۲- با توجه به سه مجموعه  $A$  و  $B$  و  $C$  در سؤال ۱ عبارات درست را با علامت  $\checkmark$  مشخص کنید:

$0.75 \in A$	$0.252552555... \in B$	$\sqrt{3} \in A$
$\sqrt{7} \in C$	$\sqrt{1} \in A$	$-1000 \in C$

۳- کدام یک از مجموعه‌های زیر با مجموعه نقاط روی شکل زیر، برابر است؟

(الف)  $\{-1, 0, 1, 2, 3\}$



(ب)  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

(ج)  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

۱- با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اول کامل کنید :

مجموعه اعداد	$\sqrt{3/2}$	$\frac{1}{2}$	$\circ$	$\pi$	$-\frac{3}{4}$	$0.292292229\dots$	$-1^\circ$	$\frac{6}{2}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	x	x	x	x	x	x	x	✓
$\mathbb{W}$ حسابی								
$\mathbb{Z}$ صحیح								
$\mathbb{Q}$ گویا								
$\mathbb{Q}'$ گنگ								
$\mathbb{R}$ حقیقی								

۲- در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف)  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1/5 < x < 5\}$  ,  $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1/5 < x < 5\}$

ب)  $C = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  ,  $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 9\}$

۳- طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} =$       ۲)  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' =$       ۳)  $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} =$       ۴)  $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' =$

۴- عدد  $1 + \sqrt{5}$  بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۵- بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

۵ و ۲- الف) ۶ و ۷ ب)  $\sqrt{3}, 6$  ج)  $\sqrt{2}, \sqrt{4/1}$  د)

۶- عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست

مثال بزنید.

۱)  عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد.


۲)  عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

۳)  عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد.

۴)  عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد.

۷- در نمایش اعشاری عدد  $\sqrt{10}$  و عدد  $\frac{3}{11}$  چه تفاوتی هست؟

## فعالیت

- ۱- با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید:
- 
- نقاط A و B چه عددی را نمایش می‌دهد؟  
فاصله نقطه A از O یا طول پاره خط OA چقدر است؟  
فاصله نقطه B از O یا طول پاره خط OB چقدر است؟  
می‌خواهیم نقاطی را روی محور بیابیم که فاصله آن از O برابر ۲ باشد.
- ۲- نقطه C را روی محور نمایش دهید به طوری که طول OC برابر ۲ باشد؛ چند نقطه می‌توان یافت؟

فاصله نقطه نمایش عدد a را از مبدأ، قدر مطلق a می‌نامیم و با علامت |a| (بخوانید قدر مطلق a) نمایش می‌دهیم؛ بنابراین در مثال بالا می‌توان نوشت:  $|-2| = |2| = 2$

مثال: فاصله نقاط نظیر دو عدد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  تا مبدأ برابر  $\frac{2}{3}$  است؛ پس قدر مطلق هر دو عدد

$$\frac{2}{3} \text{ و } (-\frac{2}{3}) \text{ برابر } \frac{2}{3} \text{ است؛ یعنی: } |\frac{2}{3}| = |-\frac{2}{3}| = \frac{2}{3}$$

مثال: قدر مطلق  $-\sqrt{5}$  را به صورت  $|\sqrt{5}|$  نشان می‌دهیم که مساوی  $\sqrt{5}$  است. قدر مطلق

$400$  را به صورت  $|400|$  نشان می‌دهیم که مساوی  $400$  است.

قدر مطلق صفر، مساوی صفر و قدر مطلق عددهای مثبت برابر خود آن عدد

است. قدر مطلق هر عدد منفی، قرینه آن است. اگر a یک عدد حقیقی باشد:

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

مثال: به محاسبات زیر توجه کنید:

$$|10 - 20 + 5| = |-5| = 5$$

$$|(-6) \times (+10)| = |-60| = 60$$

۱- جملات سمت راست را به عبارات مناسب در سمت چپ وصل کنید :

- |                   |                                     |
|-------------------|-------------------------------------|
| ۱) $a > 0, b < 0$ | الف) دو عدد $a$ و $b$ مثبت است.     |
| ۲) $a > 0, b > 0$ | ب) عدد $a$ نامنفی است.              |
| ۳) $a \geq 0$     | ج) دو عدد $a$ و $b$ منفی است.       |
| ۴) $a < 0, b < 0$ | د) عدد $a$ مثبت و عدد $b$ منفی است. |
| ۵) $a \leq 0$     | هـ) عدد $a$ نامثبت است.             |

۲- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید :

- |                     |                        |
|---------------------|------------------------|
| الف) $a > 0, b > 0$ | ۱) $ab < 0$            |
| ب) $a < 0, b < 0$   | ۲) $ab > 0, a + b > 0$ |
| ج) $a < 0, b > 0$   | ۳) $ab > 0, a + b < 0$ |

۳- هر عبارت سمت راست، نتیجه منطقی یک عبارت در سمت چپ است. عبارات مناسب را به هم وصل کنید :

- |                   |                         |
|-------------------|-------------------------|
| الف) $a \geq 0$   | ۱) $ a  = -a$           |
| ب) $a > 0, b > 0$ | ۲) $ a  = a$            |
| ج) $a < 0$        | ۳) $ a + b  = a + b$    |
| د) $a < 0, b < 0$ | ۴) $ a + b  = -(a + b)$ |

۴- عبارات زیر را به زبان ریاضی بنویسید و برای هر کدام مثال بنویسید :

- ۱) قدر مطلق حاصل ضرب دو عدد، مساوی با حاصل ضرب قدر مطلق آنهاست.
- ۲) قدر مطلق مجموع دو عدد، از مجموع قدر مطلق‌های آن دو عدد، کوچک‌تر یا مساوی با آن است.

مقدار تقریبی عددهای زیر تا یک رقم اعشار نوشته شده است :

$$\sqrt{2} \approx 1/4 \quad \sqrt{3} \approx 1/7 \quad \sqrt{5} \approx 2/2 \quad \sqrt{6} \approx 2/4 \quad \sqrt{7} \approx 2/6 \quad \sqrt{8} \approx 2/8$$

با توجه به مقادیر تقریبی صفحه قبل، تساوی‌های زیر را مانند نمونه کامل کنید و دلیل خود را توضیح دهید :

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = -1 + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1$$

دلیل :  $\sqrt{2} = 1/4$  پس  $1 - \sqrt{2}$  عددی منفی می‌شود :

۱)  $|2 - \sqrt{3}| =$  : دلیل :

۲)  $|\sqrt{7} - \sqrt{8}| =$  : دلیل :

۳)  $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}|$  : دلیل :

۴)  $|-4 - \sqrt{3}| =$  : دلیل :

مثال : اگر  $a = \frac{1}{4}$  و  $b = \sqrt{2}$  و  $c = -3$  باشد، حاصل عبارت  $|a+b+c|$  را به دست می‌آوریم :

$$|a+b+c| = \left| \frac{1}{4} + \sqrt{2} + (-3) \right| = |-2/5 + \sqrt{2}|$$

چون  $-2/5 + \sqrt{2}$  عددی منفی است ( $\sqrt{2} = 1/4$ )، پس حاصل عبارت مساوی با  $(-2/5 + \sqrt{2})$  یعنی  $2/5 - \sqrt{2}$  است.

مثال : 
$$\underbrace{|3 - \sqrt{5}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|-2 - \sqrt{5}|}_{\text{منفی}} = (3 - \sqrt{5}) - (-2 - \sqrt{5})$$

$$= 3 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 5$$

## فعالیت

جدول زیر را کامل کنید :

$\sqrt{a^2}$	$\sqrt{(-3)^2}$	$\sqrt{3^2}$	$\sqrt{6^2}$	$\sqrt{(-6)^2}$	$\sqrt{(-7)^2}$	$\sqrt{(-127)^2}$	$\sqrt{325^2}$
حاصل	۳						

از فعالیت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

با توجه به فعالیت بالا و مفهوم قدر مطلق، می‌توانیم بنویسیم :  $\sqrt{a^2} = |a|$

مثال : برای محاسبه  $\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$  خواهیم داشت :

$$\sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} = \underbrace{|1 - \sqrt{3}|}_{\text{منفی}} = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

۱- عبارتهای زیر را با هم مقایسه کنید :

الف)  $|(-7)^2| \bigcirc |-7|^2$

ب)  $|-8+5| \bigcirc |-8|+|5|$

ج)  $|3-9| \bigcirc |3|-|9|$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

$$|0| = \quad \left| -\frac{4}{3} \right| = \quad |7^3 - 7^4| = \quad |0/2^5 - 0/2^6| =$$

۳- حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

الف)  $\sqrt{(-2595)^2} =$

ب)  $\sqrt{(1394)^2} =$

ج)  $\sqrt{(-3+\sqrt{10})^2} =$

د)  $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} =$

## تمرین

۱- اگر  $a=0/25$ ,  $b=-\frac{1}{4}$ ,  $c=2\frac{1}{3}$  باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید :

$$|a+b| + 2|a-b-c|$$

۲- عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید :

الف)  $|-3\sqrt{5}|$     ب)  $|7-5\sqrt{3}|$     ج)  $|0+\sqrt{5}|$

۳- جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید :

$$|5-12| > 1 + \square$$

۴- مقدار عددی عبارت  $|a|+a$  را به ازای  $a=-2$ ،  $a=0$  و  $a=2$  به دست آورید. آیا می توانید

عددی حقیقی به جای  $a$  قرار دهید که حاصل  $|a|+a$  منفی باشد؟

۵- با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی  $\sqrt{a^2} = a$  را نشان دهید.

۶- حاصل عبارات روبه‌رو را به دست آورید :  $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$      $\sqrt{(1-\sqrt{10})^2}$