

# حرکت شناسی در دو بعد



## فصل

# حرکت شناسی در دو بعد

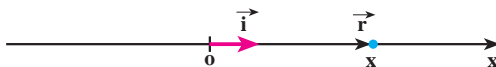
**نگاهی به فصل :** دربارهٔ حرکت‌هایی که در اطراف ما رخ می‌دهد، اغلب، پرسش‌های زیادی برای ما مطرح می‌شود؛ پرسش‌هایی چون : سیاره‌ها در چه مسیرهایی به دور خورشید حرکت می‌کنند؟ چرا هنگامی که فتری را می‌کشیم و رها می‌کنیم، نوسان می‌کند؟ ماهواره‌ها را چگونه در مدار زمین قرار می‌دهند؟ ... پاسخ این پرسش‌ها را باید در علم مکانیک جست‌وجو کرد. علمی که در آن حرکت اجسام مورد بررسی قرار می‌گیرد. هنگامی که چگونگی حرکت را توصیف می‌کنیم، با بخشی از علم مکانیک که حرکت شناسی نامیده می‌شود، سروکار داریم. بخش دیگری از علم مکانیک، دینامیک است که به بررسی رابطهٔ بین حرکت و نیرو می‌پردازد. به این موضوع در فصل بعد خواهیم پرداخت. در فیزیک (۲) و آزمایشگاه تا اندازه‌ای حرکت شناسی در یک بعد را مورد بررسی قرار دادیم، با کمیت‌های مکان، جابه‌جایی سرعت متوسط و ... آشنا شدیم، و حرکت یکنواخت و حرکت با شتاب ثابت بر روی یک خط راست را نیز بررسی کردیم. ما در زندگی روزمره بیشتر با حرکت‌هایی که در دو بعد و سه بعد انجام می‌شوند سروکار داریم، و بررسی آنها اهمیت بیشتری دارد؛ از این رو، در این فصل، پس از یادآوری مطالبی که در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه خوانده‌اید، به بررسی حرکت در دو بعد می‌پردازیم.

## ۱-۱- حرکت در یک بعد

در شکل ۱-۱ جسمی بر روی محور  $x$  نمایش داده شده است. مکان جسم در این شکل با بردار  $\vec{r}$  مشخص شده است. بردار  $\vec{r}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x \vec{i} \quad (1-1)$$

در این رابطه،  $\vec{i}$  بردار یکه در جهت محور  $x$  است.



شکل ۱-۱

هنگامی که جسم روی محور  $x$  حرکت می‌کند، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می‌کند. برای توصیف حرکت جسم، یعنی برای مشخص کردن بردار مکان جسم در لحظه  $t$  کافی است که  $x$  را به صورت تابعی از زمان داشته باشیم :

$$x=f(t) \quad (2-1)$$

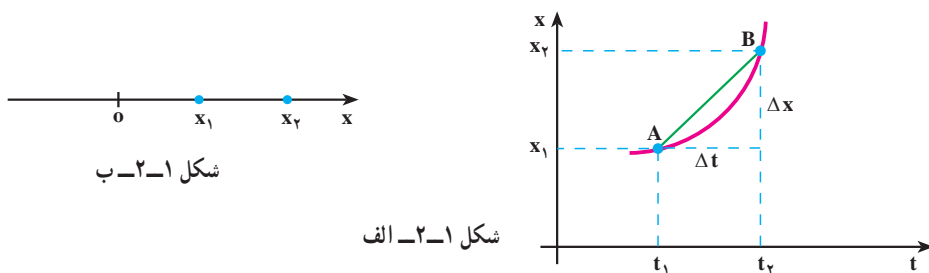
این رابطه، معادله حرکت جسم نامیده می‌شود.

در کتاب فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم که حرکت جسم را می‌توان به صورت نموداری در دستگاه مختصات مکان-زمان نمایش داد؛ به عبارت دیگر، این نمودار با رسم تابع  $x=f(t)$  در دستگاه مختصات  $t-x$  به دست می‌آید.

## تمرین ۱-۱

معادله حرکت جسمی در یک بعد در SI با رابطه  $x = -t^2 + 6t - 8$  بیان شده است. الف) نمودار مکان-زمان آن را رسم کنید. ب) بردار مکان جسم را در زمان‌های  $t = 0, 1, 3$  (s) روی محور  $x$  نمایش دهید.

سرعت متوسط : نمودار مکان-زمان جسمی در شکل ۱-۲ الف نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل ۱-۲ الف نشان داده شده است، متحرک در لحظه  $t_1$  در مکان  $x_1$  (نقطه A) روی نمودار مکان-زمان و در لحظه  $t_2$  در مکان  $x_2$  (نقطه B) قرار دارد.

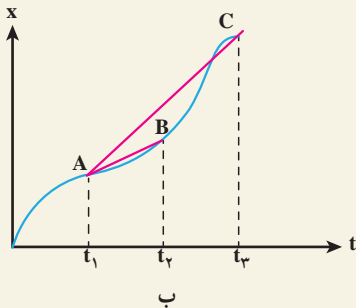
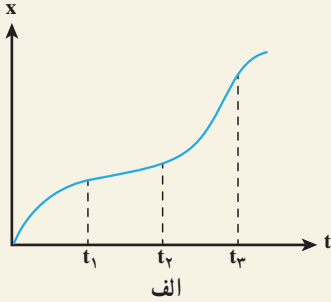


در این شکل،  $\Delta x = x_2 - x_1$  مقدار جابه‌جایی متحرک در بازه زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$ ، و نسبت  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، که شیب خط AB در دستگاه مکان-زمان است، سرعت متوسط متحرک نامیده می‌شود. این کمیت را با  $\bar{v}_x$  نشان دادیم :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3-1)$$

زیرنویس  $x$  مشخص می‌کند که حرکت در راستای محور  $x$  انجام می‌شود.

### مثال ۱-۱



شکل ۱-۳

در نمودار شکل ۱-۳-الف سرعت متوسط را در بازه‌های  $t_2 - t_1$  و  $t_3 - t_1$  با هم مقایسه کنید.

پاسخ : در شکل ۱-۳-ب خط‌های AB و AC به ترتیب بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  و دو لحظه  $t_1$  و  $t_3$  رسم شده‌اند. شیب پاره‌خط AB برابر سرعت متوسط در بازه  $t_2 - t_1$  است و شیب پاره‌خط AC برابر سرعت متوسط در بازه  $t_3 - t_1$  است. و چون شیب پاره‌خط AC بیشتر از شیب پاره‌خط AB است، بنابراین سرعت متوسط در بازه  $t_3 - t_1$  بزرگتر از سرعت متوسط در بازه  $t_2 - t_1$  است.

### مثال ۲-۱

معادله حرکت جسمی در SI با رابطه  $x = 2t^2 + 1$  بیان شده است. سرعت متوسط آن را در بازه‌های زمانی (الف) ۱ تا ۲ ثانیه، (ب) ۱ تا ۱/۱ ثانیه، (پ) ۱ تا ۱/۰۱ ثانیه و (ت) ۱ تا ۱/۰۰۱ ثانیه به دست آورید. (ث) از این مثال به چه نتیجه‌ای می‌رسید؟

پاسخ

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

(الف)

$$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{9 - 3}{2 - 1} = 6 \text{ m/s}$$

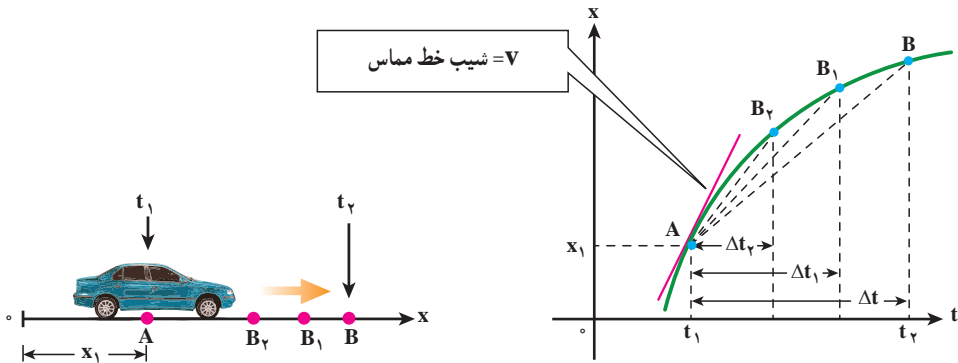
$$\bar{v}_x = \frac{3/42 - 3}{1/1 - 1} = 4/2 \text{ m/s} \quad (\text{ب})$$

$$\bar{v}_x = \frac{3/0.42 - 3}{1/0.1 - 1} = 4/0.2 \text{ m/s} \quad (\text{پ})$$

$$\bar{v}_x = \frac{3/0.0402 - 3}{1/0.01 - 1} = 4/0.02 \text{ m/s} \quad (\text{ت})$$

(ث) همان طور که دیدیم سرعت متوسط در بازه های زمانی کوچک و کوچک تر به یک مقدار مشخص میل می کند.

**سرعت لحظه ای :** دیدیم که سرعت متوسط بین دو نقطه از نمودار مکان - زمان، شیب خطی است که نمودار مکان - زمان را در آن دو نقطه قطع می کند. اکنون می خواهیم ببینیم از دید هندسی با کوچک شدن تدریجی  $\Delta t$ ، سرعت متوسط به چه صورتی در می آید. به این منظور، نمودار مکان - زمان شکل ۱-۴ را در نظر بگیرید. از این شکل در می یابیم اگر بازه زمانی  $\Delta t$ ، کوچک و کوچک تر شود، نقطه B به نقطه A نزدیک و نزدیک تر شده و سرانجام، خط AB در نقطه A بر نمودار مماس می شود. شیب خط مماس را در این حالت، سرعت لحظه ای جسم در لحظه  $t_1$  می نامیم.



شکل ۱-۴ - شکل سمت چپ، اتومبیلی را نشان می دهد که در راستای محور x حرکت می کند. شکل سمت راست، نمودار مکان - زمان حرکت اتومبیل را نشان می دهد. با کوچک شدن  $\Delta t$ ، B به A نزدیک شده و خط واصل در حالت  $\Delta t \rightarrow 0$  تبدیل به خط مماس بر منحنی می شود و شیب آن، سرعت لحظه ای را نشان می دهد.

به عبارت دیگر، هنگامی که  $t_2$  به  $t_1$  نزدیک می شود، یعنی وقتی  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند،

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ سرعت لحظه ای جسم را در لحظه } t_1 \text{ به دست می دهد. پس، سرعت لحظه ای حد سرعت}$$

متوسط است، هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند. سرعت لحظه ای را با  $v_x$  نمایش می دهیم؛  
در نتیجه داریم :

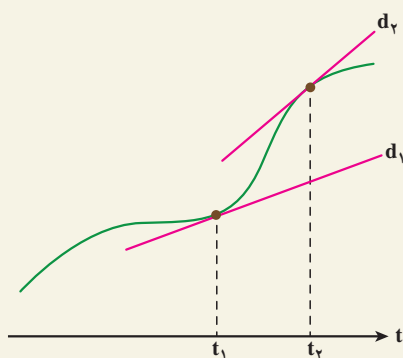
$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4-1)$$

در درس ریاضی دیده اید که این حد برابر مشتق تابع  $x$  نسبت به زمان است که به صورت زیر نوشته می شود :

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad (5-1)$$

اگر  $x = f(t)$  معلوم باشد، از رابطه ۵-۱ می توان  $v_x$  را به صورت تابعی از زمان به دست آورد؛ این تابع، معادله سرعت نامیده می شود. در حالت حدی، وقتی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند، وتر  $AB$  در نقطه  $A$  بر نمودار مکان - زمان مماس می شود. این همان تعبیر هندسی مشتق است که در درس ریاضی خوانده اید. از این پس، سرعت لحظه ای را - به اختصار- سرعت می نامیم.

### مثال ۳-۱



شکل ۵-۱

در شکل ۵-۱ مماس  $d_1$ ، در لحظه  $t_1$   
و مماس  $d_2$  در لحظه  $t_2$  نشان داده شده است.  
در کدام لحظه سرعت بیشتر است؟  
پاسخ : همان طور که در شکل دیده  
می شود شیب  $d_2$  بیشتر از شیب  $d_1$  است و  
بنابراین  $v_2 > v_1$  است (سرعت در لحظه  $t_2$   
بیشتر از سرعت در لحظه  $t_1$  است).

### مثال ۴-۱

در مثال ۲-۱، معادله حرکت متحرک در SI به صورت  $x = 2t^2 + 1$  است.  
الف) معادله سرعت آن را به دست آورید.  
ب) نمودار سرعت - زمان را برای آن رسم کنید.

پ) سرعت متحرک را در لحظه  $t = 1\text{ s}$  به دست آورید.

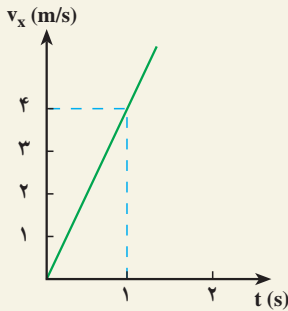
پاسخ

الف) با استفاده از رابطه ۱-۵ داریم :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 4t$$

ب) نمودار سرعت - زمان به صورت خط راستی است که از مبدأ دستگاه  $v - t$

می گذرد.



شکل ۱-۶

$$v_x = 4t$$

پ)

$$t = 1\text{ s} \Rightarrow v_x = 4\text{ m/s}$$

این نتیجه را می توانستیم از مثال ۱-۲ نیز حدس بزنیم؛ زیرا در آن مثال با نزدیک

شدن  $t_1$  به  $t_2$ ، سرعت متوسط جسم نیز به مقدار  $4\text{ m/s}$  (سرعت جسم در لحظه  $t = 1\text{ s}$ ) نزدیک می شود.

بردار سرعت متحرک را، در حرکت یک بُعدی، می توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} \quad (1-6)$$

هنگامی که جسم در جهت مثبت محور  $x$  حرکت می کند،  $v_x$  مثبت است (چرا؟) و در نتیجه،

بردار سرعت جسم در جهت این محور قرار می گیرد. هنگامی که جسم در خلاف جهت مثبت محور  $x$

حرکت می کند،  $v_x$  منفی است و بردار سرعت در جهت عکس این محور قرار می گیرد.

## مثال ۵-۱

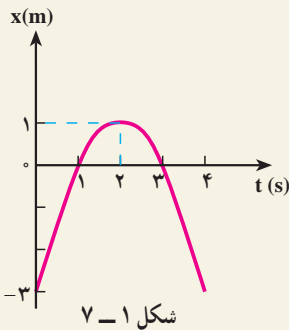
معادله حرکت جسمی در SI با رابطه  $x = -t^2 + 4t - 3$  بیان شده است. الف) معادله سرعت آن را به دست آورید. ب) نمودارهای مکان-زمان و سرعت-زمان متحرک را در ۴ ثانیه اول رسم کنید. پ) مسیر حرکت جسم را رسم و چگونگی حرکت را توصیف کنید.

پاسخ

الف) با استفاده از رابطه ۵-۱ داریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -2t + 4$$

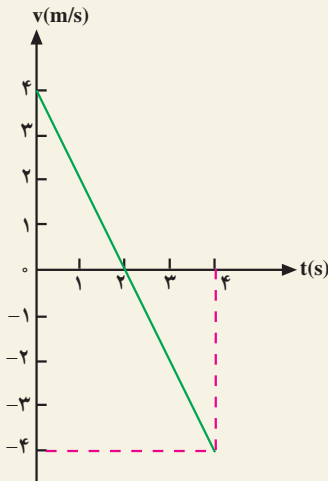
ب) نمودار مکان-زمان متحرک به صورت یک سهمی است (شکل ۷-۱) که بیشینه آن در لحظه  $t = 2$  s است (چرا؟). همچنین، جسم در لحظه های  $t = 1$  s و  $t = 3$  s در مبدأ و در لحظه  $t = 0$ ، در نقطه  $x = -3$  m قرار دارد.



نمودار سرعت-زمان متحرک به صورت

یک خط راست است (شکل ۸-۱) که در بند الف) معادله آن را به دست آوردیم.

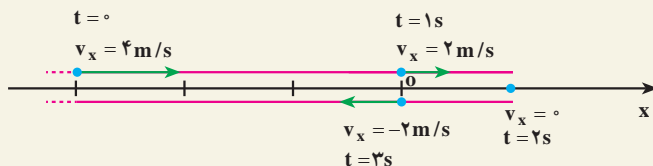
پ) با توجه به این نمودارها ملاحظه می شود که متحرک در لحظه  $t = 0$  در مکان  $x = -3$  m قرار دارد و با سرعت  $4$  m/s در جهت محور  $x$  حرکت می کند. سپس سرعت آن به تدریج کاهش می یابد (شیب مماس بر نمودار مکان-زمان در شکل ۷-۱ به تدریج کم می شود) تا در لحظه  $t = 2$  s که سرعت آن صفر می شود. می توان گفت شیب مماس بر نمودار مکان-زمان در این لحظه صفر می شود.



از لحظه  $t = 2$  s به بعد متحرک برمی گردد و در خلاف جهت محور  $x$  شروع به حرکت می کند و  $v_x$  منفی می شود. در برگشت، اندازه سرعت افزایش می یابد و در لحظه



$t = 3\text{ s}$  دوباره از مبدأ می‌گذرد. در این لحظه، سرعت آن  $-2\text{ m/s}$  است. مسیر حرکت جسم در شکل ۹-۱ رسم شده و بردار سرعت آن نیز روی شکل نمایش داده شده است.



شکل ۹-۱

در شکل ۹-۱ باید مسیر روی محور  $x$  رسم شود ولی ما برای اینکه مسیر را بهتر مشخص کنیم، آن را در بالا و پایین این محور رسم کرده‌ایم. ملاحظه می‌شود که در تمام مسیر رفت و برگشت، معادله مکان و معادله سرعت جسم، به ترتیب به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = -t^2 + 4t - 3$$

$$v_x = -2t + 4$$

## مثال ۶-۱

متحرکی با سرعت ثابت  $5\text{ m/s}$ ، در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند. این متحرک در لحظه  $t = 0$  از نقطه  $x = 1\text{ m}$  می‌گذرد. الف) معادله حرکت را بنویسید. ب) تعیین کنید که متحرک در چه زمانی به مبدأ مختصات می‌رسد.

پاسخ

الف) در فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که معادله حرکت یکنواخت یک جسم روی خط راست با رابطه:

$$x = v_x t + x_0$$

(۷-۱)

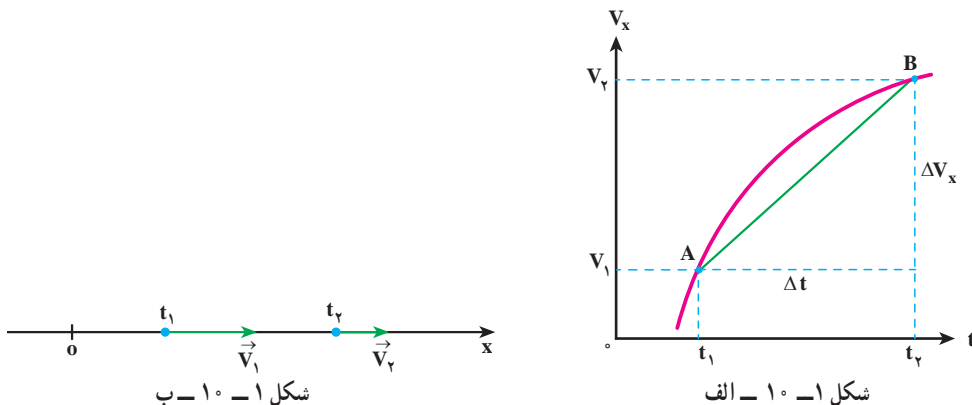
بیان می‌شود که در آن  $v_x$  سرعت (ثابت) جسم و  $x_0$  مکان جسم در لحظه  $t = 0$  است؛ در نتیجه، چون در این مثال  $x_0 = +1\text{ m}$  و  $v_x = -5\text{ m/s}$  است، معادله حرکت جسم به صورت زیر خواهد بود.

ب)

$$x = -5t + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow -5t + 1 = 0 \Rightarrow t = 2\text{ s}$$

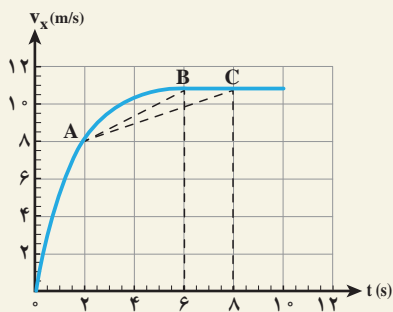
شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای: می‌دانید هنگامی که سرعت جسم تغییر می‌کند، حرکت را شتابدار می‌نامند. در شکل ۱-۱ الف نمودار سرعت - زمان یک حرکت شتابدار و در شکل ۱-۱ ب بردار سرعت متحرک، در زمان‌های  $t_1$  و  $t_2$ ، نشان داده شده است.



همچنین، می‌دانید که  $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$  را تغییر سرعت متحرک در بازه زمانی  $\Delta t$  و نسبت  $\frac{\Delta v_x}{\Delta t}$  را که شیب خط AB در نمودار سرعت - زمان است، شتاب متوسط متحرک در این بازه زمانی می‌نامند. این کمیت را با نماد  $\bar{a}$  نشان می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad (1-1)$$

## مثال ۱-۷



نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می‌کند، به صورت شکل ۱-۱۱ است. شتاب متوسط این متحرک را در بازه‌های زمانی بین ۲s و ۶s، و بین ۲s و ۸s تعیین و با هم مقایسه کنید.

پاسخ: شیب پاره خط AB برابر

شتاب متوسط متحرک در بازه بین ۲s و ۶s، و شیب پاره خط AC برابر شتاب متوسط متحرک در بازه بین ۲s و ۸s است. بنابراین شتاب متوسط در بازه زمانی نخست برابر

است با

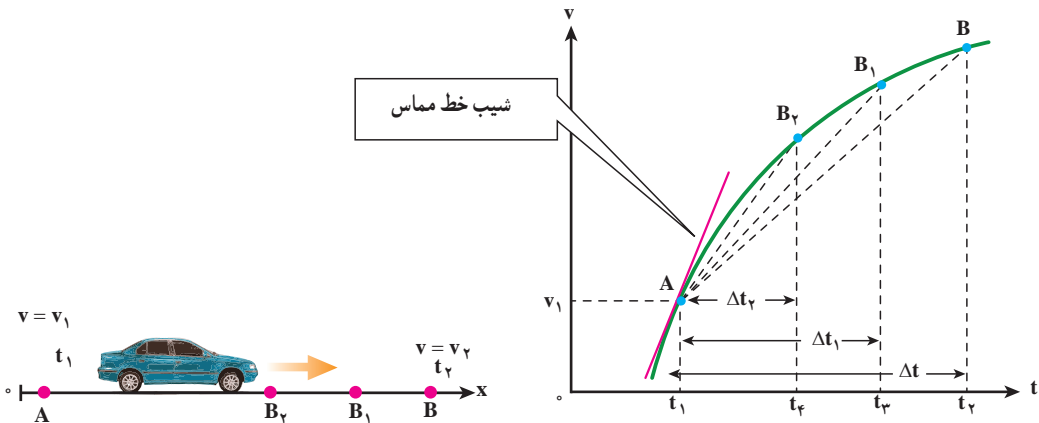
$$\bar{a}_1 = AB \text{ شیب} \approx \frac{11-8}{6-2} = \frac{3}{4} \text{ m/s}^2$$

و شتاب متوسط در بازه زمانی دوم چنین می شود.

$$\bar{a}_2 = AC \text{ شیب} \approx \frac{11-8}{8-2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$$

بنابراین  $\bar{a}_1 > \bar{a}_2$  است.

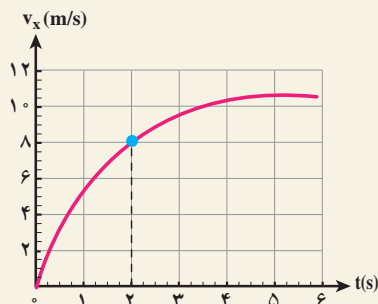
در شکل ۱-۱۰ هنگامی که  $\Delta t$  بسیار کوچک و کوچک تر می شود، نقطه B به نقطه A نزدیک و نزدیک تر شده و سرانجام خط AB در نقطه A بر نمودار سرعت - زمان مماس می شود. شیب خط مماس بر نمودار در نقطه A را شتاب لحظه ای جسم در لحظه  $t_1$  می نامیم (شکل ۱-۱۲).



شکل ۱-۱۲ - شکل سمت چپ اتومبیلی را نشان می دهد که در راستای محور x حرکت می کند. شکل سمت راست، نمودار سرعت - زمان اتومبیل را نشان می دهد. با کوچک شدن  $\Delta t$ ، B به A نزدیک شده و در حالت  $\Delta t \rightarrow 0$  خط واصل تبدیل به خط مماس بر منحنی می شود و شیب آن، شتاب لحظه ای را نشان می دهد.

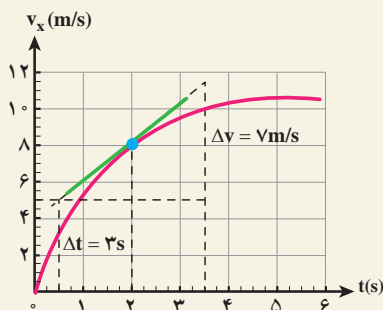
## مثال ۱-۸

نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور x حرکت می کند در شکل ۱۳-۱ نشان داده شده است. شتاب این متحرک را در  $t = 2 \text{ s}$  تعیین کنید.



شکل ۱۳-۱

پاسخ: شتاب متحرک در  $t = 2\text{ s}$  برابر شیب این منحنی در  $t = 2\text{ s}$  است. شیب، شتاب لحظه‌ای را به دست می‌دهد.



شکل ۱۴-۱

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{9\text{ m/s}}{3\text{ s}} = 3\text{ m/s}^2$$

توجه کنید که در حل این مسئله می‌توانستید از مختصات هر دو نقطه دلخواه دیگری از خط مماس نیز استفاده کنید.

اکنون می‌توان شتاب لحظه‌ای را، مانند سرعت لحظه‌ای، به طور دقیق این گونه تعریف کرد: هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می‌کند،  $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$  شتاب لحظه‌ای جسم را در لحظه  $t_1$  به دست می‌دهد؛ به عبارت دیگر، شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است، هنگامی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می‌کند. شتاب لحظه‌ای را با  $a_x$  نمایش می‌دهیم؛ در نتیجه داریم:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} \quad (9-1)$$

به بیان ریاضی، شتاب لحظه‌ای مشتق سرعت نسبت به زمان است؛ از این پس، شتاب لحظه‌ای را - برای اختصار - شتاب می‌نامیم. اکنون با استفاده از رابطه‌های ۵-۱ و ۹-۱ شتاب را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a_x = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

### مثال ۹-۱

معادله حرکت جسمی در SI به صورت  $x = t^3 - 6t^2 + 9t$  بیان شده است. الف) شتاب متوسط آن را در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه به دست آورید. ب) شتاب آن را در لحظه‌های  $t = 0$  و  $t = 1$  ثانیه پیدا کنید.

پاسخ

الف) برای به دست آوردن شتاب متوسط در این بازه زمانی لازم است سرعت متحرک را در لحظه‌های  $t = 1$  s و  $t = 2$  s داشته باشیم. ابتدا معادله سرعت را به دست می‌آوریم:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t + 9$$

از این معادله در لحظه‌های  $t = 1$  s و  $t = 2$  s به ترتیب مقادیر ۰ (صفر) و  $-3$  m/s برای سرعت به دست می‌آید.

$$\bar{a}_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} = \frac{-3 - 0}{2 - 1} = -3 \text{ m/s}^2$$

ب) ابتدا معادله شتاب متحرک را می‌نویسیم:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 6t - 12$$

با استفاده از این رابطه، شتاب متحرک در لحظه‌های  $t = 0$  و  $t = 1$  s چنین به دست می‌آید:

$$t = 0 \text{ s} \rightarrow a_x = -12 \text{ m/s}^2$$

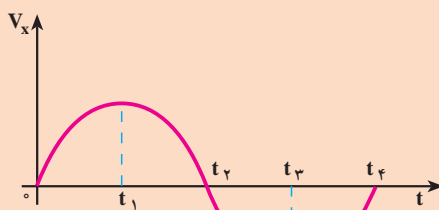
$$t = 1 \text{ s} \rightarrow a_x = -6 \text{ m/s}^2$$

بردار شتاب را می‌توان به صورت زیر نمایش داد :

$$\vec{a} = a_x \vec{i} \quad (۱-۱)$$

در رابطه بالا اگر  $a_x$  مثبت باشد،  $\vec{a}$  در جهت محور  $x$  و اگر منفی باشد در خلاف جهت محور  $x$  قرار می‌گیرد.

## تمرین ۱-۲



شکل ۱-۱۵

نمودار سرعت - زمان متحرکی  
در شکل ۱-۱۵ نشان داده شده است.  
تعیین کنید در چه بازه زمانی بردار شتاب  
در جهت محور  $x$  و در کدام بازه زمانی در  
خلاف جهت محور  $x$  است.

هنگامی که اندازه سرعت متحرکی زیاد می‌شود، حرکت را تندشونده و هنگامی که اندازه سرعت متحرکی کاهش می‌یابد، حرکت را کندشونده می‌نامند.

## فعالیت ۱-۱

در تمرین ۱-۲، سرعت متحرک در بازه زمانی  $0$  تا  $t_1$  مثبت است.  $a_x$  نیز مثبت است؛ زیرا شیب مماس بر نمودار در این بازه زمانی مثبت است و حرکت تندشونده است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  نیز مثبت است. اکنون جاهای خالی را در گزاره‌های زیر پر کنید.

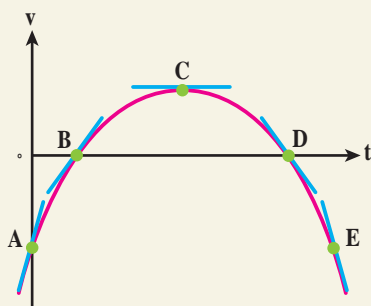
الف) در بازه زمانی  $t_1$  تا  $t_2$  سرعت متحرک ..... است.  $a_x$  ..... است. حرکت ..... است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  ..... است.

ب) در بازه زمانی  $t_2$  تا  $t_3$  سرعت متحرک ..... است.  $a_x$  ..... است. حرکت ..... است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  ..... است.

پ) در زمان‌های بزرگ‌تر از  $t_3$ ، سرعت متحرک ..... است.  $a_x$  ..... است. حرکت ..... است. حاصل ضرب  $a_x v_x$  ..... است.

در فعالیت ۱-۱ می بینید که وقتی  $a_x v_x > 0$  باشد، حرکت تندشونده و وقتی  $a_x v_x < 0$  باشد، حرکت کند شونده است.

### مثال ۱-۱۰

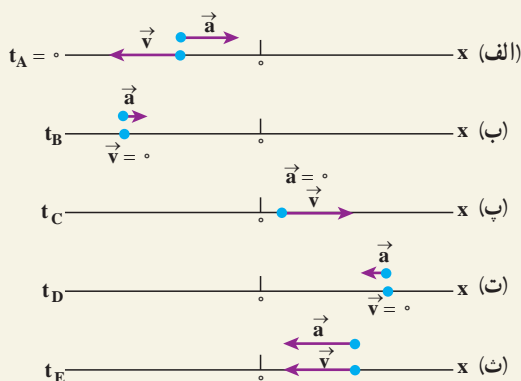


شکل ۱-۱۶

شکل ۱-۱۶، نمودار سرعت-زمان متحرکی است که در راستای محور  $x$  حرکت می کند. درباره علامت های شتاب و سرعت متحرک و تندشونده یا کندشونده بودن حرکت اظهار نظر کنید.

### پاسخ

خط های مماس بر منحنی در نقاط  $A, B, C, D$  و  $E$  رسم شده که شیب این خط ها نشان دهنده شتاب در آن نقطه ها است. از روی شکل در می یابیم که شیب در نقاط  $A$  و  $B$  مثبت، در نقطه  $C$  برابر صفر و در نقطه های  $D$  و  $E$  منفی است. بنابراین شتاب در نقطه های  $A$  و  $B$  مثبت، شتاب در نقطه  $C$  برابر صفر و در نقطه های  $D$  و  $E$  منفی است. در حالی که همان طور که از شکل مشخص است، سرعت در نقطه های  $A$  و  $E$  منفی، در نقطه های  $B$  و  $D$  صفر، و در نقطه  $C$  مثبت است. بنابراین مکان، سرعت و شتاب ذره روی محور  $x$  با شکل های زیر سازگارند.



شکل ۱-۱۷

در (الف)  $v < 0$  و  $a > 0$  و در نتیجه  $av < 0$  و حرکت کندشونده است. در (ب)  $v = 0$  و  $a > 0$  و متحرک در سکون لحظه‌ای و در آستانه حرکت در جهت  $+x$  است. در (پ)  $v > 0$  و  $a = 0$  است. در (ت)  $v = 0$  و  $a < 0$  و متحرک به طور لحظه‌ای ساکن و در آستانه حرکت در جهت  $-x$  است. در (ث)  $v < 0$  و  $a < 0$  و در نتیجه  $av > 0$  و حرکت تندشونده است.

### مثال ۱۱-۱

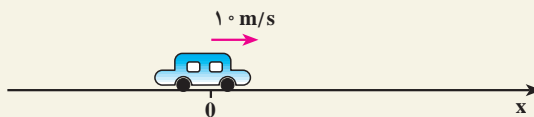
خودرویی با سرعت  $10 \text{ m/s}$  در حال حرکت است. راننده ترمز می‌کند و سرعت خودرو با شتاب  $2 \text{ m/s}^2$  کاهش می‌یابد. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا خودرو متوقف شود؟ ب) در این بازه زمانی خودرو چه مسافتی را می‌پیماید؟

پاسخ

الف) در کتاب فیزیک ۲ و آزمایشگاه دیدیم که در حرکت با شتاب ثابت معادله سرعت به صورت زیر است:

$$v_x = a_x t + v_{0x} \quad (11-1)$$

که در آن  $a_x$  شتاب (ثابت) جسم و  $v_{0x}$  سرعت جسم در لحظه  $t = 0$  است. در شکل ۱۸-۱ حرکت خودرو را در جهت محور  $x$  در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۱۸-۱

بنابراین،  $v_{0x} = +10 \text{ m/s}$  و چون حرکت کندشونده است، علامت  $a_x$  مخالف علامت  $v_{0x}$  است؛ در نتیجه،  $a_x = -2 \text{ m/s}^2$ . با استفاده از معادله سرعت داریم:

$$v_x = -2t + 10$$

هنگامی که خودرو متوقف می‌شود،  $v_x = 0$  است؛ در نتیجه:

$$0 = -2t + 10 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$



ب) می‌دانیم که در حرکت با شتاب ثابت معادله حرکت به صورت زیر است :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{ox} t \quad (12-1)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2} (-2)(5)^2 + 1 \cdot (5) + 0 = 25 \text{ m}$$

این نتیجه را می‌توانستیم از رابطه مستقل از زمان زیر نیز به دست آوریم :

$$v_x^2 - v_{ox}^2 = 2 a_x (x - x_o) \quad (13-1)$$

$$0 - (10)^2 = 2 (-2) (\Delta x) \Rightarrow \Delta x = 25 \text{ m}$$

## سقوط آزاد

سقوط آزاد نمونه‌ای طبیعی از حرکت یک بُعدی با شتاب ثابت است. اگر جسمی را در امتداد قائم رو به بالا یا رو به پایین پرتاب کنید، در صورتی که بتوان از تأثیرات هوا چشم‌پوشی کرد، سرعت جسم با آهنگ ثابت و معینی تغییر می‌کند. گالیله نخستین کسی بود که استدلال کرد تمام اجسام در نبود مقاومت هوا با شتاب ثابتی سقوط می‌کنند. این شتاب برای همه اجسام یکسان و بزرگی آن در نزدیکی سطح زمین تقریباً برابر  $9/8 \text{ m/s}^2$  است. شکل ۱-۱۹ نشان می‌دهد یک پر و یک سیب در شرایط خلأ نسبی با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند.



شکل ۱-۱۹ - یک پر و یک سیب در شرایط خلأ نسبی با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند. این شتاب، فاصله میان عکس‌های متوالی را افزایش داده است.

در سقوط آزاد، جابه‌جایی در راستای قائم است، بنابراین مکان متحرک با  $y$  نشان داده می‌شود. معادله‌های حرکت شتاب ثابت که در فیزیک ۲ و آزمایشگاه با آنها آشنا شدیم برای سقوط آزاد در نزدیکی سطح زمین نیز به کار می‌آیند. یعنی کافی است حرکت را به جای محور  $x$  در راستای محور قائم ( $y$ ) در نظر بگیریم، به طوری که جهت  $+y$  رو به بالا باشد. با این انتخاب، شتاب سقوط آزاد همواره منفی است (یعنی در خلاف جهت مثبت محور  $y$  است) و بنابراین ذره، چه رو به بالا و چه رو به پایین حرکت کند  $a = -g = -9.8 \text{ m/s}^2$  است. به این ترتیب کافی است در معادله‌های حرکت شتاب ثابت،  $x$  را به  $y$  و  $a$  را به  $-g$  تبدیل کنیم تا معادله‌های سقوط آزاد به دست آیند:

$$v = -gt + v_0 \quad (۱۴-۱)$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \quad (۱۵-۱)$$

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) \quad (۱۶-۱)$$

همان‌طور که گفتیم شتاب همواره منفی و روبه پایین است، ولی سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد. در حین بالا رفتن، سرعت مثبت است ولی این سرعت مثبت کاهش می‌یابد تا اینکه به طور لحظه‌ای صفر شود. در حین پایین آمدن، سرعت منفی است ولی بزرگی آن افزایش می‌یابد.

### مثال ۱۲-۱

سنگی را از بالای ساختمان بلندی به ارتفاع  $45 \text{ m}$  رها می‌کنیم، (الف) سنگ پس از چه زمانی به زمین می‌رسد؟ (ب) سرعت آن هنگام رسیدن به زمین چقدر است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

پاسخ

(الف) برای بررسی حرکت سقوط آزاد اجسام، محور  $y$  را در راستای قائم و رو به بالا و مبدأ آن را نقطه رها کردن جسم در نظر می‌گیریم. در این صورت، معادله حرکت با شتاب ثابت (۱۵-۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$$-45 = -\frac{1}{2}(10)t^2 \Rightarrow t = 3 \text{ s}$$

ب) با استفاده از معادلهٔ سرعت (۱۱-۱) داریم :

$$v = -gt$$

$$v = -10 \times 3 = -30 \text{ m/s}$$

## فعالیت ۲-۱



شکل ۲-۱

از دوست خود بخواهید که مطابق شکل ۲-۱، خط کش مدرج بلندی را بین انگشتان شما نگه دارد و در یک لحظه، آن را رها کند. چگونه می‌توانید زمان واکنش خود را (یعنی زمانی که طول می‌کشد تا پس از مشاهدهٔ رها شدن خط کش، آن را بگیرید) اندازه‌گیری کنید؟

## مثال ۱۳-۱

سنگی را با سرعت  $20 \text{ m/s}$  در راستای قائم به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. الف) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به بالاترین ارتفاع برسد؟ ب) سنگ تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟ پ) چه زمانی طول می‌کشد تا سنگ به نقطهٔ پرتاب برگردد؟ ت) سرعت سنگ در این نقطه چه مقدار است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

پاسخ

الف) محور  $y$  را روبه بالا و مبدأ آن را در نقطهٔ پرتاب فرض می‌کنیم؛ در نتیجه، در لحظهٔ پرتاب داریم:  $v_{y0} = +20 \text{ m/s}$  و  $y_0 = 0$ . در شروع حرکت، جسم در جهت محور  $y$  حرکت می‌کند، با استفاده از رابطه‌های ۱۵-۱ و ۱۴-۱ داریم :

$$y = -5t^2 + 20t$$

$$v_y = -10t + 20$$

در بالاترین نقطه،  $v_y = 0$ ؛ در نتیجه :

$$0 = -10t + 20 \Rightarrow t = 2s$$

$$t = 2s$$

ب) بالاترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد، از معادله حرکت به دست می‌آید :

$$y = -5(2)^2 + 20(2) = 20m$$

پ) در بازگشت سنگ به نقطه پرتاب، داریم :  $y = 0$ ؛ در نتیجه :

$$-5t^2 + 20t = 0$$

$$t(-5t + 20) = 0$$

یا

پاسخ‌های این معادله  $t = 0s$  و  $t = 4s$  است.  $t = 0s$  مربوط به لحظه پرتاب است و  $t = 4s$  زمانی است که طول می‌کشد تا سنگ به نقطه پرتاب برگردد.

ت) سرعت متحرک در این لحظه از معادله سرعت به دست می‌آید :

$$v_y = -10(4) + 20 = -20 m/s$$

علامت منفی نشان می‌دهد که در هنگام بازگشت سنگ به نقطه پرتاب، سوی سرعت آن رو به پایین است. ملاحظه می‌شود که با معادله‌های حرکت و سرعت، می‌توان چگونگی حرکت سنگ را، در هر لحظه از رفت و برگشت، توصیف کرد.

## مثال ۱-۱۴

از بالای ساختمانی به ارتفاع  $50m$  سنگی را در راستای قائم با سرعت  $15 m/s$ ، به بالا پرتاب می‌کنیم. چه مدت زمانی طول می‌کشد تا سنگ به زمین برسد؟ ( $g = 10 m/s^2$ )

پاسخ

محور مختصات را رو به بالا و مبدأ آن را در بالای ساختمان در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه، معادله حرکت سنگ به صورت زیر است :

$$y = -5t^2 + 15t$$

در پایین ساختمان،  $y = -5\text{ m}$ ؛ در نتیجه :

$$-50 = -5t^2 + 15t$$

با حل این معادله، دو مقدار  $t = -2\text{ s}$  و  $t = 5\text{ s}$  به دست می آید. چون حرکت از لحظه  $t = 0$  شروع شده است، پاسخ اول قابل قبول نیست؛ در نتیجه، زمان رسیدن سنگ به زمین  $5\text{ s}$  است.

## ۲-۱- حرکت در دو بُعد یا حرکت در صفحه

در بخش ۱-۱ حرکت در یک بعد را مرور کردیم. در این بخش به بررسی حرکت در صفحه که آن را حرکت دو بُعدی نیز می نامیم، می پردازیم. حرکت گلوله تویی که شلیک می شود یا حرکت یک سیاره به دور خورشید یا حرکت اتومبیل در پیچ جاده و ... مثال هایی از حرکت دو بُعدی اند.



در شکل ۲۲-۱ مسیر حرکت جسمی در صفحه  $xoy$  نشان داده شده است. مکان جسم در این صفحه، با بردار  $\vec{r}$  نمایش داده می شود. این بردار را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (17-1)$$

که در آن  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  به ترتیب بردارهای یکه در جهت های  $x$  و  $y$  اند.

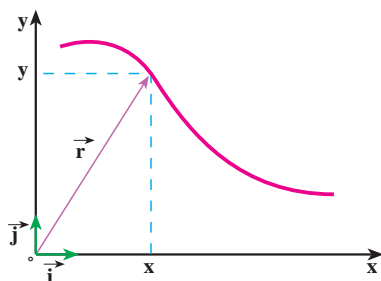
چون هنگام حرکت جسم، در هر لحظه بردار مکان آن تغییر می کند، برای مشخص کردن مکان جسم در حین حرکت، کافی است که مؤلفه های  $x$  و  $y$  را به صورت تابع هایی از زمان داشته باشیم :

$$x = f(t) \text{ و } y = g(t) \quad (18-1)$$

رابطه های ۱۸-۱ معادله های حرکت یک جسم را در دو بُعد نشان می دهند. واضح است که در حرکت دو بُعدی، بردار مکان نیز تابعی از زمان است :

شکل ۲۱-۱

$$\vec{r} = f(t) \vec{i} + g(t) \vec{j} \quad (19-1)$$



شکل ۲۲-۱

بنابراین، می‌توان گفت که حرکت در صفحه، ترکیب دو حرکت یک بعدی در امتدادهای  $x$  و  $y$  است که با داشتن معادله‌های مربوط به آن، مکان جسم در هر لحظه معلوم و در نتیجه، مسیر حرکت آن مشخص می‌شود.

### فعالیت ۳-۱

فرض کنید در یک مدت کوتاه، معادله‌های حرکت یک خرگوش در سطح زمین، برحسب یکاهای SI، به صورت  $x = 1 \cdot t$  و  $y = -5t^2$  است. مسیر حرکت این خرگوش را به کمک نقطه‌یابی، در بازه زمانی  $0$  تا  $5$  ثانیه، روی کاغذ شطرنجی رسم کنید.

باید دانست که مسیر را می‌توان، علاوه بر روش نقطه‌یابی، به کمک معادله مسیر هم مشخص کرد. برای یافتن معادله مسیر کافی است که با حذف زمان  $(t)$  بین معادله‌های حرکت برای  $x$  و  $y$  رابطه‌ای بین آنها، به دست آورد.

### مثال ۱۵-۱

معادله مسیر را برای خرگوش در فعالیت ۳-۱ به دست آورید و آن را رسم کنید.

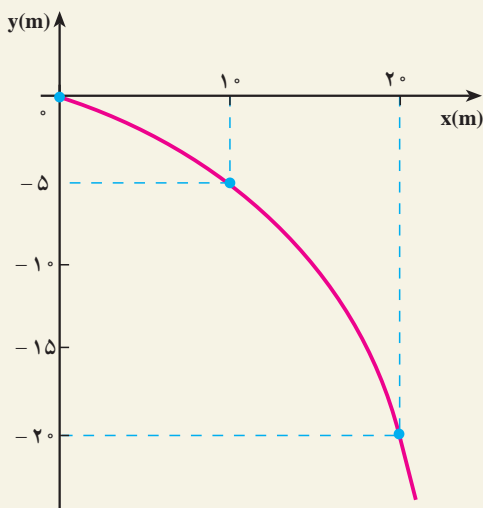
پاسخ

$t$  را بین مؤلفه‌های بردار مکان حذف می‌کنیم:

$$x = 1 \cdot t \rightarrow t = \frac{x}{1}$$

و

$$y = -5t^2 \rightarrow y = -5\left(\frac{x}{1}\right)^2$$



$$y = -\frac{x^2}{2}$$

معادله مسیر در این مثال، یک سهمی است که بیشینه آن در  $x = 0$ ، است و از نقطه‌های  $(1\text{ m}, -5\text{ m})$  و  $(2\text{ m}, -20\text{ m})$  می‌گذرد (شکل ۲۳-۱).

شکل ۲۳-۱

## فعالیت ۴-۱

معادله‌های حرکت در SI برای خودروی A در صفحه افقی به صورت  $x_A = 3t^2$  و  $y_A = 8$  و برای خودروی B در همان صفحه به صورت  $x_B = 6t$  و  $y_B = 4t$  داده شده است. از طریق نقطه‌یابی تحقیق کنید که آیا مسیر این دو خودرو تلاقی دارند یا نه؟ چه شرطی باید برقرار باشد تا بین خودروها برخورد رخ دهد؟

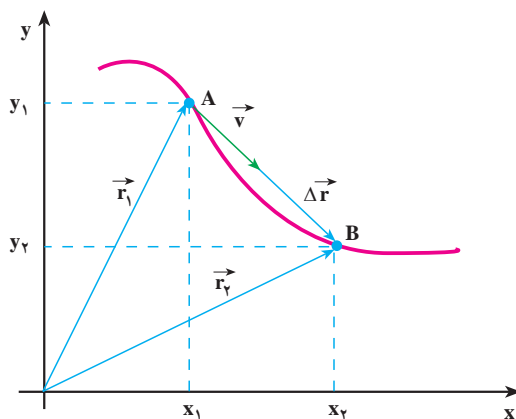
جابه‌جایی و سرعت متوسط: برای بررسی حرکت جسم روی مسیری مطابق شکل ۲۴-۱،

فرض کنید متحرکی در لحظه  $t_1$  در نقطه A (مکان  $\vec{r}_1$ ) و در لحظه  $t_2$  در نقطه B (مکان  $\vec{r}_2$ ) باشد. در فیزیک (۲) و آزمایشگاه دیدیم، برداری که از A به B رسم می‌شود جابه‌جایی (تغییر مکان) جسم را در بازه زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$  نمایش می‌دهد. این بردار که در شکل ۲۴-۱ رسم شده است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad (20-1)$$

$$\Delta \vec{r} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j})$$

$$\vec{\Delta r} = (\Delta x) \vec{i} + (\Delta y) \vec{j} \quad (21-1)$$



شکل ۱-۲۴ بردار سرعت متوسط و بردار تغییر مکان هم جهت اند.

سرعت متوسط جسم در یک بازه زمانی معین، همانند حالت یک بعدی، به این صورت تعریف می شود:

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} \quad (22-1)$$

و با استفاده از رابطه ۱-۲۱ داریم:

$$\vec{v} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \vec{i} + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right) \vec{j} \quad (23-1)$$

اگر  $\frac{\Delta x}{\Delta t}$  را با  $\bar{v}_x$  و  $\frac{\Delta y}{\Delta t}$  را با  $\bar{v}_y$  نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\vec{v} = (\bar{v}_x) \vec{i} + (\bar{v}_y) \vec{j} \quad (24-1)$$

### پرسش ۱-۱

رابطه ۱-۲۲ نشان می دهد که سرعت متوسط، کمیتی برداری است و  $\vec{v}$  با  $\vec{\Delta r}$  هم جهت است. علت را توضیح دهید.



## مثال ۱-۱۶

معادله‌های حرکت جسمی در دو بُعد، به صورت زیر است :

$$x = 2t \text{ و } y = -t^2 + 4t \quad (SI)$$

الف) بردار مکان جسم را در لحظه‌های  $t_1 = 1s$  و  $t_2 = 2s$  به دست آورید.

ب) سرعت متوسط آن را در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه تعیین و بزرگی آن را حساب کنید.

پاسخ

الف) در  $t_1 = 1s$  :

$$x_1 = 2m \text{ و } y_1 = +3m$$

$$\vec{r}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$$

$$x_2 = 4m \text{ و } y_2 = 4m$$

به همین ترتیب در  $t_2 = 2s$  :

$$\vec{r}_2 = 4\vec{i} + 4\vec{j}$$

ب) در بازه زمانی ۱ تا ۲ ثانیه :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 4 - 2 = 2m$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 4 - 3 = 1m$$

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2m/s$$

$$\bar{v}_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1}{1} = 1m/s$$

$$\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$(\bar{v})^2 = (\bar{v}_x)^2 + (\bar{v}_y)^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

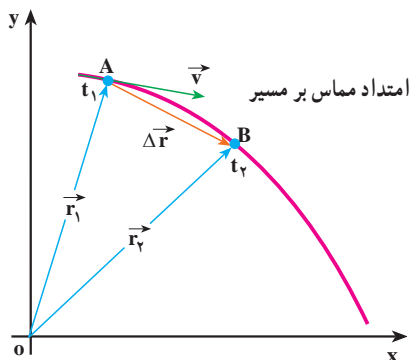
$$\bar{v} = \sqrt{5} \approx 2.23m/s$$

## تمرین ۱-۳

در فعالیت ۱-۳ سرعت متوسط خرگوش را در بازه زمانی ۰ تا ۲ ثانیه به دست آورید.

**سرعت لحظه‌ای :** در شکل ۲۵-۱ نمودار حرکت جسمی روی یک مسیر خمیده در صفحه  $xOy$  نشان داده شده است. مکان جسم در دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$ ، مشخص شده است. پیش‌تر گفتیم که بردار سرعت متوسط در یک بازه زمانی معین، با بردار جابه‌جایی مربوط به آن، هم‌جهت است. همچنین می‌دانید هنگامی که بازه زمانی  $\Delta t$ ، کوچک و کوچک‌تر شود، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؛ یعنی، بردار سرعت لحظه‌ای حد بردار سرعت متوسط است، وقتی  $\Delta t$  به سمت صفر میل می‌کند :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \quad (25-1)$$



شکل ۲۵-۱- سرعت لحظه‌ای در امتداد مماس بر مسیر حرکت است.

به عبارت دیگر می‌توان گفت که «سرعت لحظه‌ای، مشتق بردار مکان جسم، نسبت به زمان است» :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (26-1)$$

در حدی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل کند، با استفاده از رابطه ۲۱-۱ می‌توان سرعت لحظه‌ای جسم را برحسب مؤلفه‌های آن در دو امتداد  $x$  و  $y$  به‌دست آورد :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left(\frac{dx}{dt}\right) \vec{i} + \left(\frac{dy}{dt}\right) \vec{j} \\ \vec{v} &= (v_x) \vec{i} + (v_y) \vec{j} \end{aligned} \quad (27-1)$$

در شکل ۱-۲۵ می بینید که وقتی  $t_2$  به سمت  $t_1$  میل کند، راستای بردار جابه جایی  $\Delta \vec{r}$ ، به سمت راستای مماس بر منحنی مسیر، در نقطه  $A$  میل خواهد کرد؛ بنابراین، چون بردار سرعت متوسط همواره هم جهت با جابه جایی است، در حدی که  $\Delta t$  به سمت صفر میل می کند، بردار سرعت لحظه ای بر مسیر حرکت در نقطه  $A$  مماس خواهد شد؛ بدین ترتیب می توان گفت، هنگامی که جسم روی یک مسیر خمیده حرکت می کند، جهت بردار سرعت آن که همواره بر مسیر حرکت مماس است، در هر لحظه تغییر می کند. از این پس، برای اختصار، بردار سرعت لحظه ای را سرعت می نامیم.

### مثال ۱-۱۷

خودرویی در صفحه  $xoy$  حرکت می کند. معادله های حرکت آن در SI به صورت زیر است:

$$x = 6t + 5 \text{ و } y = 4t^2$$

بزرگی سرعت خودرو را در  $t = 1 \text{ s}$  به دست آورید.

پاسخ

با استفاده از رابطه ۱-۲۷ مؤلفه های سرعت به دست می آید:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 6 \text{ m/s}$$

ملاحظه می شود که مؤلفه افقی سرعت مقدار ثابتی دارد و تابع زمان نیست؛ به همین ترتیب، برای مؤلفه قائم سرعت داریم:

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 8t$$

همان طور که می بینید، این مؤلفه تابع زمان است و بزرگی آن در  $t = 1 \text{ s}$  برابر است با:

$$v_y = 8 \text{ m/s}$$

پس، بزرگی سرعت در  $t = 1 \text{ s}$  برابر است با:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ m/s}$$

## تمرین ۴-۱

در مثال ۱۷-۱ معادلهٔ مسیر را بنویسید و آن را رسم کنید. بردار سرعت متحرک را در  $t = ۱s$  روی مسیر، نمایش دهید.

## شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای

می‌دانید وقتی که سرعت جسم در حال حرکت تغییر می‌کند، حرکت را شتاب‌دار می‌گویند. البته این تغییر سرعت می‌تواند به معنای تغییر در بزرگی سرعت، تغییر در جهت سرعت یا هر دو باشد. دیدیم که وقتی مسیر حرکت جسم خمیده است، جهت سرعت آن الزاماً تغییر می‌کند؛ بنابراین، حرکت بر روی مسیر منحنی، حرکتی شتاب‌دار است حتی اگر بزرگی سرعت ثابت باشد.

## فعالیت ۵-۱

دو حرکت شتاب‌دار مثال بزنید که در آنها، بزرگی سرعت تغییر نکند.

در شکل ۲۶-۱ الف، بردارهای سرعت در دو لحظهٔ  $t_1$  و  $t_2$  روی مسیر نشان داده شده است.

برای محاسبهٔ تغییر در بازهٔ زمانی  $\Delta t = t_2 - t_1$  بردارهای  $\vec{v}_1$  و  $\vec{v}_2$  را مطابق شکل ۲۶-۱ ب از مبدأ مشترک O رسم می‌کنیم و  $\Delta \vec{v}$  را به دست می‌آوریم (شکل ۲۶-۱ ب). در اینجا نیز، مشابه حرکت یک بعدی، بردار شتاب متوسط را در بازهٔ زمانی  $\Delta t$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (۲۸-۱)$$

با استفاده از رابطهٔ ۲۷-۱ داریم:

$$\vec{a} = \left( \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \right) \vec{i} + \left( \frac{\Delta v_y}{\Delta t} \right) \vec{j}$$

که آن را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\vec{a} = (\bar{a}_x) \vec{i} + (\bar{a}_y) \vec{j} \quad (۲۹-۱)$$