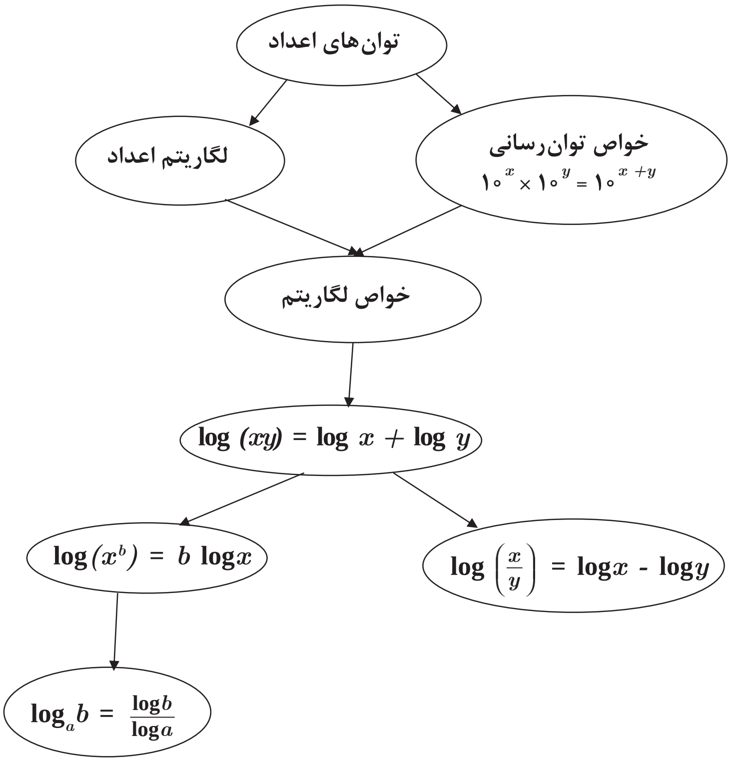
پودمان چهارم

لگاریتم و خواص آن

طرح کلی مفاهیم پودمان چهارم (نقشهٔ مفهومی)



اهداف کلی

- درک مفهوم لگاریتم.
- توجه به نقش لگاریتم در تسهیل محاسبات.
- توجه به نقش لگاریتم در حل مسائل
- آشنایی با خواص لگاریتم.
- درک تقریب اعشاری لگاریتم.

پیش نیازهای پودمان

- آشنایی با توان‌رسانی به توان عددهای گویا.
- آشنایی با خواص توان‌رسانی.

استانداردهای فرایندی		
حل مسئله	ساخت دانش ریاضی از طریق حل مسئله	ـ معرفی لگاریتم برای محاسبهٔ فاصلهٔ بین زمین و ستارگان ـ ایجاد سؤال در ذهن از طریق متون ورودی هر بخش و پاسخ‌گویی به سؤال و در نتیجه ساختن مفهوم در قالب انجام فعالیت بعد از متون ورودی
	ـ شناخت و به‌کارگیری استراتژی‌های مختلف برای حل مسئله و یا انتخاب مناسب آنها	ـ استفاده از الگویابی برای بیان خاصیت لگاریتم (فعالیت ۴ و ۵ و ۶)
ارتباط کلامی	سازمان‌دهی تفکرات ریاضی، انتقال تفکرات ریاضی خود به دیگران	ـ انتقال تفکرات حمید به معلم ریاضی (در مکالمه حمید و هنرآموز قبل از فعالیت ۴) و سازمان‌دهی آن
	استفاده از زبان ریاضی برای بیان ایده‌های ریاضی	ـ استفاده از زبان ریاضی برای بیان خواص لگاریتم (کادرهای بعد از فعالیت ۴ و ۵ و ۶)
پیوندها و اتصالات	تشخیص و به‌کارگیری ریاضیات در سایر مضامین بیرون از چهارچوب موضوع ریاضی	ـ تکثیر باکتری‌ها و محاسبه وزن آنها (ارتباط ریاضی با زیست‌شناسی)
	تشخیص و به‌کارگیری پیوستگی بین موضوع‌های ریاضی (جبر و هندسه و ...)	ـ ارتباط بین توان یک عدد و لگاریتم.
استدلال و اثبات	به‌کارگیری استدلال	ـ اثبات خاصیت لگاریتم تقسیم دو عدد (کار در کلاس ۵ شمارهٔ ۲) ـ دلیل مناسب نبودن عدد ۱ به عنوان مبنا (شمارهٔ ۴ و ۵ از فعالیت ۲)
بازنمایی‌ها	ارائه نمایش‌های مختلف یک مفهوم	ـ دیاگرام مثال ۲ صفحهٔ ۹۸
سایر مهارت‌های تفکر	مانند مقایسه کردن، ارزیابی کردن، تعمیم دادن، الگویابی و ...	ـ تعمیم مثبت بودن توان‌های اعداد ۴ و ۳ به توان‌های هر عدد مثبت a (فعالیت ۳) ـ مقایسه مقادیر $\log(a+b)$ و $\log a+\log b$ (استفاده از ماشین حساب بعد از فعالیت ۴)

بخش اول: مفهوم لگاریتم

اهداف بخش

- درک مفهوم لگاریتم.
- نمایش معادل لگاریتمی عبارت‌های شامل توان‌های یک عدد
- محاسبهٔ لگاریتم اعدادی که توان‌هایی (صحیح یا گویا) از پایهٔ لگاریتم هستند.
- محاسبهٔ لگاریتم اعداد (در پایهٔ ۱۰) به کمک ماشین حساب.

واژه‌های کلیدی: لگاریتم

نگاه کلی به بخش

پس از نمادگذاری هندی ـ عربی و چگونگی محاسبات مربوط به کسرها، **لگاریتم** سومین اختراعی است که بشر را در فن محاسبات چیره‌دست کرده است و تا قبل از اختراع رایانه یکی از کاربردهای مهم آن تسهیل و سرعت بخشیدن به محاسبات بسیار پیچیدهٔ ریاضی است. اهمیت این اختراع به گونه ای بود که «پی یر سیمون لاپلاس» ریاضی‌دان برجسته در خصوص آن گفته است:

«وسیله‌ای ستودنی است که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از جمله‌های طولانی و جدانشدنی ریاضی بیزار است»

اولین بخش از این پودمان اختصاص به معرفی مفهوم لگاریتم و نمادهای مرتبط با آن دارد. فرایند معرفی این مفهوم متکی بر ریشهٔ تاریخی شکل‌گیری آن می‌باشد. ویژگی‌های اعدادی که به عنوان مبنای لگاریتم می‌توان انتخاب کرد یا اعدادی که می‌توان از آنها لگاریتم گرفت در قالب فعالیت‌ها ارائه شده است تا درک درستی از این ویژگی‌ها در هنرجو ایجاد شود.

در این بخش ابتدا با طرح جملهٔ مربوط به «لاپلاس» سعی در جلب توجه هنرجویان به موضوع می‌شود. سپس با توجه به ریشهٔ تاریخی ابداع لگاریتم در قالب یک فعالیت، دشواری‌های کار با اعداد بزرگ مطرح و نقش لگاریتم در تسهیل کار با این اعداد مشخص می‌شود. با توجه به اینکه هدف این فعالیت تمرکز هنرجویان بر توان اعداد برای جایگزین کردن عمل جمع و تفریق به جای ضرب و تقسیم می‌باشد تا از این طریق لگاریتم معرفی شود. بنابراین در ابتدا از توان‌های طبیعی اعداد (که ساده‌تر می‌باشد) استفاده شده است و فاصلهٔ بین ستارگان به نزدیک‌ترین توان طبیعی عدد ۳ گرد شده است. فعالیت‌های بعدی در این بخش به بیان علت برخی

محدودیت‌ها در انتخاب اعداد به عنوان مبنا و سایر موارد دارد.
به منظور کسب مهارت استفاده از ماشین حساب در یافتن تقریب اعشاری لگاریتمِ اعداد، در این بخش کار با ماشین حساب نیز پیش‌بینی شده است. مثال (۴) به ارائهٔ نقشی دیگر از لگاریتم می‌پردازد که این نقش از لگاریتم در حل معادلات توانی استفاده می‌شود. برخی از ویژگی‌های لگاریتم در قالب کار در کلاس معرفی شده است (کار در کلاس ۵) و مثال‌هایی که کاربرد این ویژگی‌ها را مشخص می‌کند نیز ارائه شده است.

ورود به مطلب

رویکرد کلی کتاب در آموزش هر مفهوم جدید طرح سؤال در یک زمینه واقعی و پاسخ‌گویی به سؤال در فعالیت‌های طراحی شده است. اما، با توجه به سطح هنرجویان و علاقه‌مندی‌های خاصی که در کلاس وجود دارد هنرآموزان می‌توانند روش خود را به اجرا در آورند. در کتاب سعی شده است با طرح یک سخن جالب از دانشمندان و انگیزه‌بخشی به هنرجویان برای درک این سخن مفهوم لگاریتم ارائه شود. سؤال ابتدای این قسمت که مربوط به بیان لاپلاس می‌باشد. سپس می‌توانیم از هنرجویان بخواهیم که فعالیت (۱) را انجام دهند. همچنین هنرآموز می‌تواند از هنرجویان بخواهد متن ابتدای این قسمت را مطالعه کنند تا برای انجام فعالیت (۱) آمادگی داشته باشند. در هر صورت بیان جملهٔ لاپلاس، کنجکاوی هنرجویان را بر می‌انگیزد و آمادگی آنها را برای درک مفهوم بیشتر می‌کند. در فعالیت (۱) مخصوصاً از اعداد بزرگ استفاده شده است تا هنرجویان از نقش لگاریتم در تسهیل محاسبات با اعداد بزرگ آگاه شوند و تا حدودی به نحوهٔ پیدایش این مفهوم پی ببرند.

فعالیت آموزشی

در این فعالیت به‌طور غیرمستقیم با مفهوم لگاریتم کار خواهیم کرد.

فعالیت ۱

۱ فاصلهٔ زمین از خورشید تقریباً ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ کیلومتر و فاصلهٔ ستارهٔ پروکسیما قنطورس تا زمین تقریباً ۱۷۷۱۴۷ برابر فاصلهٔ زمین تا خورشید است. برای تعیین فاصلهٔ این ستاره تا زمین باید از کدام چهار عمل اصلی استفاده کرد؟ حدس می‌زنید برای انجام این عمل چقدر زمان نیاز دارید؟

۲ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) در فاصلهٔ تقریباً ۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ کیلومتری از زمین است. اگر بخواهیم بدانیم فاصلهٔ ستارهٔ شباهنگ از زمین چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است چه عملی باید انجام دهید؟ حدس می‌زنید زمان انجام این عمل چقدر است؟

۳ با استفاده از جدول مقابل که در آن توان‌هایی از ۳ محاسبه شده است، جاهای خالی را کامل کنید و حاصل را با استفاده از ضرب اعداد توان‌دار بنویسید.

۱۲۹۱۴۰۱۶۳ × ۱۷۷۱۴۷ = ۳… × ۳… = ۳…

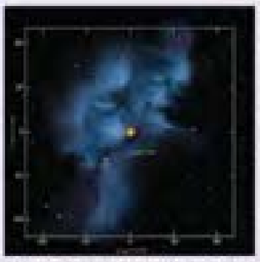
۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳ ÷ ۱۲۹۱۴۰۱۶۳ = ۳… ÷ ۳… = ۳…

۴ با استفاده از قسمت قبل و جدول مقابل به سؤال‌های (الف) و (ب) پاسخ دهید.

الف) فاصلهٔ پروکسیما قنطورس از زمین چقدر است؟

ب) فاصلهٔ ستارهٔ شباهنگ (سیروس) چند برابر فاصلهٔ خورشید تا زمین است؟

۵ محاسبهٔ مستقیم ساده‌تر است یا استفاده از جدول؟ زمان انجام کدام روش کمتر است؟



نزدیک‌ترین ستاره به زمین که فقط در نیمکرهٔ جنوبی قابل رؤیت است پروکسیما قنطورس و نزدیک‌ترین ستاره که از همهٔ نقاط زمین قابل رؤیت است شباهنگ (سیروس) است.

n	3^n	حاصل
۰	3^0	۱
۱	3^1	۳
۲	3^2	۹
۳	3^3	۲۷
⋮	⋮	⋮
۱۱	3^{11}	۱۷۷۱۴۷
۱۲	3^{12}	۵۳۱۴۴۱
⋮	⋮	⋮
۱۷	3^{17}	۱۲۹۱۴۰۱۶۳
۱۸	3^{18}	۳۸۷۴۲۰۴۸۹
⋮	⋮	⋮
۲۷	3^{27}	۷۶۲۵۵۹۷۴۸۴۹۸۷
۲۸	3^{28}	۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱
۲۹	3^{29}	۶۸۶۳۰۳۷۷۳۶۴۸۸۳

اهداف موضوعی:

۱ درک نقش لگاریتم در تسهیل محاسبات

۲ آشنایی با مفهوم لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها در ریاضی و خارج ریاضی،

۲ تخمین زدن

۳ مقایسه کردن

۴ ارزیابی

حل فعالیت ۱

۱ عمل ضرب باید انجام شود، زمان زیادی لازم است زیرا اعداد بزرگی را باید در هم ضرب کنیم.

۲ عمل تقسیم باید انجام شود، زمان زیادی لازم است زیرا اعداد بزرگی را باید برهم تقسیم کنیم.

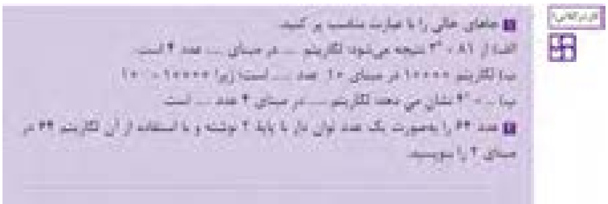
۳ $۳^{۲۸} = ۳^{۱۱} \times ۳^{۱۷}$ و $۳^{۱۲} = ۳^{۱۷} \div ۳^{۲۹}$

۴ مشاهده می‌کنیم که اعدادی که به عنوان فاصله داده شده‌اند همگی توان‌هایی از ۳ هستند، پس ضرب و تقسیم آنها به صورت ضرب و تقسیم دو عدد توان‌دار است.

الف) $۳^{۱۷} \times ۳^{۱۱} = ۳^{۲۸} = ۲۲۸۷۶۷۹۲۴۵۴۹۶۱$

ب) $۳^{۲۹} \div ۳^{۱۷} = ۵۳۱۴۴۱$

۵ ضرب و تقسیم اعداد بزرگ بسیار وقت‌گیر است ولی وقتی این اعداد به صورت اعداد توان‌دار با پایه یکسان باشند ضرب و تقسیم آنها به صورت جمع و تفریق توان‌ها در می‌آید که آسان‌تر است. در اینجا استفاده از جدول یعنی نوشتن عدد به صورت توان یک عدد خاص.


۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
الف) از $۸۱ = ۳^۴$ نتیجه می‌شود لگاریتم ... در مبنای ... عدد ۴ است.
ب) لگاریتم ۱۰۰۰۰ در مبنای ۱۰ عدد ... است؛ زیرا $۱۰۰۰۰ = ۱۰^{...}$
پ) $... = ۴^۲$ نشان می‌دهد لگاریتم ... در مبنای ۴ عدد ... است.
۲ عدد ۶۴ را به‌صورت یک عدد توان‌دار با پایه ۲ نوشته و با استفاده از آن لگاریتم ۶۴ در مبنای ۲ را بنویسید.

حل کار در کلاس ۱

اهداف: کسب مهارت برقراری ارتباط بین نمایش یک عدد توان‌دار و لگاریتم آن عدد، پیوندها و اتصال‌ها بین مفاهیم ریاضی.

۱ الف) ۸۱ ، ۳

ب) ۴ ، ۴

پ) ۱۶ ، ۱۶ ، ۲

۲ $64 = 2^6$ بنابراین لگاریتم ۶۴ در مبنای ۲ عدد ۶ است.
در فعالیت بعدی مشخص خواهد شد که از عدد ۱ نمی‌توان به عنوان مبنای لگاریتم استفاده کرد.

فعالیت ۲

تساوی‌های $1 = 1^0$ و $1 = \sqrt[3]{1} = 1^{\frac{1}{3}}$ و $1 = 1^2$ و $1 = \frac{1}{1} = 1^{-1}$ و ... را در نظر بگیرید.

۱ در تساوی $1 = 1^{...}$ به‌جای نقطه چین چه اعدادی می‌توان قرار داد؟

۲ آیا می‌توان عدد a را طوری پیدا کرد که $2 = 1^a$؟ به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۲ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۳ آیا عدد a را می‌توان طوری یافت که در تساوی $3 = 1^a$ صدق کند؟ به عبارت دیگر آیا لگاریتم ۳ در مبنای ۱ قابل تعریف است؟

۴ آیا عددی غیر از ۱ را می‌توان به‌صورت عددی توان‌دار با پایه ۱ نوشت؟ چرا؟

۵ با توجه به نتایج بالا، فکر می‌کنید می‌توان عدد ۱ را به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب کرد؟ چرا؟

اهداف موضوعی:
درک عدم امکان انتخاب عدد ۱ به‌عنوان مبنای لگاریتم.
مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ استدلال،

۳ تعمیم.

حل فعالیت ۲ :

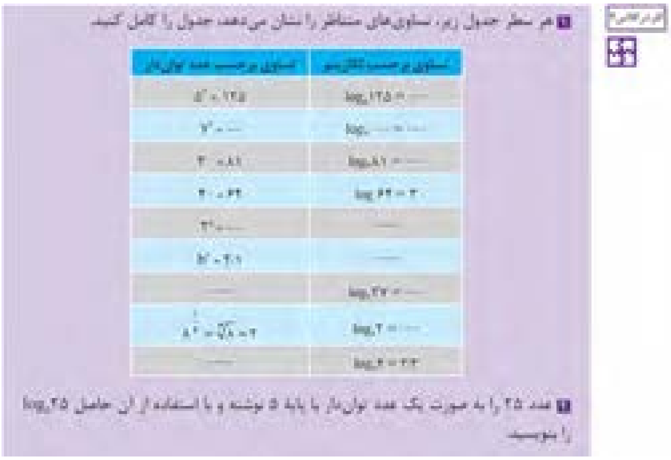
۱ نظیر نمونه‌های سطر اول فعالیت هر عدد طبیعی، صحیح، گویا و حتی گنگ می‌توان قرار داد.

۲ خیر ، زیرا ۱ به هر توانی برسد ، حاصل، عدد ۱ خواهد شد.

۳ خیر

۴ خیر زیرا حاصل هر عدد توان‌دار با پایهٔ ۱، عددِ ۱ است.

۵ خیر، با توجه به تعریف لگاریتم چون به جز ۱ هیچ عدد دیگری را نمی‌توان به صورت توانی از عدد ۱ نوشت، عدد ۱ نمی‌تواند به عنوان مبنای لگاریتم انتخاب شود.



حل کار در کلاس ۲

اهداف: تقویت مهارت محاسبهٔ لگاریتم اعداد.
پیوندها و اتصال‌ها بین مفاهیم ریاضی.

۱ تکمیل شدهٔ جدول :

تساوی برحسب لگاریتم	تساوی برحسب عدد توان‌دار
$\log_{۵} ۱۲۵ = ۳$	$۵^{۳} = ۱۲۵$
$\log_{۷} ۴۹ = ۲$	$۷^{۲} = ۴۹$
$\log_{۳} ۸۱ = ۴$	$۳^{۴} = ۸۱$
$\log_{۲} ۳۲ = ۵$	$۲^{۵} = ۳۲$
$\log_{۳} ۲۷ = ۳$	$۳^{۳} = ۷۲$
$\log_{۸} ۲ = \frac{۱}{۳}$	$۸^{\frac{۱}{۳}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$

۲ $۲۵ = ۵^۲ \Rightarrow \log_۵ ۲۵ = ۲$

فعالیت ۳

۱ اگر $۴^c = b$، جدول زیر را کامل کنید.

c	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
b	$\frac{۱}{۱۶}$	...	$\frac{۱}{۲}$	...	۲	...	...

۲ آیا در سطر دوم جدول عددی منفی وجود دارد؟ دربارهٔ علامت b چه می‌توان گفت؟

۳ با توجه به اینکه تساوی $۴^c = b$ نشان می‌دهد $c = \log_۴ b$، دربارهٔ علامت b در $\log_۴ b$ چه می‌توان گفت؟

۴ اگر در پایه به جای ۴، عدد ۲ باشد با یک مثال درستی نتیجه‌ای که از قسمت قبل به دست آورده‌اید را بررسی کنید.

۵ اگر a عددی مثبت و مخالف ۱ باشد و $a^c = b$ دربارهٔ علامت b چه می‌توان گفت؟ دربارهٔ علامت b در $\log_a b$ چه می‌توان گفت؟ آیا از عدد منفی می‌توان لگاریتم گرفت؟

اهداف موضوعی:

درک ضرورت مثبت بودن b در $\log_a^b$.

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ پیوندها و اتصال‌ها،

۲ استدلال،

۳ حدسیه‌سازی،

۴ تعمیم،

۵ ارزیابی.

حل فعالیت ۳

۱ جدول تکمیل شده :

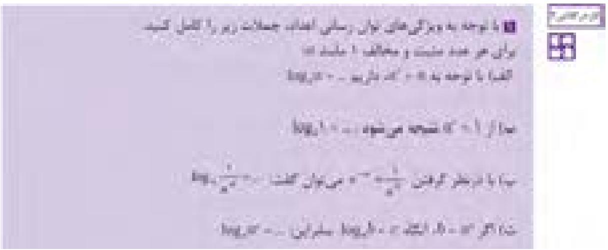
c	-۲	-۱	$-\frac{۱}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
b	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۱۶

۲ خیر ، علامت b مثبت است.

۳ علامت b در $\log_۴ b$ باید مثبت باشد.

۴ برای عدد ۳ نیز می‌توان دید : $۰ < ۹ = ۳^۲$ و $۰ < \frac{۱}{۹} = ۳^{-۲}$ و $۰ < \sqrt{۳} = ۳^{\frac{۱}{۲}}$
بنابراین علامت b در $\log_۳ b$ مثبت است.

۵ چون برای $a > ۰$ در تساوی $a^c = b$ مقدار b مثبت است ، پس علامت b در $\log_a b$ مثبت است. بنابراین از اعداد منفی نمی‌توان لگاریتم گرفت زیرا عدد مثبت به هر توانی برسد منفی نخواهد بود.



اهداف: آشنایی با برخی از خواص لگاریتم، پیوند و اتصال بین مفاهیم ریاضی.

حل کار در کلاس ۳ :

اهداف: آشنایی با برخی از خواص لگاریتم.

الف) $\log_a a = ۱$ ب) $\log_a ۱ = ۰$ پ) $\log_a \frac{۱}{a^n} = -n$ ت) $\log_a a^c = c$

توصیه: از هنرجویان بخواهید این خواص را به‌صورت کلامی نیز بگویند مثلاً در قسمت الف: لگاریتم هر عدد در مبنای خودش عدد ۱ است و...

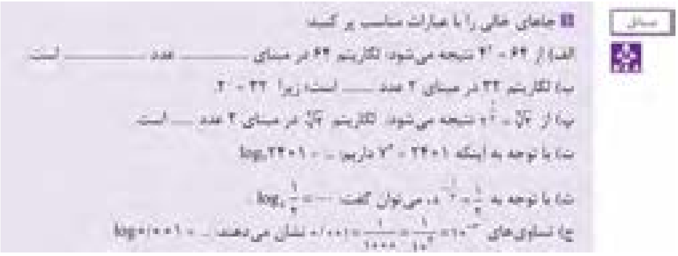
استفاده از ماشین حساب :

اهداف: آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم اعداد.

تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب در محاسبه لگاریتم.
توجه به نقش ماشین حساب در محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.

الف) $\log ۹ \approx ۰/۹۵$

ب) $\log ۰/۰۰۱۶ \approx -۲/۷۹$


جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال بین توان و لگاریتم

مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال بین توان و لگاریتم

اهداف: تمرین روی مفهوم و محاسبه لگاریتم

الف) از $۶۴ = ۴^{۳}$ نتیجه می شود لگاریتم ۶۴ در مبنای ۴ عدد ۳ است.

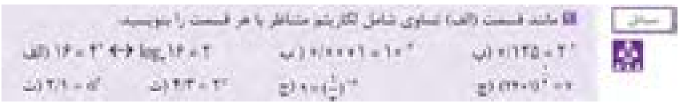
ب) لگاریتم ۳۲ در مبنای ۲ عدد ۵ است زیرا $۳۲ = ۲^{۵}$

پ) از $\sqrt[۳]{۲} = ۲^{\frac{۱}{۳}}$ نتیجه می شود لگاریتم $\sqrt[۳]{۲}$ در مبنای ۲ عددِ $\frac{۱}{۳}$ است.

ت) با توجه به اینکه $۲۴۰۱ = ۷^{۴}$ بنابراین : $\log_{۷} ۲۴۰۱ = ۴$.

ث) با توجه به $\frac{۱}{۲} = ۸^{-\frac{۱}{۳}}$ می‌توان گفت : $\log_{۸} \frac{۱}{۲} = -\frac{۱}{۳}$.

ج) تساوی‌های $۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۱۰^{۳}} = \frac{۱}{۱۰۰۰} = ۰/۰۰۱$ نشان می دهد : $\log_{۱۰} ۰/۰۰۱ = -۳$.


مانند قسمت (الف) تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید.

مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال بین توان و لگاریتم، ارتباطات

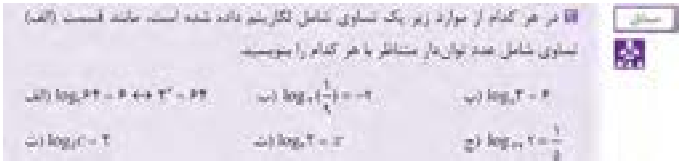
اهداف: برقرار کردن ارتباط مفهومی بین عمل توان‌رسانی و لگاریتم

۲ تساوی شامل لگاریتم متناظر با هر قسمت را بنویسید:

الف) $۱۶ = ۴^{۲} \leftrightarrow \log_{۴} ۱۶ = ۲$ ب) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۰۱ = -۴$ پ) $\log_{۲} ۰/۱۲۵ = -۳$

ت) $\log_{a} ۲/۱ = ۳$ ث) $\log_{۲} ۴/۳ = x$

چ) $\log_{۲۴۰۱} ۷ = \frac{۱}{۴}$ ج) $\log_{\frac{۱}{۳}} ۹ = -۲$


در هر کدام از موارد زیر یک تساوی شامل لگاریتم داده شده است. مانند قسمت (الف) تساوی شامل عدد توان‌دار متناظر با هر کدام را بنویسید.

الف) $\log_۲ ۶۴ = ۶ \leftrightarrow ۲^۶ = ۶۴$ ب) $\log_۳ (\frac{۱}{۹}) = -۲$ پ) $\log_a ۳ = ۶$

ت) $\log_b c = ۲$ ث) $\log_۳ ۲ = x$ ج) $\log_{۳۲} ۲ = \frac{۱}{۵}$

مهارت‌ها و فرایندها: پیوند و اتصال بین توان و لگاریتم، ارتباطات

اهداف: برقرار کردن ارتباط مفهومی بین عمل توان‌رسانی و لگاریتم

الف) $\log_۲ ۶۴ = ۶ \leftrightarrow ۲^۶ = ۶۴$ ب) $۳^{-۲} = \frac{۱}{۹}$ پ) $a^۶ = ۳$

ت) $b^۲ = c$ ث) $۳^x = ۲$ ج) $۳۲^{\frac{۱}{۵}} = ۲$


حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log_۷ ۴۹ = \dots$ ب) $\log_۵ ۱۲۵ = \dots$ پ) $\log_۲ ۱۲۸ = \dots$

ت) $\log_۲ \frac{۱}{۸} = \dots$ ث) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۰۱ = \dots$

مهارت‌ها و فرایندها: مهارت محاسبه لگاریتم یک عدد

اهداف: محاسبهٔ لگاریتم

الف) $\log_۷ ۴۹ = ۲$ ب) $\log_۵ ۱۲۵ = ۳$ $\log_۲ ۱۲۸ = ۷$

ت) $\log_۲ \frac{۱}{۸} = -۳$ ث) $\log_{۱۰} ۰/۰۰۰۱ = -۴$

تذکر: توصیه می‌شود از هنرجویان بخواهید برای محاسبهٔ لگاریتم در یک مبنا توان‌های مبنا را نوشته تا به عدد مورد نظر برسیم مثلاً برای مبنای ۲ می‌توان از جدول زیر استفاده کرد:

توان‌های ۲	$۲^{-۳}$	$۲^{-۲}$	$۲^{-۱}$	$۲^{۰}$	$۲^{۱}$	$۲^{۲}$	$۲^{۳}$	$۲^{۴}$	$۲^{۵}$	$۲^{۶}$	$۲^{۷}$
حاصل	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲	۴	۸	۱۶	۳۲	۶۴	۱۲۸

سؤال

با استفاده از ماشین حساب حاصل لگاریتم‌های زیر را تا دو رقم اعشار بنویسید.

الف) $\log ۵۰ = ...$ ب) $\log ۱۲ = ...$ پ) $\log ۲ = ...$

مهارت‌ها و فرایندها: مهارت محاسبه لگاریتم یک عدد، مهارت استفاده از ابزار

اهداف: استفاده از ماشین حساب، تقویت مهارت قطع کردن در تقریب اعداد اعشاری.

الف) $\log ۵۰ = ۱/۶۹$ ب) $\log ۱۲ = ۱/۰۷$ ج) $\log ۲ = ۰/۳۰$

سؤال

نوعی باکتری را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۴ برابر می‌شود.
الف) پس از چند واحد زمانی، وزن ۱ گرم از این باکتری‌ها ۶۴ گرم خواهد شد؟
ب) پس از چند واحد زمانی، وزن این باکتری‌ها ۳۲ گرم خواهد شد؟

مهارت‌ها و فرایندها: حل مسئله، پیوند و اتصال ریاضی با خارج ریاضی
اهداف: استفاده از لگاریتم در حل مسائل، استدلال

الف) قبلاً دیده بودیم وزن باکتری‌ها پس از x واحد زمانی ۴^x است. پس اگر $۶۴ = ۴^x$ داریم $x = \log_۴ ۶۴$. از آنجا که $\log_۴ ۶۴ = ۳$ پس بعد از ۳ واحد زمانی وزن باکتری‌ها ۶۴ گرم خواهد بود.

ب) با استدلال همانند بخش (الف) جواب مسئله $\log_۴ ۳۲$ است. برای محاسبه این مقدار داریم:

$۴^{\frac{۵}{۲}} = ۴^۲ \times ۴^{\frac{۱}{۲}} = ۴^۲ \times \sqrt{۴} = ۱۶ \times ۲ = ۳۲$ بنابراین $\log_۴ ۳۲ = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$ پس، بعد از ۲/۵ واحد زمانی وزن باکتری‌ها ۳۲ گرم خواهد بود.

سؤال

در هر مورد زیر، یک تساوی شامل عددی توان‌دار و تساوی لگاریتمی متناظر با آن را طوری بنویسید که حاصل لگاریتم عددی با ویژگی خواسته شده باشد.

الف) عدد طبیعی ب) عدد صحیح منفی پ) عدد گویا

مهارت‌ها و فرایندها: ارتباطات
اهداف: تمرین روی مفهوم لگاریتم

الف) $۶^۲ = ۳۶ \leftrightarrow \log_۶ ۳۶ = ۲$

ب) $۶^{-۲} = \frac{۱}{۳۶} \leftrightarrow \log_۶ \frac{۱}{۳۶} = -۲$

پ) $۶^{\frac{۱}{۲}} = \sqrt{۶} \leftrightarrow \log_۶ \sqrt{۶} = \frac{۱}{۲}$

بخش دوم: خواص لگاریتم

اهداف بخش

- آشنایی با خواص لگاریتم
- کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم

واژه‌های کلیدی: خواص لگاریتم

نگاه کلی به بخش

در این بخش ابتدا با طرح یک پرسش، زمینهٔ کنجکاوی هنرجویان برای ذکر خواص لگاریتم (که هدف اصلی ابداع لگاریتم می‌باشد) فراهم می‌شود. سپس با طرح فعالیت سعی در هدایت هنرجویان به درک این خواص می‌گردد برای بررسی برخی از اشتباهات متداول توسط هنرجویان از ماشین حساب استفاده شده است.

ورود به مطلب

می‌توانیم به بخش اول مراجعه کنیم و از دانش‌آموزان بخواهیم توضیح دهند لگاریتم اعداد چگونه می‌تواند مشکلات مربوط به محاسبات جمع و ضرب اعداد بزرگ را حل کند. پس از بحث در این مورد می‌توانیم به فعالیت (۴) بپردازیم تا یک خاصیت اساسی لگاریتم را به دست آوریم.

هدف موضوعی:

درک خواص لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ الگویابی،

۲ مقایسه کردن،

۳ استدلال،

۴ تعمیم،

۵ ارتباطات کلامی،

حل فعالیت ۴ :

۱ تکمیل شدهٔ جدول:

b	c	$\log b$	$\log c$	bc	$\log(bc)$
۱۰	۱۰۰	۱	۲	۱۰۰۰	۳
۱۰۰۰۰۰	۱۰۰۰	۵	۳	۱۰۰۰۰۰۰۰۰	۸
۰/۱	۱۰۰	۱-	۲	۱۰	۱
$\sqrt{۱۰}$	$\sqrt{۱۰}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱۰	۱
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	y	۱۰^{x+y}	$x+y$

۲ در هر سطر مجموع اعداد مربوط به ستون $\log b$ و $\log c$ با عدد ستون $\log(bc)$ برابر است.

۳ لگاریتم حاصل ضرب دو عدد با مجموع لگاریتم‌های آنها برابر است.

استفاده از ماشین حساب :

اهداف:

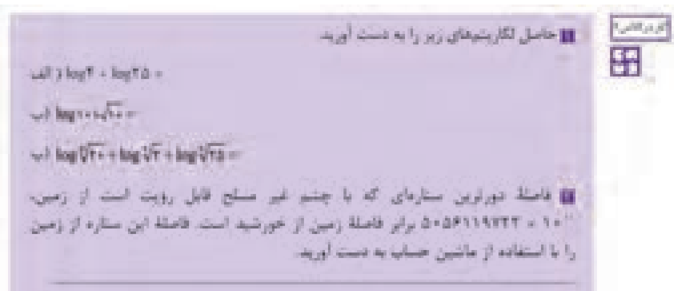
- آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای انجام محاسبات شامل لگاریتم
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد.
- درک یکسان نبودن: $\log(a+b)$ و $\log a + \log b$ با استفاده از تقریب اعشاری آنها.

گاهی دانش‌آموزان تصور می‌کنند که عبارات $\log(a+b)$ و $\log a + \log b$ مساوی هستند. به نظر می‌رسد ریشه این تصور غلط در این مطلب است که در عبارت $\log x + \log y$ عبارت log یک فاکتور مشترک است. این خطا بسیار رایج است و طرح این قسمت در کتاب جهت آشنایی هنرجویان با این تصور اشتباه می‌باشد تا در این قسمت درک درستی از لگاریتم داشته باشند.

با توجه به اینکه: $\log ۱۰۰ = ۲$ و $\log ۱۰۰۰ = ۳$ و با استفاده از ماشین حساب می‌توان دید: $\log ۱۱۰۰ = ۳/۰۴$

بنابراین :

$$۳/۰۴ \neq ۲+۳ \rightarrow \log(۱۰۰ + ۱۰۰۰) \neq \log ۱۰۰ + \log ۱۰۰۰ \rightarrow$$
$$\log(a+b) \neq \log a + \log b$$


۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\log ۴ + \log ۲۵ =$

ب) $\log ۱۰\sqrt{۱۰} =$

پ) $\log\sqrt[۳]{۴۰} + \log\sqrt[۳]{۴} + \log\sqrt[۳]{۲۵} =$

۲ فاصلهٔ دورترین ستاره‌ای که با چشم غیر مسلح قابل رویت است از زمین، ۵۰۵۶۱۱۹۷۲۲ × ۱۰ برابر فاصلهٔ زمین از خورشید است. فاصلهٔ این ستاره از زمین را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید.

حل کار در کلاس ۴

اهداف: کسب مهارت در استفاده از خاصیت لگاریتم، تقویت مهارت استفاده از ماشین حساب.

۱ الف) $\log ۴ + \log ۲۵ = \log(۴ \times ۲۵) = \log ۱۰۰ = ۲$

ب) $\log 100\sqrt{10} = \log 100 + \log\sqrt{10} = 2 + \log 10^{\frac{1}{2}} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

پ) $\log\sqrt[3]{20} + \log\sqrt[3]{2} + \log\sqrt[3]{25} = \log(\sqrt[3]{20}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{25}) =$

$\log\sqrt[3]{1000} = \log 10 = 1$

۲

$\log(5056119722\times 10^{11}\times 1496800000) = \log 5056119722 + \log 10^{11} +$

$\log 1496800000 \approx 28/879$

با استفاده از ماشین حساب داریم :

$10^{28/879} \approx 7/568\times 10^{28}$


۱ جدول زیر را کامل کنید.

a	b	$\log a$	$\log b$	$\frac{a}{b}$	$\log\frac{a}{b}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	ــــ	۱۰۰	ــــ
۱۰۰	۱۰	ــــ	ــــ	ــــ	ــــ
[illegible]	۱۰۰	۱-	ــــ	[illegible]	ــــ
$100\sqrt{10}$	$10\sqrt{10}$	ــــ	$\frac{3}{2}$	ــــ	ــــ
[illegible]	[illegible]	[illegible]	ــــ	[illegible]	ــــ

۲ در هر سطر چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های $\log a$ و $\log b$ و ستون $\log\frac{a}{b}$ وجود دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

اهداف موضوعی:

درک خواص لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ الگویابی،

۲ استدلال،

۳ مقایسه کردن،

۴ تعمیم دادن،

۵ ارتباطات.

حل فعالیت ۵

۱ جدول تکمیل شده:

b	c	$\log b$	$\log c$	$\frac{b}{c}$	$\log \frac{b}{c}$
۱۰۰۰	۱۰	۳	۱	۱۰۰	۲
۱۰۰	۱۰	۲	۱	۱۰	۱
۰/۱	۱۰۰	۱-	۲	۰/۰۰۱	۳-
$۱۰۰\sqrt{۱۰}$	$۱۰\sqrt{۱۰}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۱۰	۱
۱۰^{x}	۱۰^{y}	x	y	۱۰^{x-y}	$x - y$

۲ در هر سطر تفاضل عدد ستون‌های $\log c$ از $\log b$ با عدد ستون $\log \frac{b}{c}$ برابر است. لگاریتم تقسیم دو عدد برابر است با تفاضل مقسوم علیه از مقسوم .

برای $b.c > ۰$ داریم: $\log \frac{b}{c} = \log b - \log c$

استفاده از ماشین حساب :

اهداف:

- آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای انجام محاسبات شامل لگاریتم
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد.
- درک نامساوی بودن : $\log(a - b)$ و $\log a - \log b$

با استفاده از ماشین حساب داریم : $\log۶\approx ۰/۷۷$ و $\log۲\approx ۰/۳۰$ و $\log۸\approx ۰/۹۰$
بنابراین :

$$۰/۷۷ \neq ۰/۹۰ - ۰/۳ \rightarrow \log(۸-۲) \neq \log۸ - \log۲$$
$$\rightarrow \log(a-b) \neq \log a - \log b$$

کار در کلاس ۵

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log۲۰ - \log۲ = \dots$ ب) $\log۰/۰۰۱ = \log\frac{۱}{۱۰۰۰} = \dots$

۲ با تکمیل نقطه‌چین‌ها، نتیجهٔ فعالیت (۵) را با استفاده از خاصیت لگاریتم ضرب دو عدد به دست آورید (b و $c > ۰$).

$\log(b) = \log(\frac{bc}{c}) = \log(\frac{b}{c} \times \dots) = \log(\frac{b}{c}) + \dots$

بنابراین $\log(\frac{b}{c}) = \dots - \dots$

حل کار در کلاس ۵

اهداف : کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم، تقویت مهارت در محاسبهٔ لگاریتم یک عدد

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log۲۰ - \log۲ = \log\frac{۲۰}{۲} = \log۱۰ = ۱$

ب) $\log۰/۰۰۱ = \log\frac{۱}{۱۰۰۰} = \log۱ - \log۱۰۰۰ = ۰-۳ = -۳$

۲

$$\log b = \log\left(\frac{bc}{c}\right) = \log\left(\frac{b}{c}\times c\right) = \log\left(\frac{b}{c}\right) + \log c$$

بنابراین: $$\log\left(\frac{b}{c}\right) = \log b - \log c$$

فعالیت ۶

۱ جدول زیر را تکمیل کنید.

b	n	b^n	$\log b$	$\log b^n$
۱۰	۵	—	—	—
۱۰۰	۲	—	۲	—
۰/۱	۳	—	−۱	—
$\sqrt{۱۰}$	۴	—	—	—
۱۰^x	m	$(۱۰^x)^m = ۱۰^{xm}$	x	—

۲ در هر سطر، چه رابطه‌ای بین اعداد ستون‌های n و $\log b$ و عدد ستون $\log b^n$ وجود دارد؟ این رابطه را به‌صورت یک جمله بیان کنید و آن را با زبان ریاضی بنویسید.

هدف موضوعی:

درک خواص لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ مقایسه کردن،

۲ الگویابی،

۳ استدلال،

۴ تعمیم دادن،

۵ ارتباطات.

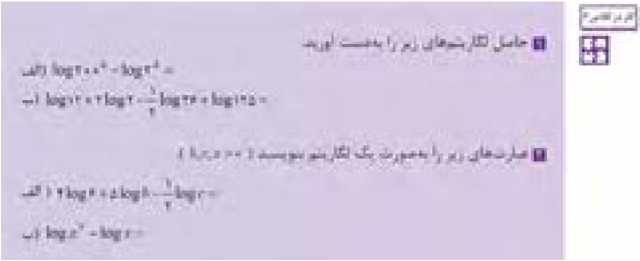
حل فعالیت ۶

۱ جدول تکمیل شده:

b	n	b^n	$\log b$	$\log b^n$
۱۰۰	۲	۱۰۰۰۰	۲	۴
۱۰	۵	۱۰۰۰۰۰	۱	۵
۰/۱	۳	۰/۰۰۱	-۱	-۳
$\sqrt{۱۰}$	۴	۱۰۰	$\frac{۱}{۲}$	۲
۱۰^x	n	۱۰^{nx}	x	nx

۲ در هر سطر حاصل ضرب اعداد ستون‌های n و $\log b$ برابر عدد ستون $\log b^n$ می‌باشد. این لگاریتم هر توان از یک عدد با حاصل ضرب توان در لگاریتم آن عدد برابر است.

یعنی : برای $b > ۰$ و هر عدد حقیقی x داریم : $\log b^x = x \log b$


۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.
الف) $\log ۲۰۰^۵ - \log ۲^۵ =$
ب) $\log ۱۲ + ۲\log ۲ - \frac{۱}{۲}\log ۳۶ + \log ۱۲۵ =$

۲ عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید ($b, c, x > ۰$)
الف) $۴\log ۶ + ۵\log b - \frac{۱}{۲}\log c =$
ب) $\log x^۲ - \log x =$

حل کار در کلاس ۶

اهداف: کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم، کسب مهارت در محاسبهٔ لگاریتم یک عدد.

۱ حاصل لگاریتم‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۲۰۰^۵ - \log ۲^۵ = ۵\log ۲۰۰ - ۵\log ۲ = ۵\log \frac{۲۰۰}{۲} = ۵\log ۱۰۰ = ۱۰$

ب) $\log\left(\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}\right)^۵ = ۵\log\frac{۱}{\sqrt{۱۰}} = -\frac{۵}{۲}$

ج) $\log ۱۲ + ۲\log ۲ - \frac{۱}{۲}\log ۳۶ + \log ۱۲۵ = \log ۱۲ + \log ۲^۲ - \log\sqrt{۳۶} + \log ۱۲۵$

$= \log\left(\frac{۱۲ \times ۴ \times ۱۲۵}{۶}\right) = \log ۱۰۰۰ = ۳$

۲ عبارات زیر را به صورت یک لگاریتم بنویسید($b \,.\, c \,.\, x > ۰$)

الف) $۴\log ۶ + ۵\log b - \frac{۱}{۲}\log c = \log ۶^۴ + \log b^۵ - \log\sqrt{c} = \log\frac{۶^۴ b^۵}{\sqrt{c}}$

ب) $\log x^۲ - \log x = ۲\log x - \log x = \log x$

جدول زیر را کامل کنید.

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	ــــ	ــــ	ــــ	۲
۱۰	۱۰۰	ــــ	۲	ــــ	$\frac{۱}{۲}$
$\sqrt{۱۰}$	۱۰	ــــ	۱	ــــ	ــــ
۱۰۰۰	۱۰۰	ــــ	ــــ	ــــ	$\frac{۳}{۲}$

۲ با مقایسهٔ اعداد دو ستون آخر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ چه رابطه‌ای بین $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$ وجود دارد؟

هدف موضوعی:

درک خواص لگاریتم،

مهارت‌ها و فرایندها:

۱ مقایسه کردن،

۲ الگویابی،

۳ استدلال،

۴ تعمیم دادن،

۵ ارتباطات.

۱ نقطه چین‌ها را در جدول زیر تکمیل کنید :

b	a	$\log b$	$\log a$	$\frac{\log b}{\log a}$	$\log_a b$
۱۰۰	۱۰	۲	۱	۲	۲
۱۰	۱۰۰۰	۱	۳	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
$\sqrt{۱۰}$	۱۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
۱۰۰۰	۱۰۰	۳	۲	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$

۲ با مقایسهٔ اعداد دو ستون آخر می‌توان گفت در هر سطر مقادیر $\frac{\log b}{\log a}$ و $\log_a b$ مساوی هستند.

در صورتی که هنرجویان آمادگی استدلال قوی‌تری را داشته باشند می‌توانید نتیجه بالا را به صورت زیر نیز برای آنها بیان کنید.

$$b = a^c \Rightarrow \log b = \log a^c = c \log a \Rightarrow c = \frac{\log b}{\log a}$$

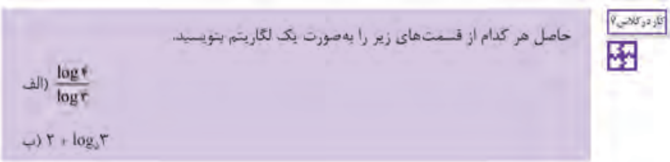
از طرف دیگر تساوی $b = a^c$ به معنای آن است که $c = \log_a b$، پس $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$.

استفاده از ماشین حساب:

اهداف:

- آشنایی با تقریب اعشاری لگاریتم یک عدد.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای محاسبهٔ لگاریتم یک عدد در مبنای دلخواه.
- کسب مهارت در استفاده از ماشین حساب برای انجام محاسبات شامل لگاریتم.
- تقویت مهارت قطع کردن تقریب اعشاری اعداد.

$\log_۵ ۸ = \log ۸ \div \log ۵ \approx ۱/۲۹$



حل کار در کلاس ۷ :

اهداف: کسب مهارت در استفاده از خواص لگاریتم، کسب مهارتِ نمایش لگاریتمی یک عدد.

الف) $۲ + \log_۵ ۳ = \log_۵ ۲۵ + \log_۵ ۳ = \log_۵ (۲۵ \times ۳) = \log_۵ ۷۵$

ب) $\frac{\log ۴}{\log ۳} = \log_۳ ۴$

مسائل

عبارت‌های زیر را به‌صورت یک لگاریتم بنویسید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $\log\sqrt{۵} + \log\sqrt{۲} = \cdots$

ب) $\log ۴۰۰۰ - \log ۴ = \cdots$

پ) $۲\log ۵۰ + ۲\log ۲ = \cdots$

ت) $۵\log x - \log y = \cdots$

ث) $۳\log a + ۲\log b - \log z - \log a^۲ + \log ۴ = \cdots$

ج) $۴ + \log_۴ ۳$

چ) $۴ - \log_۳ ۵$

حل مسائل:

اهداف: استفاده از خواص لگاریتم

مهارت‌ها و فرایندها: مهارت انجام محاسبات با لگاریتم

الف) $\log\sqrt{۵} + \log\sqrt{۲} = \log(\sqrt{۵}\times\sqrt{۲}) = \log\sqrt{۱۰} = \log ۱۰^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲}$

ب) $\log ۴۰۰۰ - \log ۴ = \log\frac{۴۰۰۰}{۴} = \log ۱۰۰۰ = ۳$

پ) $۲\log ۵۰ + ۲\log ۲ = ۲(\log ۵۰ + \log ۲) = ۲\log(۵۰\times ۲) = ۲\log ۱۰۰ = ۴$

ت) $۵\log x - \log y = \log x^۵ - \log y = \log\frac{x^۵}{y}$

ث) $۳\log a + ۲\log b - \log z - \log a^۲ + \log ۴ = \log\frac{۴a^۳b^۲}{za^۲} = \log\frac{۴ab^۲}{z}$

ج) $۴ + \log_۴ ۳ = \log_۴ ۲۵۶ + \log_۴ ۳ = \log_۴(۲۵۶\times ۳) = \log_۴ ۷۶۸$

چ) $۴ - \log_۳ ۵ = \log_۳ ۸۱ - \log_۳ ۵ = \log_۳\frac{۸۱}{۵} = \log_۳ ۱۶/۲$

مسائل

اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱$ و $\log ۳ = ۰/۴۷۷$ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log ۴$ ب) $\log ۶$ پ) $\log ۱۸$ ت) $\log\frac{۲}{۳}$ ث) $\log ۵$ ج) $\log ۴۵$

مهارت‌ها و فرایندها:

انجام محاسبات با لگاریتم

اهداف: استفاده از خواص لگاریتم

مهارت‌ها و فرایندها: انجام محاسبات با لگاریتم

الف) $\log ۴ = ۲\log ۲ \approx ۲\times ۰/۳۰۱ = ۰/۶۰۲$

ب) $\log(۲\times ۳) = \log ۲ + \log ۳ \approx ۰/۳۰۱ + ۰/۴۷۷ = ۰/۷۷۸$

پ) $\log ۱۸ = \log(۹\times ۲) = ۲\log ۳ + \log ۲ \approx ۲\times ۰/۴۷۷ + ۰/۳۰۱ = ۱/۲۵۵$

ت) $\log \frac{۲}{۳} = \log ۲ - \log ۳ \approx -۰/۱۷۶$

ث) $\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ \approx ۰/۶۹۹$

ج) $\log ۴۵ = \log (۹ \times ۵) = ۲\log ۳ + \log ۵ \approx ۱/۶۵۳$

درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\frac{\log ۱۰}{\log ۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰}$ ب) $\log ۱۰۰ + \log ۰/۰۱ = ۰$ پ) $(\log ۱۰۰۰)^۲ = \log ۱۰۰۰^۲$

مهارت‌ها و فرایندها: ارزیابی کردن

اهداف: ارزیابی کردن، مقایسه کردن

این مسئله اشاره به اشتباهات متداولی دارد که هنرجویان معمولاً در محاسبات مرتکب می‌شوند.

الف) $\frac{\log ۱۰}{\log ۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \neq \frac{۱}{۱۰}$

ب) $\log ۱۰۰ + \log ۰/۰۱ = \log(۱۰۰ \times ۰/۰۱) = \log ۱ = ۰$

ج) $\left.\begin{array}{r} \log ۱۰۰۰^۲ = ۲\log ۱۰۰۰ = ۲ \times ۳ = ۶ \\ (\log ۱۰۰۰)^۲ = ۳^۲ = ۹ \end{array}\right\} \xrightarrow{۶ \neq ۹} \log ۱۰۰۰^۲ \neq (\log ۱۰۰۰)^۲$

الف) با استفاده از ماشین حساب تقریب اعشاری اعداد $\log ۲۰$ و $\log ۳۰$ و $\log ۶۰۰$ را تا دو رقم اعشار به دست آورید. آیا تساوی $\log(۲۰ \times ۳۰) = \log ۲۰ \times \log ۳۰$ برقرار است؟

ب) به کمک قسمت (الف) در مربع علامت مناسب = یا ≠ را قرار دهید.

برای اعداد مثبت a و b در حالت کلی داریم: «$\log(a \times b) \square \log a \times \log b$»

مهارت‌ها و فرایندها: استدلال کردن، مهارت تعمیم دادن، مهارت استفاده از ابزار

اهداف: استفاده از ماشین حساب، گرد کردن تقریب اعشاری، ارزیابی کردن، مقایسه کردن.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \log ۲۰ \approx ۱/۳۰ \\ \log ۳۰ \approx ۱/۴۷ \end{array}\right\} \log ۲۰ \times \log ۳۰ \approx ۱/۹۱۱ \\ \log(۲۰ \times ۳۰) = \log ۶۰۰ \approx ۲/۷۷ \end{array}\right\} \xrightarrow{۱/۹۱۱ \neq ۲/۷۷}$$

$$\log(۲۰ \times ۳۰) \neq \log ۲۰ \times \log ۳۰ \rightarrow \log(a \times b) \neq \log a \times \log b$$

سؤال

باکتری‌هایی را در نظر بگیرید که وزن آنها پس از ۱ واحد زمانی ۲ برابر می‌شود. با استفاده از ماشین حساب تعیین کنید پس از چند واحد زمانی وزن این باکتری‌ها ۲۰ گرم خواهد شد؟

اهداف: حل مسئله، استفاده از ماشین حساب.

$$\log_{۲}۲۰ = \frac{\log ۲۰}{\log ۲} = \log ۲۰ \div \log ۲ \approx ۴/۳۲$$

مطالب بیشتر دربارهٔ لگاریتم

در اینجا برخی از کاربردهای لگاریتم را مطرح می‌سازیم که به سایر نقش‌های دیگر این مفهوم اشاره دارند.

حسابداری: قانون بِنفورد بیان می‌کند در فهرست عددهایی که در بسیاری از پدیده‌های زندگی واقعی رخ می‌دهند، قانونی حاکم است که قانون رقم اول نیز گفته می‌شود طبق این قانون تعداد تکرارهای اعدادِ ۱ تا ۹ در اولین رقم از سمت راستِ داده‌ها به طور یکنواخت توزیع نشده است بلکه توزیع لگاریتمی دارد.

امروزه این قانون در حسابرسی‌های قانونی به شکل گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، چرا که اگر حساب‌ها با قانون بنفورد مطابقت نداشته باشند به این معنی خواهد بود که حساب‌ها و اعداد به احتمال فراوان جعلی هستند.

این قانون به ظاهر عجیب در بسیاری از داده‌ها برقرار است، مثلاً در صورت حساب‌های برق، شمارهٔ خیابان‌ها، قیمت سهام، مقدار جمعیت، آمار مرگ‌ومیر، طول رودخانه‌ها، ثابت‌های فیزیک و ریاضیات، و فرایندهایی که از توزیع توانی پیروی می‌کنند (که در طبیعت بسیار فراوان‌اند). این قانون مستقل از پایه‌ای که عددها در آن بیان می‌شوند برقرار است.

لگاریتم در تعیین بهره مرکب و مسائل مالی کاربرد فراوانی یافته است. پس از اختراع لگاریتم اویلر رابطه بین عدد e و بهره مرکب را دریافت و فهمید که حد بهره به سمت عددی متناسب (یا مساوی در شرایط خاص) ، که همان عدد e است میل می‌کند.

صوت: حساسیت گوش انسان در ارتباط با بسامد (فرکانس) است هرچه شدت صوت بیشتر باشد انرژی دریافت شده توسط گوش انسان بیشتر است و انسان صدا را بلندتر احساس می‌کند با این حال بلندی صوت احساس شده با انرژی دریافت شده توسط گوش انسان نسبت مستقیم ندارد یعنی اگر انرژی دریافت شده دو برابر شود، بلندی احساس شده دو برابر نمی‌شود به همین دلیل برای بلندی احساس شده توسط گوش از واحد تراز شدت صوت استفاده می‌شود این واحد (دسی‌بل، بل) به صورت لگاریتمی از نسبت شدت صوت به صوت مبنا (آستانهٔ شنوایی) می‌باشد. از این واحد شدت صوت در موسیقی (هنر) استفاده می‌شود.

زلزله: مقیاس ریشتر بیانگر میزان انرژی آزاد شده در کانون زلزله است مقدارِ ریشترِ یک زلزله، از محاسبه لگاریتمِ اندازه امواج ثبت شده در یک لرزه نگار به‌دست می‌آید. بنابراین اندازه امواجیِ که منجر به زلزله‌ای به بزرگی ۵ در مقیاس ریشتر می‌شود، ۱۰ برابر اندازه امواجی است که یک زلزله ۴ ریشتری ایجاد می‌کند. میزان انرژی‌ای که توسط یک زلزله آزاد می‌گردد، می‌تواند بسیار بسیار زیاد باشد! انرژی‌ای که از یک زلزلهٔ ۵ ریشتری آزاد می‌گردد، ۶/۱۳ برابر انرژی آزاد شده از یک زلزله ۴ ریشتری است.

لرزه نگار دستگاهی است که نوسانات زمینی ناشی از ورود امواج لرزه‌ای را همراه با علائم بسیار دقیق زمانی ثبت می‌کند.

شیمی: مقدار **pH** محلول‌ها (که شاخصی برای بیان شدت اسیدی یا قلیایی آنهاست) به صورت رابطه‌ای **لگاریتمی** از تراکم یا غلظت یون هیدروژن بیان می‌شود.
برای اندازه‌گیری قدمت بقایای موجودات زنده از نیمه عمر عنصر کربن ۱۴ (مدت زمانی که طول می‌کشد تا مقدار کربن ۱۴ نصف شود) استفاده می‌شود. موجودات زنده تا زمانی که در قید حیات هستند میزان کربن ۱۴ و کربن ۱۲ در بدن آنها برابر است به محض اینکه یک موجود زنده می‌میرد، کربن ۱۴ به‌تدریج و با سرعت بسیار کم، از بین می رود؛ در حالی که مقدار کربن ۱۲ ثابت است. قدمت موجود زنده با استفاده از رابطهٔ **لگاریتمی** درصد کربن ۱۴ باقیمانده و نیمه عمر کربن ۱۴ تعیین می‌شود.

شهر سوخته نام بقایای شهری باستانی است که در فاصله شهرهای زابل و زاهدان در استان سیستان و بلوچستان کنونی واقع شده است. این شهر در ۳۲۰۰ سال پیش از میلاد پایه‌گذاری شده و مردم این شهر در چهار دوره بین سال‌های ۳۲۰۰ تا ۱۸۰۰ پیش از میلاد در آن سکونت داشته‌اند.