فصل سوم

چندضلعی‌ها

هدف‌های رفتاری : پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :

۱ـ چندضلعی های منتظم را ترسیم کند.

۲ـ با استفاده از خواص و ویژگی‌های انواع چهارضلعی، آنها را ترسیم کند.

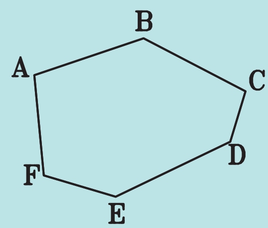
۳ـ با استفاده از مفهوم تشابه، شرایط تشابه دو شکل را بیان کند.

چندضلعی‌ها

یادآوری

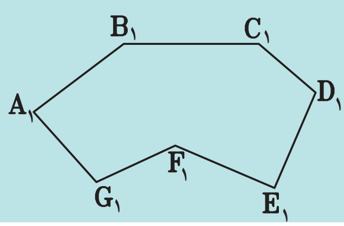
تعریف چندضلعی

هر خط شکسته بسته را چندضلعی می‌نامند. مثلث یک چندضلعی (سه‌ضلعی) است. اگر یکی از زوایای داخلی چندضلعی بزرگ‌تر از ۱۸۰ درجه باشد، چندضلعی را مقعر و در غیر این صورت چندضلعی را محدب می‌نامند (شکل ۱ـ۳).



شکل ۱ـ۳

در شکل ۱ـ۳ ABCDEF یک چندضلعی محدب است. زیرا در این چندضلعی زاویه بزرگ‌تر از نیم‌صفحه وجود ندارد. در شکل ۲ـ۳ $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ یک چندضلعی مقعر است، زیرا در آن یک زاویه بزرگ‌تر از نیم‌صفحه وجود دارد (شکل ۲ـ۳).



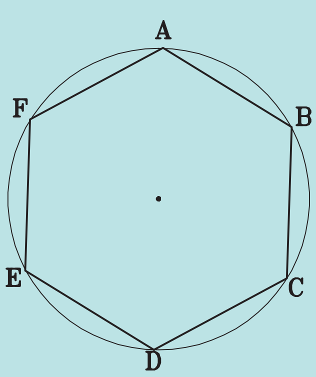
شکل ۲ـ۳

تمرین : یک هفت‌ضلعی محدب و یک نه‌ضلعی مقعر رسم کنید که یک ضلع مشترک داشته باشند.

چندضلعی‌های منتظم

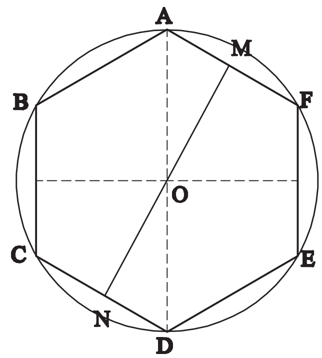
یادآوری

هر چندضلعی که اندازه‌های اضلاع آن با هم برابر باشند و آن چندضلعی در یک دایره محاط باشد، یک چندضلعی منتظم است. چندضلعی را وقتی در دایره محاط گویند که، تمام رئوس آن بر یک دایره واقع باشند. بنابراین چندضلعی‌های منتظم محدب هستند. تمام زوایای چندضلعی منتظم زوایای محاطی و با هم برابر هستند. در شکل ۳ـ۳ چندضلعی ABCDEF یک شش‌ضلعی منتظم است. زیرا در یک دایره محاط و اضلاع آن با هم مساوی هستند.



شکل ۳ـ۳

در شکل ۴ــ۳ یک شش‌ضلعی منتظم می‌بینید. محورهای تقارن آن را ترسیم کنید. شش‌ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ آیا محورهای تقارن آن دو به دو بر هم عمودند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا نقطهٔ O مرکز تقارن شش‌ضلعی منتظم هست؟

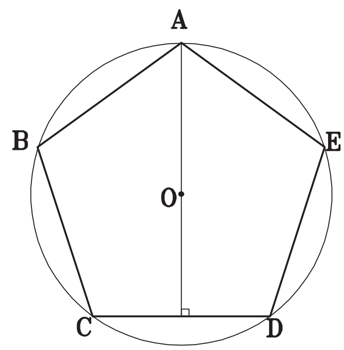


شکل ۴ــ۳

امتحان کنید: نقطه‌ای مانند M را روی یکی از اضلاع در نظر بگیرید. از نقطه M به O وصل کرده امتداد دهید تا ضلع مقابل را در N قطع کند. OM و ON را اندازه بگیرید مشاهده می‌کنید که با هم برابرند یعنی نقطه O مرکز تقارن شش‌ضلعی منتظم است.

چندضلعی‌های منتظم با تعداد اضلاع زوج به تعداد اضلاع، محور تقارن دارند. همچنین دارای مرکز تقارنند.

شکل ۵ــ۳ پنج‌ضلعی منتظم است. محورهای تقارن آن را ترسیم کنید. پنج‌ضلعی منتظم چند محور تقارن دارد؟ تحقیق کنید که محورهای تقارن پنج‌ضلعی نیمساز زاویه یک رأس و عمودمنصف ضلع مقابل آن هستند.



شکل ۵ــ۳

آیا می‌توان گفت چندضلعی‌های منتظم با تعداد اضلاع فرد به تعداد اضلاع محور تقارن دارند. آیا این نوع چندضلعی‌ها مرکز تقارن دارند؟ چرا؟

ترسیم چندضلعی‌های منتظم

در ترسیم چندضلعی‌ها معمولاً دو حالت کلی پیش می‌آید.

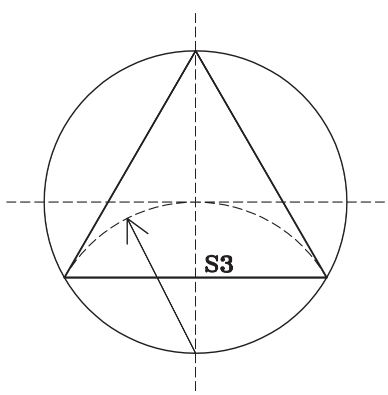
اول آنکه می‌خواهیم در دایره‌ای به شعاع معلوم یک چندضلعی را محاط کنیم.

دوم آنکه می‌خواهیم یک چندضلعی به طول ضلع مشخص ترسیم کنیم.

در ادامه ابتدا روش ترسیم چندضلعی‌ها در دایره محاطی توضیح داده می‌شود که می‌تواند مبنای ترسیم چندضلعی با طول ضلع معلوم هم باشد. بعد در مورد بعضی از آنها روش ترسیم بدون استفاده از دایره محیطی ارائه می‌شود.

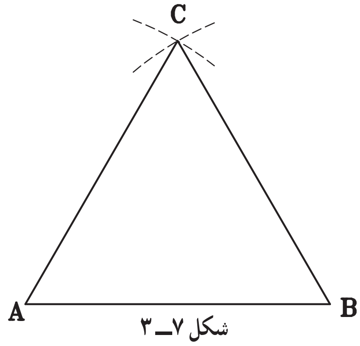
۱ــ ترسیم سه‌ضلعی منتظم

الف) محاط در دایره: سه‌ضلعی منتظم همان مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر اقطار عمود بر هم دایره را ترسیم کنیم و از تقاطع یکی از قطرها با محیط دایره قوسی به شعاع دایره بزنیم، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند که دو رأس سه‌ضلعی است. رأس دیگر آن انتهای قطر ذکرشده است (شکل ۶ــ۳).



شکل ۶ــ۳

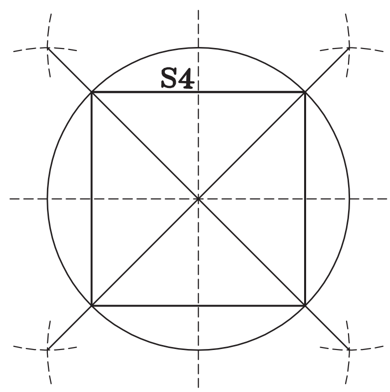
ب) با ضلع معلوم : ترسیم سه ضلعی با یک ضلع معلوم در واقع ترسیم یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع معلوم است (شکل ۷ــ۳).



شکل ۷ــ۳

۲ــ ترسیم چهار ضلعی منتظم

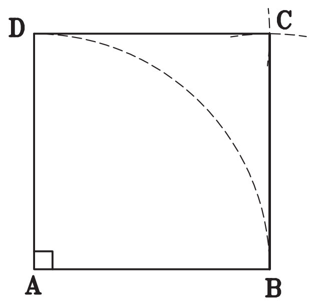
الف) محاط در دایره : چهار ضلعی منتظم یا همان مربع نیز شکل شناخته شده‌ای است. برای ترسیم آن در دایره دو قطر عمود بر هم را رسم کرده، چهار زاویه ۹۰ درجه تشکیل می‌شود. با ترسیم نیمسازهای آنها که دایره را در چهار نقطه قطع می‌کنند، چهار رأس چهارضلعی منتظم مشخص می‌شود (شکل ۸ ــ۳).



شکل ۸ ــ ۳

ب) با ضلع معلوم : ترسیم مربع با ضلع معلوم نیز بسیار ساده است.

رسم دو خط عمود بر هم، جدا کردن طول معلوم روی دو خط، رسم دو قوس به شعاع ضلع معلوم از نقاط مشخص‌شده رأس چهارم را تعیین کرده و مربع با ضلع معلوم را شکل می‌دهد (شکل ۹ــ۳).



شکل ۹ ــ ۳

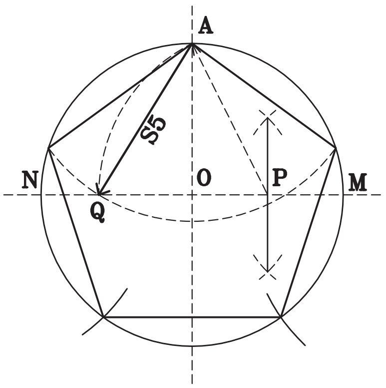
۳ــ ترسیم پنج ضلعی منتظم*

الف) محاط در دایره : برای رسم پنج‌ضلعی منتظم در دایره معلوم مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

۱ــ دو قطر عمود بر هم دایره را رسم می‌کنیم.

۲ــ عمود منصف شعاع OM را رسم می‌کنیم.

۳ــ به مرکز P و شعاع AP قوسی می‌زنیم تا ON را در نقطهٔ Q قطع کند. طول AQ ضلع پنج ضلعی است (شکل ۱۰ــ۳).



شکل ۱۰ ــ ۳

تمرین : یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید که در دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر محاط باشد.

ب) با ضلع معلوم : برای ترسیم پنج‌ضلعی منتظم به طول ضلع معلوم به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱ــ خط AB را به طول ضلع معلوم رسم می‌کنیم.

* در کتاب هندسه ایرانی اثر ابوالوفا بوزجانی بیش از شش روش برای ترسیم پنج ضلعی منتظم با ضلع معلوم ارائه شده است که همه کم و بیش اندکی خطا دارد. روش فوق شاید تنها روش علمی و استدلالی است که دقت صد در صد دارد.

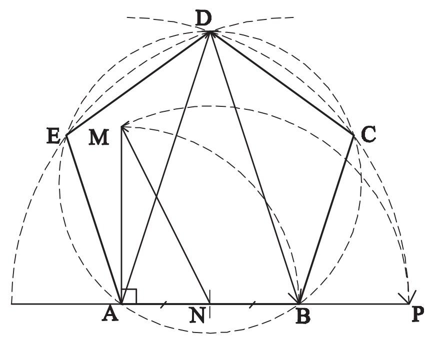
۲ــ از نقطهٔ A عمودی بر خط AB اخراج می‌کنیم و به اندازه طول AB روی آن جدا می‌کنیم تا نقطهٔ M به‌دست آید.

۳ــ به مرکز N وسط AB و به شعاع MN قوسی رسم می‌کنیم تا خط AB را در P قطع کند.

۴ــ AP قطر پنج‌ضلعی است اگر به مرکز A و B و به شعاع AP دو قوس بزنیم که یک‌دیگر را در D قطع کنند یک رأس دیگر پنج‌ضلعی تعیین شده است.

۵ــ ترسیم دایره‌ای که از سه نقطهٔ A و B و D بگذرد دایره محیطی پنج‌ضلعی را مشخص می‌کند.

۶ــ مشخص‌نمودن دو رأس دیگر هم که کار بسیار ساده‌ای است (شکل ۱۱ــ۳).



شکل ۱۱ــ۳

تمرین : دو پنج ضلعی متحدالمرکز رسم کنید که ضلع یکی ۲/۵ سانتی‌متر و ضلع دیگری ۳/۲ سانتی‌متر باشد.

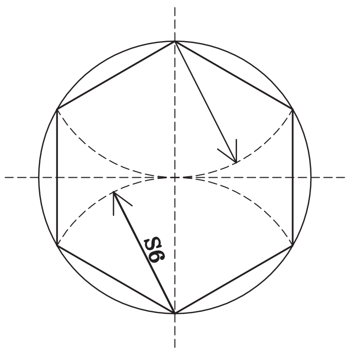
۴ــ ترسیم شش‌ضلعی منتظم

الف) محاط در دایره : برای ترسیم شش‌ضلعی منتظم محاط در یک دایره به‌ترتیب مراحل زیر را انجام می‌دهیم :

۱ــ دو قطر عمود بر هم دایره را رسم می‌کنیم.

۲ــ به مراکز دو سر یکی از اقطار قوس‌هایی به شعاع دایره می‌زنیم.

۳ــ چهار نقطه دیگر روی دایره مشخص می‌شود که چهار رأس دیگر شش‌ضلعی منتظم است (شکل ۱۲ــ۳).



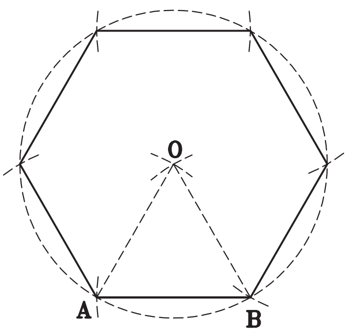
شکل ۱۲ــ۳

ب) با ضلع معلوم : برای ترسیم شش ضلعی منتظم به طول ضلع به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم :

۱ــ مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع AB رسم می‌کنیم.

۲ــ رأس O را مرکز دایره‌ای به شعاع OA قرار می‌دهیم و دایره محیطی شش‌ضلعی را رسم می‌کنیم.

۳ــ به مرکز هر یک از رئوس و شعاع دایره یا متوالیاً قوس‌هایی می‌زنیم تا رأس‌های شش‌ضلعی مشخص شود (شکل ۱۳ــ۳).

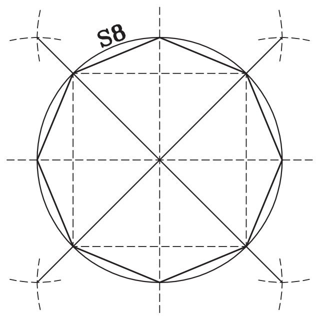


شکل ۱۳ــ۳

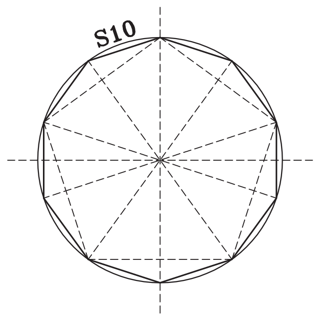
تمرین : یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۳/۸ سانتی‌متر رسم کنید. عمودمنصف اضلاع آن را بکشید. آنها را ادامه داده تا دایره را قطع کنند از محل تقاطع عمودمنصف‌ها با دایره به رئوس مجاور شش‌ضلعی وصل کنید. شکل حاصل چه شکلی است؟

۵ــ ترسیم هشت‌ضلعی، ده‌ضلعی و دوازده‌ضلعی و …

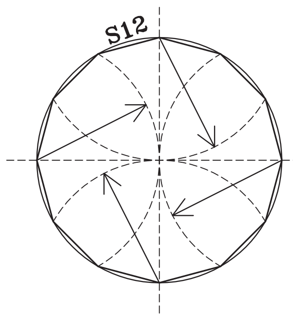
همچنان که در شکل‌ها می‌بینید با ترسیم عمودمنصف اضلاع چهار، پنج و شش‌ضلعی می‌توان چندضلعی با اضلاع دو برابر چندضلعی‌های فوق ترسیم کرد.



شکل ۱۴ــ۳



شکل ۱۵ــ۳



شکل ۱۶ــ۳

۶ــ ترسیم n ضلعی منتظم :

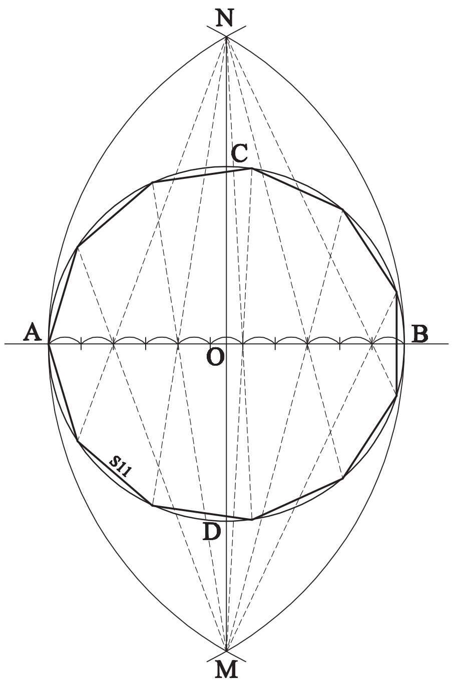
الف) محاط در دایره : برای ترسیم چندضلعی‌هایی با تعداد اضلاع فرد یک روش کلی وجود دارد که مبنای آن تقسیم زاویه به n قسمت مساوی است.

دو قطر عمود بر هم دایره را رسم می‌کنیم.

قطر AB را به تعداد اضلاع چندضلعی مورد نظر مثلاً ۱۱ قسمت تقسیم می‌کنیم.

به مراکز A و B و شعاع AB دو قوس می‌زنیم که قطر CD را در M و N قطع می‌کند.

از M و N دو درمیان به تقسیمات قطر AB وصل می‌کنیم. دایره به n قسمت (در این شکل یازده قسمت) تقسیم شده است[1] (شکل ۱۷ــ۳).



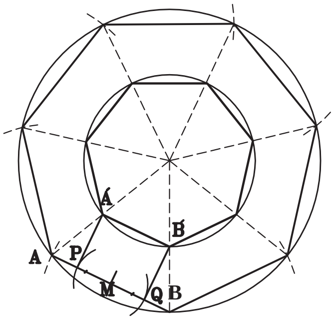
شکل ۱۷ــ۳

ب) با ضلع معلوم : به‌جز سه، چهار، پنج و شش‌ضلعی روش علمی برای ترسیم مستقل چندضلعی‌های دیگر وجود ندارد. اما از طریق ساده‌ای همه چندضلعی‌های محاط در دایره را می‌توان تبدیل به چندضلعی با طول ضلع دلخواه کرد با طی مراحل زیر به‌نحوی که در شکل ۱۸ــ۳ می‌بینید.

ابتدا چندضلعی (در این‌جا هفت ضلعی) محاط در یک دایره با شعاع دلخواه راترسیم می‌کنیم.

نقطه وسط یکی از اضلاع آن را پیدا کرده، اندازه نصف طول ضلع موردنظر را از دو طرف مشخص می‌کنیم (نقاط P و Q). طول PQ اندازه هفت‌ضلعی مورد نظر است.

ازنقاط P و Q عمودهایی بر ضلع AB خارج می‌کنیم تا دو قطر هفت‌ضلعی را در نقاط A و B قطع کند. AB یک ضلع هفت‌ضلعی مطلوب است. با ترسیم دایره محیطی آن هفت‌ضلعی را ترسیم می‌کنیم. این روش ترسیم برای تمام چندضلعی‌ها قابل انجام است.



شکل ۱۸ــ۳

۱ــ واضح است این روش تقسیم نیز دارای خطای جزئی است که در عمل به چشم نمی‌آید.

تمرین : یک پانزده‌ضلعی منتظم رسم کنید که قطر دایره محیطی آن ۶ سانتی‌متر باشد . هم مرکز با آن یک پنج ضلعی منتظم که قطر دایره محیطی‌اش ۳ سانتی‌متر و یک ده‌ضلعی منتظم که قطر دایره محیطی‌اش ۴ سانتی‌متر باشد، رسم کنید.

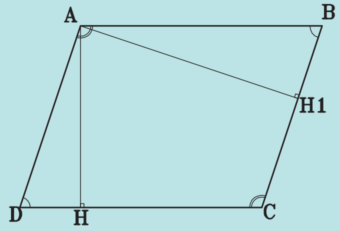
۱ــ در دایره‌هایی به شعاع ۳/۵ سانتی‌متر (جداگانه) یک چهارضلعی، یک پنج‌ضلعی و یک هفت‌ضلعی محاط کنید.

۲ــ در یک دایره به قطر ۱۰ سانتی‌متر یک ستارهٔ ۱۲پر ترسیم کنید.

۳ــ نه‌ضلعی به طول ضلع ۳ سانتی‌متر ترسیم کنید.

۴ــ در یک دایره به قطر ۸ سانتی متر یک ۱۳ ضلعی محاط کنید.

خطوط کمکی را بسیار نازک و خطوط اصلی یعنی چندضلعی‌ها را ضخیم و پررنگ ترسیم کنید.



شکل ۱۹ــ۳

تمرین : متوازی‌الاضلاعی رسم کنیدکه فاصله دو ضلع موازی آن ۳۳ میلی‌متر، یکی از اضلاع آن ۴۱ میلی‌متر و ضلع دیگر آن به اختیار شما باشد. کوچک‌ترین متوازی‌الاضلاعی که می‌توانید رسم کنید کدام است. آن را هم رسم کنید.

تمرین : دو قطر متوازی‌الاضلاعی یکی ۵ سانتی‌متر و دیگری ۳ سانتی‌متر و زاویه بین آنها ۶۰ درجه است. آن را با دقت رسم کنید.

چهارضلعی‌ها

یادآوری

در میان چندضلعی‌ها به جز مثلث که به دلیل ویژگی‌های منحصربه‌فردش جایگاه خاصی در میان اشکال هندسی دارد، چهارضلعی‌ها نیز با توجه به محدودبودن تعداد اضلاع دسته‌بندی شده و انواع مختلف آن تعریف و نام‌گذاری شده است.

انواع چهار ضلعی‌ها : چهار ضلعی‌های تعریف‌شده عبارتند از :

متوازی‌الاضلاع، لوزی، مستطیل، مربع و ذوزنقه

متوازی‌الاضلاع

یادآوری

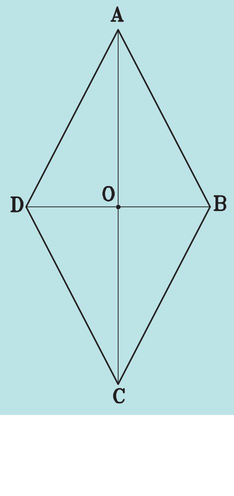
متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی‌ای است که هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند. در شکل ۱۹ــ۳ چهارضلعی ABCD که هر دوضلع مقابل با هم موازیند، متوازی‌الاضلاع است. در متوازی‌الاضلاع، فاصله هر دو ضلع مقابل به هم را ارتفاع می‌نامند.

لوزی

یادآوری

لوزی، متوازی‌الاضلاعی است که چهار ضلع آن با هم برابر است. بنابراین لوزی کلیهٔ ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد. در شکل ۲۰ــ۳ متوازی‌الاضلاع ABCD که AB=BC=CD=DA است، یک لوزی است.

در هر لوزی قطرها بر هم عمودند و نیمساز زاویه‌های داخلی هستند و هر قطر، محور تقارن لوزی است. در شکل دو قطر AC و BD بر هم عمودند، نیمساز داخلی هرکدام محور تقارن لوزی هستند. بنابراین لوزی دارای دو محور تقارن است.



شکل ۲۰ــ۳

تمرین

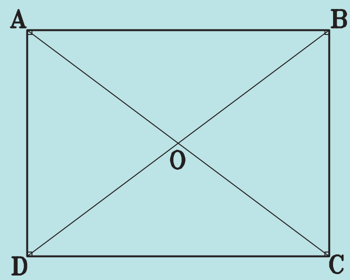
۱ــ لوزی رسم کنید که قطر بزرگ آن ۷ سانتی‌متر و ضلع آن ۴ سانتی‌متر باشد.

۲ــ محیط یک لوزی ۱۲ سانتی‌متر و یک قطر آن ۲۱ میلی‌متر است لوزی را رسم کنید.

مستطیل

یادآوری

مستطیل، متوازی‌الاضلاعی است که یک زاویه آن قائمه است. بنابراین مستطیل کلیه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد (شکل ۲۱ــ۳).



شکل ۲۱ــ۳

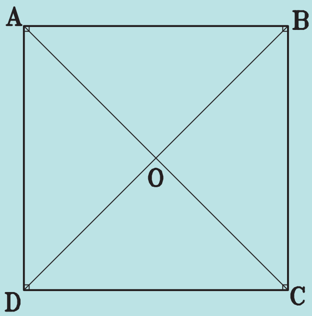
تمرین : در مستطیل ABCD از وسط یک طول مستطیل به وسط طول دیگر وصل کنید. آیا مستطیل به دو شکل مساوی تقسیم شده است؟ همین عمل را در عرض مستطیل انجام دهید. باز هم مستطیل به دو شکل مساوی تقسیم شده است؟ از این تساوی‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

مستطیل دو محور تقارن دارد. آیا دو محور بر هم عمودند؟ آیا نقطه O مرکز تقارن مستطیل است؟

مربع

یادآوری

مربع، مستطیلی است که چهار ضلع آن با هم مساوی باشد و یا می‌توان گفت، مربع، لوزی است که یک زاویه آن قائمه باشد. بنابراین مربع کلیه ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی را دارد. در شکل ۲۲ــ۳ چهارضلعی ABCD مربع است.



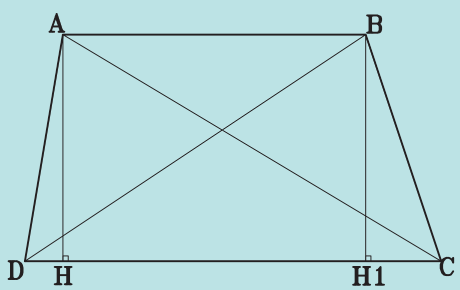
شکل ۲۲ــ۳

تمرین : یک مربع به ضلع ۷۵ میلی‌متر رسم کنید. یکی از اقطار آن را به هفت قسمت مساوی تقسیم کنید و از نقاط تقسیم خطوطی به موازات اضلاع مربع ترسیم کنید.

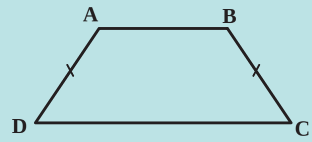
ذوزنقه

یادآوری

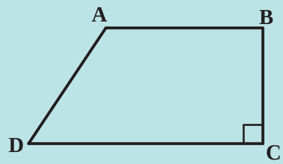
هر چهارضلعی که فقط دو ضلع آن با هم موازی باشند، ذوزنقه نامیده می‌شود. در شکل ۲۳ــ۳، AB||CD است. بنابراین چهارضلعی ABCD یک ذوزنقه است. دو ضلع موازی با هم یعنی AB و CD را قاعده‌ها، و دو ضلع غیرموازی یعنی AD و BC را ساق‌ها و AH و یا BH۱ را ارتفاع ذوزنقه می‌نامند. اگر دو ساق ذوزنقه با هم مساوی باشند ذوزنقه را متساوی‌الساقین می‌نامند. مانند شکل ۲۴ــ۳، اگر یکی از ساق‌ها بر دو قاعده عمود باشد ذوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند. مانند شکل ۲۵ــ۳.



شکل ۲۳ــ۳



شکل ۲۴ــ۳



شکل ۲۵ــ۳

تمرین

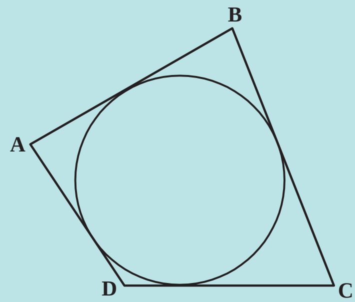
۱ــ ارتفاع ذوزنقه متساوی‌الساقینی ۲۸ میلی‌متر و ساق آن ۳۵ میلی‌متر و قاعده بزرگ آن ۴۸ میلی‌متر است. ذوزنقه را ترسیم کنید.

۲ــ ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که ارتفاع آن ۳ سانتی‌متر، زاویه ساق آن با قاعده‌ها ۶۰ درجه و خطی که وسط دو ساق را به هم وصل می‌کند ۵/۵ سانتی‌متر باشد.

چهارضلعی‌های محیطی

یادآوری

چهارضلعی، محیطی چهارضلعی است که اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند. در شکل ۲۳ــ۳ چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی محیطی است.



شکل ۲۸ــ۳

دایره‌ای به شعاع ۲۷ میلی‌متر رسم کنید. چهار نقطه به روی دایره انتخاب کرده و از آنها مماس‌هایی بر دایره رسم کنید. مماس‌ها را امتداد داده تا دو به دو یک دیگر را قطع کنند. می‌بینید که چهارضلعی به وجود آمده یک چهارضلعی محیطی است. با تغییر جای نقطه‌ها در این دایره بی‌نهایت چهارضلعی محیطی می‌توان ترسیم کرد.

سؤال : از چهار ضلعی های تعریف شده کدام یک چهارضلعی محیطی است؟

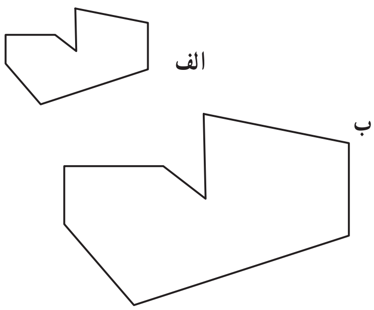
آیا مستطیل و متوازی‌الاضلاع می‌توانند چهارضلعی محیطی باشند؟

مربع، لوزی و ذوزنقه چطور؟

دوایری به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنید و در صورت امکان هریک از شکل‌های فوق را در آنها محاط کنید.

تشابه در چندضلعی‌ها

به دو شکل ۲۷ــ۳ــ الف و ۲۷ــ۳ــ ب توجه کنید. آیا این دو شکل مشابه یکدیگرند؟ آیا می‌توانید اضلاع هریک را اندازه بگیرید و با هم مقایسه کنید؟ چه ویژگی این دو شکل را مشابه یکدیگر کرده است؟



شکل ۲۹ــ۳

آیا زاویه‌های متناظر آنها با هم برابرند؟ آیا اضلاع متناظر شکل بزرگتر دو برابر اضلاع شکل کوچکتر نیست؟

پس آیا می‌توان گفت دو شکل مشابه نسبت به هم سه ویژگی

زیر را دارند؟

تعداد اضلاع‌شان با هم مساوی است.

زاویه‌های متناظرشان با هم مساویند.

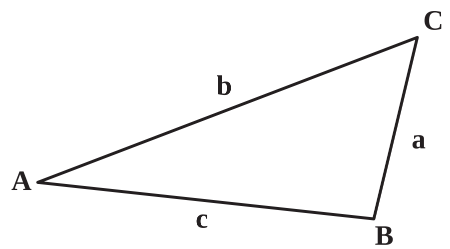
اضلاع متناظرشان با هم متناسب‌اند.

توجه کنید که دو شکل مساوی متشابه نیز هستند. نسبت اضلاع دو شکل مساوی یک به یک است.

تشابه مثلث‌ها

مثلث شکل ویژه‌ای است. از آن‌رو شرط تشابه دو مثلث با تشابه دو چندضلعی اندکی متفاوت است.

اضلاع مثلث ABC را در شکل ۲۸ــ۳ اندازه بگیرید و مثلثی رسم کنید که اضلاعش نصف اضلاع این مثلث باشد.

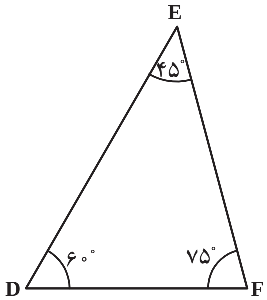


شکل ۲۸ــ۳

آیا مثلثی که رسم کرده‌اید با مثلث ABC مشابه هست؟

پس اگر اضلاع دو مثلث با هم متناسب باشند دو مثلث متشابه‌اند. یعنی زوایای آنها هم با هم برابرند.

حال مثلثی رسم کنید که زوایایش مساوی زوایای مثلث DEF در شکل ۲۹ــ۳ باشد آیا دو مثلث با هم مشابه هستند؟



شکل ۲۹ــ۳

می‌توانید اضلاع هر دو را اندازه بگیرید و تناسب بین اضلاع آنها را پیدا کنید.

با توجه به این‌که مجموع زوایای مثلث ۱۸۰ درجه است.

اگر دو زاویه از دو مثلث برابر باشند، زاویه سوم آنها هم با هم برابر است درنتیجه :

اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند. آن دو مثلث متشابهند.

همچنین با توجه به شرایط تساوی دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت که اگر در دو مثلث یک زاویه آنها مساوی باشد و دو ضلع مجاور به آن زاویه‌ها با هم متناسب باشد آن دو مثلث متشابه‌اند.

امتحان کنیم :

زاویه A از مثلث ABC با زاویهٔ D از مثلث DEF با هم برابر و ۳۰ درجه‌اند اضلاع AB و AC به‌ترتیب ۶ و ۴/۵ و اضلاع DE و DF به‌ترتیب ۲ و ۱/۵ است هر دو مثلث را ترسیم کنید و ببینید آیا متشابه‌اند یا نه.

فصل چهارم

دایره و بیضی

هدف‌های رفتاری : پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :

۱ــ قطر، وتر و کمان را در دایره مشخص نماید.

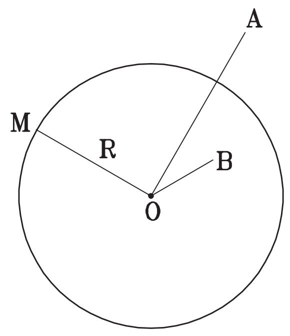
۲ــ انواع مماس بر دایره را ترسیم کند.

۳ــ انواع مماس‌ها را ترسیم کند.

۴ــ بیضی را ترسیم کند.

دایره

اصلی‌ترین و مهم‌ترین شکل منحنی دایره است. دایره نیز هم‌چون مثلث شکل بسیار ویژه‌ای است. و همچنان که به‌عنوان نماد مهمی در مفاهیم فلسفی و عرفانی مطرح است در هندسه نیز جایگاه ویژه‌ای دارد و نقش مهمی در طرح‌ها و ایده‌های معماری و هنری ایفا می‌کند. از آن‌رو شناخت ویژگی‌های آن در کار نقشه‌کشی بسیار لازم و سودمند است.



شکل ۱ــ۴

تعریف دایره

یادآوری

مجموعه تمام نقاط یک صفحه را که فاصله آنها از نقطه ثابتی مانند O در آن صفحه برابر با عدد ثابت R است دایره می‌نامند.

تمرین : تحقیق کنید از دو نقطه چند دایره می‌گذرد؟

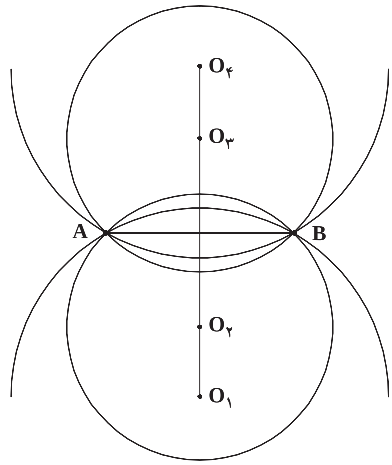
می‌باید نقطه‌ای پیدا کنیم که از دو نقطهٔ M و N به یک فاصله باشد. چند نقطه می‌توان یافت که از دو نقطه M و N به یک فاصله باشد.

آیا می‌توانیم از سه نقطه یک دایره بگذرانیم؟

در چه حالتی نمی‌توان از سه نقطه یک دایره گذراند؟

از چهار نقطه چه‌طور؟ امتحان کنید.

در چه حالتی می‌توان از چهار نقطه یک دایره گذراند؟

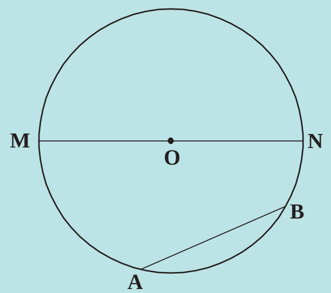


شکل ۲ـ۴

وتر و قطر دایره

یادآوری

هر پاره‌خطی که دو سر آن واقع بر یک دایره باشد، وتر نامیده می‌شود. هر وتری که از مرکز دایره بگذرد، قطر آن دایره نامیده می‌شود. بنابراین اندازه قطر هر دایره دو برابر اندازه شعاع آن است.



شکل ۳ـ۴

تمرین : دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنید. بزرگترین وتر آن را ترسیم کنید. از نقطه تماس وتر رسم شده با محیط دایره وتری به اندازه نصف وتر اول رسم کنید.

وترهای دیگری به اندازه نصف بزرگترین وتر رسم کنید به نحوی که هر وتر از انتهای وتر قبلی شروع شود.

چند وتر در یک دایره با اندازه نصف بزرگترین وتر و با رعایت شرط بالا می‌توان رسم کرد؟

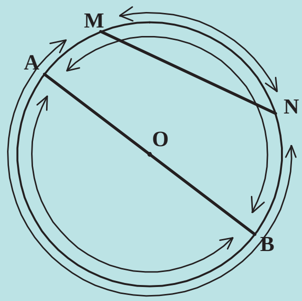
آیا دقیق ترسیم کرده‌اید. توجه دارید که این وترها برابر با شعاع دایره است؟

اگر دقیق رسم کرده باشید می‌بینید که در یک دایره دقیقاً شش وتر می‌توان رسم کرد که با اندازه شعاع دایره باشند و یکدیگر را قطع نکنند.

قوس (کمان)

یادآوری

هر وتر، دایره را به دو قسمت تقسیم می‌کند که هر قسمت را یک قوس می‌نامند، قطر، دایره را به دو قوس مساوی تقسیم می‌کند که هر قوس یک نیم‌دایره نامیده می‌شود (شکل ۴ـ۴).

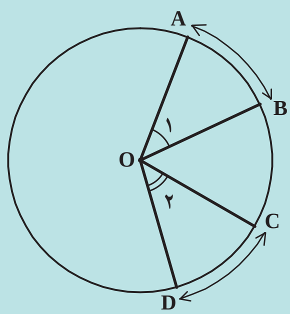


شکل ۴ـ۴

زاویهٔ مرکزی

یادآوری

اگر رأس زاویه بر مرکز دایره واقع باشد، آن زاویه را مرکزی می‌نامند. در هر دایره، اندازه قوس‌های مقابل به دو زاویه مرکزی مساوی، برابرند (شکل ۵ـ۴).



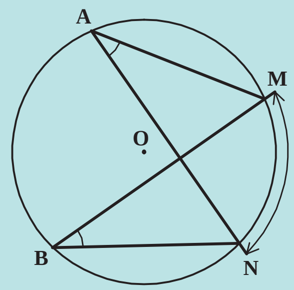
شکل ۵ـ۴

زاویهٔ محاطی

یادآوری

اگر رأس یک زاویه بر محیط دایره واقع باشد و اضلاعش دو وتر دایره، آن زاویه را زاویه محاطی می‌نامند.

اندازه قوس‌های مقابل به دو زاویه محاطی مساوی، برابرند.



شکل ۶ــ۴

تمرین

۱ــ دایره‌ای به شعاع ۲۳ میلی‌متر رسم کنید. دو زاویه مرکزی در این دایره رسم کنید که هریک ۴۵ درجه باشد. وتر قوس مقابل به این زاویه‌ها را رسم کنید. آنها را اندازه بگیرید. چه نتیجه‌ای گرفته‌اید؟ آیا وترهای مقابل به دو زاویه مرکزی مساوی با هم مساویند؟

۲ــ دایره‌ای به شعاع ۳/۳ سانتی‌متر رسم کنید در این دایره دو وتر رسم کنید که هر یک ۴/۵ سانتی‌متر باشد. از مرکز دایره بر هریک از دو وتر خطی عمود کنید. طول عمود وارد بر وترها را اندازه بگیرید. آیا دو طول با هم برابرند؟

۳ــ در دایره O وتر AB را به طول کوچکتر از قطر دایره ترسیم کنید. از نقطهٔ A وتر AC را به اندازه وتر AB ترسیم کنید. نقطه دلخواه M را روی دایره انتخاب کرده از آن به نقاط A و B و C وصل کنید. آیا دو کمان AB و AC که مقابل به دو وتر مساوی هستند با هم برابرند؟ دو زاویه محاطی $B\hat{M}A$ و $C\hat{M}A$ که مقابل این دو کمانند چطور؟ صحت این قضیه را با روش زیر تحقیق کنید : نیمساز زاویه $C\hat{M}B$ را ترسیم کنید آیا خط نیمساز بر خط MA منطبق است؟

۴ــ در دایرهٔ O بدون استفاده از گونیا یک زاویه محاطی بکشید که اندازه آن ۹۰ درجه باشد.

خط و دایره

تمرین : دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم کنید و وتر AB را به طول ۳ سانتی‌متر در دایره ترسیم کنید. آن‌گاه،

۱ــ خطی رسم کنید موازی وتر AB که فاصله‌اش از مرکز دایره ۳/۵ سانتی‌متر باشد.

۲ــ خط دیگری رسم کنید موازی وتر AB که فاصله‌اش از مرکز دایره ۲ سانتی‌متر باشد.

۳ــ خط سوم را هم موازی وتر AB رسم کنید. به نحوی که فاصله‌اش از مرکز دایره ۱ سانتی‌متر باشد.

مشاهده می‌کنید که خط اول خارج از دایره است و هیچ نقطه تماسی با دایره ندارد. خط دوم فقط یک نقطه تماس دارد یعنی مماس بر دایره است و خط سوم دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. آیا یک خط و دایره می‌توانند وضعیت دیگری نسبت به هم داشته باشند؟

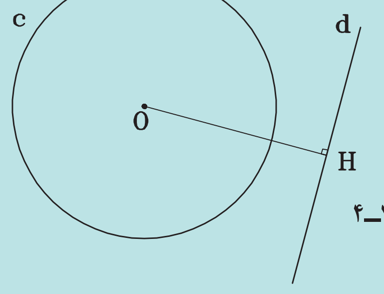
وضعیت خط و دایره نسبت به هم

به قضایای زیر توجه کنید :

یادآوری

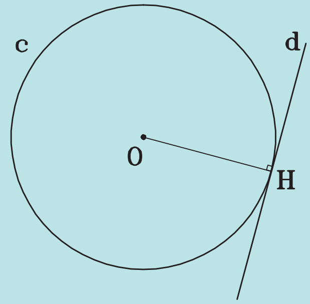
خط d و دایرهٔ(C(O.R در یک صفحه نسبت به هم سه وضعیت دارند :

الف) خط d و دایره C هیچ نقطه مشترکی ندارند. در این حالت اگر OH فاصله O تا خط d باشد، OH>R است (شکل ۷ــ۴).



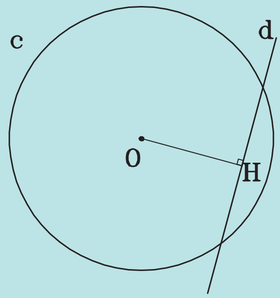
شکل ۷ــ۴

ب) خط d و دایره C در یک نقطه مشترک‌اند. در این حالت خط بر دایره مماس و OH=R است. نقطه H پای عمود OH بر خط d، نقطهٔ تماس خط با دایره است (شکل ۸ــ۴).



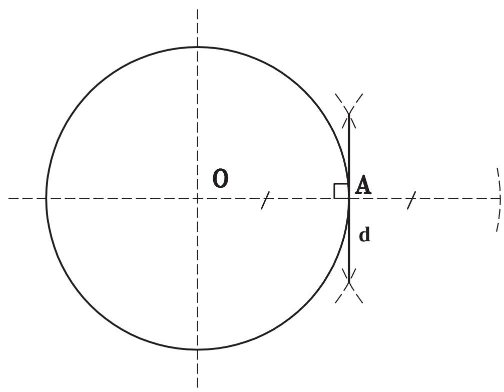
شکل ۸ـ۴

ج) خط d و دایرهٔ C در دو نقطه مشترک‌اند. در این حالت خط و دایره را متقاطع می‌نامند و $OH<R$ است (شکل ۹ـ۴).



شکل ۹ـ۴

تمرین : دایره‌ای به شعاع دلخواه ترسیم کنید. یکی از شعاع‌های آن را ترسیم کنید. (OA) از نقطهٔ A خطی بر شعاع OA عمود کنید. خط d که بر OA عمود شده نسبت به دایره چه وضعی دارد؟ آیا خط دیگری نیز می‌توان در این نقطه بر OA عمود کرد؟ (شکل ۱۰ـ۴).



شکل ۱۰ـ۴

به قضیه زیر توجه کنید :

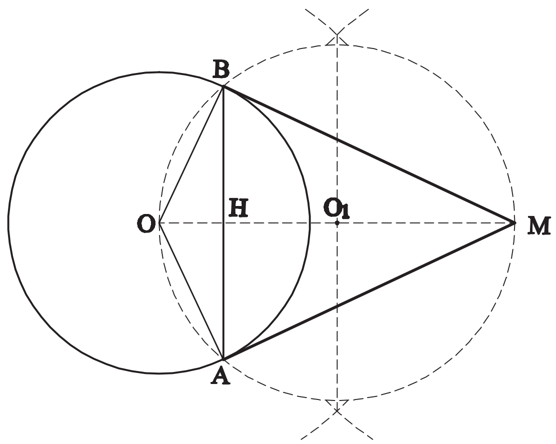
یادآوری

از یک نقطه واقع بر یک دایره تنها یک مماس می‌توان رسم کرد. در شکل از نقطهٔ A واقع بر دایره فقط یک عمود بر OA می‌توان رسم کرد که خط مماس بر دایره در نقطهٔ A است.

تمرین : دایره O را به شعاع دلخواه ترسیم کنید. نقطهٔ M را خارج دایره انتخاب کنید. به قطر OM یک دایره رسم کنید. این دایره دایره O را در دو نقطه قطع می‌کند.

از M به دو نقطه تقاطع وصل کنید. آیا MA و MB بر دایره مماس هستند؟

محل تقاطع OM و AB را H بنامید. AH و BH را اندازه بگیرید. چه نتیجه‌ای گرفته‌اید؟ (شکل ۱۱ـ۴).



شکل ۱۱ـ۴

وضعیت دو دایره نسبت به هم

تمرین ۱ : دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر رسم کنید. دایره دیگری رسم کنید، به شعاع ۲ سانتی‌متر که مرکز آن با مرکز دایره اول ۸ سانتی‌متر فاصله داشته باشد. دایره سوم را نیز به شعاع ۱/۵ سانتی‌متر و به فاصله دو سانتی‌متر از مرکز دایره اول رسم کنید.

دو دایره دوم و سوم نسبت به دایره اول چه تفاوتی دارند؟

وجه اشتراک دو دایره نسبت به دایره اول چیست؟

اگر مراکز هریک از دو دایره را به دایره اول وصل کنید چه رابطه‌ای می‌توان بین شعاع‌های دو دایره و فاصله مراکز آنها پیدا کرد؟

تمرین ۲ : دو دایره رسم کنید که خط‌المرکزین آنها با مجموع شعاع هایشان برابر باشد.

دو دایره چند نقطه مشترک دارند؟

دو دایره نسبت به هم شش حالت دارند :

۱ــ دو دایره خارج هم $d > R + R'$

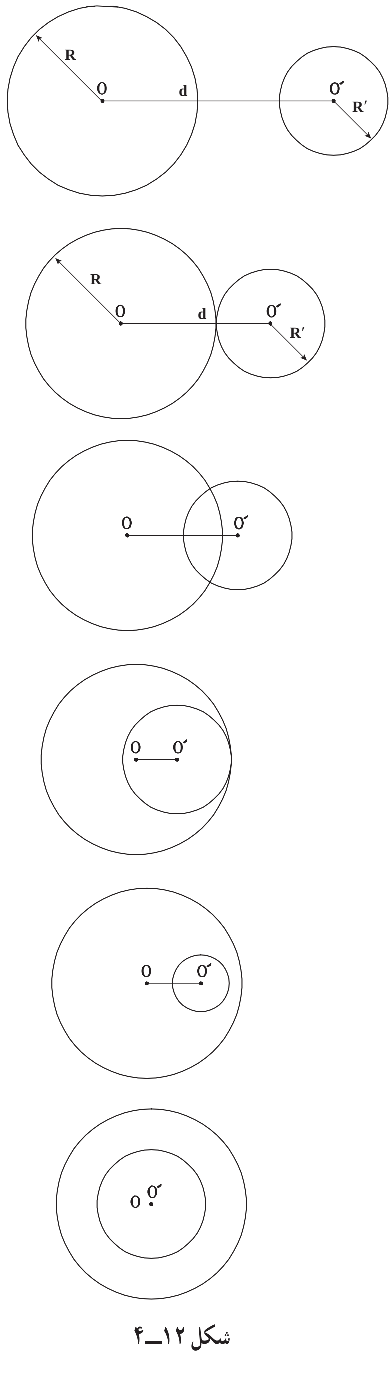
۲ــ دو دایره مماس خارج $d = R + R'$

۳ــ دو دایره متقاطع $R - R' < d < R + R'$

۴ــ دو دایره مماس داخل $d = R - R'$

۵ــ دو دایره متداخل $d < R - R'$

۶ــ دایره‌های هم‌مرکز $d = ۰$



شکل ۱۲ــ۴

تمرین : دو دایرهٔ متخارج به شعاع‌های ۴ و ۲ و با فاصلهٔ مراکز ۱۰ سانتی‌متر رسم کرده مماس‌های داخلی و خارجی آنها را ترسیم کنید.

تمرین : دو دایرهٔ دلخواه رسم کنید که نسبت به هم مماس داخلی باشند.

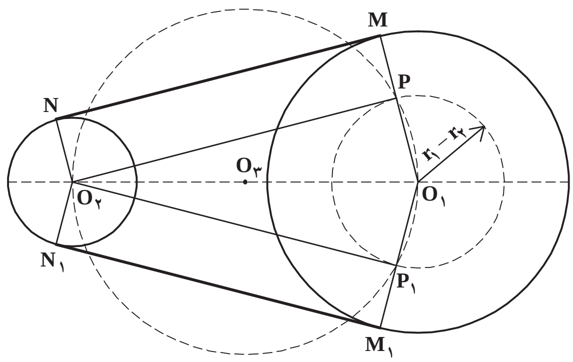
تمرین : دو دایرهٔ متقاطع رسم کنید که مرکز یکی منطبق بر محیط دیگری و شعاعش نصف آن باشد.

مماس مشترک دو دایره

تمرین ۱ : دو دایرهٔ متخارج O۱ و O۲ را به شعاع‌های ۵ و ۳ سانتی‌متر که طول خط‌المرکزین آنها ۱۰ سانتی‌متر باشد رسم کنید. خط‌المرکزین آنها را ترسیم کنید. دایره O۳ را به قطر خط‌المرکزین بکشید. از نقطهٔ O۱ مرکز دایره بزرگتر به اندازه تفاضل شعاع دو دایره یعنی ۲ سانتی‌متر قوسی رسم کنید که دایره O۳ را در نقطهٔ P قطع کند PO۱ را ادامه داده تا دایره را در M قطع کند. حال از O۲ به موازات O۱M خطی رسم کنید تا دایره O۲ را در نقطه N قطع کند. دو نقطه M و N را به هم وصل کنید. خط MN را پررنگ کنید.

آیا خط MN بر هر دو دایره O۱ و O۲ مماس است؟

می‌توانید همین ترسیمات را در طرف دیگر انجام دهید؟

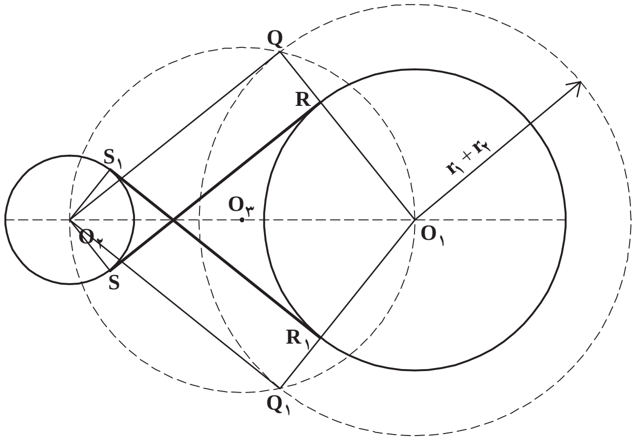


شکل ۱۳ـ۴

تمرین ۲ : یک بار دیگر دو دایره را با مشخصات تمرین قبل ترسیم کنید دایره O۳ را نیز بکشید. حال به مرکز O۱ و شعاع مجموع شعاع‌های O۱ و O۲ یعنی ۸ سانتی‌متر قوسی رسم کنید که دایره O۳ را در نقطهٔ P قطع کند O۱P دایره O۱ را در R قطع می‌کند. حال از O۲ به موازات O۱R خطی رسم کنید تا دایره را در نقطهٔ S قطع کند، دو نقطه R و S را به هم وصل کنید. خط RS را پررنگ کنید.

آیا خط RS بر هر دو دایره O۱ و O۲ مماس است؟

می‌توانید همین ترسیمات را در طرف دیگر انجام دهید؟



شکل ۱۴ـ۴

دقت کنید : اگر دو تمرین ۱ و ۲ را یکجا انجام می‌دادید عملاً دو دایره متخارج چهار مماس مشترک داشتند.

اولین تمرین فوق را می‌توانید در مورد دو دایره مماس خارجی و دو دایره متقاطع نیز انجام دهید.

تمرین : دو دایره ترسیم کنید که شعاع هریک ۲۵ میلی‌متر باشد و فاصلهٔ مراکز آنها از هم ۴۰ میلی‌متر مماس مشترک آنها را رسم کنید.

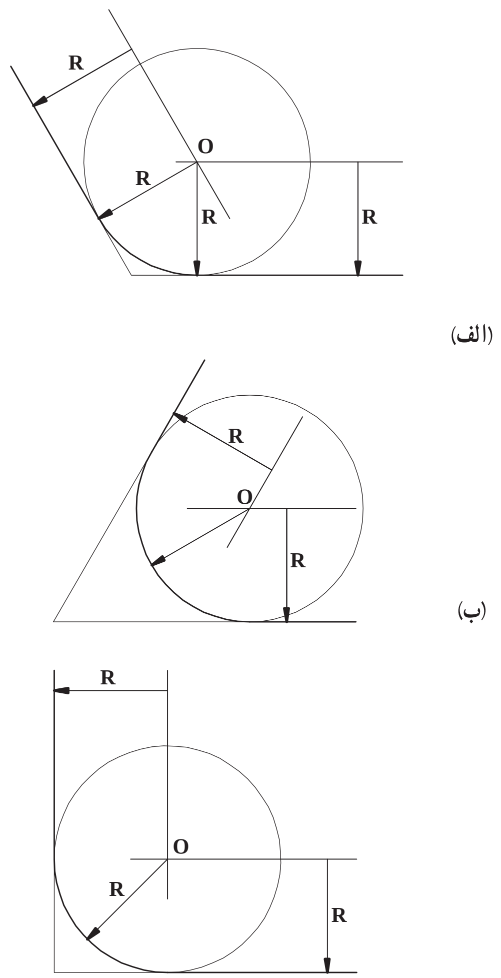
مماس‌ها

در طرح‌های معماری و شهرسازی با انواع و اقسام اشکال مواجه می‌شویم که ترکیبی از خط راست، قوس و انواع منحنی‌ها است.

در ادامه با طریقهٔ ترسیم قوس‌هایی که مماس بر خطوط و دایره‌ها هستند، آشنا می‌شویم.

رسم قوسی به شعاع R مماس بر دو خط

در شکل ۱۵ــ۴ در درون زاویه کوچکتر از نیم‌صفحه خطی به موازات هریک از دو خط مفروض و به فاصلهٔ R از آن رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. نقطهٔ O مرکز قوس مطلوب است.

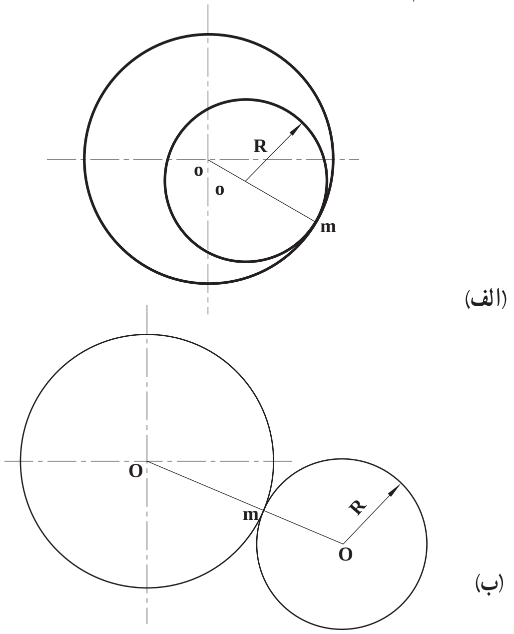


شکل ۱۵ــ۴

تمرین : ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که ارتفاع آن ۴، و قاعده‌های آن ۵ و ۶ سانتی‌متر باشد. آن‌گاه بر هر چهار زاویه آن قوسی به شعاع ۱ سانتی‌متر مماس کنید.

رسم دایره‌ای به شعاع R مماس بر دایرهٔ O در نقطه m

در شکل ۱۶ــ۴ــ الف $mo'=R$ را بر خط om و در شکل ۱۶ــ۴ــ ب $mo'=R$ را بر امتداد خط om در نظر می‌گیریم. سپس به مرکز o' و به شعاع R دایره مطلوب را رسم می‌کنیم. در شکل ۱۶ــ۴ــ الف مماس داخلی و در شکل ۱۶ــ۴ــ ب مماس خارجی رسم شده است.



شکل ۱۶ــ۴

تمرین : چند دایره به شعاع ۲۵ میلی‌متر می‌توانید بر دایره که شعاع آن ۳۱ میلی‌متر است مماس کنید؟ چهارتای آنها را که نسبت به یک قطر دایره متقارن باشند، ترسیم کنید.

رسم قوسی به شعاع R مماس بر یک خط و دایره مفروض

دایرهٔ O و خط d را در نظر بگیرید. خط d نسبت به دایره چند حالت می‌تواند داشته باشد؟

خط دایره را قطع کند.

خط بر دایره مماس باشد.

خط در خارج دایره باشد.

حال اگر بخواهیم در هریک از این حالات قوسی به شعاع معلوم رسم کنیم که هم بر دایره و هم بر خط مماس باشد، چگونه عمل کنیم؟

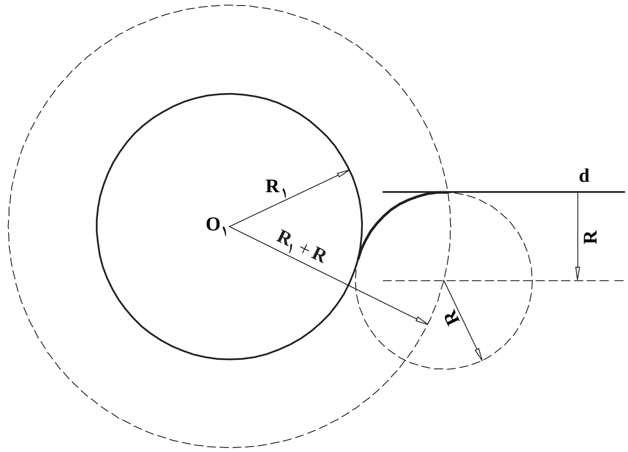
مرکز دایره‌ای به شعاع R که بر خط و دایره مماس باشد محل برخورد دو مکان هندسی است.

دیدید که اگر مرکز دایره‌ای که با شعاع R بر خط مماس باشد، خطی است موازی آن و به فاصله R از آن.

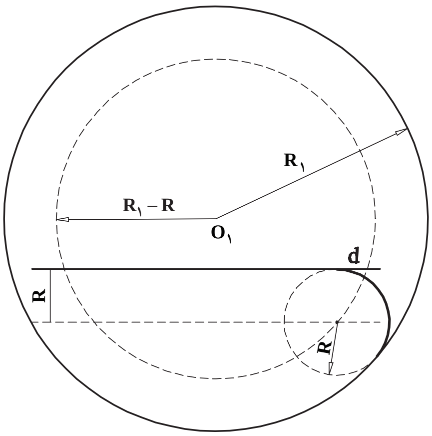
همچنین در مماس بر دایره دیدید که مرکز دایره‌ای به شعاع R که بر دایره مفروضی به شعاع R۱ مماس باشد یا R۱+R یا R۱−R.

حال دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر رسم کنید و در دو حالت خط متقاطع با دایره و خط خارج دایره قوسی به شعاع یک سانتی‌متر بر آنها مماس کنید.

در شکل ۱۷ــ۴ دو نمونه از این مماس‌ها ترسیم شده است.



(الف)



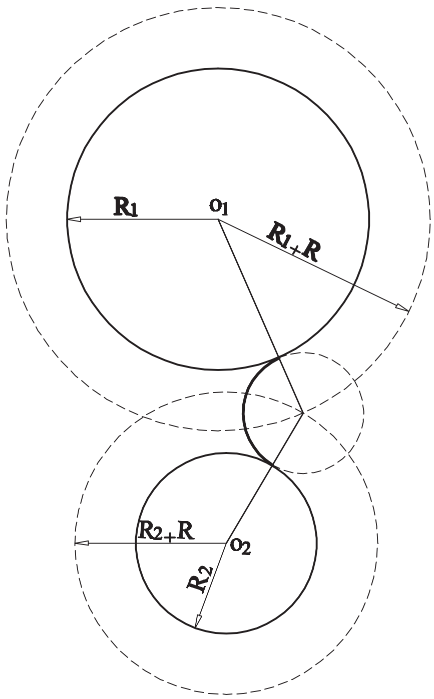
(ب)

شکل ۱۷ــ۴

رسم قوسی به شعاع R مماس بر دو دایره مفروض

اگر بخواهیم دو دایره مفروض خارج از قوس مطلوب قرار گیرد، نقطهٔ O مرکز قوس مطلوب مطابق شکل ۱۸ــ۴ از برخورد دو قوس به شعاع‌های R_1+R و R_2+R به‌دست می‌آید.

اگر بخواهیم دو دایره مفروض داخل قوس مطلوب قرار گیرد، نقطهٔ O مرکز قوس مطلوب مطابق شکل ۱۹ــ۴ برخورد دو قوس به شعاع‌های $R-R_1$ و $R-R_2$ به‌دست می‌آید.



شکل ۱۸ــ۴

تمرین

۱ــ دو دایره به شعاع ۲/۵ و ۴ را در سه حالت زیر رسم کنید

یک‌دیگر را قطع کنند.

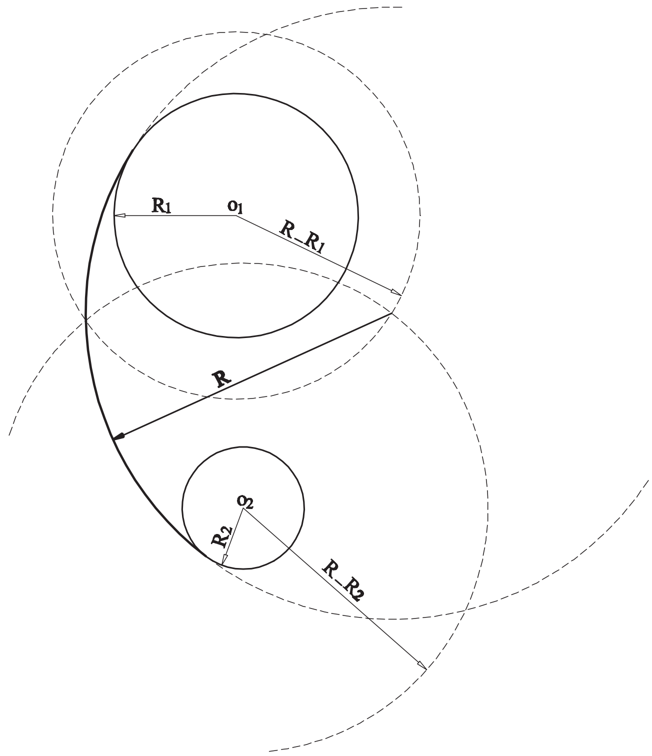
نسبت به هم مماس خارج باشند.

هیچ نقطهٔ تقاطعی نداشته باشند.

۲ــ بر اضلاع زاویهٔ O دایره‌ای به شعاع r مماس کنید.

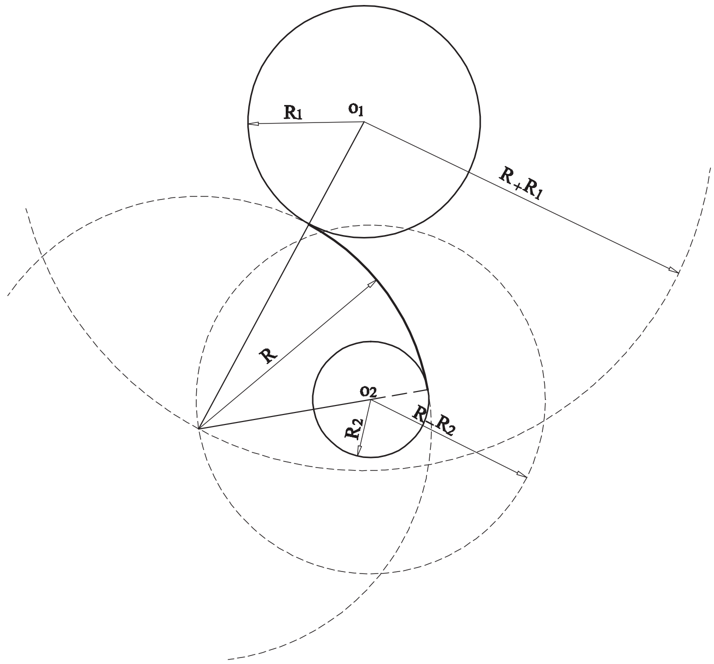
۳ــ بر دایره‌هایی با شرایط سؤال ۱ دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر مماس کنید.

۴ــ دایرهٔ O را به شعاع ۴ سانتی‌متر رسم کنید خط d را چنان رسم کنید که از مرکز دایره ۵/۵ سانتی‌متر فاصله داشته باشد. قوسی به شعاع ۱/۵ سانتی‌متر رسم کنید که بر خط d و دایره O مماس باشد. مسأله چند جواب دارد؟



شکل ۱۹ــ۴

اگر بخواهیم یکی از دو دایره مفروض در خارج از قوس و دیگری در داخل قوس قرار گیرد، نقطهٔ O مرکز قوس مطلوب مطابق شکل ۲۰ــ۴ از برخورد دو قوس به شعاع‌های $R-R_۱$ و $R+R_۲$ به‌دست می‌آید.



شکل ۲۰ــ۴

بیضی

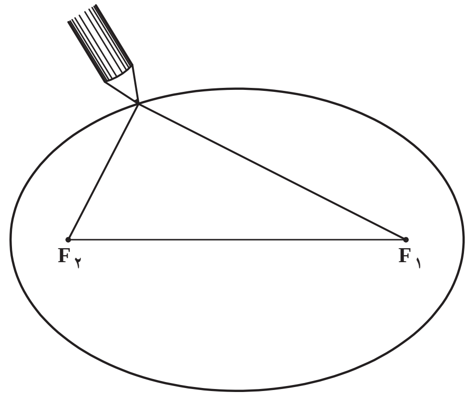
معماران، شهرسازان و طراحان از شکل بیضی هم در طرح‌های خود استفاده می‌کنند. بیضی از شکل‌هایی است که در گذشته معماران سنتی ایرانی در ساختار فرم قوس‌ها و گنبدها از آن استفاده بسیاری برده‌اند. یادگیری طریقه ترسیم آن برای طراحان و نقشه‌کش‌ها خالی از فایده نیست.

تعریف بیضی

بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که مجموع فاصله‌های هریک از آن نقاط از دو نقطه ثابت آن صفحه مقدار ثابتی باشد. دو نقطهٔ ثابت $F_۱$ و $F_۲$ را کانون بیضی می‌نامند و عدد ثابت را ۲a در نظر می‌گیرند. در شکل ۲۱ــ۴ یک بیضی با دو کانون $F_۱$ و $F_۲$ رسم شده است. در این بیضی $MF_۱+MF_۲=۲a$ است. $AA_۱$ را که برابر ۲a است. قطر بزرگ (طول) و $BB_۱$ را که عمودمنصف $AA_۱$ است و برابر ۲b در نظر می‌گیرند، قطر کوچک (اقطار) و نقطهٔ O را مرکز بیضی می‌نامند. همچنین دایره به قطر $AA_۱$ دایرهٔ اصلی و دایره به قطر $BB_۱$ دایره فرعی بیضی نامیده می‌شود.

ترسیم بیضی

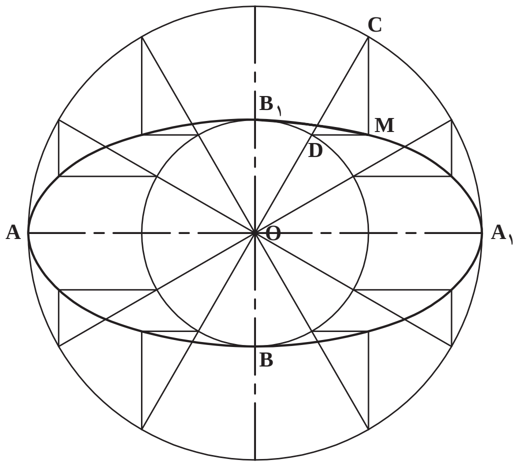
یک برگ کاغذ A4 را روی تخته رسم بچسبانید و دو سنجاق یا پونز را با فاصله ۱۰ سانتی‌متر مطابق شکل ۲۱ــ۴ در نقاط F_1 و F_2 قرار دهید. سپس دو سر نخی را به هم گره بزنید به‌طوری که طول نخ دولا تا قسمت گره‌خورده $(2a + F_1F_2)$ برابر ۲۲ سانتی‌متر باشد. اگر نخ دولا را دور دو سنجاق نصب شده و یک مداد قرار دهید و مداد را حرکت دهید یک بیضی رسم می‌شود. نقاط F_1 و F_2 را کانون بیضی می‌نامند. اگر فاصلهٔ دو کانون بیضی و یا طول نخ دولا $(2a + F_1F_2)$ تغییر کند، بیضی‌های مختلفی رسم می‌شود.



شکل ۲۱ــ۴

رسم بیضی از طریق نقطه یابی

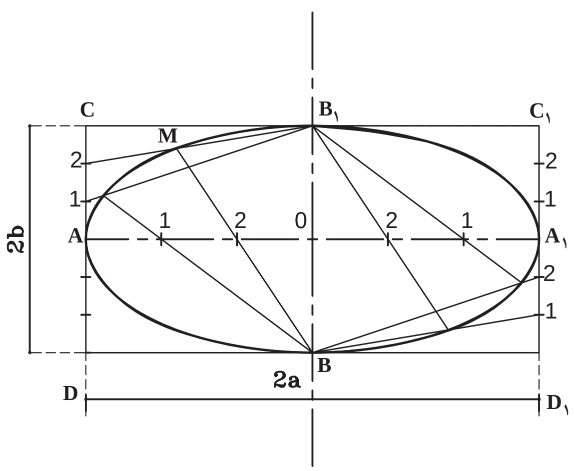
الف) با استفاده از دو دایرهٔ اصلی و فرعی : در شکل ۲۲ــ۴ دایرهٔ اصلی به قطر $2a$ و دایرهٔ فرعی به قطر $2b$ را به مرکز O که مرکز بیضی است رسم می‌کنیم. همچنین محورهای بیضی را که قطرهای بیضی بر آنها منطبق هستند، رسم می‌کنیم. هر شعاع دلخواه از دایره اصلی مانند OC دایره فرعی را در نقطهٔ D قطع می‌کند. اگر از نقاط C و D دو خط به موازات اقطار بیضی (محورهای بیضی) رسم کنیم، برخورد این دو خط یعنی نقطهٔ M روی بیضی به قطر بزرگ $2a$ و قطر کوچک $2b$ قرار دارد.



شکل ۲۲ــ۴

ب) با استفاده از مستطیل : در شکل ۲۳ــ۴ مستطیلی به طول $2a$ و به عرض $2b$ رسم می‌کنیم. نقطه O مرکز مستطیل را که مرکز بیضی هم هست، در نظر گرفته، دو محور AA_1 و BB_1 که محورهای بیضی هستند را رسم می‌کنیم. CA_1 و AO را به n قسمت مساوی، برای مثال به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را مطابق شکل شماره‌گذاری می‌کنیم. امتداد خط B–۲، خط B_1–۲ را در نقطهٔ M قطع می‌کند. نقطهٔ M بر روی بیضی مطلوب واقع است. به همین ترتیب AD، A_1C_1 و A_1D_1 را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و از تلاقی دو خط هم‌شماره مطابق شکل تعدادی نقطه از بیضی مشخص می‌شود.

می‌توان پس از پیداکردن نقاط در یک چهارم بیضی، قرینه آنها را نسبت به دو محور بیضی یعنی AA_1 و BB_1 در نظر گرفت.



شکل ۲۳ــ۴

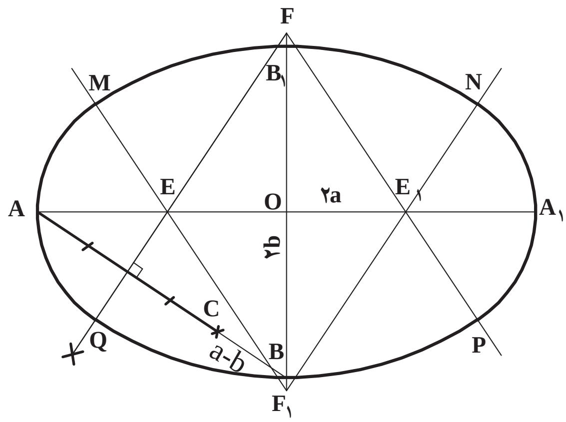
تمرین : با استفاده از مستطیل و تقارن بیضی رسم کنید که قطر بزرگ آن ۶ و قطر کوچک آن ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

رسم بیضی (شبه بیضی) از طریق چهار قوس

ترسیم از طریق نقطه‌یابی اگر دقیق ترسیم شود، شکل واقعی بیضی را ایجاد می کند. واضح است هرچه تعداد نقطه‌ها بیشتر باشد بیضی دقیق‌تری حاصل می‌شود. اما اتصال تمیز نقطه‌ها به پیستوله نیاز است. برای ترسیم بیضی با استفاده از پرگار روش دیگری وجود دارد که یک بیضی دقیق با خواص بیضی نیست اما شکلی بسیار شبیه بیضی را ایجاد می کند.

لازم به ذکر است که هرچه ابعاد قطر بزرگ و قطر کوچک بیضی به هم نزدیک‌تر باشد شبه بیضی به بیضی دقیق شبیه‌تر می‌شود.

در شکل ۲۴ــ۴، AA_1 و BB_1 را به ترتیب برابر اندازه‌های مفروض $2a$ و $2b$ رسم و از A به B وصل می کنیم. نقطهٔ C را روی خط BA طوری در نظر می‌گیریم که $BC=a-b$ باشد. عمودمنصف AC محور AA_1 را در نقطهٔ E و امتداد محور BB_1 را در نقطهٔ F قطع می‌کند. قرینه نقاط E و F را نسبت به نقطهٔ O، E_1 و F_1 می‌نامیم. به مرکز F و به شعاع FB قوس $\widehat{PBQ}$، به مرکز F_1 و به شعاع $F_1B_1 = FB$ قوس $\widehat{MB_1N}$، به مرکز E و به شعاع EA قوس $\widehat{MAQ}$ و به مرکز E_1 و به شعاع E_1A_1 قوس NA_1P را رسم می‌کنیم. این چهار قوس شکل نزدیک به بیضی واقعی با قطر بزرگ $2a$ و با قطر کوچک $2b$ را مشخص می‌کنند.



شکل ۲۴ــ۴

تمرین : با کمک نقطه‌یابی یک چهارم از یک بیضی را رسم کنید که قطر بزرگ آن ۶/۸ و قطر کوچک آن ۳/۴ سانتی‌متر باشد. روی اقطار بیضی فوق که یک چهارم آن را ترسیم کرده‌اید بیضی با کمک چهار قوس رسم کنید. آنها را با هم مقایسه کنید و میزان خطا روی چهار قوس را ببینید.

تمرین

نقش شکل **۲۷ــ۴** را در کادر ۱۶×۱۶ با دقت ترسیم کرده و مرکبی کنید :

پیش از ترسیم نقش به نکات زیر توجه کنید :

نکتهٔ اول : مشاهده می‌کنید که نقش از گسترش یک نقش جزء‌تر شکل گرفته است. بنابراین اگر طرز ترسیم نقشهٔ اولیه را به‌درستی یاد بگیرید کل نقش را به‌راحتی می‌توانید ترسیم کنید.

نکتهٔ دوم :گسترش حجم به روش قرینه محوری می‌باشد. اما با توجه به الگوی کلی نقش می‌توانید با یافتن خطوط کمکی جدید نقش اولیه را گسترش دهید.

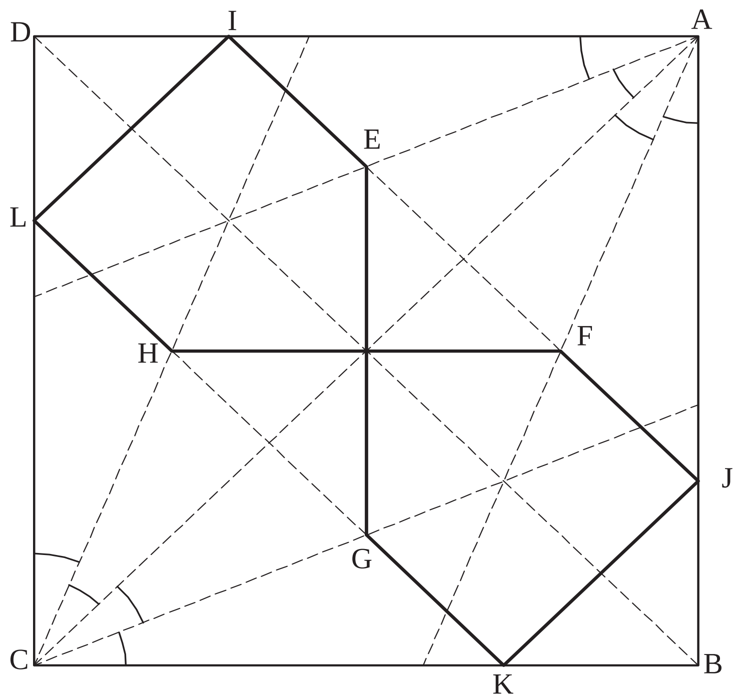
طریقهٔ ترسیم : ابتدا طریقهٔ ترسیم واحد اولیه را توضیح می‌دهیم.

مربع ABCD را با دقت ترسیم کرده و دو زاویه A و C را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم.

از محل تقاطع اقطار مربع دو خط به موازات اضلاع آن رسم می کنیم تا خط‌های اول و سوم زوایای A و C را در نقاط G ، F ،E و H قطع کند.

از هریک از چهار نقطه به‌دست‌آمده خط‌هایی به موازات قطر BD رسم می‌کنیم تا اضلاع مربع را در نقاط I ،J، K و L قطع کنند. از J به K و از I به L وصل می‌کنیم تا شکل کامل گردد (شکل ۲۵ــ۴).

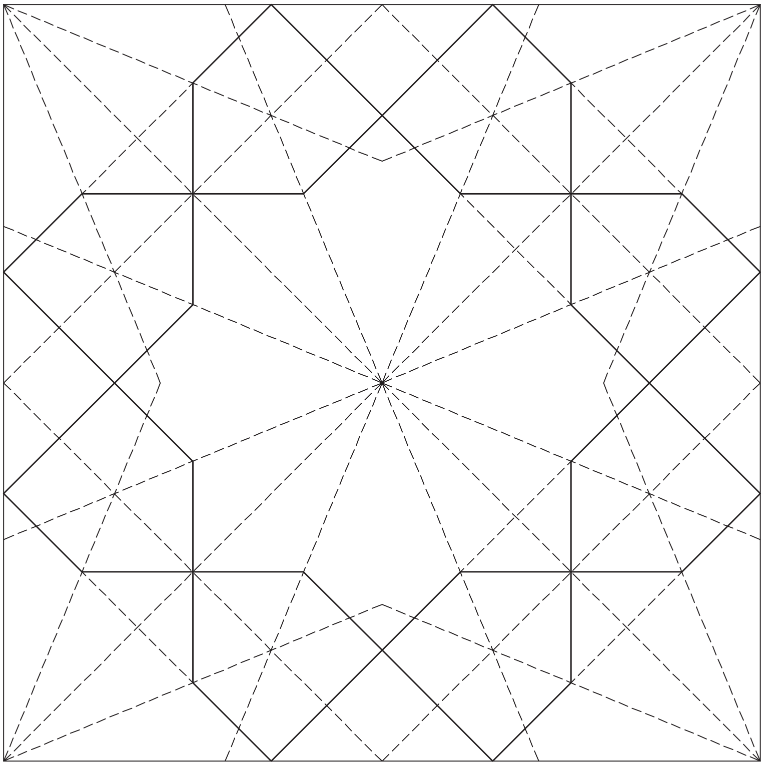
تکثیر واحد اولیه : با تجمیع ۴ واحد از نقش اولیه که از طریق قرینه محوری تکثیر شده اند. نقشی که یک شمسه هشت‌پر را می‌سازد حاصل می‌شود (شکل ۲۶ــ۴).



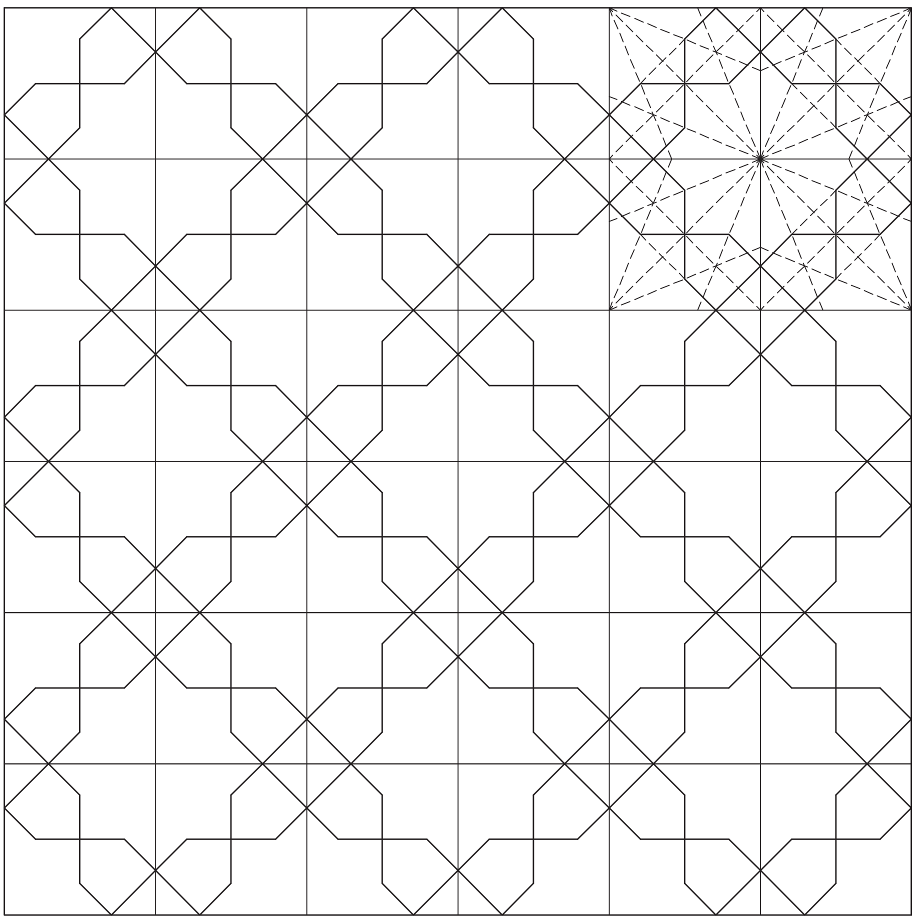
شکل ۲۵ــ۴

آن‌گاه می‌توانیم با استفاده از تقارن محوری نقش را در کادرهای متفاوت بسط دهیم (شکل ۲۶ـ۴).

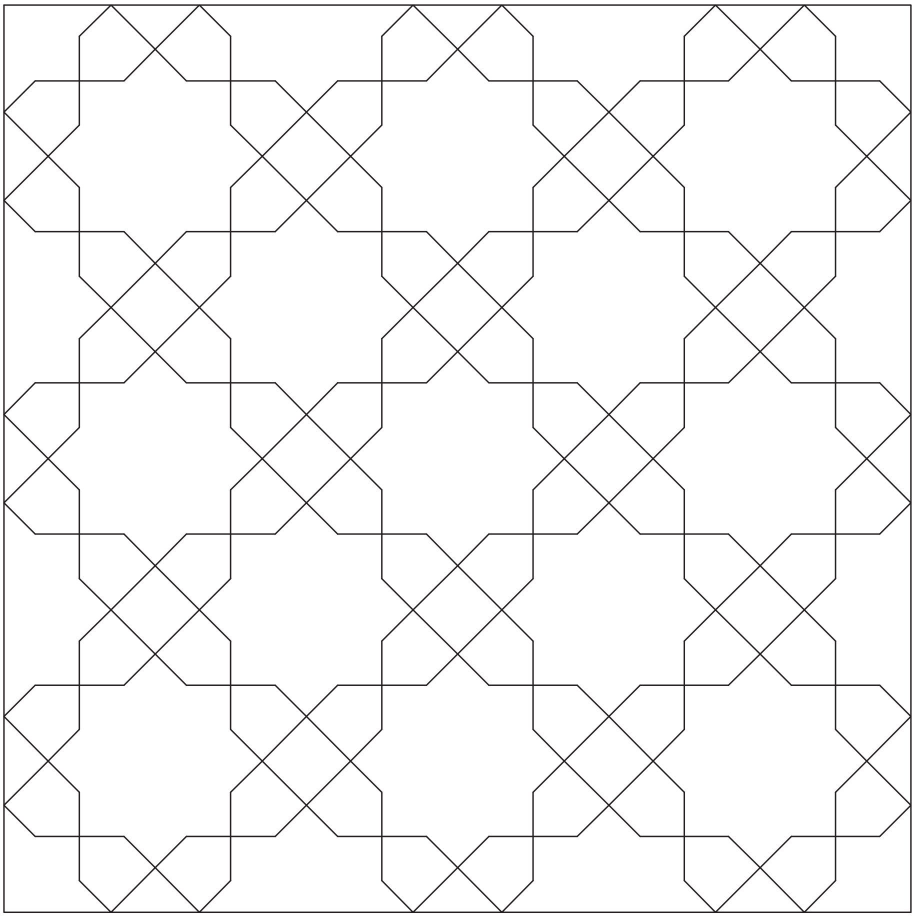
با پاک‌کردن خطوط زیر نقش اصلی ظاهر می‌شود (شکل ۲۸ـ۴).



شکل ۲۶ـ۴



شکل ۲۷ـ۴



شکل ۲۸ــ۴

می‌توانید این نقش زیبا را رنگ‌آمیزی کرده و تابلوی زیبایی پدید آورید.