

«عمل شمردن حالتها را خیلی ساده تصوّر نکنیم. در نظر داشته

باشیم که ده نفر می‌توانند به 362880° طریق در یک صف جابجا شوند.»

فصل اوّل

آنالیز ترکیبی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- اصول شمارش (اصل جمع و اصل ضرب) را تعریف کند.
- ۲- مفهوم فاکتوریل را تعریف کند.
- ۳- محاسبات مربوط به فاکتوریل را انجام دهد.
- ۴- ابزارهای شمارش (تبدیل، ترتیب و ترکیب) را همراه با کاربرد آنها توجیه کند.
- ۵- مسائل مربوط به آنالیز ترکیبی را حل کند.

با توجه به اینکه بسیاری از مسائل احتمالات، متکی بر شمردن تعداد عضوهای متعلق به مجموعه‌های معین می‌باشند، در این فصل با مهمترین فنون شمارش آشنا خواهید شد تا در حل مسائل احتمالات بتوانید از آنها کمک بگیرید.

دو اصل مهم در شمارش

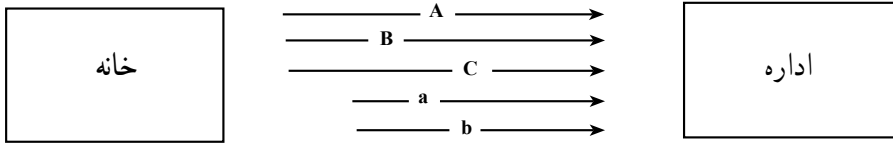
اصول شمارش بر پایه دو اصل بدیهی زیر بنا شده‌اند:

اصل جمع (« یا »)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد، آنگاه A یا B را می‌توان به $m + n$ طریق به انجام رساند.

مثال ۱- کارمندی برای رفتن از خانه به اداره، می‌تواند از یکی از سه خط اتوبوسرانی B، A یا C و یا یکی از خطوط مینی بوسرانی a یا b استفاده کند. این کارمند به چند صورت می‌تواند وسیله رفتن خود را برگزیند؟

جواب: $3 + 2 = 5$



مثال ۲- در یک سلف سرویس چهار نوع چلو و خورش و پنج نوع خوراک بدون برنج وجود دارد. یک مشتری به چند طریق می‌تواند غذای خود را برگزیند؟

$$m + n = 4 + 5 = 9$$

اصل ضرب (« و »)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد، A و B را می‌تواند به $m \times n$ طریق به انجام رساند.

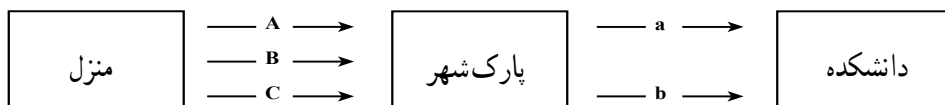
توجه داشته باشیم که اصول جمع و ضرب برای بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم هستند و به طور کلی می‌توان گفت: برای تعیین تعداد راههای ممکن انجام یک امر که دارای چند مرحله متوالی است، باید تعداد راه‌حل‌های ممکن هر مرحله را در هم ضرب کرد.

تذکر: حرف ربط «یا» در اصل جمع و «و» در اصل ضرب نقش تعیین کننده‌ای در تشخیص این اصول خواهند داشت البته ممکن است مفاهیم «یا» و «و» در جمله مستتر باشند.

مثال ۳- دانشجویی برای رفتن از منزل به دانشکده باید ابتدا با استفاده از یکی از خطوط اتوبوسرانی A، B یا C، خود را به پارک شهر برساند و سپس با استفاده از یکی از خطوط مینی بوسرانی

a یا b به دانشکده برود. این دانشجوی، به چند طریق می تواند از منزل به دانشکده برود؟

جواب: $3 \times 2 = 6$



در بسیاری از مسائل عملی، اصول جمع و ضرب به صورت توأم مورد استفاده قرار می گیرند.

مثال ۴- از بین چهار اقتصاددان و دو جامعه شناس و سه حسابدار، به چند طریق می شود، کمیته ای دو نفره تشکیل داد، به طوری که اعضای کمیته دارای یک نوع تخصص نباشند؟

جواب: این کمیته را می توان به $4 \times 2 = 8$ طریق از بین اقتصاددانان و جامعه شناسها یا به $4 \times 3 = 12$ طریق از بین اقتصاددانان و حسابدارها، یا به $2 \times 3 = 6$ طریق از بین جامعه شناسها و حسابدارها و در نتیجه به: $8 + 12 + 6 = 26$ طریق متمایز تشکیل داد.

خودآزمایی - دو مثال برای اصل جمع و دو مثال برای اصل ضرب بیان کنید.

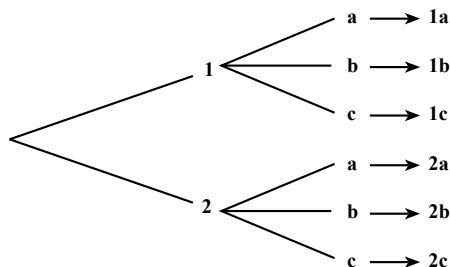
به نظر شما کدام اصل بیشتر کاربرد دارد؟

مثال ۵- احمد پنج شلوار و چهار کت دارد. او به چند طریق می تواند کت و شلوار بپوشد؟

$$m \times n = 5 \times 4 = 20$$

برای درک بیشتر اصل ضرب می توان از روش درختی (= شاخه ای) نیز کمک گرفت. مثلاً

اگر $A = \{1, 2\}$ ، $B = \{a, b, c\}$ باشد، حاصل ضرب $A \times B$ طبق اصل ضرب برابر $2 \times 3 = 6$ و طبق روش درختی این شش عضو به صورت زیر خواهند بود:



توجه داشته باشیم که در اصل ضرب گاهی اوقات انتخابها وابسته به انتخابهای قبلی هستند و گاهی اوقات انتخابها، مستقل از انتخابهای قبلی خواهند بود. مثلاً اگر بخواهیم با ارقام ۱، ۲، ۳ و

۴ اعداد سه رقمی بدون تکرار را بنویسیم، خواهیم داشت :

$$\boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

اما اگر هدف ما نوشتن همه اعداد سه رقمی «با تکرار یا بدون تکرار» باشد، خواهیم داشت :

$$\boxed{4} \boxed{4} \boxed{4} = 4 \times 4 \times 4 = 64$$

توجه دارید که در نوشتن اعداد سه رقمی بدون تکرار، انتخابها وابسته به انتخابهای قبلی، اما در مورد اعداد سه رقمی با تکرار، انتخابها مستقل از انتخابهای قبلی هستند.

فاکتوریل چیست؟

حاصلضرب اعداد صحیح و مثبت ۱، ۲، ۳، ...، n را فاکتوریل n گویند، که با نماد n! نشان داده می‌شود. با توجه به تعریف بالا می‌توان نوشت :

(فرمول ۱)

$$1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n = n! \quad \text{یا} \quad n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

به بیان دیگر می‌شود گفت : n! یعنی ضرب کردن n در همه اعداد صحیح متوالی قبل از خودش تا یک.
مثلاً :

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$6! = 6 \times 5!$$

از ترکیب دو مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت که :

و حالت کلی این مطلب را، می‌توان به صورت فرمول ۲ بیان کرد :

$$\boxed{n! = n(n-1)!}$$

(فرمول ۲)

ضمناً ۰! و ۱! را مساوی یک در نظر می‌گیرند. (در ادامه این فصل دلیل این مطلب را خواهید دید.)

مثال ۶- حاصلضرب اعداد زیر را به صورت فاکتوریل یک عدد طبیعی بنویسید.

$$\begin{array}{ccc} 6 & \times & 20 = \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 & = & 5! \end{array} \quad \begin{array}{ccc} 24 & \times & 30 = \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 & = & 6! \end{array}$$

$$3! \times 5! = 6 \times 5! = 6!$$

مثال ۷- کسرهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{4!}{6!} = \frac{4!}{6 \times 5 \times 4!} = \frac{1}{30}$$

$$\frac{10! \cdot 8!}{12! \cdot 7!} = \frac{10! \times 8 \times 7!}{12! \cdot 7!} = \frac{10! \times 8}{12 \times 11 \times 10!} = \frac{2}{33}$$

$$\frac{a!}{(a-2)!} = \frac{a(a-1)(a-2)!}{(a-2)!} = a^2 - a$$

$$\frac{a!(b-1)!}{b!(a-1)!} = \frac{a(a-1)!(b-1)!}{b(b-1)!(a-1)!} = \frac{a}{b}$$

نکته: توجه داشته باشید که اعداد را به صورت فاکتوریل نمی‌توان با هم دیگر جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم کرد. بلکه ابتدا باید هر عدد فاکتوریل دار را به صورت یک عدد صحیح در آورده، سپس اعداد صحیح را در عملیات چهار عمل اصلی شرکت دهیم. مثلاً:

$$3! \times 2! \neq 6!$$

$$3! = 6$$

$$2! = 2$$

$$3! \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

ابزارهای شمارش

منظور از «ابزارهای شمارش» که گاهی (آنالیز ترکیبی) نامیده می‌شوند، سه ابزار تبدیل، ترتیب و ترکیب می‌باشند که بر پایه اصول شمارش (= اصلهای جمع و ضرب) و تعریف فاکتوریل، ساخته و پرداخته شده‌اند.

تبدیل^۱ (جایگشت)

جابجا کردن n شیء متمایز را به صورتهای مختلف در کنار هم، تبدیل n شیء گویند. که با نماد P_n نشان داده می‌شود.

برای تعیین تعداد کل تبدیلهای n شیء، می‌توان n خانه (حُجره) را در نظر گرفت که برای پر کردن خانه اول یکی از n شیء و پس از آن، برای پر کردن خانه دوم یکی از $n-1$ شیء باقیمانده و... و سرانجام برای پر کردن خانه آخر، فقط یک شیء باقیمانده را می‌توان مورد استفاده قرار داد و طبق اصل ضرب، پر کردن این خانه‌ها به :

$$n(n-1)(n-2)\times\ldots\times 1$$

طریق، امکان‌پذیر خواهد بود.

خانه اول	خانه دوم	خانه سوم	و ... و	خانه آخر
به n طریق	به $n-1$ طریق	به $n-2$ طریق		به (1) طریق

به کمک این استدلال می‌توان نوشت :

$$P_n = n!$$

(فرمول ۳)

برای درک بیشتر فرمول ۳ (فرمول تبدیل) به یک مثال دیگر توجه کنید : فرض کنید در یک ردیف از یک سالن سخنرانی، چهار صندلی در کنار هم قرار دارد و قرار است چهار نفر از بیرون وارد سالن شده، روی صندلیها بنشینند. نفر اولی که وارد می‌شود، می‌تواند به چهار طریق جای خود را انتخاب کند. نفرات دوم، سوم و چهارم به ترتیب می‌توانند به ۲، ۳ و ۱ طریق صندلی خود را برگزینند. اگر انتخاب محل نشستن را توسط هر یک از این چهار نفر، یک عمل جداگانه در نظر بگیریم، عمل اول به ۴ طریق، عمل دوم به ۳ طریق، عمل سوم به ۲ طریق و عمل چهارم به ۱ طریق امکان‌پذیر می‌باشد و طبق اصل ضرب، این چهار عمل را به $4 \times 3 \times 2 \times 1$ طریق، می‌توان انجام داد. با توجه به تعریف فاکتوریل که حاصلضرب اعداد صحیح و مثبت ۱، ۲، ۳ و ۴ را چهار فاکتوریل $(4!)$ می‌نامیم، داریم :

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال ۸- پنج پرونده مالیاتی مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید؟

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال ۹- کتابداری می‌خواهد شش کتاب متفاوت با نامهای مختلف را در یک قفسه کتابخانه بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی از راست به چپ، بچیند. این کار را به چند صورت می‌تواند انجام دهد؟

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

تبدیل‌های حلقوی — اگر n شیء مختلف را بخواهیم روی یک حلقه بسته (مثلاً روی محیط یک دایره) به شکلهای مختلف قرار دهیم، تعداد حالتها، از رابطه $(n-1)!$ به دست می‌آید. علت این امر آنست که اگر تمامی n شیء مزبور که بر محیط بسته‌ای چیده شده‌اند، در یک جهت تغییر مکان دهند، صورت جدیدی پدیدار نخواهد شد، لیکن اگر یکی از n شیء را ثابت نگه داریم و $n-1$ شیء باقیمانده را جابجا کنیم صورتهای تازه‌ای فراهم می‌شود. با این توضیح، می‌توان نوشت:

$$*P_n = (n-1)!$$

(فرمول ۴)*

مثال ۱۰- پنج نفر اعضای شورای یک دادگاه، به چند صورت می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

$$*P_5 = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تبدیل‌های با تکرار — اگر از n شیء مفروض، r_1 شیء از یک نوع، r_2 شیء از نوع دیگر و ... و سرانجام r_k شیء از نوع دیگری باشند، به طوری که $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$ باشد، تعداد تبدیلهای کل آنها از رابطه $\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$ تعیین خواهد شد. به بیان دیگر، هرگاه یک مجموعه n عضوی به k زیرمجموعه r_1, r_2, \dots, r_k عضوی افزاشده باشد، تعداد تبدیلهای ممکن از فرمول ۵ معلوم خواهد شد.

$$*P_n = \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

(فرمول ۵)*

برای روشن شدن مطلب و درک فرمول ۵ به مثال عینی زیر توجه کنید.
فرض کنید می‌خواهیم با حروف به کار رفته در کلمه «دبیر»، بدون توجه به معنی کلمات ساخته شده، کلمات چهار حرفی بسازیم، چون حروف به کار رفته در کلمه «دبیر»، متفاوت هستند، طبق تعریف تبدیل از رابطه:

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

* وجود علامت ستاره در برخی از فرمولها، به معنی استثنایی بودن آن موارد است.

تعداد کلمات را می‌توان معلوم کرد. اما اگر بخواهیم با حروف به کار رفته در کلمه «دیدم» کلمات چهار حرفی بسازیم، چون جابجا کردن دو حرف «د»، تغییری در کلمات به وجود نمی‌آورد، لذا باید $4!$ را $2!$ تقسیم کرد (در حقیقت با این عمل $2!$ ضرب اضافی به عمل آمده در $4!$ را به خاطر حرف «د» جبران خواهیم کرد). در این صورت باید بنویسیم :

$$*P_4 = \frac{4!}{2!} = 12$$

و اگر در کلمات دیگر، به جای یک دسته حروف تکراری، چند دسته حروف تکراری داشته باشیم، (نظیر کلمه ساسانیان که دارای دو حرف «س» و سه حرف «الف» و دو حرف «ن» می‌باشد). باید $n!$ را بر فاکتوریل هر یک از دسته‌های تکراردار، تقسیم کنیم. مثلاً برای واژه (ساسانیان) تعداد کلمات هشت حرفی از رابطه $\frac{8!}{2!3!2!}$ معلوم خواهد شد.

مثال ۱۱— با حروف به کار رفته در واژه «بابا خانیان» چند کلمه ده حرفی می‌توان نوشت؟

$$*P_{10} = \frac{10!}{2!4!2!} = 3780$$

مثال ۱۲— با ارقام به کار رفته در عدد ۳۴۳۳۴، چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

$$*P_5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

مثال ۱۳— به چند طریق متمایز می‌توان چهار خودکار آبی و پنج خودکار سبز و دو خودکار قرمز را در کنار هم چید؟

$$*P_{11} = \frac{11!}{4!5!2!} = 6930$$

توجه داشته باشید که اگر این یازده خودکار به لحاظ تفاوت‌هایی که مثلاً در اندازه یا حجم یا اسم یا شماره آنها وجود دارد، متمایز بودند، به :
 $P_{11} = 11! = 39916800$ طریق می‌شد آنها را کنار هم چید.

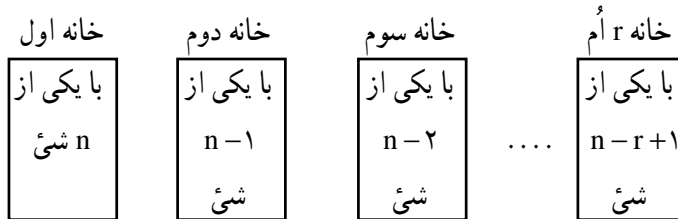
ترتیب^۱

تعریف — جابجا کردن r شیء از n شیء مختلف را ($r \leq n$) ترتیب r شیء از n شیء، یا ترتیب n شیء r به r گویند که با نمادهای P_n^r یا A_n^r نشان داده می‌شود.^۲ برای به دست آوردن

^۱ — Arrangement

^۲ — ترتیب را با نماد $P_{(n,r)}$ نیز نشان می‌دهند.

تعداد ترتیبهای r عنصری از n شیء مختلف، می‌توان n خانهٔ مختلف را در نظر گرفت که برای پر کردن خانه اول یکی از n شیء، پس از آن برای پر کردن خانه دوم یکی از $n-1$ شیء باقیمانده و برای پر کردن خانه سوم یکی از $n-2$ شیء به جا مانده و... و سرانجام برای پر کردن خانهٔ r ام یکی از $n-(r-1)$ یا $n-r+1$ شیء را در نظر گرفت:



حال اگر بخواهیم همهٔ این خانه‌ها را پر کنیم (بخواهیم تمام r عمل را انجام دهیم)، طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

$$P_n^r = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-r+1) \quad (\text{فرمول ۶})$$

اگر رابطه بالا را یک‌بار در $(n-r)!$ ضرب و یک‌بار بر $(n-r)!$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$P_n^r = \frac{n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-r+1) \times (n-r)!}{(n-r)!}$$

ضمناً طبق فرمول ۱ می‌توان نوشت:

$$n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-r+1) \times (n-r)! = n!$$

بنابراین فرمول ۶ را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد:

$$P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (\text{فرمول ۷})$$

تذکر: به کمک فرمولهای تبدیل و ترتیب، می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

$$P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} \quad (۱) \quad \text{طبق فرمول ترتیب}$$

$$P_n^n = n! \quad (۲) \quad \text{طبق فرمول تبدیل}$$

$$\frac{n!}{0!} = n! \quad (۳) \quad \text{نتیجه}$$

و رابطه (۳)، زمانی با معنی خواهد بود که: $0! = 1$ باشد.

با بیان این تذکر، متوجه می‌شویم که ترتیب، حالت خاصی از تبدیل است که در آن $r \leq n$ است. چنانچه $r = n$ باشد، اصطلاح تبدیل و در صورتی که $r < n$ باشد، اصطلاح ترتیب به کار برده می‌شود.

برای تفهیم بهتر فرمول ترتیب، به یک مثال عینی توجه کنید :
فرض کنید در یک ردیف از یک سالن سخنرانی، ۸ صندلی وجود دارد و قرار است ۳ نفر وارد سالن شوند و روی صندلیها بنشینند.

نفر اول می‌تواند به ۸ طریق جای خود را برگزیند، نفر دوم به ۷ طریق و نفر سوم به ۶ طریق می‌توانند جاهای خود را انتخاب کنند، طبق اصل ضرب، این سه نفر می‌توانند به $8 \times 7 \times 6$ طریق جاهای خود را برگزینند و با این ترتیب، می‌توان نوشت :

$$P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = n(n-1)(n-r+1)$$

و این همان فرمول ۶ است، از طرفی می‌توان نوشت :

$$P_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = \frac{8!}{5!} = \frac{8!}{(8-3)!}$$

و این نیز همان فرمول ۷ می‌باشد.

مثال ۱۴- یک خانوادهٔ چهار نفری به چند طریق می‌توانند سه به سه در کنار هم، عکس بگیرند؟

$$P_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

مثال ۱۵- در یک شرکت، ۱۰ کارمند کار می‌کنند، به چند صورت می‌توان از بین آنها یک شورای ۳ نفره تشکیل داد که شامل یک رئیس شورا، یک معاون شورا و یک بازرس شورا باشد؟

$$P_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$$

ترتیبهای با تکرار - هرگاه تکرار یک یا چند شیء از n شیء در ترتیبهای ساخته شده مجاز باشد، «ترتیب با تکرار» حاصل خواهد شد. فرض کنید شما می‌خواهید با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴، تمام اعداد سه رقمی ممکن را بسازید. برای تعیین تعداد آنها، از استدلال زیر استفاده خواهید کرد :

جای صدگان

به چهار
طریق

جای دهگان

به چهار
طریق

جای یکان

به چهار
طریق

زیرا در هر یک از خانه‌های یکان، دهگان و صدگان می‌توان ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ را قرار داد و طبق اصل ضرب، هر سه جا را می‌توان به $4 \times 4 \times 4$ یا 4^3 طریق پرکرد. به طور کلی فرمول ۸ را برای ترتیبهای با تکرار به کار می‌برند:

$$*P_n^r = n^r \quad \text{(فرمول ۸)*}$$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فرمول ۸ در حالتی است که انتخابهای بعدی مستقل از انتخابهای قبلی هستند.

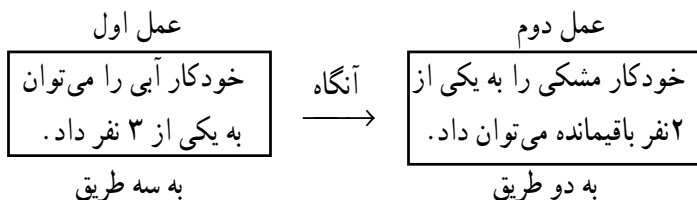
مثال زیر تفاوت ترتیبهای بدون تکرار و با تکرار را نشان می‌دهد.

مثال ۱۶— دو خودکار آبی و مشکی (A و M) را به چند صورت می‌توان به ۳ نفر داد؟ چنانچه:

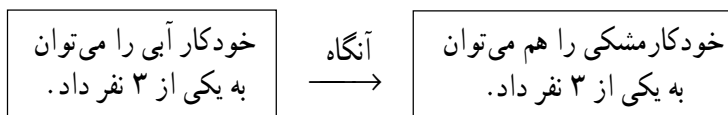
الف) دادن بیش از یک خودکار به هر نفر مجاز نباشد.

ب) دادن بیش از یک خودکار به هر نفر مجاز باشد.

حل: موضوع بند «الف»، ترتیبهای بدون تکرار است.

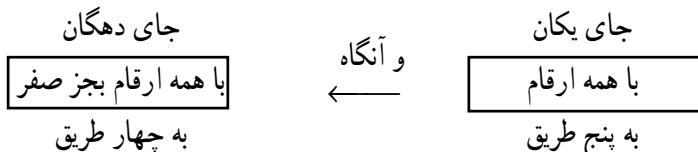


و طبق اصل ضرب، دادن دو خودکار متمایز به سه نفر از رابطه $3 \times 2 = 6$ معلوم می‌شود. اما موضوع بند «ب»، مربوط به ترتیبهای با تکرار خواهد بود:



و طبق اصل ضرب، هر دو عمل را به $3 \times 3 = 9$ طریق می‌توان انجام داد.

مثال ۱۷— با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ و ۵ چند عدد دو رقمی با تکرار مجاز ارقام، می‌توان نوشت؟



$$P_5^2 = 4 \times 5 = 20$$

لذا طبق اصل ضرب، داریم:

تذکر: بهتر است مسائل تبدیل و ترتیب را با کمک اصل ضرب حل کنیم تا با سرعت بیشتری به جواب برسیم. مثلاً اگر در مثال ۱۷ گفته شود که چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت با کمک اصل ضرب به صورت زیر عمل خواهیم کرد:

<p>جای دهگان</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">همه ارقام بجز صفر</div> <p>به چهار طریق</p>	<p>جای یکان</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">فقط صفر یا ۲</div> <p>به دو طریق</p>
$P_5^2 = 4 \times 2 = 8$	

در حالی که اگر بخواهیم این مثال را ابتدا با کمک فرمول ترتیبهای با تکرار حل کنیم، خواهیم داشت:

$$P_n^r = n^r \Rightarrow P_5^2 = 5^2 = 25$$

کُل اعداد

سپس باید اعدادی را که سمت چپشان صفر است و نیز اعدادی را که یکانشان فرد است، محاسبه کرده، از کُل اعداد کنار بگذاریم.

$$25 \times \frac{1}{5} = 5$$

آن تعداد که سمت چپشان صفر است.

$$25 - 5 = 20$$

آن تعداد که سمت چپشان صفر نیست.

$$20 \times \frac{3}{5} = 12$$

آن تعداد که یکانشان فرد است.

$$20 - 12 = 8$$

آن تعداد که یکانشان زوج است.

مشاهده می‌کنید که راه حل اول (استفاده از اصل ضرب) بسیار کوتاه‌تر از راه حل دوم (استفاده از فرمول ترتیبهای با تکرار و منطق ریاضی) می‌باشد.

نکته: در مسایلی که ترتیب قرار گرفتن اشیاء مورد توجه باشد، یا از تبدیل استفاده خواهیم کرد و یا از ترتیب. مانند نوشتن کلمات با حروف و یا نوشتن اعداد با ارقام. حال اگر کل اشیاء بخواهند جابه‌جا شوند فرمول «تبدیل» کاربرد پیدا می‌کند و اگر بخشی از کل اشیاء بخواهند جابه‌جا شوند، دستور «ترتیب» مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ترکیب^۱

تعریف — در هم آمیختن r شیء از n شیء مختلف را ترکیب r شیء از n شیء گویند، که با نمادهای C_n^r یا $\binom{n}{r}$ نشان داده می‌شود.^۲

به بیان دیگر می‌توان گفت که ترکیب، انتخابی از اشیاء را گویند که در آن، ترتیب قرار گرفتن اجزا در کنار هم مهم نباشد، بلکه با هم بودن اجزا مد نظر باشد.

در ترکیب (برخلاف ترتیب) جابجا شدن اشیاء در هر نمونه r عضوی، نمونه تازه‌ای فراهم نمی‌کند. با این ترتیب می‌توان ترکیب را معادل مفهوم «زیر مجموعه» در ریاضیات دانست. برای تشخیص تفاوت بین ترتیب و ترکیب و رابطه آنها به یک مثال توجه کنید.

حروف A، B و C را در نظر بگیرید. اگر بخواهید کلمات دو حرفی بدون تکرار را که می‌توان با این حروف ساخت، بنویسید، با موضوع ترتیب روبرو خواهید بود و خواهید داشت :

$$AB - AC - BC - BA - CA - CB$$

$$P_3^2 = 3 \times 2 = 6$$

ترتیبهای دو شیء از سه شیء مختلف

توجه دارید که در این صورت AB و BA با هم فرق دارند حال اگر همان سه حرف را نماینده ۳ رنگ مثلاً آبی (A)، بنفش (B)، سرخ (C) در نظر بگیرید و بخواهید رنگهایی مرکب از دو رنگ مختلف بسازید، موضوع مسأله به «ترکیب» مربوط می‌شود :

$$\left. \begin{array}{l} AB \rightarrow \text{بنفش و آبی} \\ CA \rightarrow \text{آبی و سرخ} \\ CB \rightarrow \text{بنفش و سرخ} \end{array} \right\} \text{ترکیبهای دو عضوی از یک مجموعه سه عضوی}$$

توجه دارید که در این صورت AB و BA یک معنی خواهند داشت، زیرا رنگهای آبی و بنفش، همان رنگهای بنفش و آبی هستند. مشاهده می‌شود که تعداد ترکیبها همواره به اندازه

$\frac{1}{r!}$ تعداد ترتیبها خواهند بود. و با کمک همین استدلال می‌نویسیم :

$$C_n^r = \frac{1}{r!} \times P_n^r = \frac{1}{r!} \times \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

^۱ — Combination

^۲ — مفهوم ترکیب را با نماد $C_{(n,r)}$ نیز نشان می‌دهند.

و با این ترتیب، فرمول زیر برای تعیین تعداد ترکیبها ساخته خواهد شد :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad n \geq r \quad (\text{فرمول ۹})$$

نکته: برای تعیین تعداد ترکیبها، می‌توانید ابتدا تعداد ترتیبها را محاسبه کرده، نتیجه را بر $r!$ تقسیم نمایید.

مثال ۱۸- به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ حساب جاری در یک بانک، به‌طور تصادفی دو حساب جاری را به‌عنوان یک نمونه، انتخاب کرد؟

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

مثال ۱۹- دبیر حسابداری در امتحان آخر ترم ۲۰ سؤال به دانش‌آموزان خود داده است که آنها به‌طور دلخواه به ۱۸ سؤال پاسخ دهند. دانش‌آموزان به چند طریق می‌توانند سؤالات خود را برگزینند؟

$$C_{18}^{18} = \frac{18!}{18!0!} = 1$$

مثال ۲۰- تعداد زیرمجموعه‌های سه‌عضوی را که می‌توان از مجموعه:

$\{a, 2, \square, \Delta, 8\}$ ساخت، معلوم کنید.

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{6} = 10$$

خودآزمایی (۱)- ترکیبهای زیر را حل کرده، برای هر کدام یک قانونمندی ثابت بیان کنید :

$$C_5^0, C_5^1, C_5^2, C_5^3, C_5^4, C_5^5$$

خودآزمایی (۲)- ترکیبهای عنوان شده در خودآزمایی (۱) را محاسبه کرده، مجموع آنها را به‌صورت توانی از ۲ بنویسید.

روابط زیر شما را در پیدا کردن جواب ترکیبها، کمک می‌کند :

$$۱) C_n^0 = C_n^n = 1$$

$$۲) C_n^1 = C_n^{n-1} = n$$

$$۳) C_n^2 = C_n^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2!}$$

$$۴) C_n^r = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$۵) C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$۶) C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + C_n^n = 0$$

ترکیبهای با تکرار — اگر در n شیء مورد نظر، برخی از اشیا مثل هم و یکسان باشند و بخواهیم ترکیبهایی r تایی بسازیم، در برخی از ترکیبها اشیا تکراری خواهیم داشت. (مثلاً AA می تواند یک ترکیب دو حرفی با تکرار از مجموعه حروف A و A و B و C و D باشد.) به چنین مواردی ترکیبهای با تکرار گفته می شود.

چون اثبات و توضیح فرمول ترکیبهای با تکرار، خارج از برنامه درسی است، لذا این فرمول را بدون ذکر دلیل نشان می دهیم :

$$\boxed{{}^*C_{(n+r-1)}^r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}} \quad (\text{فرمول } ۱۰)$$

مثال ۲۱ — به چند طریق می توان از بین ۵ فوتبالیست، یک دروازه بان و یک کاپیتان انتخاب کرد؟ با توجه به این که یک فرد نیز می تواند هر دو کار را انجام دهد.

$$C_{(5+2-1)}^2 = \frac{(5+2-1)!}{2!(5-1)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$$

توضیح: در مثال بالا اگر قرار بر این باشد که از بین پنج فوتبالیست دو نفر را برای وظایف مختلف (مثلاً دروازه بانی و دفاع) انتخاب کنیم، تعداد حالتهای انتخاب از ترکیبهای بدون تکرار به صورت $C_5^{20} = 10$ معلوم می شوند. توجه دارید که اختلاف در این دو حالت ۵ مورد است. ($15 - 10 = 5$) که این موارد به حالتی برمی گردد که هر یک از پنج فوتبالیست در حالت اول می توانستند هم دروازه بان باشند و هم کاپیتان، درحالی که در حالت دوم دروازه بان و دفاع حتماً باید دو نفر مختلف باشند.

تمرینهای فصل اول

۱- اصل « جمع » و اصل « ضرب » را همراه با ذکر مثال توضیح دهید.

۲- فاکتوریل را تعریف کنید.

۳- تساوی مقابل را با استفاده از آنالیز ترکیبی توجیه کنید : $0! = 1! = 1$

۴- با همه حروف به کار رفته در کلمه « مالیات »، چند کلمه شش حرفی می شود نوشت؟

۵- کسرهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{10!}{12!}, \frac{5!8!}{7!1!}, \frac{a!}{(a-2)!}, \frac{(a+2)!}{(a-2)!}, \frac{(n+1)!}{n!}$$

۶- هفت نفر افراد یک خانواده به چند طریق می توانند در یک صف بایستند؟ این افراد به چند

طریق می توانند در دو اتومبیل به ظرفیتهای ۴ نفره و ۳ نفره سوار شوند؟

۷- اگر تکرار ارقام در اعداد مجاز باشد، با ارقام ۱، ۲، ۳، ۵ و ۷ چند عدد سه رقمی می شود

نوشت؟ چند تای آنها زوج است؟

۸- درستی تساویهای زیر را نشان دهید.

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} \quad (2) \quad C_n^n = C_n^0 = 1$$

۹- از ده کارمند مرد و ۵ کارمند زن شاغل در یک شرکت، به چند صورت می شود یک

شورای چهار نفره انتخاب کرد؟ اگر بخواهیم دو نفر از اعضای شورا مرد و دو نفر دیگر آن زن باشند،

این عمل را به چند طریق می توان انجام داد؟

۱۰- در یک امتحان، ۱۲ سؤال در اختیار دانش آموزان قرار داده شده است که باید ۱۰ سؤال

را به دلخواه انتخاب کرده، حل کنند، چنانچه مجبور باشند سؤالات (۱) و (۲) را حتماً انتخاب کنند

این عمل را به چند طریق می توانند انجام دهند؟

۱۱- شش نفر افراد شاغل در حسابداری یک اداره، به چند طریق می توانند دور یک میز

بنشینند؟

۱۲- به چند صورت می توان پنج پرونده مالی و چهار پرونده اداری را در یک قفسه چید،

به طوری که پرونده های مالی در سمت راست باشند؟

۱۳- حاصل عبارت P_n^{n-1} را معلوم کنید.

۱۴- اگر تعداد ترتیبهای x شیء از پنج شیء، x برابر تعداد ترتیبهای $x-1$ شیء از پنج شیء

باشد، مقدار x را به دست آورید.

- ۱۵- در یک آزمون ۱۰ سؤال ریاضی و ۸ سؤال آمار داده شده که دانش‌آموزان باید به ۱۲ سؤال از آن‌ها پاسخ دهند. معلوم کنید دانش‌آموزان به چند طریق می‌توانند سؤالات خود را انتخاب کنند، اگر بخواهیم به نیمی از سؤالات آمار پاسخ داده باشند؟
- ۱۶- با حروف کلمه حسابداری چند کلمه مختلف می‌شود، نوشت؟
- ۱۷- به چند طریق می‌شود از بین ۱۰ نفر افراد یک شرکت، شورایی شامل یک رئیس، یک منشی و یک حسابدار انتخاب کرد؟
- ۱۸- در یک هتل سه اتاق خواب وجود دارد که یکی از آنها سه نفره و دوتای دیگر دو نفره هستند. مدیر این هتل هفت مسافر را به چند طریق می‌تواند در اتاقهای مختلف استقرار دهد.
- ۱۹- در یک کشور اروپایی پلاکهای اتومبیل‌ها را با استفاده از دو حرف الفبا در سمت چپ و یک عدد چهار رقمی در سمت راست تنظیم می‌کنند با توجه به این که ۲۶ حرف الفبا دارند، چند اتومبیل را می‌توانند پلاک بدهند؟
- ۲۰- به چند طریق می‌توانید هفت شمع مختلف را دور یک کیک دایره‌ای شکل برای یک فرد هفت ساله بچینید؟
-

----- تستهای چهار گزینه‌ای -----

۱- حاصل عبارت $\frac{P_n^r}{P_{n+1}^{r+1}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{n+1}$ (۲) $\frac{r}{n}$ (۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ (۴) $\frac{r+1}{n+1}$

۲- با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰، بدون تکرار ارقام می‌شود

نوشت؟

(۱) ۴۰ (۲) ۶۰ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۰

۳- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد صورتهایی که در آنها عدد زوج آمده،

کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۱

۴- سه کتاب ریاضی و ۲ کتاب اقتصاد را که با هم متفاوت‌اند، به چند طریق می‌توان در یک

قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع، همواره کنار هم باشند؟

(۱) ۶۰ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۲ (۴) ۲۴

۵- اگر ترکیب $m = \binom{a+b}{a}$ باشد، مقدار ترکیب $\binom{a+b}{b}$ کدامست؟

(۱) m (۲) bm (۳) am (۴) $(a+b)m$

۶- شخصی از میان ۱۰ کتاب خود، می‌خواهد دو کتاب را انتخاب کرده، به یکی از دوستانش

هدیه کند. این عمل به چند صورت ممکن است؟

(۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۹۰ (۴) ۲۰

۷- مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد؟

(۱) ۲۵ (۲) ۲۰ (۳) ۱۵ (۴) ۱۰

۸- بین ۵ دبیر و ۴ دانش‌آموز، چند کمیته ۵ نفری مرکب از ۳ دبیر و ۲ دانش‌آموز می‌توان

تشکیل داد؟

(۱) ۶ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۶۰

۱- نماد ترکیب را به دو صورت C_{a+b}^a یا $\binom{a+b}{a}$ می‌نویسند.

۹- اگر $P_n^2 = 2^0$ باشد، مقدار n کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۲۰

۱۰- جواب معادله $C_x^2 = 2x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۱۱- در یک آزمون، ده سؤال دو جوابی صحیح یا غلط داده شده است. به چند طریق می‌شود

به این سؤالات پاسخ داد؟

- (۱) 2^{10} (۲) 10^2 (۳) 2×10 (۴) 10

۱۲- ده تیم فوتبال به چند طریق می‌توانند، دو به دو با هم مسابقه بدهند؟

- (۱) ۹۰ (۲) ۴۵ (۳) ۵۵ (۴) ۲۰

۱۳- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۰ چند عدد دو رقمی بدون تکرار ارقام می‌شود نوشت؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۶ (۳) ۲۵ (۴) ۳۰

۱۴- با حروف واژه «ترازنامه» چند کلمه هشت حرفی می‌شود نوشت؟

- (۱) $8!$ (۲) 8^8 (۳) 8×8 (۴) $\frac{8!}{2!}$

۱۵- پنج کارمند حسابداری یک شرکت به چند طریق می‌توانند دور یک میز کنفرانس بنشینند؟

- (۱) ۶۰ (۲) ۲۰ (۳) ۱۲۰ (۴) ۲۴
