

# بخش اول

هندسه

و

ترسیمات دوبعدی

## مقدمه

ترسیم نقشه یا نقشه‌کشی یعنی بیان کالبد یک پدیده (یک شیء، یک بنا، یک شهر و...) به زبان تصویر. هر تصویری از اشکال تشکیل شده و انسان از دیرباز برای تعریف و بیان اشکال، دانش هندسه را بنیان‌گذارده است. آن بخش از هندسه که شاید متشکل از ابتدایی‌ترین مفاهیم این دانش باشد، با قدمتی چند هزارساله، با نام هندسه مسطحه و در ادامه آن هندسه فضایی، مبنای دانش نقشه‌کشی است.

بنابراین هرکس در هر زمینه‌ای نیاز به ترسیم یا فهم یک نقشه داشته باشد، ناگزیر به آشنایی و درک مبانی و قضایای ابتدایی هندسه است. یک نقشه‌بردار که نقشه عوارض و پستی و بلندی بخشی از سطح زمین را تهیه می‌کند، یک شهرساز که نقشه یک شهر را طراحی و ترسیم می‌کند، یک مهندس معمار که نقشه یک ساختمان را طرح می‌کند، هم‌چنین یک مهندس مکانیک، یک طراح صنعتی و مانند آنها، همگی نیازمند داشتن دانش لازم در هندسه هستند.

هرچه ما نسبت به مبانی و روابط هندسی دانش بیش‌تر و درک عمیق‌تری داشته باشیم در کار نقشه‌کشی موفق‌تر هستیم. به این دلیل اولین بخش از کتاب ترسیم فنی و نقشه‌کشی اختصاص به یادآوری احکام مهم و اولیه هندسه دارد. این بخش به چهار فصل تقسیم شده است.

فصل اول از ترسیمات پایه آغاز می‌شود و در ادامه ضمن آشنایی بیش‌تر با مثلث، به عنوان یکی از مهم‌ترین اشکال پایه در هندسه ترسیمی، و یادآوری تعدادی از قضایای مهم هندسی در قالب مثال‌ها و تمرین‌هایی، انواع ترسیمات مرتبط با مثلث را تمرین می‌کنیم. در فصل دوم موضوع تقارن در اشکال مطرح می‌شود و با درک مفهوم تقارن محوری و مرکزی چگونگی ترسیم اشکال متقارن را یاد می‌گیریم.

فصل سوم اختصاص به چند ضلعی‌ها و چهارضلعی‌های تعریف شده دارد و با یادآوری بعضی از قضایای هندسی ترسیم چندضلعی‌های منتظم و چهارضلعی‌ها را تمرین می‌کنیم.

در فصل چهارم دایره، به عنوان شکل پایه و مهم دیگری در ترسیمات، معرفی شده و با یادآوری برخی قضایا و تمرین درباره آنها و همچنین تعریف بیضی و چگونگی ترسیم آن، مهارت خود را در ترسیم به تدریج بالا خواهیم برد.

### ترسیمات پایه و مثلث

- هدف‌های رفتاری : پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :
  - ترسیمات ابتدایی و پایه را با صحت و دقت انجام دهد.
  - با استفاده از ویژگی‌های مثلث هر مثلثی را با اطلاعات داده شده ترسیم کند.
  - با درک مفهوم تشابه بتواند مشابه اشکال داده شده را ترسیم کند.
  - با درک مفاهیم خطوط اصلی در مثلث، آنها را در هر مثلثی ترسیم نماید.

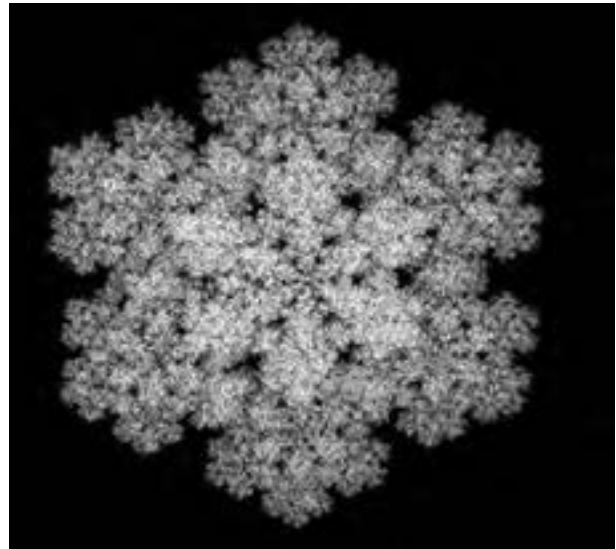
آنهاست. این نظم حاصل وجود نسبت و رابطه مابین اجزاء و اندازه آنهاست.

هندسره که به معنای اندازه است دانشی است که بشر در جهت درک و شناخت و تبیین و تقلید از انواع شکل‌هایی که در طبیعت با آنها روبه‌رو بوده، بنیان‌گذارده است. دانشی که در طول زمان عمق و گسترش زیادی یافته است.

### طبیعت، شکل، اندازه و نظم

بزرگ‌ترین معلم انسان خداوند حکیم است و دفتر طبیعت کتاب بزرگ و گسترده‌ای است که او در برابر انسان گشوده تا با بهره‌گیری از موهبت هوش و عقل رازهای آن را یک به یک بشکافد و راه به نور و عالم بالا گشاید. یکی از ویژگی‌های پدیده‌های طبیعی وجود نوعی نظم در





## هندسه اقلیدسی و هندسه شرقی یا ایرانی

هم‌چنان اهمیت و قدرت خود را حفظ کرده است. علاوه بر هندسه اقلیدسی نوعی هندسه ترسیمی که جنبه عملی و کاربردی داشته در شرق به کار می‌رفته است که ابوالوفاء محمدبن محمدالبوزجانی، ریاضیدان ایرانی قرن چهارم، آن را در رساله‌ای به زبان عربی با نام «اشکال هندسی که عمل‌کنندگان و صنعتگران بدان نیاز دارند» مدون کرده است.<sup>۲</sup> در این نوع هندسه، که ریشه آن احتمالاً در همان تمدن‌های شرقی می‌باشد، بعضی از ترسیمات اثبات هندسی ندارند. یعنی مشابه ترسیمات هندسه اقلیدسی نیستند که به دلیل اثبات هندسی کاملاً و صددرصد دقت داشته باشند، بلکه تقریبی هستند اما عدم دقت آنها به قدری ناچیز است که در عمل به هیچ وجه ادراک نمی‌شود. بنابراین در مقیاس اشکال و احجام به‌کاررفته در معماری کاملاً کاربرد دارند.<sup>۳</sup> اغلب مطالب این فصل را هنرجویان در طول دوران تحصیلی راهنمایی و اول متوسطه فراگرفته‌اند، آنچه در این جا ذکر می‌شود مروری همراه با تمرینات کاربردی مربوط به آنهاست. لذا حل تمرینات با درک مفاهیمی که در قالب یادآوری آمده است ضروری می‌باشد.

ردپای توجه انسان به هندسه در آثاری از دوره غارنشینی یافته شده است. آثار به‌جامانده از تمدن بابلان، متعلق به چهارهزار سال قبل از میلاد مسیح حاکی از آن است که آنها برای رفع نیازهای خود در زمینه مساحی، نقشه‌برداری و ساختمان از هندسه و روابط هندسی بهره می‌برده‌اند و سعی در محاسبه مساحت دایره و عدد پی کرده‌اند. هم‌چنین در تمدن‌های مصر، هندوچین هندسه در عمل نقش مؤثری در شکل‌دهی به مصنوعات تولیدشده توسط آنها داشته است.

اما دانش هندسه مبتنی بر برهان و اثبات را یونانیان در حدود دوهزار و پانصد سال پیش تدوین نموده‌اند که به هندسه اقلیدسی معروف است. همان هندسه‌ای که در سال‌های گذشته با آن آشنا شده‌اید. شاید شنیده باشید که از قرن هفدهم به بعد با بسط دانش در همه زمینه‌ها از جمله ریاضیات، دانش هندسه نیز بسط پیدا کرد و انواع دیگر هندسه<sup>۱</sup> بنیان گذاشته شد.

هریک از انواع هندسه، که ظاهراً مبانی بعضی از آنها در تناقض با یکدیگر است، در مقیاس ویژه‌ای از فیزیک و جهان هستی کاربرد دارند. هندسه اقلیدسی در مقیاس فضای زیست انسان کاربرد دارد از آن‌رو با وجود کشف هندسه‌های جدید،

۱- از جمله هندسه تحلیلی، هندسه ریمانی و هندسه نااقلیدسی

۲- «فی ما يحتاج الیه العمال و الصناع من الاشکال الهندسیه» این رساله توسط آقای سید علی رضا جذبی به عبارت روز برگردان شده و انتشارات سروش آن را در سال ۱۳۶۹

با عنوان هندسه ایرانی (کاربرد هندسه در عمل) چاپ کرده است.

۳- در این فصل روش‌های ترسیمی ارائه شده برگرفته از هردو هندسه است و یادگیری آنها ما را در ترسیمات دوبعدی که اساس ترسیمات سه‌بعدی نیز هست یاری می‌کند.

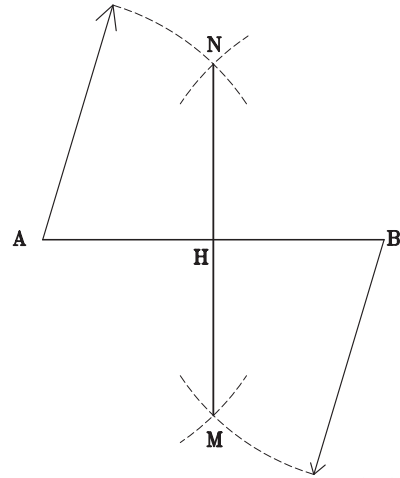
## ترسیمات پایه

### ترسیم خطی عمود بر خط دیگر

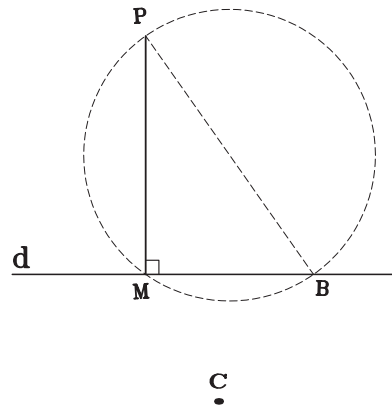
می‌دانید زاویه  $90^\circ$  درجه زاویه ویژه‌ای است. فضا با سه بردار عمود برهم مشخص می‌شود. بنابراین ترسیم دقیق زاویه  $90^\circ$  درجه یا ترسیم دو خط عمود برهم بسیار مهم است.

شکل‌های ۱-۱، ۱-۲ و ۱-۳ نحوه ترسیم دو خط عمود برهم را نشان می‌دهد.

در شکل ۱-۱ پاره خط MN بر وسط خط AB عمود شده است.



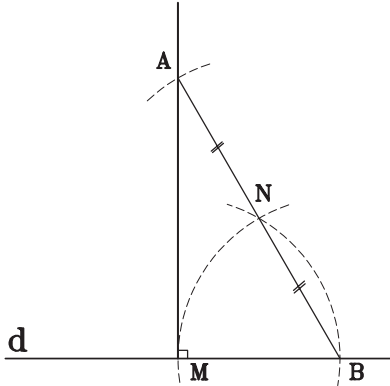
شکل ۱-۱



شکل ۱-۲

در شکل ۱-۲ از نقطه P خارج خط d بر آن عمود کرده‌ایم. آیا می‌توانید شیوه ترسیم را پیدا کنید؟

در شکل ۱-۳ از نقطه M روی خط d عمودی بر خط d ترسیم شده است.



شکل ۱-۳

مراحل ترسیم به این ترتیب است:

نقطه B را به دلخواه روی خط d انتخاب می‌کنیم.

از B و M قوس‌هایی به شعاع BM رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه N قطع کنند.

از B به N وصل می‌کنیم و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطه A برسیم اگر از A به M وصل کنیم AM در نقطه M بر خط d عمود است.

دقت کنید که می‌توانید نقطه A را بر امتداد BN هم از طریق اندازه‌گیری و هم بدون استفاده از خط‌کش مدرج و با قوس زدن پیدا کنید.

تمرین: در شکل ۱-۴ از سه نقطه A روی خط، B و C خارج خط سه خط بر خط d عمود کنید.

A



d

B

شکل ۱-۴

## ترسیم خطی به موازات خط دیگر

می‌دانید دو خط عمود بر یک خط با هم موازند آیا می‌توانید با استفاده از این قضیه و نحوه ترسیم دو خط عمود بر هم، دو خط موازی با هم بکشید؟  
تمرین: دو خط موازی رسم کنید که فاصله آنها از هم ۳ سانتی‌متر باشد.

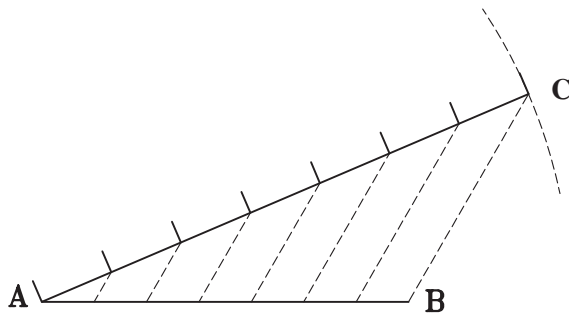
## تقسیم یک پاره خط به n قسمت مساوی

با روش ترسیم عمود منصف‌ها می‌توان هر پاره خط را به تقسیماتی با توان ۲ (دو، چهار، هشت، شانزده) تقسیم کرد اما این راه اولاً وقت‌گیر است، ثانیاً کلی نیست. یعنی نمی‌توانیم یک پاره خط را به تقسیمات فرد یا مثلاً به شش یا ده و ... تقسیم کرد.

مثال: می‌خواهیم پاره خطی به طول  $10/2$  سانتی‌متر را به ۷ قسمت مساوی تقسیم کنیم. اگر طول خط ۷ یا ۱۴ یا حتی  $10/5$  و به‌طور کلی ضربی از ۷ بود و ما خط‌کش مدرجی با تقسیمات میلی‌متری نیز داشتیم، تقسیمات عملی بود اما طول خط ضربی از ۷ نیست.

به شکل ۱-۶ توجه کنید پاره خط AB به ۷ قسمت مساوی تقسیم شده است. چگونه عمل کرده‌ایم؟ به ترسیم دقت کنید. طول خط AC را خود انتخاب کرده و آن را به ۷ قسمت کرده‌ایم. آن‌گاه از انتهای خط یعنی نقطه C به انتهای خط مفروض یعنی B وصل کرده و از نقاط تقسیم پاره خط‌هایی به موازات BC ترسیم کرده‌ایم. خط AB به آسانی به ۷ قسمت مساوی تقسیم شده است. در این روش ترسیم در واقع از قضیه تالس استفاده کرده‌ایم.

سؤال: اگر خط‌کش مدرج هم نداشته باشیم آیا باز هم می‌توانیم هر پاره خطی را به هر چند قسمت مساوی که بخواهیم تقسیم کنیم؟

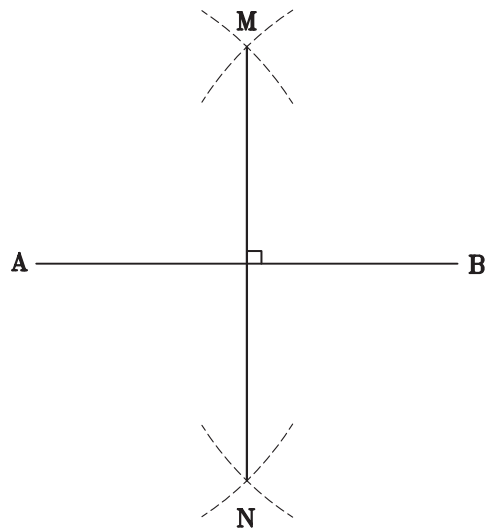


شکل ۱-۶

تمرین: بدون استفاده از خط‌کش مدرج خطی به طول دلخواه را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنید.

## تقسیم یک پاره خط به دو قسمت مساوی (عمود منصف یک خط)

به شکل ۱-۵ توجه کنید این شکل طریقه ترسیم عمود منصف یک پاره خط را نشان می‌دهد. آیا می‌توانید بگویید چرا پاره خط MN عمود منصف پاره خط AB است؟  
از روش فوق می‌توانیم هنگامی که ابزاری مانند خط‌کش مدرج نداریم برای تقسیم یک پاره خط به دو قسمت مساوی استفاده کنیم. اگر دقیق ترسیم کنیم، این روش از اندازه‌گیری می‌تواند دقیق‌تر باشد.



شکل ۱-۵

تمرین: خطی به طول  $7/3$  سانتی‌متر ترسیم کنید و آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید.

## تقسیم یک پاره خط به یک نسبت مشخص

برای تقسیم پاره خط به یک نسبت مشخص باز هم می توان از راه حل بالا کمک گرفت.

به شکل ۱-۷ توجه کنید پاره خط  $AB$  که طول آن ۴۷ میلی متر است به نسبت ۲ و ۳ تقسیم شده است.

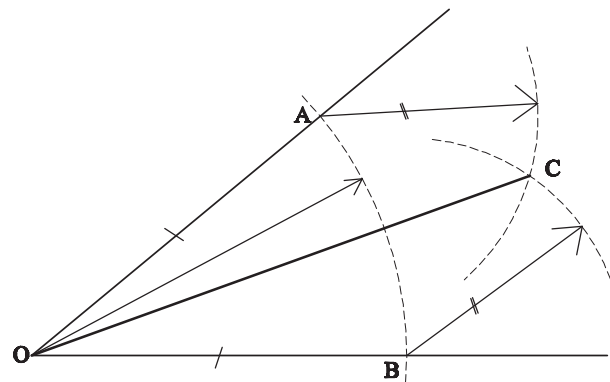


شکل ۱-۷

تمرین : خطی به طول دلخواه ترسیم کنید آن گاه آن را به نسبت ۳ و ۴ تقسیم کنید. آیا می شود بدون استفاده از خط کش مدرج آن را انجام داد؟

## تقسیم یک زاویه به دو قسمت مساوی (نیمساز یک زاویه)

به شکل ۱-۸ توجه کنید طریقه ترسیم نیمساز زاویه را نشان می دهد. می توانید بگویید چرا نیم خط  $OA$  نیمساز زاویه  $O$  است؟



شکل ۱-۸

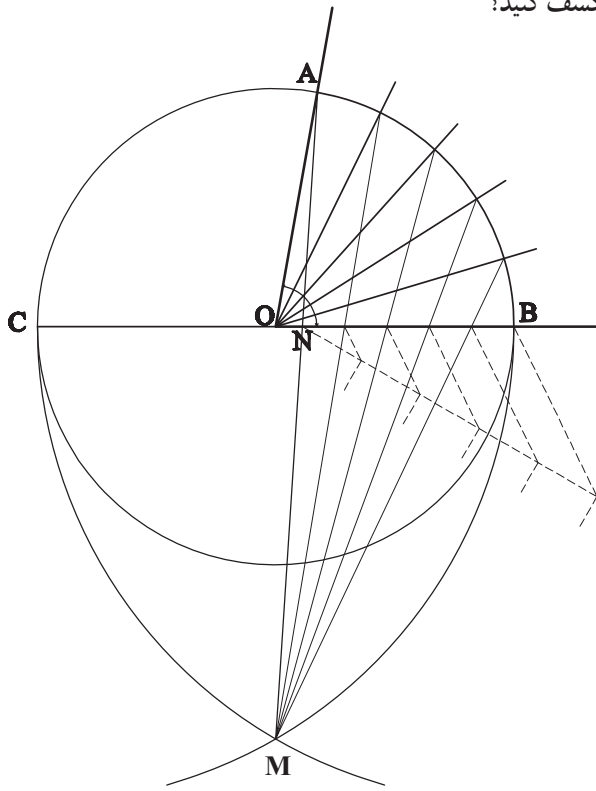
تمرین : یک مثلث دلخواه ترسیم کنید. آن گاه هر زاویه آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کنید. نیمسازها را تا ضلع مقابل هر زاویه ادامه دهید. آیا یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده اند؟ تقاطع این خطوط در یک نقطه نشانه دقت بالای شما است.

## تقسیم یک زاویه به n قسمت مساوی

با ترسیم متوالی نیمسازهای یک زاویه مشابه آن چه درباره تقسیم یک پاره خط دیدید می توان یک زاویه را به چهار، هشت، شانزده و ... تقسیم نمود. اما اگر بخواهیم زاویه ای را به پنج یا شش قسمت تقسیم کنیم چه؟

حقیقت این است که نمی توان با روشی علمی که اثبات هندسی داشته باشد هر زاویه ای را به چند قسمت مساوی تقسیم کرد. اما جوزانی در کتاب خود روش ترسیمی را ارائه داده است که با خطای بسیار جزئی زاویه را به چند قسمت تقسیم می کند.

به شکل ۱-۹ توجه کنید. می خواهیم زاویه  $AOB$  را به پنج قسمت مساوی تقسیم کنید. آیا می توانید شیوه ترسیم را کشف کنید؟



شکل ۱-۹

۱- این طریقه ترسیم از کتاب جوزانی است.

دقت کنید مراحل زیر در تقسیم زاویه انجام شده است. قسمت مساوی با خطای بسیار جزئی تقسیم شده است.

۱- به مرکز O رأس زاویه دایره‌ای به شعاع دلخواه رسم

می‌کنیم.

۲- یکی از اضلاع زاویه را امتداد داده تا دایره را در نقطه

C قطع کند.

۳- به مرکز B و شعاع قطر دایره قوسی می‌زنیم.

۴- به مرکز C و شعاع قطر دایره قوس دیگری می‌زنیم تا

قوس اول را در نقطه M قطع کند.

۵- از M به A وصل می‌کنیم تا OB را در نقطه N قطع

کند.

۶- پاره خط BN را به پنج قسمت مساوی تقسیم

می‌کنیم.

۷- از نقطه M به نقاط تقسیم وصل می‌کنیم و امتداد

می‌دهیم تا دایره را در نقاط P، Q، R، S قطع کنند.

۸- اگر از O به نقاط P، Q، R، S وصل کنیم زاویه به ۵

## تمرین منزل

۱- یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید و هریک از

اضلاع آن را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. از هر نقطه تقسیم

به موازات دو ضلع دیگر خطوطی رسم کنید. چند مثلث به وجود

آمده است؟ آیا همه آنها متساوی‌الاضلاع هستند؟

۲- یک زاویه منفرجه یا باز ترسیم کنید. آن را به ۷ قسمت

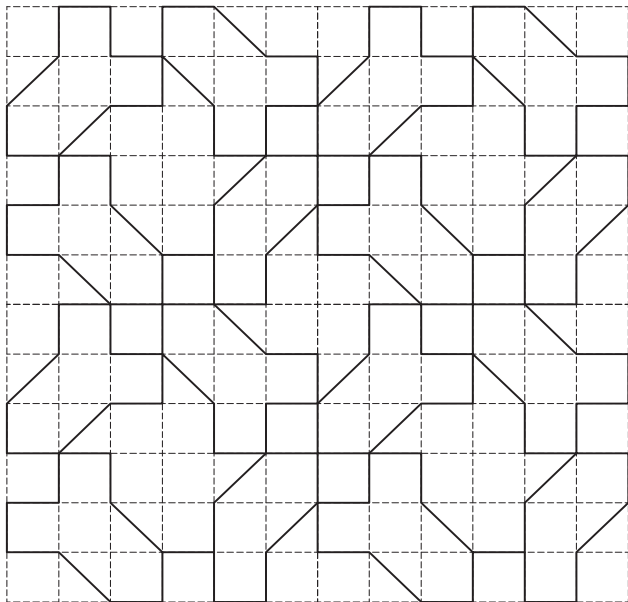
مساوی تقسیم کنید.

۳- نقش داده شده شکل ۱-۱۰ الف را در کادر  $16 \times 16$

۱۶ با دقت ترسیم کنید.

طریقه ترسیم در شکل‌های ۱-۱۰ ب و ۱-۱۰ ج نشان

داده شده است.

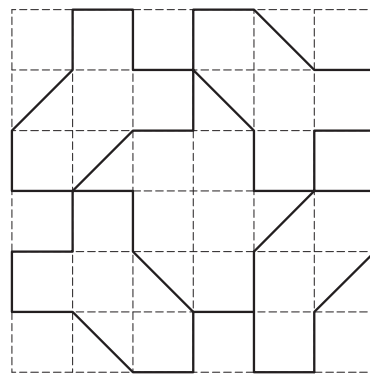


(ج)

شکل ۱-۱۰



(الف)



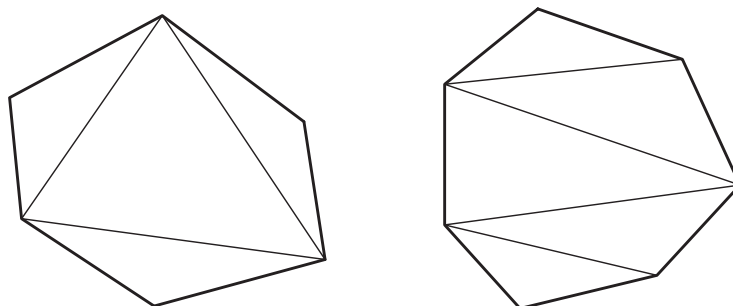
(ب)



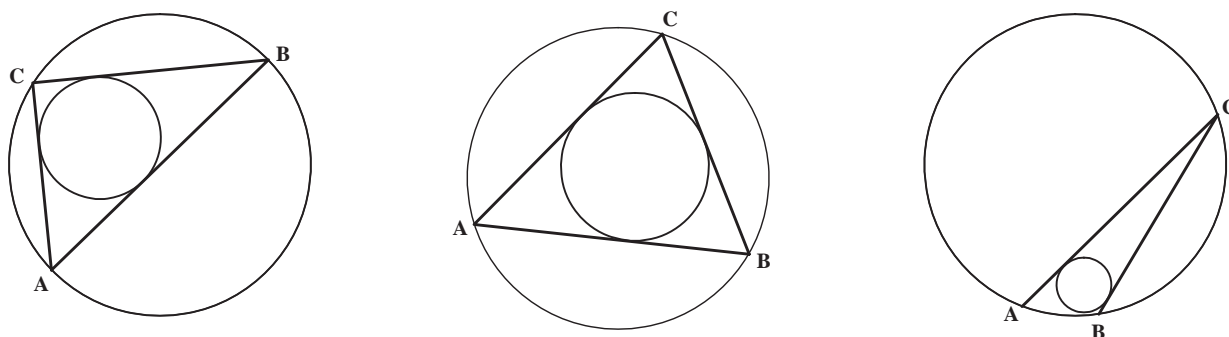
## مثلث

انواع دیگر چندضلعی فقط چندضلعی‌های منتظم هستند که هم محیط بر یک دایره و هم قابل محیط در یک دایره می‌باشند. مثلث به دلیل ویژگی‌هایش اهمیت خاصی در ترسیمات دارد. در ادامه این فصل با یادآوری تعریف مثلث و تعدادی از احکام مرتبط با آن، سعی می‌کنیم شناخت بهتری از آن به دست آوریم که در ترسیمات بعدی به کار می‌آیند.

مثلث ساده‌ترین شکل هندسی است. هر شکلی که از چند خط راست بسته تشکیل شده باشد، قابل تبدیل به تعدادی مثلث است (شکل ۱-۱۱). مثلث تنها شکلی است که همه انواع آن قابل محیط در دایره است. هم‌چنین همه انواع آن می‌توانند محیط بر یک دایره باشند (شکل ۱-۱۲). این ویژگی صرفاً مخصوص مثلث یا سه‌ضلعی است. در



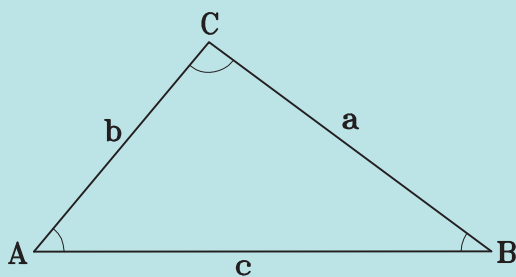
شکل ۱-۱۱



شکل ۱-۱۲

## تعریف مثلث

### یادآوری



شکل ۱-۱۳

اگر سه خط دوجه دو یکدیگر را قطع کنند، شکل ایجاد شده را مثلث می‌نامند (شکل ۱-۱۳).

هر مثلث دارای خواص زیر است:

سه زاویه داخلی و سه زاویه خارجی دارد.

مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث  $180^\circ$  درجه

است.

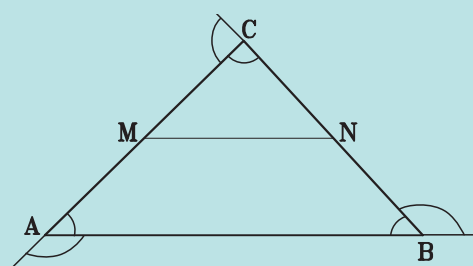
در هر مثلث اندازه زاویه خارجی با مجموع اندازه‌های دو

زاویه داخلی غیرمجاور آن، برابر است.

پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند

با ضلع سوم آن مثلث موازی و اندازه آن برابر نصف اندازه ضلع

سوم است (شکل ۱-۱۴).



شکل ۱-۱۴

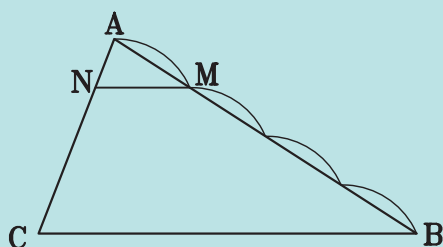
$$\frac{CN}{CB} = \frac{CM}{CA} = \frac{MN}{AB} = \frac{1}{2}$$

آنها را رسم کنید.

تمرین: مثلث ABC مفروض است در درون آن چند

مثلث می‌توان رسم کرد که یکی از اضلاع آن نصف BC باشد؟

### یادآوری



شکل ۱-۱۵

خطی که موازی یک ضلع مثلث باشد و دو ضلع دیگر

آن مثلث را قطع کند، آن دو ضلع را به یک نسبت تقسیم می‌کند

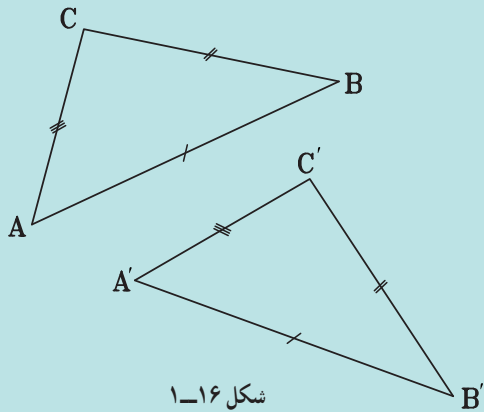
(شکل ۱-۱۵).

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{NM}{CB}$$

تمرین: در شکل ۱-۱۵ خط MN به موازات BC ترسیم

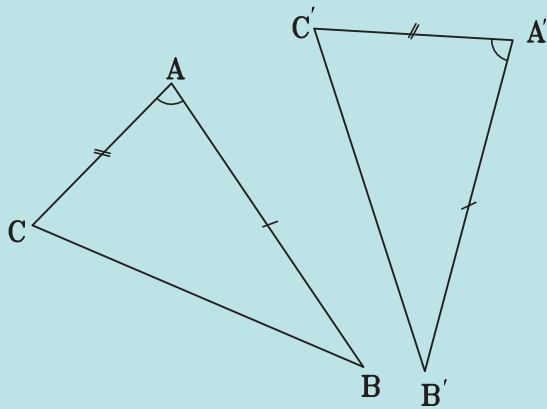
شده است. AM یک چهارم AB است. اگر طول MN، ۲ واحد

باشد ضلع BC چند واحد است؟



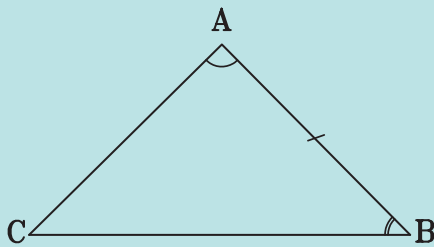
شکل ۱-۱۶

هر دو مثلث در سه حالت با هم مساویند :  
 حالت اول : تساوی سه ضلع (ض ض ض)  
 اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر، برابر باشند،  
 آن دو مثلث باهم برابرند (شکل ۱-۱۶).



شکل ۱-۱۷

حالت دوم : تساوی دو ضلع و زاویه بین آنها (ض ض ز)  
 اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه  
 بین آنها از مثلثی دیگر، برابر باشند آن دو مثلث باهم برابرند  
 (شکل ۱-۱۷).



شکل ۱-۱۸

حالت سوم : تساوی دوزاویه و ضلع بین (ز ض ز)  
 اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع  
 بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آن دو مثلث باهم برابرند  
 (شکل ۱-۱۸).

## انواع مثلث (مثلث‌های خاص)

### یادآوری

به یاد دارید که مثلث با توجه به ویژگی اضلاع یا زوایایش به سه نوع ویژه نام‌گذاری می‌شود.

الف) مثلث قائم‌الزاویه  
ب) مثلث متساوی‌الساقین  
ج - مثلث متساوی‌الاضلاع

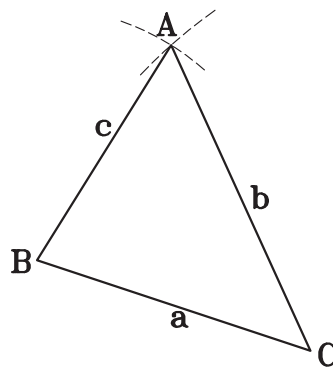
واضح است که مثلثی که هیچ‌یک از ویژگی‌های سه نوع مثلث فوق را ندارد، مثلث مختلف‌الاضلاع است.

### ترسیم مثلث

برای ترسیم مثلث به اطلاعاتی نیاز داریم که در تساوی دو مثلث لازم است.

الف) داشتن سه ضلع: برای ترسیم مثلثی با داشتن سه ضلع مراحل زیر می‌باید طی شود:

- ۱- ترسیم خطی به طول یکی از اضلاع معلوم
- ۲- ترسیم قوسی به شعاع یکی دیگر از سه ضلع و به مرکز یک سر پاره‌خط ضلع اول
- ۳- ترسیم قوسی دیگر به شعاع طول ضلع سوم و به مرکز سر دیگر پاره‌خط ضلع اول
- ۴- اتصال نقطه تقاطع دو قوس به دوسر پاره‌خط یعنی ضلع اول (مطابق شکل ۱۹-۱).



شکل ۱۹-۱

تمرین: مثلثی به اضلاع ۳۴، ۵۳ و ۴۱ میلی‌متر را رسم کنید.

توجه داشته باشید که ترسیم خوب یعنی ترسیمی صحیح با حداکثر دقت، نظافت و سرعت.

ب) داشتن دو زاویه و ضلع بین آنها: با توجه به راه حل بالا آیا می‌توانید از طریق داشتن دو زاویه و ضلع بین مثلث را ترسیم کنید؟

ترسیم چنین مثلثی نیز آسان است. ابتدا خطی به طول ضلع معلوم می‌کشیم، هریک از دوسر ضلع را رأس یکی از زوایای معلوم قرار داده و زاویه را ترسیم می‌کنیم. محل تقاطع دو ضلع زاویه‌ها رأس سوم مثلث را می‌سازد.

تمرین: در یک مثلث متساوی‌الساقین ضلع قاعده ۶ سانتی‌متر و زاویه رأس  $30^\circ$  درجه است، مثلث را ترسیم کنید. چگونه عمل می‌کنید؟

سه ضلع مثلث را نداریم. بنابراین باید از طریق دو زاویه و ضلع بین عمل کنیم.

آیا دو زاویه بین دوساق و قاعده مثلث را داریم؟  
آیا می‌شود این دو زاویه را پیدا کرد؟  
دقت کنید که چگونه می‌توانیم با استفاده از قضایایی که درباره مثلث می‌دانیم به اندازه دو زاویه پی‌بیریم.

الف) مجموع زوایای داخلی مثلث  $180^\circ$  درجه است.  
ب) در مثلث متساوی‌الساقین زوایای بین قاعده و هریک از دو ساق باهم برابرند.

$$\text{پس } 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ \text{ مجموع دو زاویه}$$

$$150^\circ : 2 = 75^\circ \text{ اندازه هریک از دو زاویه}$$

حال دو زاویه و ضلع بین دو زاویه مثلث را داریم و مثلث قابل ترسیم است.

ج) داشتن دو ضلع و زاویه بین آنها: به نظر می‌رسد ترسیم مثلثی با داشتن دو ضلع و زاویه معلوم بین دو ضلع بسیار ساده باشد. آن را با طول اضلاع دلخواه و زاویه دلخواه رسم کنید.

تمرین: مثلثی رسم کنید که یک زاویه آن  $45^\circ$  درجه، یکی از اضلاع مجاور به این زاویه ۳۲ میلی‌متر و ضلع دیگر مجاور به این زاویه ۴۸ میلی‌متر باشد.

## تمرین منزل

مثلث‌های زیر را ترسیم کنید :

یک مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع  $\frac{3}{5}$  سانتی‌متر  
 یک مثلث متساوی‌الساقین با طول ساق  $\frac{6}{2}$  سانتی‌متر و  
 زاویه بین دو ساق  $60^\circ$

یک مثلث متساوی‌الساقین با طول ساق ۶ و زاویه بین  
 قاعده و ساق  $30^\circ$

یک مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر ۵ و یک زاویه  $40^\circ$   
 درجه

یک مثلث قائم‌الزاویه با طول ضلع  $\frac{3}{5}$  و یک ضلع  $\frac{4}{4}$

یک مثلث قائم‌الزاویه با طول وتر ۵ و یک ضلع ۴

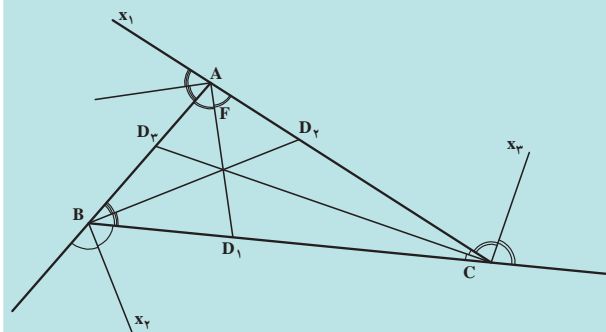
## خطوط اصلی و مهم در مثلث

### یادآوری

نیمساز

پاره خطی که زوایای داخلی هر مثلث را به دو قسمت  
 مساوی تقسیم می‌کند، نیمساز داخلی مثلث می‌نامند.

همچنین خط‌هایی که زوایای خارجی هر مثلث را به دو  
 قسمت مساوی تقسیم می‌کند، نیمساز خارجی مثلث نامیده می‌شود  
 (شکل ۱-۲).



شکل ۱-۲

## تمرین

۱- از مثلث ABC اطلاعات زیر را داریم :

زاویه A  $60^\circ$  درجه طول ضلع AB ۴ سانتی‌متر و طول  
 نیمساز زاویه A ۳ سانتی‌متر. آیا می‌توانیم مثلث را ترسیم کنیم؟  
 چگونه؟ آن را رسم کنید.

۲- مثلثی رسم کنید که اضلاع آن ۲۳ و ۳۴ و ۴۵ میلی‌متر  
 باشد. نیمسازهای زوایای داخلی آن را ترسیم کنید. آیا نیمسازها  
 یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند؟

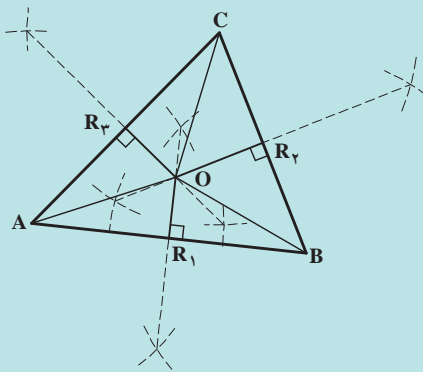
اگر چنین نیست یک بار دیگر با دقت بیشتری آن را انجام  
 دهید. زیرا :

نیمسازهای داخلی یک مثلث یکدیگر را در یک نقطه  
 قطع می‌کنند یا هم رسند.

## عمود منصف

### یادآوری

عمود منصف هر ضلع مثلث، خطی است که از وسط ضلع  
 می‌گذرد و بر آن عمود است (شکل ۱-۲۱).



شکل ۱-۲۱

تحقیق کنید زاویه بین نیمسازهای داخلی و خارجی هر  
 رأس مثلث چند درجه است؟

اضلاع آن را با دقت ترسیم کنید. آیا سه ارتفاع یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند؟

این نقطه در داخل مثلث است یا در خارج آن؟  
در رابطه با ارتفاع‌های مثلث توجه کنید.  
ارتفاع‌های یک مثلث هم‌رسند.

می‌توانید مثلی رسم کنید که نقطه تقاطع ارتفاع‌های آن در خارج مثلث باشد؟

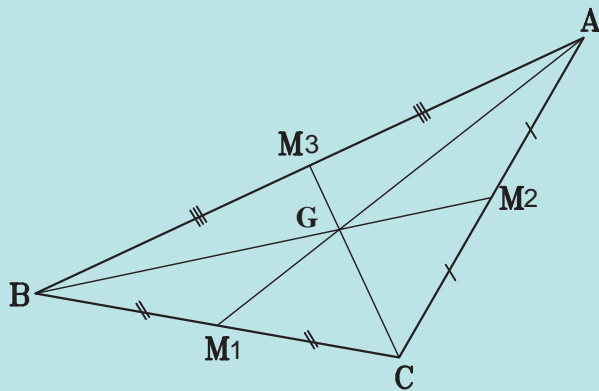
چه نوع مثلی است که نقطه تقاطع ارتفاع‌های آن بر یک رأس آن واقع شده است؟

### میان‌ه

#### یادآوری

میان‌ه مثلث پاره‌خطی است که یک سر آن رأس و سر دیگر آن وسط ضلع مقابل به آن رأس باشد.

در شکل ۱-۲۳ اگر نقاط  $M_1$ ،  $M_2$  و  $M_3$  به ترتیب در وسط اضلاع  $AC$ ،  $BC$  و  $AB$  باشند، پاره‌خط‌های  $AM_1$  و  $BM_2$  و  $CM_3$  سه میان‌ه مثلث  $ABC$  هستند.



شکل ۱-۲۳

مثلی با ابعاد دلخواه رسم کنید.

با تقسیم هر ضلع آن به دو قسمت مساوی، وسط هر ضلع را به دست آورید.

آن‌گاه میان‌ه‌های مثلث را ترسیم کنید.

با دقتی که در ترسیم داشته‌اید حتماً میان‌ه‌ها یکدیگر را در

تمرین: یک مثلث رسم کنید. عمودمنصف‌های هر ضلع را ترسیم نمایید.

آیا عمودمنصف‌ها یکدیگر را در یک نقطه قطع کرده‌اند؟  
اگر صحیح و دقیق ترسیم کرده باشید. هر سه یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند. زیرا:

سه عمودمنصف اضلاع مثلث هم‌رسند.

فاصله نقطه  $O$  محل تقاطع عمودمنصف‌ها را تا رأس‌های مثلث اندازه بگیرید. آیا باهم مساویند؟

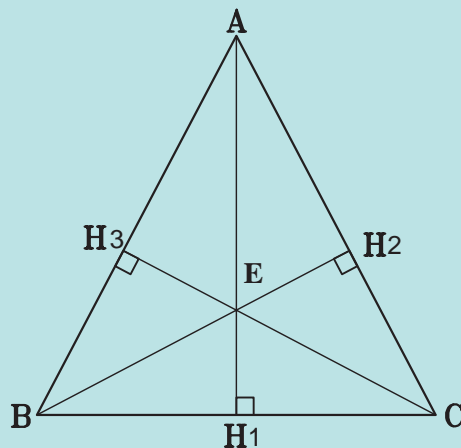
می‌توانید به مرکز  $O$  و شعاع  $AO$  یک دایره رسم کنید. آیا این دایره از دو رأس دیگر مثلث گذشته است؟

تمرین: عمودمنصف‌های یک مثلث قائم‌الزاویه را ترسیم کنید و مشابه تمرین بالا عمل کنید.

### ارتفاع

#### یادآوری

ارتفاع‌های مثلث: ارتفاع هر ضلع مثلث پاره‌خطی است عمود بر آن ضلع، که یک سر آن پای عمود و سر دیگر آن رأس مقابل به آن ضلع است. در شکل ۱-۲۲  $AH_1$ ،  $BH_2$ ،  $CH_3$  سه ارتفاع مثلث  $ABC$  است.



شکل ۱-۲۲

تمرین: مثلی با اندازه‌های دلخواه رسم کنید. ارتفاع

یک نقطه قطع کرده‌اند. زیرا:

میانها در هر مثلث هم‌رسند، یعنی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

حال مثلث دیگری تا حد امکان بزرگ رسم کنید و میانهای آن را ترسیم کنید. آن‌گاه هر میانها را با روشی که در تقسیم یک خط آموخته‌اید، به سه قسمت مساوی تقسیم کنید. به چه نتیجه‌ای رسیده‌اید؟

آیا یکی از نقاط تقسیم سه میانها نقطه تقاطع سه میانها نیست؟

حتماً چنین است. زیرا:

سه میانها در هر مثلث هم‌رسند. نقطه هم‌رس، هر میانها را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم می‌کند، در شکل ۱-۲۳ سه میانها مثلث ABC در نقطه G هم‌رسند و  $AG=2GM_1$ ،  $BG=2GM_2$  و  $CG=2GM_3$  است.

تمرین: می‌خواهیم مثلث ABC را ترسیم کنیم اما اطلاعات ما از این مثلث عبارت است از:

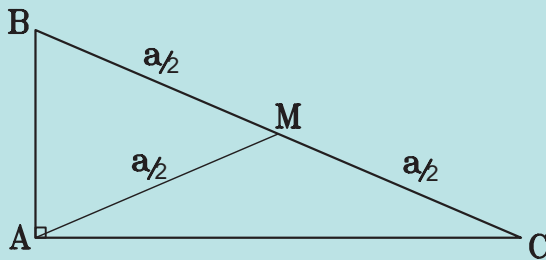
AB ۴۳ میلی‌متر، AC ۳۴ میلی‌متر و میانها ضلع AB یعنی AM ۲۸ میلی‌متر، آیا می‌توانیم مثلث را ترسیم کنیم؟ کمی فکر کنید و آن را ترسیم کنید.

تمرین: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یکی از اضلاع آن ۳ و ضلع دیگر آن ۴ سانتی‌متر باشد. ترسیم را با دقت انجام دهید بعد از ترسیم وتر آن را اندازه بگیرید. آیا قضیه فیثاغورث در مورد آن صدق می‌کند؟ می‌توانید بدون اندازه‌گیری ارتفاع وارد بر وتر آن را اندازه بگیرید؟ از مساحت مثلث قائم‌الزاویه کمک بگیرید.

### یادآوری

در هر مثلث قائم‌الزاویه میانها وارد بر وتر، نصف وتر است. در شکل ۱-۲۵ میانها وارد بر وتر BC است. بنابراین

$$AM = \frac{BC}{2} \text{ و } AM = BM = CM \text{ است.}$$



شکل ۱-۲۵

تمرین: مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر آن ۴ سانتی‌متر و یکی از اضلاع آن ۲ سانتی‌متر باشد.

### برخی از ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین

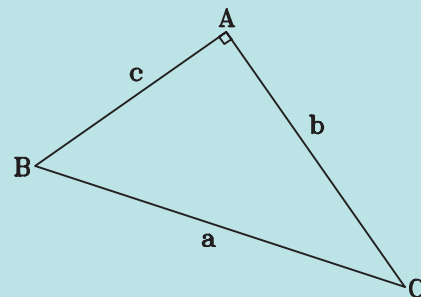
#### یادآوری

در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه رأس، ارتفاع و میانها وارد بر قاعده و عمود منصف قاعده برهم منطبق‌اند. در شکل ۱-۲۶،  $\angle B = \angle C$  و  $\overline{AD}$  نیمساز زاویه رأس است. بنابراین AD ارتفاع و میانها وارد بر قاعده و همچنین عمود منصف قاعده است.

### برخی از ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه

#### یادآوری

قضیه فیثاغورث: در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر با مجموع مربع دو ضلع برابر است. در شکل ۱-۲۴ مثلث ABC قائم‌الزاویه است. بنابراین  $BC^2 = AB^2 + AC^2$  است.

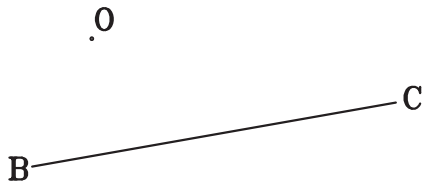


شکل ۱-۲۴

## تمرین منزل

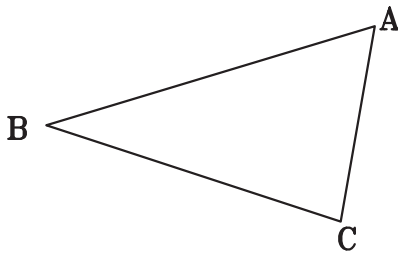
۱- چند مثلث قائم الزاویه می‌توان رسم کرد. که یکی از سه ضلع آن دو برابر ضلع دیگر باشد. یکی را با ابعاد دلخواه رسم کنید.

۲- در شکل ۱-۲۸ ضلع  $BC$  و همچنین نقطه  $O$  هم‌مرسی سه میانه از مثلث  $ABC$  مشخص است، رأس  $A$  از مثلث را مشخص کنید.



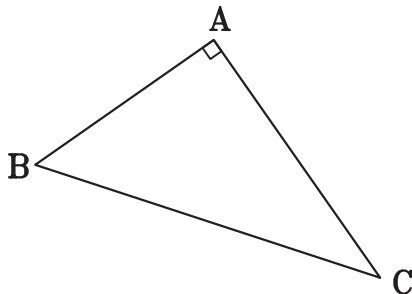
شکل ۱-۲۸

۳- در شکل ۱-۲۹ مثلث  $ABC$  را به چهار مثلث طوری تقسیم کنید که رأس  $A$  در آنها مشترک و مساحت چهار مثلث برابر باشد.

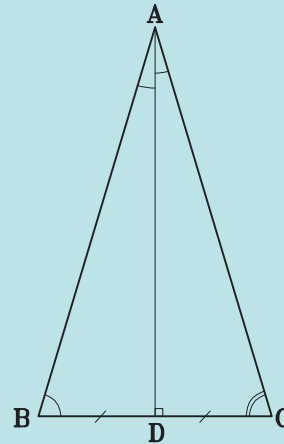


شکل ۱-۲۹

۴- در شکل زیر در مثلث قائم الزاویه  $ABC$  با رسم ارتفاع  $AH$ ، سه مثلث قائم الزاویه متشابه ایجاد می‌شود. آن سه مثلث را مشخص کنید و تناسب بین اضلاع آنها را بنویسید.

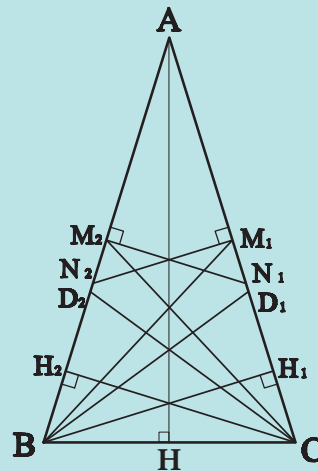


شکل ۱-۳۰



شکل ۱-۲۶

در مثلث متساوی الساقین، اندازه نیمسازهای دو زاویه مجاور به قاعده باهم، اندازه ارتفاع‌ها و میانه‌های وارد بر ساق‌ها باهم، و اندازه عمود منصف‌های دوساق که بین دو ساق محصور است باهم، برابرند (شکل ۱-۲۷).



شکل ۱-۲۷

تمرین: از یک مثلث متساوی الساقین طول قاعده و ارتفاع وارد بر ساق را داریم. آیا مثلث قابل ترسیم است؟ اگر قاعده آن ۵ و ارتفاع وارد بر ساق ۴ سانتی متر باشد مثلث را ترسیم کرده و ارتفاع، نیمساز، میانه و عمود منصف آن را ترسیم کنید.



### تقارن

هدف‌های رفتاری : پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :

- ۱- با به کارگیری مفهوم تقارن قرینه اشکال را نسبت به محور تقارن تعیین شده رسم نماید.
- ۲- با استفاده از مفهوم تقارن مرکزی قرینه هر شکلی را نسبت به مرکز تقارن تعیین شده رسم نماید.
- ۳- با تشخیص تقارن در اشکال مختلف، مرکز یا محورهای تقارن آنها را مشخص سازد.

### تقارن

شوند. این موضوع در شکل بسیاری از پدیده‌های مادی دیده می‌شود. به تصاویر زیر نگاه کنید. آیا این مفهوم را می‌توانید در آنها پیدا کنید؟

در طبیعت به کرات با شکل‌هایی مواجه شده‌ایم که به نظر می‌رسد می‌توانند به دو شکل کاملاً مساوی و مشابه هم تقسیم



شکل ۱-۲

خطی که شکل را به دو بخش مشابه هم یا مساوی تقسیم می‌کند محور تقارن آن نامیده می‌شود. آیا می‌توانید محور تقارن تصاویر صفحه قبل را مشخص کنید؟  
 یک شکل می‌تواند چند محور تقارن داشته باشد. در شکل ۲-۲ چند محور تقارن تشخیص می‌دهید؟



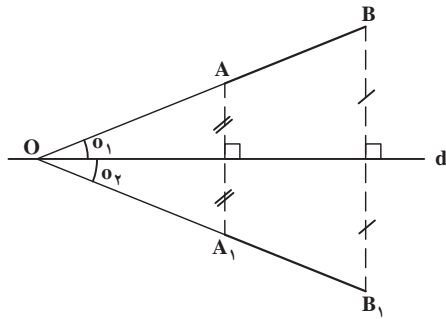
شکل ۲-۲

تقارن در پدیده‌های طبیعی در مقیاس‌های خرد و کلان، بسیار دیده می‌شود. انسان نیز که آموزه‌های اصلی و مهم خود را از طبیعت و به عبارت دقیق‌تر از خداوند، خالق حکیم عالم می‌گیرد در مصنوعات ساخت خود از تقارن بهره زیادی برده است. تقارن یکی از آسان‌ترین راه‌ها برای ایجاد ایستایی در احجام است همچنان که یکی از راه‌های ساده ایجاد تعادل بصری در شکل و فرم است. از آن‌رو در عرصه هنر از جمله در معماری بسیار دیده می‌شود.



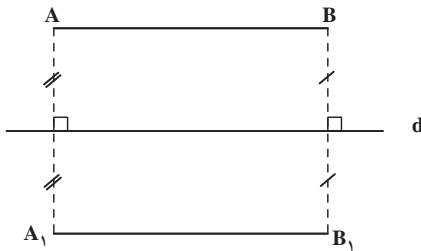
شکل ۲-۳

هر خط غیر موازی با محور تقارن، و قرینه آن، با آن محور هم‌رسند و با محور تقارن زاویه‌های مساوی ایجاد می‌کنند. در شکل ۲-۶  $\overline{A_1B_1}$  قرینه  $\overline{AB}$  نسبت به محور تقارن  $d$  است. اگر این دو خط را امتداد دهیم، در نقطه  $O$  واقع بر محور تقارن، هم‌رسند و  $\angle O_1 = \angle O_2$  است.



شکل ۲-۶

هر خط موازی با محور تقارن، و قرینه آن، با آن محور موازی هستند و فاصله آن دو، تا محور، برابر است. در شکل ۲-۷ خط  $A_1B_1$  قرینه محوری خط  $AB$  است. چون  $AB$  موازی محور  $d$  است، بنابراین خط  $A_1B_1$  هم، موازی آن محور است و فاصله هر دو خط تا محور یکسان است.



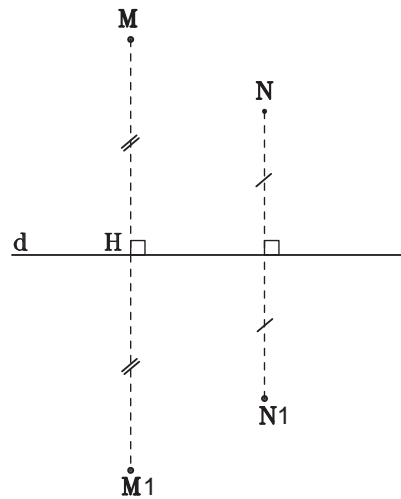
شکل ۲-۷

قرینه محوری هر شکل هندسی با خود شکل برابر است در شکل ۲-۸ قرینه محوری هر شکل نسبت به محور  $d$  رسم شده است. بنابراین  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$  و  $\angle O = \angle O_1$  است.

درک مفهوم تقارن برای کسی که با طراحی و ترسیم نقشه‌های معماری سروکار دارد لازم و مهم است. حال به قضایایی مربوط به تقارن توجه کنید :

## تقارن محوری

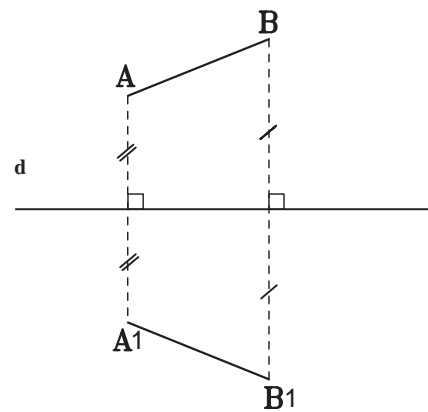
خط  $d$  و نقطه  $M$  از یک صفحه در شکل ۲-۴ مفروض است. اگر از نقطه  $M$  عمود  $MH$  را به خط  $d$  رسم کنیم و به اندازه خودش  $(MH = M_1H)$  امتداد دهیم تا نقطه  $M_1$  به دست آید، نقطه را قرینه محوری نقطه  $M$  نسبت به محور  $d$  می‌نامند. این تقارن را تقارن محوری و خط  $d$  را محور تقارن می‌نامند.



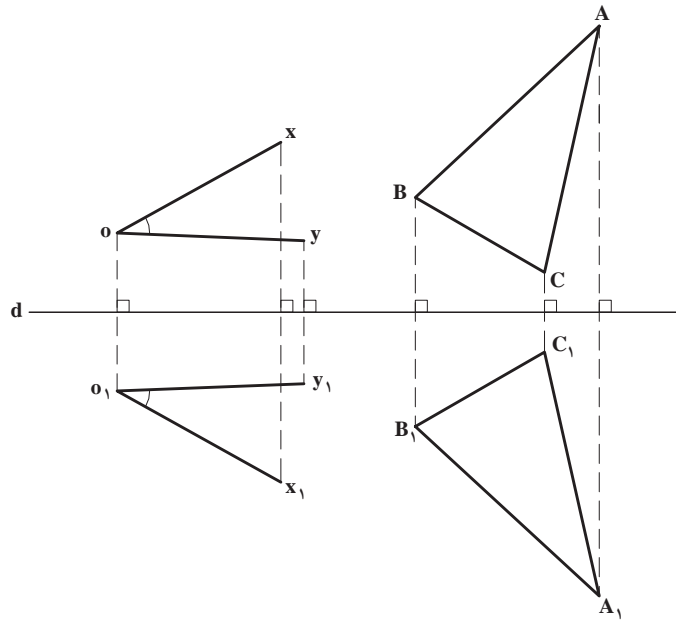
شکل ۲-۴

تحقیق کنید  $N_1$  قرینه محوری نقطه  $N$  هست یا خیر؟

قرینه محوری هر پاره خط، با آن پاره خط برابر است. در شکل ۲-۵  $\overline{A_1B_1}$  قرینه  $\overline{AB}$  نسبت به محور تقارن  $d$  است. بنابراین  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$  است.

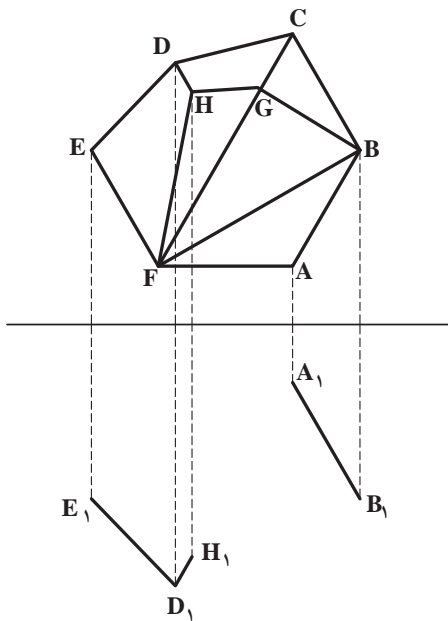


شکل ۲-۵

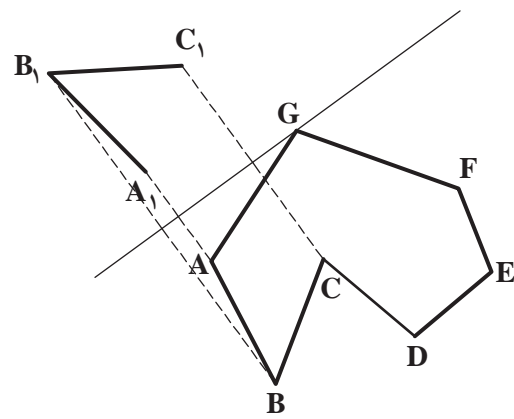


شکل ۲-۸

تمرین : قرینه شکل‌های زیر را نسبت به محور تقارن مشخص شده ترسیم کنید.



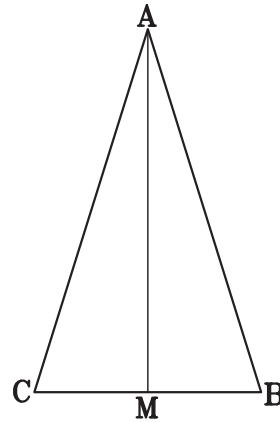
شکل ۲-۱۰



شکل ۲-۹

## محور تقارن یک شکل هندسی

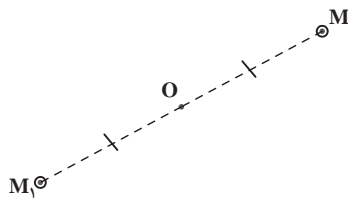
اگر خطی یک شکل هندسی را طوری به دو نیم تقسیم کند که هر نیمه شکل، قرینه محوری نیمه دیگر آن شکل نسبت به آن خط باشد، آن خط را محور تقارن آن شکل می‌نامند. در شکل ۲-۱۱،  $\overline{AM}$  میانه وارد بر قاعده مثلث متساوی‌الساقین  $\triangle ABC$  که نیمساز، ارتفاع و عمودمنصف هم هست، محور تقارن آن مثلث است. زیرا دو نیمه آن مثلث نسبت به  $\overline{AM}$  قرینه محوری هستند.



شکل ۲-۱۱

## تقارن مرکزی

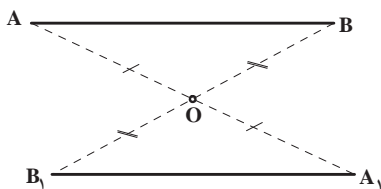
اگر از نقطه  $M$  به نقطه  $O$  وصل کنیم و به اندازه خودش  $(MO)$  امتداد دهیم تا نقطه  $M_1$  به دست آید، در این صورت نقطه  $M_1$  را قرینه مرکزی نقطه  $M$  نسبت به مرکز تقارن  $O$  می‌نامیم. بنابراین نقطه  $M$  هم، قرینه مرکزی نقطه  $M_1$  نسبت به مرکز تقارن  $O$  است (شکل ۲-۱۳).



شکل ۲-۱۳

دانستید که اگر یک نقطه را به مرکز تقارن وصل کرده و به اندازه خودش امتداد دهیم قرینه نقطه به دست می‌آید. هر شکلی از تعدادی نقطه تشکیل شده است. بنابراین اگر این عمل را در مورد هر نقطه یک شکل تکرار کنیم قرینه شکل نسبت به مرکز تقارن حاصل می‌شود.

قرینه مرکزی هر پاره‌خط، پاره‌خطی است مساوی و موازی با آن پاره‌خط. در شکل ۲-۱۴  $\overline{A_1B_1}$  قرینه  $\overline{AB}$  نسبت به مرکز تقارن  $O$  است که با هم مساوی و موازی هستند.



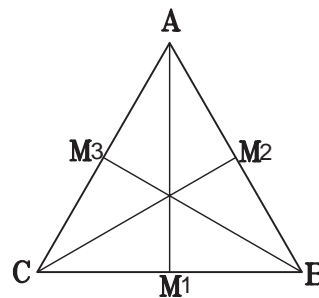
شکل ۲-۱۴

تمرین: قرینه شکل ۲-۱۵ را نسبت به مرکز تقارن  $O$  ترسیم کنید. به شکل قرینه توجه کنید، آیا به نظر نمی‌رسد که با شکل اول مساوی باشد؟

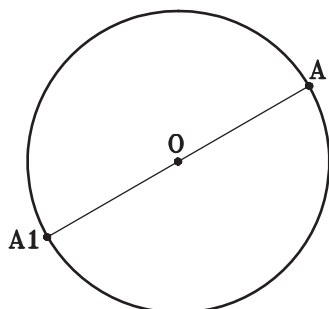
## تمرین

۱- یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک محور تقارن آن را رسم کنید. آیا آن چه رسم کرده‌اید تنها محور تقارن آن است؟ می‌بینید که مثلث متساوی‌الاضلاع سه محور تقارن دارد. پس شکل‌هایی هست که بیش از یک محور تقارن دارد.  
۲- یک دایره رسم کنید و محور تقارن آن را ترسیم کنید. دایره چند محور تقارن دارد؟

هر قطر دایره یک محور تقارن آن است. دایره بی‌نهایت قطر دارد، بنابراین دایره تنها شکلی است که بی‌نهایت محور تقارن دارد.



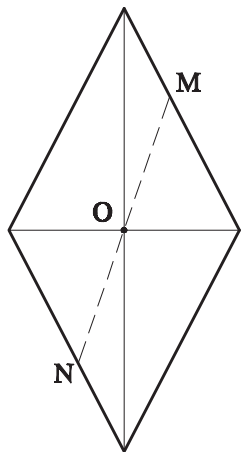
شکل ۲-۱۲



شکل ۲-۱۷

شکل ۲-۱۸ یک لوزی است که اقطار آن ترسیم شده است. مشاهده می‌کنید که اقطار لوزی محورهای تقارن آن نیز هستند. حال نقطه M را روی یکی از اضلاع آن انتخاب کنید و از آن به مرکز لوزی وصل نمایید، آن را ادامه دهید تا ضلع روبه‌روی آن را در N قطع کند. دو پاره خط OM و ON را اندازه بگیرید آیا باهم مساویند؟

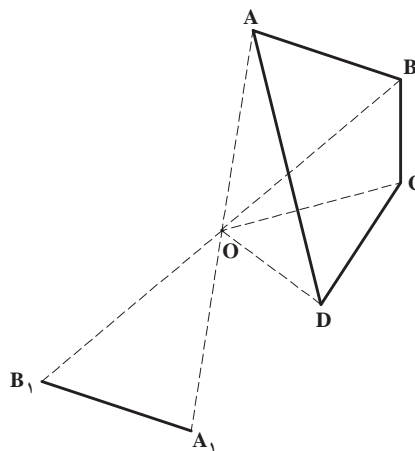
نقطه دیگری را امتحان کنید آیا به همین نتیجه می‌رسید؟ بنابراین محل تقاطع اقطار لوزی مرکز تقارن آن هم هست.



شکل ۲-۱۸

به قضیه زیر توجه کنید :

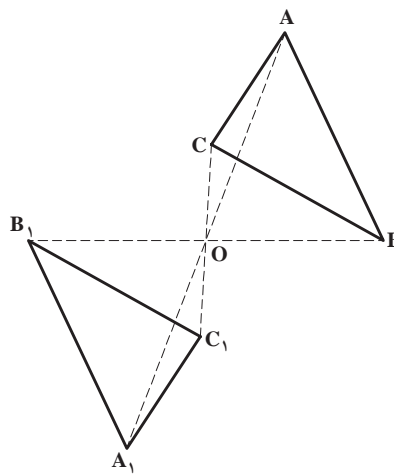
هر شکل هندسی که حداقل دارای دو محور تقارن عمودبرهم باشد، دارای مرکز تقارن است و محل برخورد آن دو محور، مرکز تقارن آن شکل هندسی است. در شکل ۲-۱۹ دایره دارای بی‌نهایت دو محور عمودبرهم است که محل برخورد آنها (مرکز دایره) مرکز تقارن آن دایره است.



شکل ۲-۱۵

به قضیه زیر توجه کنید :

قرینه مرکزی هر شکل هندسی، با خود آن شکل هندسی برابر است. در شکل ۲-۱۶ قرینه مرکزی مثلث  $\Delta ABC$  نسبت به مرکز تقارن O، مثلث  $\Delta A_1B_1C_1$  است و  $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$  است.

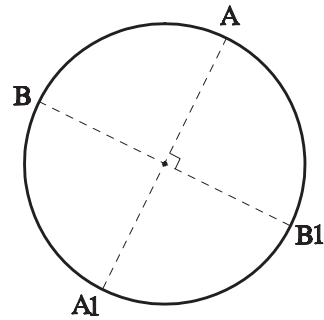


شکل ۲-۱۶

### مرکز تقارن یک شکل هندسی

اگر قرینه هر نقطه از یک شکل هندسی نسبت به نقطه O در صفحه شکل، نقطه‌ای از خود شکل باشد. نقطه O را مرکز تقارن آن شکل هندسی می‌نامند. در شکل ۲-۱۷ نقطه O مرکز دایره، مرکز تقارن دایره است. زیرا قرینه هر نقطه از دایره نسبت به نقطه O، واقع بر دایره است.

از تقارن مرکزی هم مشابه تقارن محوری در معماری استفاده می‌شود (شکل ۲-۲۰).



شکل ۲-۱۹

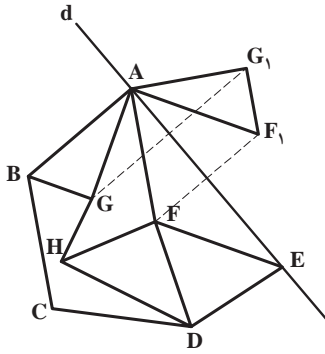


شکل ۲-۲۰

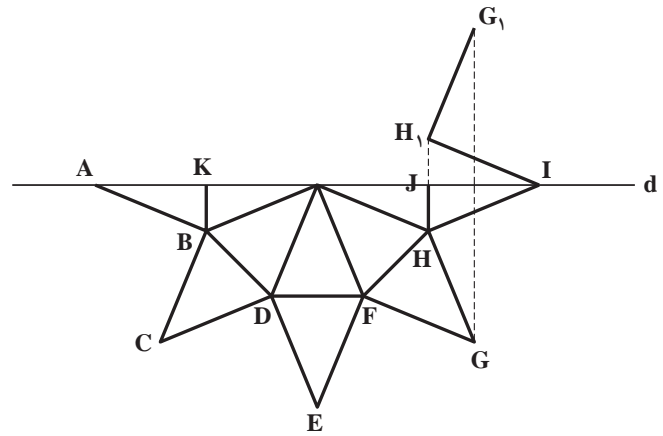


## تمرین منزل

۱- قرینه هریک از شکل های ۲-۲۱ و ۲-۲۲ را نسبت به محور تقارن مشخص شده d تکمیل کنید.

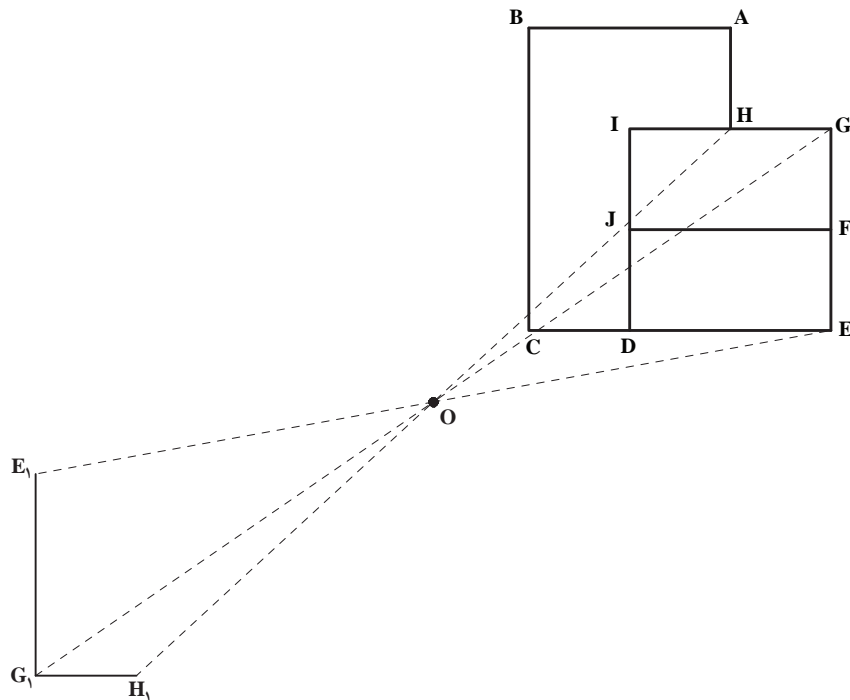


شکل ۲-۲۲



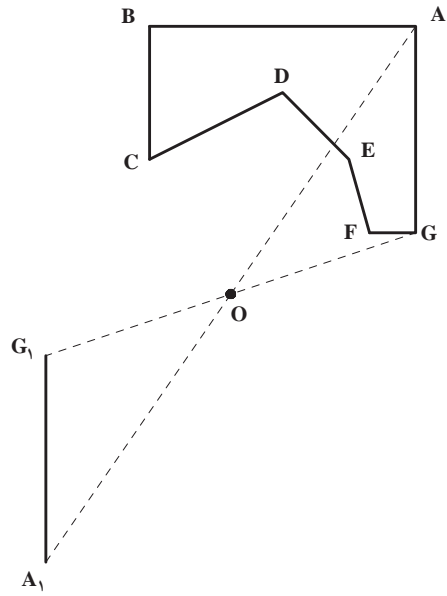
شکل ۲-۲۱

۲- قرینه هریک از شکل های ۲-۲۳ و ۲-۲۴ را نسبت به مرکز تقارن داده شده (O) تکمیل کنید.



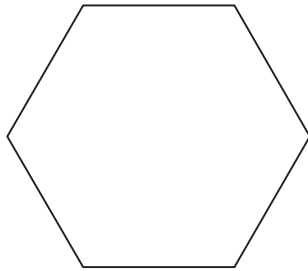
شکل ۲-۲۳



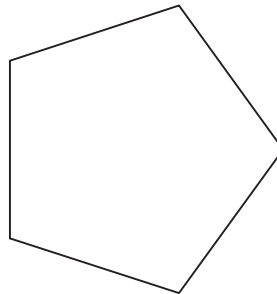


شکل ۲-۲۴

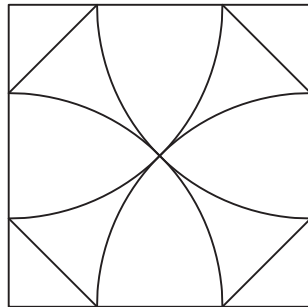
۳- در هریک از شکل‌های زیر مرکز یا محور تقارن آن را مشخص کنید. در صورت متعدد بودن محورهای تقارن همه را مشخص کنید.



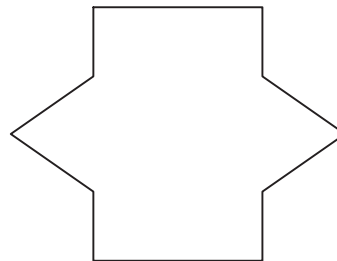
الف



ب



ج



د

شکل ۲-۲۵