

## سیمای فصل دوم

### انبساط و انقباض اجسام

۲-۱- انبساط خطی، سطحی و	۲- انبساط و انقباض اجسام
حجمی	
۲-۲- روابط انبساط خطی،	
سطحی و حجمی	
۲-۲-۱- انبساط ظاهری و	
حقیقی مایعات	
۲-۲-۲- تعیین انبساط	
سطوح سوراخ دار و	
حجم‌های توخالی	
۲-۳-۱- انقباض در حالت	
مذاب	
- انقباض حین انجماد	
(خمیری)	
۲-۳-۲- انقباض در حالت	
جامد	
۲-۳-۳- تغییرات چگالی	
نسبت به انبساط و انقباض	
اجسام	

## انبساط و انقباض اجسام

**تعریف انبساط :** هنگامی که اجسام حرارت داده می‌شوند ابعاد و در نتیجه حجم آنها افزایش پیدا می‌کند، این افزایش در ابعاد و حجم اجسام را انبساط می‌گویند.

**تعریف انقباض :** هنگامی که اجسام تحت سرما یا برودت قرار می‌گیرند، ابعاد و در نتیجه حجم آنها کاهش پیدا می‌کند، این کاهش در ابعاد و حجم اجسام را انقباض می‌گویند.

مثال : اگر یک میله فلزی را از درجه حرارت محیط ( $25^{\circ}\text{C}$ ) حرارت دهیم، هرچه درجه حرارت افزایش می‌یابد، طول میله افزایش می‌یابد، برعکس اگر درجه حرارت میله مجدد تا درجه حرارت محیط کاهش داده شود، با کاهش درجه حرارت طول میله کوتاه‌تر می‌شود و به اندازه اولیه برمی‌گردد. البته این تغییر طول در انبساط و انقباض مقدار کمی می‌باشد.

مثال دیگر در هنگام سرد شدن مذاب در قالب می‌باشد، به این صورت که با کاهش درجه حرارت، مذاب منقبض شده تا درجه حرارت انجماد، همچنین در هنگام انجماد به علت تبدیل حالت مایع به جامد نیز مجدد انقباض حاصل شده که به انقباض حین انجماد معروف است. از طرف دیگر جامد ایجاد شده نیز با کاهش درجه حرارت تا رسیدن به درجه حرارت محیط ( $25^{\circ}\text{C}$ ) مجدد منقبض می‌شود. بنابراین در هنگام انجماد مذاب در قالب معمولاً سه نوع انقباض صورت می‌گیرد که این انقباض‌ها معمولاً عیوبی را در قطعه ریختگی ایجاد می‌کنند. بنابراین باید در کلیه مراحل ریخته‌گری، مدلسازی، تکنولوژی قالب و انجماد و همچنین اثرات درجه حرارت فوق ذوب، ترکیب آلیاژ و نحوه انجماد آن و میزان انقباض ایجاد شده در نظر گرفته شود تا بتوان قطعه‌ای با کم‌ترین عیوب به دست آورد، لذا لازم است جهت طراحی، ابتدا بتوان مقادیر انبساط و انقباض محاسبه نمود.

### ۱-۲- انبساط خطی، سطحی و حجمی :

اگر تمام نقاط یک جسم را به‌طور یکنواخت حرارت دهیم نه تنها طول آن افزایش می‌یابد بلکه سطوح مختلف و حجم آن نیز افزایش می‌یابد که در مورد تمام حالات ماده (جامد، مایع، گاز) به غیر از چند مورد استثناء این پدیده اتفاق می‌افتد، اما در مورد جامدات این افزایش در طول، سطح و حجم مقدار کمی می‌باشد و بستگی به ابعاد اولیه، جنس و میزان درجه حرارت آنها دارد. در مورد مایعات و گازها افزایش طول، سطح و حجم یا به عبارت دیگر انبساط خطی یا طولی، انبساط سطحی و انبساط حجمی بیشتر می‌باشد. علت اصلی این پدیده این است که در اثر افزایش درجه حرارت جسم، انرژی اتم‌ها و مولکول‌های جسم افزایش یافته و در نتیجه دامنه حرکت و ارتعاشات آنها زیاد می‌شود، که این افزایش دامنه حرکت و ارتعاشات نیاز به فضای بیشتری دارد و در نتیجه ابعاد جسم بزرگ‌تر شده و به عبارت دیگر منبسط می‌شود.

انبساط خطی متناسب با طول اولیه جسم ( $L_0$ ) و درجه حرارت آن ( $^{\circ}\text{C}$ ) می‌باشد، علاوه بر این دو عامل،

انبساط خطی به ضریب انبساط خطی که متناسب با جنس جسم و فاصله دمایی می باشد بستگی دارد. که به طور خلاصه ازدیاد واحد طول به ازای افزایش یک واحد درجه حرارت ( $^{\circ}\text{C}$  یا  $^{\circ}\text{K}$ ) را ضریب انبساط خطی می نامند که آن را با  $\alpha$  نشان می دهند.

به همین ترتیب انبساط سطحی جسم متناسب با سطح اولیه و درجه حرارت جسم می باشد. علاوه بر این دو عامل، انبساط سطحی به ضریب انبساط سطحی که متناسب با جنس جسم و فاصله دمایی است بستگی دارد، که بنا به تعریف ازدیاد واحد سطح جسم به ازای افزایش یک واحد درجه حرارت ( $^{\circ}\text{C}$  یا  $^{\circ}\text{K}$ ) را ضریب انبساط سطحی می نامند که آن را با  $\beta$  نشان می دهند. به همین ترتیب انبساط حجمی متناسب با حجم اولیه و درجه حرارت جسم می باشد علاوه بر این دو عامل، انبساط حجمی به ضریب انبساط حجمی که متناسب با جنس جسم و فاصله دمایی می باشد، بستگی دارد و بنا به تعریف، ازدیاد حجم جسم به ازای افزایش یک واحد درجه حرارت ( $^{\circ}\text{C}$  و  $^{\circ}\text{K}$ ) را ضریب انبساط حجمی می گویند و آن را با  $\gamma$  نشان می دهند.

با توجه به این که این ضرایب متناسب با فاصله دمایی (از  $\theta_1$  تا  $\theta_2$ ) می باشند، معمولاً مقدار متوسط آنها را در آن فاصله دمایی در نظر می گیرند.

## ۲-۲- روابط انبساط خطی، سطحی و حجمی :

انبساط خطی : یک میله فلزی را در نظر می گیریم اگر فرض کنیم که در صفر درجه سانتی گراد، طول میله  $L_0$  باشد، اگر میله را تا درجه حرارت  $\theta$  حرارت دهیم، طول میله  $L$  خواهد بود در این صورت میزان انبساط خطی یا طولی میله برابر خواهد بود با  $L - L_0$  که معمولاً آن را با  $\Delta L$  نشان می دهند، که خواهیم داشت :

$$\Delta L = L - L_0$$

هرچقدر که طول اولیه یا  $L_0$  بیشتر باشد، میزان انبساط نیز به همان اندازه بیشتر خواهد بود، بنابراین انبساط طولی میله متناسب با طول اولیه ( $L_0$ ) خواهد بود به عبارت دیگر :

$$\Delta L \propto L$$

مثلاً اگر طول میله ۱cm باشد، انبساط طولی آن ۱mm خواهد شد. اما اگر طول میله ۱۰cm باشد انبساط طولی آن ۱۰mm خواهد شد.

از طرف دیگر هرچقدر درجه حرارت ( $\theta$ ) بیشتر باشد، میزان انبساط نیز بیشتر خواهد شد یعنی :  $\Delta L \propto \theta$  به عنوان مثال اگر یک میله ۱۰cm را تا  $100^{\circ}\text{C}$  حرارت دهیم، میزان انبساط آن حدود ۱mm خواهد شد. اما اگر آن را تا  $1000^{\circ}\text{C}$  حرارت دهیم، میزان انبساط آن حدود ۱۰mm خواهد شد.

$$\Delta L \propto L_0 \theta$$

بنابراین با توجه به رابطه ۱ و ۲ می توان نوشت :

حال برای این که این تناسب را به تساوی تبدیل کنیم، نیاز به یک ضریب می باشد، که این ضریب را با  $\alpha$

نمایش می‌دهند، که قبلاً توضیح داده شد، در نتیجه میزان انبساط خطی برابر خواهد بود با :

$$\Delta L = \alpha L_0 \theta$$

از طرفی  $\Delta L = L - L_0$  می‌باشد بنابراین خواهیم داشت :

$$L - L_0 = \alpha L_0 \theta$$

$$L = \alpha L_0 \theta + L_0$$

$$L = L_0 (1 + \alpha \theta)$$

این رابطه در صورتی قابل استفاده است که اندازه  $\theta$  کوچک باشد که به این ترتیب تقریباً می‌توان ضریب انبساط خطی را ثابت در نظر گرفت، اما در درجه حرارت‌های بالا یا در فاصله‌های دمایی زیاد، ضریب انبساط خطی ( $\alpha$ ) ثابت نیست و متناسب با درجه حرارت تغییر می‌کند. مثلاً ضریب انبساط خطی آهن در  $(-200^\circ\text{C})$  برابر  $\frac{1}{0.000016}^\circ\text{C}$  و در صفر درجه سانتی‌گراد حدود  $\frac{1}{0.000012}^\circ\text{C}$  و در  $600^\circ\text{C}$  برابر  $\frac{1}{0.000016}^\circ\text{C}$  می‌باشد. در این حالت بهتر است از ضریب انبساطی خطی متوسط ( $\bar{\alpha}$ ) استفاده شود.

رابطه به‌دست آمده برای زمانی است که درجه حرارت اولیه صفر می‌باشد اما در حالت کلی زمانی که درجه حرارت جسم از  $\theta_1$  به  $\theta_2$  افزایش می‌یابد، طول میله نیز از  $L_1 \rightarrow L_2$  تغییر می‌کند بنابراین رابطه به‌صورت زیر خواهد بود :

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$\Delta \theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\Delta L = L_1 \bar{\alpha} (\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Delta L = L_1 \bar{\alpha} \Delta \theta$$

$$L_2 - L_1 = L_1 \bar{\alpha} \Delta \theta$$

$$L_2 = L_1 + L_1 \bar{\alpha} \Delta \theta$$

$$L_2 = L_1 (1 + \bar{\alpha} \Delta \theta)$$

در این رابطه :

$$L_1 = \text{طول اولیه میله در دمای } \theta_1$$

$$L_2 = \text{طول بعد از انبساط میله در درجه حرارت } \theta_2$$

$$L_1 \text{ و } L_2 : \text{ برحسب cm ، mm یا m می‌باشد}$$

$$\Delta \theta : \text{ برحسب } ^\circ\text{C و } ^\circ\text{K}$$

$$\bar{\alpha} : \text{ برحسب } \frac{1}{^\circ\text{C}} \text{ یا } \frac{1}{^\circ\text{K}} \text{ می‌باشد.}$$

جدول ۱-۲- ضریب انبساط خطی بعضی از اجسام در °C :

جسم	$\frac{1}{\alpha \text{ } ^\circ\text{C}}$
آلومینیم	$24 \times 10^{-6}$
برنج	$18 \times 10^{-6}$
مس	$17 \times 10^{-6}$
اینوار (آلیاژ آهن و نیکل)	$0/9 \times 10^{-6}$
آهن و فولاد	$12 \times 10^{-6}$
سرب	$29 \times 10^{-6}$
شیشه معمولی (تقریبی)	$10 \times 10^{-6}$
چینی	$3 \times 10^{-6}$
شیشه کوارتز	$0/7 \times 10^{-6}$
اینوار مخصوص (آلیاژ آهن، نیکل و کرم)	$0/03 \times 10^{-6}$
تنگستن	$4 \times 10^{-6}$
چوب (عمود بر الیاف)	$30 \times 10^{-6}$
چوب (به موازات الیاف)	$6 \times 10^{-6}$
روی	$30 \times 10^{-6}$
گرافیت	$7/9 \times 10^{-6}$
چدن	$10/2 \times 10^{-6}$

تمرین ۱-۲: طول یک قطعه فلزی در °C ۲۵ برابر ۱/۵m می‌باشد افزایش طول آن را در دمای °C ۳۵ بر حسب mm به دست آورید. ضریب انبساط خطی فلز به طور متوسط در این فاصله دمایی  $\frac{1}{12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}}$  است.  
حل (توسط هنرجو) :

مثال ۱-۲: طول یک میله آهنی در °C ۱۰۰ برابر ۱۰۰cm می‌باشد. افزایش طول آن را در دمای °C ۲۵ بر حسب mm به دست آورید. ضریب انبساط خطی آهن به طور متوسط در این فاصله دمایی  $\frac{1}{14 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}}$  است.

حل :

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه همراه

با واحد مربوطه می‌نویسیم.

خواسته‌ها	داده‌ها
$L_p = ? \text{ cm}$	$\theta_1 = 0^\circ \text{C}$
$\Delta L = ? \text{ mm}$	$L_1 = 100^\circ \text{C}$
	$\theta_p = 250^\circ \text{C}$
	$\bar{\alpha} = 14 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ \text{C}}$

مرحله (۲) رابطه مربوط به مسأله نوشته می‌شود.

$$L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta)$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$\Delta\theta = \theta_p - \theta_1 \text{ می‌دانیم.}$$

$$L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

$$L_p = 100(1 + 14 \times 10^{-6}(250 - 0))$$

$$L_p = 100(1 + 14 \times 10^{-6} \times 250)$$

$$L_p = 100(1/0035)$$

$$L_p = 100/35 \text{ cm}$$

$$\Delta L = L_p - L_1$$

$$\Delta L = 100/35 - 100$$

$$\Delta L = 0/35 \text{ cm}$$

چون  $\Delta L$  را برحسب mm خواسته است لذا تبدیل

واحد از cm به mm انجام می‌دهیم :

$$\Delta L = 0/35 \times 10 \text{ mm}$$

$$\Delta L = 3/5 \text{ mm}$$

تمرین ۲-۲: طول یک میله گرافیتی پس از رسیدن به  $600^{\circ}\text{C}$  برابر  $1350.0\text{ mm}$  می باشد. طول اولیه میله در  $120^{\circ}\text{C}$  چقدر است. ضریب انبساط خطی میله در این فاصله دمایی برابر  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times 8$  می باشد.  
حل (توسط هنجو):

مثال ۲-۲: طول یک میله مسی پس از رسیدن به  $500^{\circ}\text{C}$  برابر  $25.0\text{ cm}$  می باشد، طول اولیه این میله در  $100^{\circ}\text{C}$  چقدر است، ضریب انبساط خطی مس در این فاصله دمایی  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times 20$  می باشد.  
حل:

مرحله (۱) داده ها و خواسته ها به طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می شود.

خواسته ها	داده ها
$L_1 = ? \text{ cm}$	$\theta_1 = 100^{\circ}\text{C}$ $\theta_p = 500^{\circ}\text{C}$ $L_p = 25.0\text{ cm}$ $\alpha = 20 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$

مرحله (۲) رابطه مربوط به مسأله نوشته می شود

$$L_p = L_1(1 + \alpha \Delta\theta)$$

در این رابطه

$$\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$$

$$L_p = L_1(1 + \alpha(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای گذاری مقادیر داده ها

$$25.0 = L_1(1 + 20 \times 10^{-6}(500 - 100))$$

$$25.0 = L_1(1 + 20 \times 10^{-6} \times 400)$$

$$25.0 = L_1 \times 1.008$$

طرفین تساوی را بر ضریب  $L_1$  تقسیم می کنیم

$$\frac{25.0}{1.008} = \frac{L_1 \times 1.008}{1.008}$$

$$L_1 = 24.8 / 0.2\text{ cm}$$

تمرین ۲-۳: قطر یک استوانه فلزی در  $120^{\circ}\text{C}$  برابر  $18\text{dm}$  و در  $650^{\circ}\text{C}$  برابر  $1850\text{mm}$  می‌باشد. ضریب انبساط خطی متوسط فلز را به دست آورید.  
حل (توسط هنجو):

مثال ۲-۳: طول یک میله فلزی در  $100^{\circ}\text{C}$  برابر  $1500\text{mm}$  و در  $500^{\circ}\text{C}$  برابر  $155\text{cm}$  می‌باشد، ضریب انبساط خطی متوسط این میله فلزی را به دست آورید.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\bar{\alpha} = ?$	$\theta_1 = 100^{\circ}\text{C}$ $L_1 = 1500\text{mm}$ $\theta_p = 500^{\circ}\text{C}$ $L_p = 155\text{cm}$

مرحله (۲) تبدیل واحد طول از  $\text{mm}$  به  $\text{cm}$  تبدیل می‌شود.

$$L_1 = 1500\text{mm}$$

$$1\text{mm} = 0.1\text{cm}$$

داریم

$$L_1 = 1500 \times \frac{1}{10}\text{cm}$$

$$L_1 = 150\text{cm}$$

مرحله (۳) نوشتن رابطه :

$$L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta)$$

$$L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

$$155 = 150(1 + \bar{\alpha}(500 - 100))$$

$$155 = 150(1 + \bar{\alpha} \times 400)$$

عدد ۱۵۰ در عددهای داخل پرانتز ضرب می‌شود.

$$155 = 150 \times 1 + \bar{\alpha} \times 400 \times 150$$

$$155 = 150 + 60000\bar{\alpha}$$



	<p>معلوم‌ها یک طرف تساوی.</p> $155 - 150 = 6000 \alpha$ $5 = 6000 \alpha$ <p>طرفین بر ضریب مجهول تقسیم می‌شود</p> $\frac{6000 \alpha}{6000} = \frac{5}{6000}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\alpha = 8.33 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}</math> </div>							
<p>تمرین ۴-۲: قطر یک بوش فلزی در <math>20^{\circ}\text{C}</math> <math>2/5\text{cm}</math> و بعد از حرارت دادن به <math>25/5\text{mm}</math> افزایش می‌یابد. در صورتی که ضریب انبساط خطی متوسط آن برابر <math>\frac{1}{50} \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}</math> باشد، درجه حرارت نهایی بوش فلزی را به دست آورید.</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۴-۲: طول یک میله فلزی در صفر درجه سانتی‌گراد <math>2000\text{mm}</math> و بعد از حرارت دادن به <math>2003\text{mm}</math> افزایش می‌یابد. در صورتی که ضریب انبساط خطی متوسط آن برابر <math>\frac{1}{50} \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}</math> باشد درجه حرارت نهایی میله فلزی را به دست آورید.</p> <p>حل:</p> <p>مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">داده‌ها</th><th style="width: 50%;">خواسته‌ها</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\theta_1 = 0^{\circ}\text{C}</math></td><td rowspan="4"><math>\theta_2 = ?^{\circ}\text{C}</math></td></tr> <tr> <td><math>L_1 = 2000\text{mm}</math></td></tr> <tr> <td><math>L_2 = 2003\text{mm}</math></td></tr> <tr> <td><math>\alpha = 12/50 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}</math></td></tr> </tbody> </table> <p>مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوطه :</p> $L_2 = L_1(1 + \alpha \Delta\theta)$ $L_2 = L_1(1 + \alpha(\theta_2 - \theta_1))$ <p>مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه :</p>	داده‌ها	خواسته‌ها	$\theta_1 = 0^{\circ}\text{C}$	$\theta_2 = ?^{\circ}\text{C}$	$L_1 = 2000\text{mm}$	$L_2 = 2003\text{mm}$	$\alpha = 12/50 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$
داده‌ها	خواسته‌ها							
$\theta_1 = 0^{\circ}\text{C}$	$\theta_2 = ?^{\circ}\text{C}$							
$L_1 = 2000\text{mm}$								
$L_2 = 2003\text{mm}$								
$\alpha = 12/50 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$								

	$2003 = 2000(1 + 12/5 \times 10^{-6}(\theta_p - 0))$ $2003 = 2000(1 + 12/5 \times 10^{-6}\theta_p)$ $2003 = 2000 + 2000 \times 12/5 \times 10^{-6}\theta_p$ $2003 - 2000 = 0.025\theta_p$ <p>طرفین تقسیم بر ضریب مجهول</p> $\frac{3}{0.025} = \frac{0.025\theta_p}{0.025}$ $\theta_p = \frac{3}{0.025}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>\theta_p = 120^\circ\text{C}</math> </div>							
<p>تمرین ۵-۲: برای داخل کردن یک میله فولادی به قطر ۶۵/۴mm درون یک بوش، لازم است میله را سرد کنیم، اگر قطر داخلی بوش ۶/۵cm باشد ضخامت بوش در مقابل قطر آن ناچیز باشد، دمای لازم برای سرد کردن میله حداقل چند درجه سانتی‌گراد باید باشد (دمای محیط <math>25^\circ\text{C}</math> و ضریب انبساط خطی متوسط برابر <math>\frac{1}{12} \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}</math> می‌باشد).</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۵-۲: برای داخل کردن یک میله فولادی به قطر ۵۰/۴mm به درون یک بوش لازم است بوش را گرم کنیم. اگر قطر داخلی بوش ۵۰mm بوده و ضخامت بوش در مقابل قطر آن ناچیز باشد. دمای لازم برای گرم کردن بوش حداقل چند درجه سانتی‌گراد باید باشد؟ (دمای محیط <math>25^\circ\text{C}</math> و <math>\bar{\alpha} = 10 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}</math>).</p> <p>حل:</p> <p>مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته شود</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">داده‌ها</th><th style="width: 50%;">خواسته‌ها</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>D_1 = 50\text{mm}</math></td><td rowspan="4" style="text-align: center; vertical-align: middle;"><math>\theta_p = ? \quad ^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td><math>D_p = 50/4\text{mm}</math></td></tr> <tr> <td><math>\theta_1 = 25^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td><math>\bar{\alpha} = 10 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}</math></td></tr> </tbody> </table>	داده‌ها	خواسته‌ها	$D_1 = 50\text{mm}$	$\theta_p = ? \quad ^\circ\text{C}$	$D_p = 50/4\text{mm}$	$\theta_1 = 25^\circ\text{C}$	$\bar{\alpha} = 10 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$
داده‌ها	خواسته‌ها							
$D_1 = 50\text{mm}$	$\theta_p = ? \quad ^\circ\text{C}$							
$D_p = 50/4\text{mm}$								
$\theta_1 = 25^\circ\text{C}$								
$\bar{\alpha} = 10 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$								

	<p>مرحله ۲) نوشتن رابطه</p> $D_p = D_1(1 + \alpha \Delta\theta)$ <p>مرحله ۳) جای گذاری مقادیر داده ها</p> $50/4 = 50(1 + 10 \times 10^{-6} \times \Delta\theta)$ $50/4 = 50 \times 1 + 50 \times 10 \times 10^{-6} \times \Delta\theta$ $50/4 = 50 + 5 \times 10^{-4} \Delta\theta$ $50/4 - 50 = 5 \times 10^{-4} \Delta\theta$ $0/4 = 5 \times 10^{-4} \Delta\theta$ <p>طرفین تقسیم بر ضریب مجهول</p> $\frac{0/4}{5 \times 10^{-4}} = \frac{5 \times 10^{-4} \Delta\theta}{5 \times 10^{-4}}$ $\Delta\theta = 800^\circ\text{C}$ $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$ $800 = \theta_p - 25$ $800 + 25 = \theta_p$ $\theta_p = 825^\circ\text{C}$
	<p>تمرین ۶-۲: طول یک میله آلومینیمی در <math>5^\circ\text{C}</math> برابر <math>85\text{cm}</math> است. افزایش طول آن برحسب <math>\text{mm}</math> در <math>155^\circ\text{C}</math> چقدر می شود، ضریب انبساط خطی آلومینیم به طور متوسط در این فاصله دمایی <math>\frac{1}{5 \times 10^{-6}^\circ\text{C}}</math> است</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>

	<p>تمرین ۲-۷: طول یک میله مسی در <math>15^{\circ}\text{C}</math> برابر <math>115\text{cm}</math> است، افزایش طول آن برحسب <math>\text{mm}</math> در <math>185^{\circ}\text{C}</math> حساب کنید، ضریب انبساط خطی میله مسی به‌طور متوسط در این فاصله دمایی <math>\frac{1}{14 \times 10^{-6}}/^{\circ}\text{C}</math> می‌باشد.</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>

\* برای به دست آوردن میزان انبساط قطعات و اجسام می توان مقدار انبساط ابعاد مختلف آنها را به دست آورد سپس به کمک آنها می توان اندازه سطح و حجم انبساط یافته را به دست آورد. به طور مثال اگر یک جسم استوانه ای شکل داشته باشید می توانیم ابتدا میزان انبساط قطر و ارتفاع آن را به دست آوریم و سپس با استفاده از آنها سطح و حجم انبساط یافته را محاسبه نماییم. اما این کار زمان بر است و حجم محاسبات را افزایش می دهد. به همین منظور باید بتوانیم میزان انبساط سطحی و حجمی را مستقیماً به دست آوریم. برای این منظور روابطی مانند رابطه انبساط خطی برای محاسبه میزان انبساط سطح و حجم وجود دارد. در مورد انبساط سطحی رابطه

$$A = A_0(1 + \beta\theta)$$

به صورت زیر است :

که در آن :

$A$  = میزان سطح انبساط یافته در درجه حرارت  $\theta$  بر حسب مترمربع، سانتی مترمربع و میلی مترمربع

$A_0$  = میزان سطح اولیه در درجه حرارت صفر درجه سانتی گراد بر حسب مترمربع، سانتی مترمربع،

میلی مترمربع

$$\beta = \text{ضریب انبساط سطحی بر حسب } \frac{1}{^\circ\text{C}} \text{ یا } \frac{1}{^\circ\text{K}}$$

$$\theta = \text{درجه حرارت نهایی بر حسب } ^\circ\text{C} \text{ یا } ^\circ\text{K}$$

با توجه به تجربیات به دست آمده معمولاً ضریب انبساط سطحی ( $\beta$ ) را دو برابر ضریب انبساط خطی ( $\alpha$ ) در

$$\beta = 2\alpha$$

نظر می گیرند یعنی

رابطه انبساط سطحی را می توان برای به دست آوردن، میزان انبساط سطحی ایجاد شده هنگامی که از درجه

حرارت  $\theta_1$  به  $\theta_2$  می رسیم به صورت زیر نوشت :

$$A_2 = A_1(1 + \bar{\beta}.\Delta\theta)$$

که در آن :

$$A_2 = \text{سطح انبساط یافته در درجه حرارت } \theta_2$$

$$A_1 = \text{سطح اولیه در درجه حرارت } \theta_1$$

$\bar{\beta}$  = ضریب انبساط سطحی متوسط در فاصله دمایی  $\theta_1$  و  $\theta_2$  (لازم به توضیح است که با تغییر

درجه حرارت میزان انبساط خطی و در نتیجه ضریب انبساط سطحی تغییر می کند بنابراین در یک

فاصله دمایی ضریب انبساط سطحی متوسط در نظر می گیرند).

\* در مورد انبساط حجمی رابطه به صورت زیر است :

$$V = V_0(1 + \gamma\theta)$$

که در آن :

$V$  = حجم انبساط یافته در درجه حرارت  $\theta$  بر حسب مترمکعب، سانتی متر مکعب و میلی متر مکعب  
 $V_0$  = حجم انبساط یافته در درجه حرارت صفر درجه سانتی گراد بر حسب مترمکعب، سانتی متر مکعب

و میلی متر مکعب

$$\gamma = \text{ضریب انبساط حجمی بر حسب } \frac{1}{^\circ\text{C}} \text{ یا } \frac{1}{^\circ\text{K}}$$

$$\theta = \text{درجه حرارت نهایی بر حسب } ^\circ\text{C} \text{ یا } ^\circ\text{K}$$

با توجه به تجربیات به دست آمده معمولاً ضریب انبساط حجمی ( $\gamma$ ) را سه برابر ضریب انبساط خطی ( $\alpha$ ) در

نظر می گیرند یعنی

$$\gamma = 3\alpha$$

همچنین رابطه انبساط حجمی را می توان برای به دست آوردن میزان انبساط حجمی ایجاد شده هنگامی که از

درجه حرارت  $\theta_1$  به  $\theta_2$  می رسیم به صورت زیر نوشت :

$$V_2 = V_1(1 + \gamma\Delta\theta)$$

که در آن :

$$V_2 = \text{حجم انبساط یافته در درجه حرارت } \theta_2$$

$$V_1 = \text{حجم اولیه در درجه حرارت } \theta_1$$

$$\bar{\gamma} = \text{ضریب انبساط حجمی متوسط در فاصله دمایی } \theta_1 \text{ و } \theta_2$$

$$\Delta\theta = \text{اختلاف درجه حرارت بین } \theta_1 \text{ و } \theta_2$$

تمرین ۸-۲: یک ورق فلزی به مساحت  $650 \text{ cm}^2$  در  $35^\circ\text{C}$  را تا  $30^\circ\text{C}$  حرارت داده ایم با فرض این که ضریب انبساط خطی متوسط فلز  $\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 10^{-6}$  باشد، مساحت نهایی ورق را بعد از انبساط بر حسب مترمربع به دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

مثال ۶-۲: یک ورق فلزی با مساحت  $0.5$  مترمربع در  $25^\circ\text{C}$  را تا  $200^\circ\text{C}$  حرارت داده ایم با فرض این که ضریب انبساط خطی متوسط فلز  $\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 10^{-6}$  باشد مساحت نهایی ورق را بعد از انبساط بر حسب سانتی متر مربع به دست آورید.

حل:

مرحله (۱) داده ها و خواسته ها به طور خلاصه همراه با واحد مربوطه نوشته شود.

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_p = ? \text{ cm}^2$	$A_1 = 0.05 \text{ m}^2$ $\theta_1 = 25^\circ \text{C}$ $\theta_p = 200^\circ \text{C}$ $\bar{\alpha} = 28 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ \text{C}}$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوطه :

$$A_p = A_1(1 + \bar{\beta}\Delta\theta)$$

در این رابطه

$$\begin{cases} \bar{\beta} = \bar{\alpha} \\ \Delta\theta = \theta_p - \theta_1 \end{cases}$$

پس خواهیم داشت :

$$A_p = A_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$A_p = 0.05(1 + 28 \times 10^{-6}(200 - 25))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی :

$$A_p = 0.05(1 + 56 \times 10^{-6} \times 175)$$

$$A_p = 0.05(1 + 0.0098)$$

$$A_p = 0.05(1.0098)$$

$$A_p = 0.05049 \text{ m}^2$$

چون واحد را به  $\text{cm}^2$  خواسته است لذا  $\text{m}^2$  را به

$\text{cm}^2$  تبدیل می‌کنیم :

$$1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$$

$$A_p = 0.05049 \times 10000 \text{ cm}^2$$

$$A_p = 5049 \text{ cm}^2$$

تمرین ۹-۲: یک ورق فلزی به ابعاد  $1 \times 1/5$  متر در درجه حرارت  $35^\circ\text{C}$  را تا  $28^\circ\text{C}$  حرارت داده‌ایم. سطح ورق را برحسب سانتی‌مترمربع پس از انبساط به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط  $\frac{1}{18 \times 10^{-6}} \frac{1}{^\circ\text{C}}$  می‌باشد.

حل (توسط هنجو):

مثال ۷-۲: یک ورق فلزی به شکل مستطیل با طول و عرض  $100$  و  $50$  سانتی‌متر در درجه حرارت  $25^\circ\text{C}$  را تا  $250^\circ\text{C}$  حرارت داده‌ایم. سطح ورق را برحسب مترمربع پس از انبساط به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط فلز  $\frac{1}{15 \times 10^{-6}} \frac{1}{^\circ\text{C}}$  می‌باشد.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با

واحد‌ها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_p = ? \text{ m}^2$	$100 \text{ cm} = \text{طول ورق}$ $50 \text{ cm} = \text{عرض ورق}$ $\theta_1 = 25^\circ\text{C}$ $\theta_p = 250^\circ\text{C}$ $\bar{\alpha} = 15 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

مرحله (۲) به‌دست آوردن سطح اولیه :

عرض  $\times$  طول =  $A_1$  مساحت مستطیل

$$A_1 = 100 \times 50$$

$$A_1 = 5000 \text{ cm}^2$$

مرحله (۳) نوشتن رابطه مربوطه :

$$A_p = A_1(1 + \bar{\beta}\Delta\theta)$$

همان‌طوری که قبلاً گفته شد می‌دانیم که :

$$\bar{\beta} = \bar{\alpha}$$

$$\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$$

لذا خواهیم داشت :

$$A_p = A_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

$$A_p = 5000(1 + 15 \times 10^{-6}(250 - 25))$$



	$A_p = 5000(1 + 30 \times 10^{-6} \times 225)$ $A_p = 5000(1 + 0.00675)$ $A_p = 5000(1.00675)$ $A_p = 5033.75 \text{ cm}^2$ <p>چون جواب را بر حسب <math>\text{m}^2</math> خواسته لذا <math>\text{cm}^2</math> را به <math>\text{m}^2</math> تبدیل می‌کنیم.</p> $1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$ $A_p = 5033.75 / 75 \times \left( \frac{1}{10000} \text{ m}^2 \right)$ $A_p = \frac{5033.75 / 75}{10000} \text{ m}^2$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>A_p = 0.00664 \text{ m}^2</math> </div>							
<p>تمرین ۱۰-۲: یک ورق مسی به شکل دایره به قطر <math>120 \text{ cm}</math> در دمای <math>80^\circ\text{C}</math> را تا <math>600^\circ\text{C}</math> حرارت می‌دهیم. مطلوب است سطح نهایی فلز پس از انبساط بر حسب مترمربع، ضریب انبساط خطی متوسط <math>\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 19 \times 10^{-6}</math> و <math>\pi = 3.14</math> می‌باشد.</p> <p>حل (توسط هنجو):</p>	<p>مثال ۸-۲: یک ورق آلومینیمی به شکل دایره به شعاع <math>0.8 \text{ m}</math> در دمای <math>50^\circ\text{C}</math> را تا <math>500^\circ\text{C}</math> حرارت می‌دهیم. مطلوب است سطح نهایی فلز پس از انبساط بر حسب سانتی متر مربع، ضریب انبساط خطی متوسط <math>\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 26 \times 10^{-6}</math> و <math>\pi = 3</math> می‌باشد.</p> <p>حل:</p> <p>مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">داده‌ها</th><th style="width: 50%;">خواسته‌ها</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>R = 0.8 \text{ m}</math></td><td rowspan="4"><math>A_p = ? \text{ cm}^2</math></td></tr> <tr> <td><math>\theta_1 = 50^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td><math>\theta_p = 500^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td><math>\bar{\alpha} = 26 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}</math></td></tr> </tbody> </table> <p>مرحله (۲) مساحت دایره را حساب می‌کنیم.</p> $\text{مساحت دایره} = \pi \times (R)^2$	داده‌ها	خواسته‌ها	$R = 0.8 \text{ m}$	$A_p = ? \text{ cm}^2$	$\theta_1 = 50^\circ\text{C}$	$\theta_p = 500^\circ\text{C}$	$\bar{\alpha} = 26 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$
داده‌ها	خواسته‌ها							
$R = 0.8 \text{ m}$	$A_p = ? \text{ cm}^2$							
$\theta_1 = 50^\circ\text{C}$								
$\theta_p = 500^\circ\text{C}$								
$\bar{\alpha} = 26 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$								

	$A_1 = 3 \times (0.8)^2$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>A_1 = 1.92 \text{ m}</math> </div> <p>مرحله ۳) نوشتن رابطه مربوط به مسأله :</p> $A_p = A_1(1 + \bar{\beta} \Delta \theta)$ <p>می دانیم که : <math>\bar{\beta} = 2\alpha</math> و <math>\Delta \theta = \theta_p - \theta_1</math> لذا خواهیم داشت :</p> $A_p = A_1(1 + 2\alpha(\theta_p - \theta_1))$ <p>مرحله ۴) جای گذاری مقادیر داده ها در فرمول فوق</p> $A_p = 1.92(1 + 2 \times 26 \times 10^{-6}(500 - 50))$ <p>مرحله ۵) محاسبات ریاضی :</p> $A_p = 1.92(1 + 52 \times 10^{-6} \times 450)$ $A_p = 1.92(1 + 0.0234)$ $A_p = 1.92(1.0234)$ $A_p = 1.964928 \text{ m}^2$ <p>چون برحسب <math>\text{cm}^2</math> خواسته شده، <math>\text{m}^2</math> را به <math>\text{cm}^2</math> تبدیل می کنیم</p> $A_p = 1.964928 \div 10000 \text{ cm}^2$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>A_p = 1.9649 / 28 \text{ cm}^2</math> </div>
<p>تمرین ۱۱-۲: یک ورق فولادی را از <math>50^\circ\text{C}</math> تا <math>95^\circ\text{C}</math> حرارت داده ایم اگر بعد از حرارت دادن مساحت آن به <math>7000 \text{ cm}^2</math> برسد مساحت اولیه ورق را در <math>50^\circ\text{C}</math> برحسب مترمربع حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد در این فاصله دمایی برابر <math>13 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}</math> است.</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۹-۲: یک ورق آلومینیم از <math>25^\circ\text{C}</math> تا <math>500^\circ\text{C}</math> حرارت داده می شود اگر بعد از حرارت دادن مساحت آن به <math>54 \text{ m}^2</math> برسد مساحت اولیه ورق در <math>25^\circ\text{C}</math> برحسب سانتی متر مربع چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط آلومینیم در این فاصله دمایی برابر <math>24 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}</math> است.</p> <p>حل:</p> <p>مرحله ۱) داده ها و خواسته ها به طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته شود.</p>

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_1 = ? \text{ cm}^2$	$\theta_1 = 25^\circ \text{C}$ $\theta_p = 50^\circ \text{C}$ $A_p = 0.54 \text{ m}^2$ $\bar{\alpha} = 24 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ \text{C}}$

مرحله ۲) رابطه مربوطه نوشته می‌شود

$$\text{داریم: } \bar{\beta} = 2\bar{\alpha} \text{ و } \Delta\theta = \theta_p - \theta_1$$

$$A_p = A_1(1 + \bar{\beta}\Delta\theta)$$

$$A_p = A_1(1 + 2\bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

محاسبات ریاضی:

$$0.54 = A_1(1 + 2 \times 24 \times 10^{-6} (50 - 25))$$

$$0.54 = A_1(1 + 48 \times 10^{-6} \times 475)$$

$$0.54 = A_1 \times 1.0228$$

طرفین تقسیم بر ضریب مجهول

$$\frac{0.54}{1.0228} = \frac{A_1 \times 1.0228}{1.0228}$$

$$A_1 = 0.528 \text{ m}^2$$

چون جواب را برحسب  $\text{cm}^2$  خواسته است لذا  $\text{m}^2$

را به  $\text{cm}^2$  تبدیل می‌کنیم

$$1 \text{ m}^2 = 10000 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = 0.528 \text{ m}^2$$

$$A_1 = 0.528 \times 10000 \text{ cm}^2$$

$$A_1 = 5280 \text{ cm}^2$$

تمرین ۱۲-۲: سطح یک فلز در  $۲۰^{\circ}\text{C}$  و  $۶۰۰^{\circ}\text{C}$  به ترتیب  $۰/۹\text{m}^2$  و  $۰/۹۰۵\text{m}^2$  است. ضریب انبساط سطحی و خطی این فلز را در محدود دمایی فوق حساب کنید.

حل (توسط هنجو):

مثال ۱۰-۲: سطح یک فلز در صفر درجه سانتی گراد و  $۵۰۰^{\circ}\text{C}$  به ترتیب  $۵۸۰\text{cm}^2$  و  $۵۹۵\text{cm}^2$  است، ضریب انبساط سطحی و خطی این فلز را در محدوده دمای فوق حساب کنید.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به صورت خلاصه همراه

با واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\bar{\alpha} = ?$	$\theta_1 = 0^{\circ}\text{C}$
$\bar{\beta} = ?$	$\theta_p = 500^{\circ}\text{C}$
	$A_1 = 580\text{cm}^2$
	$A_p = 595\text{cm}^2$

مرحله (۲) رابطه مربوطه نوشته می‌شود.

$$A_p = A_1(1 + \bar{\beta}\Delta\theta)$$

$$A_p = A_1(1 + \bar{\beta}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$595 = 580(1 + \bar{\beta}(500 - 0))$$

$$595 = 580(1 + 500\bar{\beta})$$

$$595 = 580 \times 1 + 580 \times 500\bar{\beta}$$

$$595 = 580 + 290000\bar{\beta}$$

معلوم‌ها در یک طرف تساوی قرار می‌گیرند

$$595 - 580 = 290000\bar{\beta}$$

$$15 = 290000\bar{\beta}$$

طرفین بر ضریب مجهول تقسیم می‌شوند

$$\frac{15}{290000} = \frac{290000\bar{\beta}}{290000}$$

$$\bar{\beta} = 5/17 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

مرحله ۳) محاسبه مقدار  $\alpha$  :

$$\bar{\beta} = 2\bar{\alpha}$$

$$5/17 \times 10^{-5} = 2 \times \bar{\alpha}$$

طرفین بر ضریب مجهول تقسیم می‌شود

$$\frac{5/17 \times 10^{-5}}{2} = \frac{2 \times \bar{\alpha}}{2}$$

$$\bar{\alpha} = 2/586 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

تمرین ۱۳-۲: یک ورق عایق که در  $15^{\circ}\text{C}$  دارای ابعاد ۱۰۰ و ۱۲۰ سانتی‌متر می‌باشد را حرارت می‌دهیم تا مساحت آن به  $1/2004\text{m}^2$  برسد مطلوب است تعیین درجه حرارت این ورق در صورتی که ضریب انبساط خطی متوسط این ماده در این فاصله دمایی  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} / 0.05$  می‌باشد.

حل (توسط هنجرو):

مثال ۱۱-۲: یک ورق از ماده دیرگداز به شکل مستطیل که در  $20^{\circ}\text{C}$  دارای طول و عرض  $0/6$  و  $0/5$  متر می‌باشد را حرارت می‌دهیم تا مساحت آن به  $0/33\text{m}^2$  برسد. مطلوب است تعیین درجه حرارت این ورق در صورتی که ضریب انبساط خطی متوسط این ماده در این فاصله دمایی  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} / 15$  باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با

واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\theta_p = ? \quad ^{\circ}\text{C}$	$\theta_1 = 20^{\circ}\text{C}$ $\text{طول} = 0/6\text{m}$ $\text{عرض} = 0/5\text{m}$ $A_p = 0/33\text{m}^2$ $\bar{\alpha} = 15 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$

مرحله ۲) نوشتن روابط مربوطه :

$$\begin{cases} A_1 = \text{عرض} \times \text{طول} \\ \bar{\beta} = 2\bar{\alpha} \end{cases}$$

	<p><math>A_p = A_1(1 + \beta \Delta\theta)</math></p> <p>مرحله ۳) جای گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق</p> $A_1 = 0.6 \times 0.5 = 0.3 \text{ m}^2$ $\bar{\beta} = 2 \times 1.5 \times 10^{-6} = 30 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$ <p>مرحله ۴) محاسبات ریاضی :</p> $0.33 = 0.3(1 + 30 \times 10^{-6} \times \Delta\theta)$ $0.33 = 0.3 + 0.3 \times 30 \times 10^{-6} \times \Delta\theta$ $0.33 = 0.3 + 9 \times 10^{-6} \Delta\theta$ <p>معلوم‌ها در یک طرف تساوی قرار می‌گیرند.</p> $0.33 - 0.3 = 9 \times 10^{-6} \Delta\theta$ $0.03 = 9 \times 10^{-6} \Delta\theta$ <p>طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می‌شوند</p> $\frac{0.03}{9 \times 10^{-6}} = \frac{9 \times 10^{-6} \Delta\theta}{9 \times 10^{-6}}$ $\Delta\theta = 3333.3 / 3$ <p>مرحله ۵) به‌دست آوردن <math>\theta_p</math>.</p> $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$ $3333.3 / 3 = \theta_p - 20$ $3333.3 / 3 + 20 = \theta_p$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math>\theta_p = 3353 / 3 ^\circ\text{C}</math> </div>
<p>تمرین ۱۴-۲: حجم یک قطعه شیشه‌ای در دمای <math>25^\circ\text{C}</math> برابر <math>350 \text{ cm}^3</math> است، حجم آن را در <math>250^\circ\text{C}</math> به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط چدن در این فاصله دمایی برابر <math>11 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}</math> می‌باشد.</p> <p>حل (توسط هنجو):</p>	<p>مثال ۱۲-۲: حجم یک قطعه چدنی در دمای <math>25^\circ\text{C}</math> برابر <math>450 \text{ cm}^3</math> است، حجم آن را در <math>600^\circ\text{C}</math> به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط چدن در این فاصله دمایی <math>11 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}</math> می‌باشد.</p>

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با

واحدها نوشته می‌شوند

خواسته‌ها	داده‌ها
$\bar{\gamma} = ? \quad \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$	$\theta_1 = 25^{\circ}\text{C}$ $V_1 = 450^{\circ}\text{C}$
$V_p = ? \quad \text{cm}^3$	$\theta_p = 600^{\circ}\text{C}$
	$\bar{\alpha} = 9 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوطه :

$$\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$$

$$\bar{\gamma} = \beta \bar{\alpha}$$

$$V_p = V_1(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها :

$$\Delta\theta = 600 - 25 = 575^{\circ}\text{C}$$

$$\bar{\gamma} = 3 \times 9 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

$$V_p = 450(1 + 3 \times 9 \times 10^{-6} \times 575)$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی :

$$V_p = 450(1 + 0.0155)$$

$$V_p = 450 \times 1.0155$$

$$V_p = 456.975 \text{ cm}^3$$

تمرین ۱۵-۲: قطر یک کره فولادی در  $30^{\circ}\text{C}$  برابر  $1/2\text{m}$  است. حجم آن را در  $650^{\circ}\text{C}$  به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط این فولاد در این فاصله دمایی برابر  $12/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$  می‌باشد. حل (توسط هنجرو):

مثال ۱۳-۲: شعاع یک کره فولادی در  $25^{\circ}\text{C}$  ،  $5.0\text{cm}$  است حجم آن در  $700^{\circ}\text{C}$  چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد در این فاصله دمایی  $1/25 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$  می‌باشد. حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه

با واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$V_1 = ? \text{ cm}^3$	$\theta_1 = 25^\circ\text{C}$
$V_p = ? \text{ cm}^3$	$r = 50\text{cm}$
	$\theta_p = 700^\circ\text{C}$
	$\bar{\alpha} = 1/25 \times 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

مرحله (۲) محاسبه حجم کره :

$$\text{حجم کره } V_1 = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times (50)^3$$

$$V_1 = \frac{4}{3} \times 3.14 \times 50 \times 50 \times 50$$

$$V_1 = \frac{1570000}{3}$$

$$V_1 = 523333.33 / 3 \text{ cm}^3$$

مرحله (۳) نوشتن رابطه مربوطه

$$V_p = V_1(1 + \bar{\gamma} \Delta\theta)$$

اگر  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$  و  $\bar{\gamma} = 3\bar{\alpha}$  باشد داریم :

$$V_p = V_1(1 + 3\bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$V_p = 523333.33 / 3 (1 + 3 \times 1/25 \times 10^{-5} (700 - 25))$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی

$$V_p = 523333.33 / 3 (1 + 3 / 75 \times 10^{-5} \times 675)$$

$$V_p = 523333.33 / 3 (1 / 0.25)$$

$$V_p = 536416 / 63 \text{ cm}^3$$



تمرین ۱۶-۲: یک قطعه آلومینیمی از  $25^{\circ}\text{C}$  تا  $450^{\circ}\text{C}$  حرارت داده می‌شود. اگر حجم آن بعد از حرارت دادن  $7 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  شود. حجم قطعه را در  $25^{\circ}\text{C}$  برحسب سانتی‌متر مکعب به دست آورید، ضریب انبساط خطی متوسط آلومینیم در فاصله دمایی  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times 26$  می‌باشد.  
حل (توسط هنجرو):

مثال ۱۴-۲: یک قطعه مسی از  $20^{\circ}\text{C}$  تا  $400^{\circ}\text{C}$  حرارت داده می‌شود. اگر حجم آن بعد از حرارت دادن  $900 \text{ cm}^3$  شود. حجم قطعه در  $20^{\circ}\text{C}$  برحسب مترمکعب چقدر برده است. ضریب انبساط خطی متوسط مس در این فاصله دمایی  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times 16$  می‌باشد.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با

واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$V_1 = ? \text{ m}^3$	$\theta_1 = 20^{\circ}\text{C}$ $\theta_p = 400^{\circ}\text{C}$ $V_p = 900 \text{ cm}^3$ $\bar{\alpha} = 16 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوط :

$$V_p = V_1(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

اگر  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$  و  $\bar{\gamma} = 3\bar{\alpha}$  باشد داریم :

$$V_p = V_1(1 + 3\bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$900 = V_1(1 + 3 \times 16 \times 10^{-6} (400 - 20))$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی

$$900 = V_1(1 + 48 \times 10^{-6} \times 380)$$

$$900 = V_1(1 + 0.018)$$

$$900 = V_1 \times 1.018$$

طرفین تساوی را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم

$$\frac{900}{1.018} = \frac{V_1 \times 1.018}{1.018}$$

	$V_1 = 884 / 0.9 \text{ cm}^3$ <p>مرحله ۵) تبدیل واحد. چون جواب را بر حسب <math>\text{m}^3</math> خواسته لذا <math>\text{cm}^3</math> را به <math>\text{m}^3</math> تبدیل می‌کنیم</p> $1 \text{ m}^3 = 1000000 \text{ cm}^3$ <p>طرفین تساوی بر ۱۰۰۰۰۰۰ تقسیم می‌کنیم</p> $\frac{1}{1000000} \text{ m}^3 = \frac{1000000}{1000000} \text{ cm}^3$ $1 \text{ cm}^3 = \frac{1}{1000000} \text{ m}^3$ $V_1 = 884 / 0.9 \text{ cm}^3$ $V_1 = 884 / 0.9 \times \frac{1}{1000000} \text{ m}^3$ $V_1 = 0.00088409 \text{ m}^3$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">V_1 = 8.8409 \times 10^{-4} \text{ m}^3</math> </div>										
<p>تمرین ۱۷-۲: حجم یک قطعه در درجه حرارت‌های <math>35^\circ\text{C}</math> و <math>40^\circ\text{C}</math> به ترتیب <math>8 \text{ m}^3</math> و <math>804 \text{ m}^3</math> می‌باشد ضریب انبساط حجمی و خطی متوسط آن را به دست آورید.</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۱۵-۲: حجم یک قطعه فلزی در درجه حرارت‌های <math>25^\circ\text{C}</math> و <math>40^\circ\text{C}</math> به ترتیب <math>7 \text{ m}^3</math> و <math>73 \text{ m}^3</math> می‌باشد، مطلوب است تعیین ضریب انبساط حجمی و خطی متوسط آن.</p> <p>حل:</p> <p>مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="width: 50%;">خواسته‌ها</th><th style="width: 50%;">داده‌ها</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\bar{\gamma} = ?</math></td><td><math>\theta_1 = 25^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td><math>\bar{\alpha} = ?</math></td><td><math>\theta_2 = 40^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td></td><td><math>V_1 = 7 \text{ m}^3</math></td></tr> <tr> <td></td><td><math>V_2 = 73 \text{ m}^3</math></td></tr> </tbody> </table>	خواسته‌ها	داده‌ها	$\bar{\gamma} = ?$	$\theta_1 = 25^\circ\text{C}$	$\bar{\alpha} = ?$	$\theta_2 = 40^\circ\text{C}$		$V_1 = 7 \text{ m}^3$		$V_2 = 73 \text{ m}^3$
خواسته‌ها	داده‌ها										
$\bar{\gamma} = ?$	$\theta_1 = 25^\circ\text{C}$										
$\bar{\alpha} = ?$	$\theta_2 = 40^\circ\text{C}$										
	$V_1 = 7 \text{ m}^3$										
	$V_2 = 73 \text{ m}^3$										

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به مسأله :

$$V_p = V_i(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

اگر  $\Delta\theta = (\theta_p - \theta_i)$  باشد داریم :

$$V_p = V_i(1 + \bar{\gamma}(\theta_p - \theta_i))$$

مرحله ۳) جای گذاری مقادیر داده ها در رابطه فوق

$$0/73 = 0/7(1 + \bar{\gamma}(400 - 25))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی :

$$0/73 = 0/7(1 + \bar{\gamma} \times 375)$$

$$0/73 = 0/7 + 0/7 \times 375 \times \bar{\gamma}$$

$$0/73 = 0/7 + 262/5 \bar{\gamma}$$

اگر عددی از یک طرف تساوی به طرف دیگر تساوی

برده شود علامت آن تغییر می کند

$$0/73 - 0/7 = 262/5 \bar{\gamma}$$

$$0/03 = 262/5 \bar{\gamma}$$

طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم

$$\frac{0/03}{262/5} = \frac{262/5 \bar{\gamma}}{262/5}$$

$$\bar{\gamma} = 1/14 \times 10^{-4} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

مرحله ۵) محاسبه ضریب انبساط حرارتی خطی

متوسط

$$\bar{\gamma} = 3\bar{\alpha}$$

$$1/14 \times 10^{-4} = 3\bar{\alpha}$$

طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم

$$\frac{1/14 \times 10^{-4}}{3} = \frac{3\bar{\alpha}}{3}$$

$$\bar{\alpha} = 3/8 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

تمرین ۱۸-۲: حجم یک استوانه فولادی در دمای  $25^{\circ}\text{C}$  برابر  $6/5 \times 10^{-4} \text{ m}^3$  می‌باشد. پس از حرارت دادن حجم آن به  $66 \text{ cm}^3$  می‌رسد. درجه حرارت قطعه را پس از حرارت دادن به دست آورید. ضریب انبساط خطی فولاد برابر  $\frac{1}{12} \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  می‌باشد.

حل (توسط هنجو):

مثال ۱۶-۲: حجم یک استوانه برنجی در دمای  $30^{\circ}\text{C}$  برابر با  $75 \text{ cm}^3$  می‌باشد، پس از حرارت دادن حجم آن به  $762 \text{ cm}^3$  می‌رسد. مطلوب است درجه حرارت قطعه پس از حرارت دادن. ضریب انبساط خطی متوسط برنج برابر  $\frac{1}{17} \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$  می‌باشد.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدهای مربوطه نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\gamma = ? \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	$\theta_1 = 30^{\circ}\text{C}$
$\theta_p = ? \text{ }^{\circ}\text{C}$	$V_1 = 75 \text{ cm}^3$
	$V_p = 762 \text{ cm}^3$
	$\bar{\alpha} = \frac{1}{17} \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوط به مسأله :

$$V_p = V_1(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

اگر  $\bar{\gamma} = 3\bar{\alpha}$  باشد داریم :

$$V_p = V_1(1 + 3\bar{\alpha}\Delta\theta)$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$762 = 75(1 + 3 \times \frac{1}{17} \times 10^{-6} \Delta\theta)$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی

$$762 = 75 + 75 \times 3 \times \frac{1}{17} \times 10^{-6} \Delta\theta$$

$$762 = 75 + 0/038 \Delta\theta$$

عددهای معلوم در یک طرف تساوی قرار می‌گیرند

$$762 - 75 = 0/038 \Delta\theta$$

$$12 = 0/038 \Delta\theta$$

	<p>طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می‌شود</p> $\frac{۱۲}{۰/۰۳۸} = \frac{۰/۰۳۸\Delta\theta}{۰/۰۳۸}$ $\Delta\theta = ۳۱۵/۷۹^{\circ}\text{C}$ <p>مرحله ۵) محاسبه <math>\theta_p</math>:</p> $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$ $۳۱۵/۷۹ = \theta_p - ۳۰$ $۳۱۵/۷۹ + ۳۰ = \theta_p$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math display="block">\theta_p = ۳۴۵/۷۹^{\circ}\text{C}</math> </div>
	<p>تمرین ۱۹-۲: حجم یک گلوله فولادی در <math>۱۰^{\circ}\text{C}</math> برابر <math>۲۸۳/۵\text{cm}^3</math> است. حجم آن در <math>۴۸۲^{\circ}\text{C}</math> چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی فولاد در این فاصله دمایی به‌طور متوسط <math>\frac{۱}{۱۰^{\circ}\text{C}} \times ۱۲ \times ۱۰^{-۶}</math> می‌باشد.</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>

	<p>تمرین ۲۰-۲: یک ورق آهنی به شکل مستطیل که طول و عرض آن در <math>30^{\circ}\text{C}</math> به ترتیب <math>0/3</math> و <math>0/5</math> متر است تا <math>135^{\circ}\text{C}</math> گرم می‌کنیم سطح ورق را بعد از انبساط برحسب <math>\text{cm}^2</math> حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط آهن در این فاصله دمایی <math>\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times 14/5</math> می‌باشد.</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>
--	--

### ۲-۲-۱- انبساط ظاهری و حقیقی مایعات :

در صورتی که یک مقدار معین مایع یا مذاب که درون یک ظرف قرار دارد حرارت داده شود، علاوه بر مایع، ظرف حاوی مایع نیز منبسط می‌شود. در این حالت انبساط حجمی مایع به علت انبساط ظرف حاوی مایع کمتر از انبساط حقیقی مایع به نظر می‌رسد که به آن انبساط ظاهری مایع می‌گویند. بنابراین در محاسبات باید دقت شود که انبساط ظاهری مایعات در اثر حرارت دادن کمتر از انبساط حقیقی آنها است. به همین منظور برای به دست آوردن میزان انبساط واقعی مایعات باید انبساط ظاهری مایع را با انبساط ظرف جمع نمود، یا به عبارت دیگر :

$$\gamma_L = \gamma + \gamma_{\beta}$$

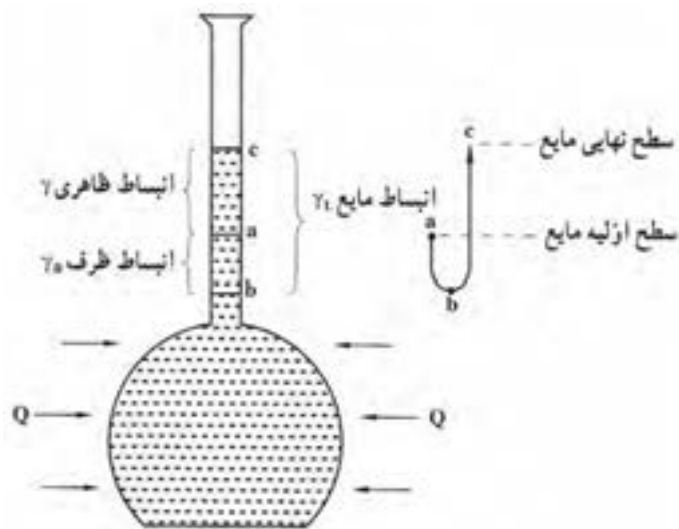
که در آن :

$\gamma_L$  : انبساط حقیقی مایع

$\gamma$  : میزان انبساط ظاهری مایع

$\gamma_{\beta}$  : میزان انبساط حجمی ظرف

این موضوع در شکل ۲-۱ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲- تعیین انبساط حقیقی مایع

### ۲-۳- انقباض اجسام در اثر کاهش درجه حرارت :

اجسام همان‌طور که در اثر حرارت دادن انبساط پیدامی کنند و ابعادشان بزرگ‌تر می‌شود. هنگامی که سرد می‌شوند و حرارت خود را از دست می‌دهند ابعاد، سطوح و حجم آنها کاهش می‌یابد که این کاهش ابعاد، سطوح و حجم آنها در اثر کاهش درجه حرارت را انقباض می‌نامند. به‌طور مثال هنگامی که مذاب فلز در قالب ریخته‌گری می‌شود پس از گذشت زمان و از دست دادن درجه حرارت به تدریج کاهش حجم پیدا کرده و منقبض می‌شود که این مسأله با پایین رفتن سطح مذاب از راهگاه کاملاً مشهود است.

براساس تجربیات گذشته و آزمایشات صورت گرفته میزان انقباض در اثر کاهش حرارت برابر با میزان انبساط در اثر حرارت دادن است. بنابراین تمام روابطی که برای انبساط طولی، سطحی و حجمی اجسام ذکر شده است، در مورد انقباض اجسام نیز صادق است. به عنوان مثال در مورد انقباض خطی رابطه به‌صورت زیر است :

$$L_p = L_1(1 + \alpha \Delta\theta)$$

که در آن :

$L_p$  : طول جسم منقبض شده در درجه حرارت  $\theta_p$

$L_1$  : طول جسم اولیه (قبل از انقباض) در درجه حرارت  $\theta_1$

$\alpha$  : ضریب انبساط خطی

$\theta_p$  : درجه حرارت نهایی

$\theta_1$  : درجه حرارت اولیه

که  $\theta_p < \theta_1$  است.

به همین ترتیب رابطه برای انقباض سطحی و حجمی به ترتیب به صورت زیر است :

$$A_p = A_1(1 + \beta \Delta\theta)$$

$$V_p = V_1(1 + \gamma \Delta\theta)$$

که در آنها  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$  و  $\theta_p < \theta_1$  می باشد.

همان طوری که در مثال ذکر شد ریخته گری فلزات و آلیاژها به علت کاهش درجه حرارت مذاب در قالب، انقباض در حالت مذاب از درجه حرارت مذاب تا رسیدن به درجه حرارت انجماد، انقباض حین انجماد در درجه حرارت انجماد و انقباض بعد از انجماد در حالت جامد تا رسیدن به درجه حرارت محیط در قطعه اتفاق می افتد، که اهمیت زیادی دارد.

### ۱-۳-۲- انقباض در حالت مذاب :

مذاب برای ریخته گری در قالب معمولاً تا  $100^\circ\text{C}$  الی  $200^\circ\text{C}$  بالاتر از نقطه ذوب حرارت داده می شود، سپس به داخل قالب ریخته می شود. این درجه حرارت فوق ذوب یا فوق گداز نام دارد. هنگامی که مذاب به داخل قالب ریخته می شود با گذشت زمان، درجه حرارت تا رسیدن به نقطه انجماد فلز کاهش می یابد که در اثر آن حجم مذاب کاهش می یابد که آن را انقباض در حالت مذاب می نامند، که برای جبران این انقباض، کافی است که مقداری مذاب به داخل قالب اضافه شود که مقدار این انقباض از رابطه زیر به دست می آید.

$$\Delta V = V_m \cdot \bar{\gamma} (\theta_p - \theta_m)$$

که در آن :

$\Delta V$  : انقباض حجمی مذاب بر حسب  $\text{cm}^3$

$V_m$  : حجم محفظه قالب بر حسب  $\text{cm}^3$

$\bar{\gamma}$  : ضریب انبساط حجمی متوسط مذاب در فاصله دمایی نقطه ذوب تا نقطه ذوب بر حسب  $\frac{1}{^\circ\text{C}}$

$\theta_p$  : درجه حرارت ریختن مذاب (فوق ذوب) بر حسب  $^\circ\text{C}$

$\theta_m$  : درجه حرارت انجماد بر حسب  $^\circ\text{C}$

مثال ۱۷-۲: یک میله آهنی به طول $100\text{ cm}$ در درجه حرارت $800^\circ\text{C}$ را با هوای سرد خنک می کنیم. مطلوب است طول نهایی این میله آهنی در درجه حرارت $25^\circ\text{C}$ . ضریب انبساط خطی متوسط در این فاصله دمایی برابر است با $\frac{1}{11/5 \times 10^{-6} ^\circ\text{C}}$	تمرین ۲۱-۲: یک قطعه مسی به طول $1/2\text{ m}$ در درجه حرارت $600^\circ\text{C}$ را با هوای سرد خنک می کنیم. مطلوب است طول نهایی این قطعه مسی در درجه حرارت $0^\circ\text{C}$ . ضریب انبساط خطی متوسط در این فاصله دمایی برابر است با $\frac{1}{18 \times 10^{-6} ^\circ\text{C}}$
--	---



حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود.

خواسته‌ها	داده‌ها
$L_p = ? \text{ cm}$	$L_1 = 100 \text{ cm}$ $\theta_1 = 80^\circ \text{ C}$ $\theta_p = 25^\circ \text{ C}$ $\bar{\alpha} = 11/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ \text{C}}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوط به حل مسأله :

$$L_p = L_1(1 + \alpha \Delta\theta)$$

می‌دانیم که  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$

$$L_p = L_1(1 + \alpha(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول

$$L_p = 100(1 + 11/5 \times 10^{-6}(25 - 80))$$

$$L_p = 100(1 + 11/5 \times 10^{-6}(-75))$$

$$L_p = 100(1 + (-8/9 \times 10^{-3}))$$

$$L_p = 100(0.99)$$

$$L_p = 99 \text{ cm}$$

حل (توسط هنجو):

تمرین ۲۲-۲: یک ورق برنجی به ابعاد  $1 \times 0.85$  متر در دمای  $30^\circ \text{C}$  را خنک می‌کنیم. مطلوب است سطح نهایی آن در درجه حرارت  $20^\circ \text{C}$ . ضریب انبساط خطی متوسط برنج  $\frac{1}{9} \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ \text{C}}$  می‌باشد.  
حل (توسط هنجو):

مثال ۱۸-۲: یک ورق آلومینیومی مستطیل شکل به طول و عرض  $80 \text{ cm}$  و  $40 \text{ cm}$  در دمای  $45^\circ \text{C}$  را خنک می‌کنیم. مطلوب است سطح نهایی آن در درجه حرارت  $30^\circ \text{C}$ . ضریب انبساط خطی متوسط آلومینیوم  $\frac{1}{22} \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ \text{C}}$  می‌باشد.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\bar{\beta} = ? \quad \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$	طول = $۸۰\text{cm}$
$A_1 = ? \quad \text{cm}^2$	عرض = $۴۰\text{cm}$
$A_p = ? \quad \text{cm}^2$	$\theta_1 = ۴۵^{\circ}\text{C}$
	$\theta_p = ۳۰^{\circ}\text{C}$
	$\bar{\alpha} = ۲۲ \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه‌های مربوطه :

می‌دانیم که :

$$A_p = A_1(1 + \bar{\beta}\Delta\theta)$$

$$\begin{cases} A_1 = \text{عرض} \times \text{طول} \\ A_1 = ۸۰ \times ۴۰ \\ A_1 = ۳۲۰۰\text{cm}^2 \\ \bar{\beta} = ۲\bar{\alpha} \\ \Delta\theta = \theta_p - \theta_1 \end{cases}$$

$$A_p = A_1(1 + ۲\bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$A_p = ۳۲۰۰ \times (1 + ۲ \times ۲۲ \times 10^{-6} (۳۰ - ۴۵))$$

$$A_p = ۳۲۰۰ \times (1 + ۴۴ \times 10^{-6} \times (-۱۵))$$

$$A_p = ۳۲۰۰ \times (1 + (-۰/۰۱۸))$$

$$A_p = ۳۲۰۰ \times ۰/۹۸۲$$

$$A_p = ۳۱۴۲/۴\text{cm}^2$$

تمرین ۲۳-۲: حجم یک قطعه شیشه‌ای در دمای  $50^{\circ}\text{C}$  برابر  $105\text{ cm}^3$  است، حجم قطعه در  $20^{\circ}\text{C}$  چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط شیشه برابر  $\frac{1}{10^6} \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}$  است.

حل (توسط هنجو):

مثال ۱۹-۲: حجم یک قطعه برنجی در  $50^{\circ}\text{C}$  برابر  $105\text{ cm}^3$  است حجم قطعه در  $20^{\circ}\text{C}$  چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط برنج برابر  $\frac{1}{10^6} \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}$  است.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به صورت خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$V_1 = 105\text{ cm}^3$ $\theta_1 = 50^{\circ}\text{C}$ $\theta_p = 20^{\circ}\text{C}$ $\bar{\alpha} = 17 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$	$V_p = ? \text{ cm}^3$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوط به حل مسأله :

$$V_p = V_1(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

با توجه به این که  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$  و  $\bar{\gamma} = 3\bar{\alpha}$  داریم :

$$V_p = V_1(1 + 3\bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$V_p = 105(1 + 3 \times 17 \times 10^{-6}(20 - 50))$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی

$$V_p = 105(1 + 51 \times 10^{-6}(-30))$$

$$V_p = 105(1 - 0.00153)$$

$$V_p = 105 \times 0.99847$$

$$V_p = 98\text{ cm}^3$$

تمرین ۲۰-۲: حجم محفظه یک قالب ریخته‌گری برای تولید یک قطعه چدن  $۴۵۰\text{cm}^3$  است. در صورتی که دمای مذاب چدن در هنگام ریختن  $۱۶۰۰^\circ\text{C}$  و نقطه ذوب  $۱۴۵۰^\circ\text{C}$  باشد. انقباض حجمی مذاب را بر حسب مترمکعب حساب کنید. ضریب انبساط حجمی متوسط مذاب در فاصله دمایی نقطه ذوب تا نقطه فوق ذوب  $\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 10^{-5}$  می‌باشد.

حل (توسط هنجو):

مثال ۲۰-۲: حجم محفظه یک قالب ریخته‌گری برای تولید یک قطعه آلومینیومی  $۵۰۰\text{cm}^3$  است. در صورتی که دمای مذاب آلومینیم در هنگام ریختن  $۷۲۰^\circ\text{C}$  و نقطه ذوب آلومینیم  $۶۶۰^\circ\text{C}$  باشد. انقباض حجمی مذاب را بر حسب سانتی مترمکعب حساب کنید. ضریب انبساط حجمی متوسط مذاب در فاصله دمایی نقطه ذوب تا نقطه فوق ذوب  $\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 10^{-6}$  می‌باشد.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به صورت خلاصه و همراه با واحدهای خواسته شده نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\Delta V = ? \text{ cm}^3$	$V_m = ۵۰۰\text{cm}^3$ $\theta_p = ۷۲۰^\circ\text{C}$ $\theta_m = ۶۶۰^\circ\text{C}$ $\bar{\gamma} = ۹۰ \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوط به حل مسأله :

$$\Delta V = V_m \cdot \bar{\gamma} (\theta_p - \theta_m)$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر معلوم در رابطه فوق

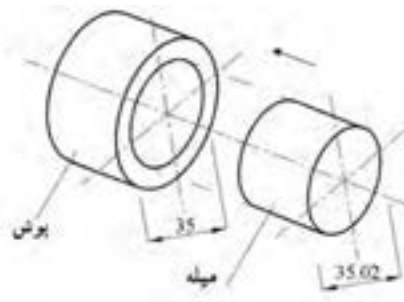
$$\Delta V = ۵۰۰ \times ۹۰ \times 10^{-6} (۷۲۰ - ۶۶۰)$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی

$$\Delta V = ۵۰۰ \times ۹۰ \times 10^{-6} \times ۶۰$$

$$\Delta V = ۲.۷ \text{ cm}^3$$

تمرین ۲۵-۲: برای داخل کردن یک میله فولادی به درون یک بوش مطابق شکل زیر لازم است که آن را سرد کنیم. اگر ضریب انبساط خطی این فولاد به طور متوسط  $\frac{1}{10^6} \times 14$  و درجه حرارت محیط  $30^\circ\text{C}$  باشد دمای میله چند درجه سانتی گراد خواهد بود.  
حل (توسط هنرجو):



شکل ۲-۲- نحوه جا زدن میله درون یک بوش بر اثر برودت و سرما

### انقباض حین انجماد (خمیری) :

پس از این که مذاب به درجه حرارت انجماد رسید مذاب شروع به انجماد می کند. در حین انجماد نیز حجم مذاب و جامد به وجود آمده کاهش یافته و مجدداً منقبض می شود. این انقباض و کاهش حجم اگر جبران نشود قطعه معیوب خواهد شد. برای این منظور معمولاً این انقباض و کاهش حجم را با طراحی صحیح سیستم های تغذیه گذاری جبران می کنند تا از ایجاد عیوب انقباض در حین انجماد مذاب در محفظه قالب جلوگیری کند. انقباض یا انبساط در طول مدت انجماد یا ذوب در منطقه جامد و مایع به شکل ساختمانی و ماهیت مایع و جامد بستگی دارد. معمولاً فلزات و آلیاژها در این منطقه ۲ تا ۸ درصد حجمی انقباض یا انبساط پیدا می کنند. بعضی فلزات و آلیاژها در جریان انجماد از منطقه جامد و مایع به جای انقباض، منبسط می شوند. بیسموت و آنتیموان و بعضی از آلیاژها نظیر چدن های خاکستری و انواع چدن با گرافیت کروی در حین انجماد منبسط می شوند. با شروع انجماد و هنگامی که ذرات جامد و مذاب با هم در حال تعادل هستند نمی توان مذاب اضافی را وارد

قالب نمود زیرا کاهش و کمبودهای حجم در این منطقه در تمام قطعه پراکنده می‌شوند، اما در یک نقطه متمرکز نمی‌شوند.

### ۲-۳-۲- انقباض در حالت جامد :

پس از آن که مذاب به‌طور کامل منجمد شد، تا رسیدن فلز به درجه حرارت محیط، حجم قطعه کاهش می‌یابد، این کاهش حجم را انقباض در حالت جامد می‌نامند. انقباض در حالت جامد را با بزرگ‌تر در نظر گرفتن مدل، می‌توان جبران نمود. برای این منظور طراح و مدلساز اضافه مجاز انقباض را در مدل منظور می‌نماید. این اضافه مجاز که به‌صورت درصد بیان می‌شود به ابعاد مدل افزوده می‌شود تا پس از انقباض قطعه در حالت جامد به اندازه مورد نظر برسد.

درصد اضافه مجاز انقباض در ریخته‌گری به عوامل زیر بستگی دارد :

- جنس و نوع آلیاژ

- ابعاد و اندازه مدل

- نوع و جنس قالب

فلزات مختلف دارای نقاط ذوب و ضریب انبساط منحصربه‌فردی می‌باشند و نقاط ذوب و ضریب انبساط خطی یکسانی دارند. معمولاً عناصر آلیاژی موجود در آلیاژها سبب تغییر در نقاط ذوب (معمولاً به‌صورت کاهش) و تغییر ضریب انبساط حرارتی فلز اصلی می‌شوند. در نتیجه این عوامل سبب تغییر در مقدار انقباض در حالت جامد شده بنابراین مقدار اضافه مجاز انقباض نیز تغییر خواهد کرد.

ابعاد مدل نیز در مقدار اضافه مجاز مؤثر است. هرچه قدر که طول قطعه بیشتر باشد مقدار اضافه مجاز انقباض کمتری نسبت به قطعات با طول کمتر، برای آنها در نظر می‌گیرند. علت این است که در قطعات با طول بیشتر مقداری از انقباض ایجاد شده در حالت جامد در ریز ساختار قطعه (یا دانه‌های آن) مستهلک می‌شود. جنس قالب، نوع انجماد و سرعت انجماد نیز در مقدار انقباض قطعه مؤثر می‌باشد، علت این مسأله به نوع ریز ساختار فلز (دانه‌بندی) آن بر می‌گردد. به عنوان مثال ضریب انبساط یا انقباض خطی قطعاتی که در قالب‌های فلزی ریخته‌گری می‌شوند نسبت به قطعاتی که در قالب‌های ماسه‌ای ریخته‌گری می‌شوند، متفاوت است، علت این است که قطعات ریختگی در قالب‌های فلزی دارای دانه‌های ریزتر و در جهات مشخص می‌باشند، اما قطعات ریختگی در قالب‌های ماسه‌ای دارای دانه‌های درشت‌تر و بدون جهت می‌باشند.

در نقطه انجماد (یا ذوب)، تغییرات (افزایش یا کاهش) مقدار حرارت باعث تغییر نوع اتصال اتم‌ها می‌شود و سبب تبدیل جامد به مذاب و برعکس می‌شود. در این حالت انبساط یا انقباض حجمی با درجه حرارت رابطه ساده (یا خطی) نداشته و به تبدیلات ساختاری فلز ارتباط می‌یابد. معمولاً بیشتر عناصر و ترکیبات در مراحل مختلف

سرد شده، کاهش حجم یا انقباض پیدا می‌کنند. در مورد فلزات یا آلیاژها میزان تغییرات حجمی از حالت مذاب به جامد برابر با مجموع انقباض‌های منطقه مایع، فاصله انجماد (خمیری) و حالت جامد است.

در مورد مذاب چدن خاکستری هنگامی که سرد می‌شود تا درجه حرارت انجماد، انقباض در آن اتفاق می‌افتد. در فاصله انجماد (خمیری) چدن خاکستری برخلاف دیگر فلزات است که انقباض پیدا می‌کنند، انبساط می‌یابد که علت آن در حقیقت به آزاد شدن کربن و رسوب آن به صورت گرافیت ارتباط دارد، این پدیده سبب می‌شود که انقباضی که در حین انجماد در چدن خاکستری به وجود می‌آید، جبران شده و حتی مقداری انبساط نیز در آن حاصل شود. اما پس از این که چدن خاکستری جامد شد، با سرد شدن تا درجه حرارت محیط منقبض می‌شود. برای به دست آوردن درصد اضافه مجاز انقباض خطی یک جسم جامد در فاصله حرارتی نقطه ذوب تا درجه حرارت محیط بر حسب ضریب انبساط خطی متوسط از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i) \times 100$$

که در آن :

$\%s$ : اضافه مجاز انقباض خطی (تئوری) بر حسب درصد

$\bar{\alpha}$ : ضریب انبساط خطی متوسط فلز جامد در فاصله دمایی  $\theta_m$  (نقطه ذوب) تا  $\theta_i$  (درجه حرارت

محیط برابر  $25^\circ\text{C}$ ) است.

با توجه به رابطه فوق درصد انقباض خطی (تئوری) ( $\%s$ ) مشخص می‌شود. همچنین با معلوم بودن ابعاد قطعه ریختگی (مطابق نقشه قطعه طراحی شده) می‌توان ابعاد مدل (یا قالب) را با استفاده از رابطه زیر به دست آورد.

$$\alpha_m = \alpha_c \left( 1 + \frac{\%s}{100} \right)$$

که در آن :

$\alpha_c$ : اندازه قطعه ریختگی بر حسب cm

$\alpha_m$ : اندازه مدل (یا قالب) بر حسب cm

$\%s$ : اضافه مجاز انقباض تئوری (خطی) بر حسب درصد

در جدول زیر درصد اضافه مجاز انقباض خطی (تئوری) برای بعضی از فلزات و آلیاژهای ریختگی نشان داده شده است.

جدول ۲-۲- درصد اضافه مجاز انقباض خطی آلیاژها (تئوری)

آلیاژ	درصد انقباض	آلیاژ	درصد انقباض
چدن‌های خاکستری	۰/۶-۱/۳	آلیاژهای آلومینیم و سیلیسیم	۱/۳-۱/۶
چدن‌های سفید (مالی بل)	۲	آلیاژهای آلومینیم و منیزیم	۱/۲
فولادهای ساده کربنی	۱/۵-۲	آلومینیم برنزا	۲-۲/۵
فولاد کرم دار	۲	برنچ‌ها و برنزا	۱/۳-۱/۶
فولادهای منگنزدار	۲/۵	آلیاژهای سرب و آنتیموان	۱/۵-۲/۵
روی و آلیاژهای روی	۲/۶	آلیاژهای قلع	۱/۵-۲

تمرین ۲-۲۶: ضریب انبساط خطی مس به‌طور متوسط از درجه حرارت  $۲۵^{\circ}\text{C}$  تا نقطه ذوب  $۱۰۵۶^{\circ}\text{C}$  برابر  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times ۱۷$  می‌باشد.  
 الف) درصد اضافه مجاز انقباض را به‌دست آورید  
 ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ریختگی  $۱۱۰۰\text{mm}$  باشد را به‌دست آورید.  
 حل (توسط هنجرو):

مثال ۲-۲۱: ضریب انبساط خطی آلومینیم به‌طور متوسط از درجه حرارت  $۲۰^{\circ}\text{C}$  تا نقطه ذوب  $۶۶۰^{\circ}\text{C}$  برابر  $\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times ۱۰^{-6} \times ۲۸$  می‌باشد مطلوب است محاسبه :  
 الف) درصد اضافه مجاز انقباض  
 ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ریختگی  $۱۰۰\text{cm}$  باشد  
 حل:  
 مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\theta_i = ۲۰^{\circ}\text{C}$	
$\theta_m = ۶۶۰^{\circ}\text{C}$	
$\alpha_m = ?$	$\bar{\alpha} = ۲۸ \times ۱۰^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$
$\%s = ?$	$\alpha_c = ۱۰۰\text{cm}$

مرحله ۲) رابطه‌های مربوط به حل مسأله نوشته می‌شود

$$\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i) \times ۱۰۰$$



	<p>مرحله ۳) جای گذاری مقادیر داده ها در فرمول</p> $\%S = 28 \times 10^{-6} (660 - 20) \times 100$ <p>مرحله ۴) محاسبات ریاضی</p> $\%S = 28 \times 10^{-6} \times 640 \times 100$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math display="block">\%S = \%1/79</math> </div> <p>مرحله ۵) رابطه مربوطه نوشته می شود</p> $a_m = a_c \left(1 + \frac{\%S}{100}\right)$ $a_m = 100 \left(1 + \frac{1/79}{100}\right)$ $a_m = 100 \times 1/0179$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math display="block">a_m = 101/79</math> </div>										
<p>تمرین ۲۷-۲: ضریب انبساط خطی آلیاژی از روی به طور متوسط از درجه حرارت <math>15^{\circ}\text{C}</math> تا نقطه ذوب آن <math>420^{\circ}\text{C}</math> برابر <math>\frac{1}{30} \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}</math> می باشد.</p> <p>الف) درصد اضافه مجاز انقباض آن را حساب کنید.</p> <p>ب) اندازه قطر مدل در صورتی که قطر قطعه ریختگی <math>0.85\text{m}</math> باشد را به دست آورید.</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۲۲-۲: ضریب انبساط خطی آلیاژی از چدن به طور متوسط از درجه حرارت <math>25^{\circ}\text{C}</math> تا نقطه ذوب آن <math>1450^{\circ}\text{C}</math> برابر <math>\frac{1}{14} \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}</math> می باشد. مطلوب است محاسبه و تعیین :</p> <p>الف) درصد اضافه مجاز انقباض</p> <p>ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ریختگی <math>50\text{cm}</math> است.</p> <p>حل:</p> <p>مرحله ۱) داده ها و خواسته ها به طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می شود</p> <table border="1" data-bbox="874 1557 1281 1870"> <thead> <tr> <th>داده ها</th><th>خواسته ها</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\theta_i = 25^{\circ}\text{C}</math></td><td><math>\%S = ?</math></td></tr> <tr> <td><math>\theta_m = 1450^{\circ}\text{C}</math></td><td><math>a_m = ?</math></td></tr> <tr> <td><math>\bar{\alpha} = 14 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}</math></td><td></td></tr> <tr> <td><math>a_c = 50\text{cm}</math></td><td></td></tr> </tbody> </table>	داده ها	خواسته ها	$\theta_i = 25^{\circ}\text{C}$	$\%S = ?$	$\theta_m = 1450^{\circ}\text{C}$	$a_m = ?$	$\bar{\alpha} = 14 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}$		$a_c = 50\text{cm}$	
داده ها	خواسته ها										
$\theta_i = 25^{\circ}\text{C}$	$\%S = ?$										
$\theta_m = 1450^{\circ}\text{C}$	$a_m = ?$										
$\bar{\alpha} = 14 \times 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}$											
$a_c = 50\text{cm}$											

	<p>مرحله ۲) نوشتن رابطه‌های مربوطه :</p> $\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i) \times 100$ $\%s = 14 \times 10^{-6} (1450 - 25) \times 100$ <p>مرحله ۳) محاسبات ریاضی :</p> $\%s = 14 \times 10^{-6} \times 1425 \times 100$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>\%s = 1/995</math> </div> <p>مرحله ۴) نوشتن رابطه دیگری</p> $a_m = a_c \left(1 + \frac{\%s}{100}\right)$ $a_m = 50 \left(1 + \frac{1/995}{100}\right)$ $a_m = 50 \times 1/0.199$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>a_m = 50/995</math> </div>
	<p>تمرین ۲۸-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع آلیاژ مس به‌طور متوسط از درجه حرارت محیط <math>25^{\circ}\text{C}</math> تا نقطه ذوب <math>1030^{\circ}\text{C}</math> برابر است با <math>\frac{1}{19} \times 10^{-6} / ^{\circ}\text{C}</math> مطلوبست:</p> <p>الف) محاسبه درصد اضافه مجاز انقباض</p> <p>ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ریختگی ۷۵cm باشد.</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>

	<p>تمرین ۲۹-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع آلیاژ برنج به‌طور متوسط از درجه حرارت <math>35^{\circ}\text{C}</math> تا نقطه ذوب <math>958^{\circ}\text{C}</math> برابر است با <math>\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times 20</math> مطلوبست محاسبه :</p> <p>الف) درصد اضافه مجاز انقباض</p> <p>ب) اندازه طول مدل، در صورتی که طول قطعه ریختگی ۸۵cm باشد</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>
	<p>تمرین ۳۰-۲: ضریب انبساط خطی آلیاژ برنج (۶۵٪ مس و ۳۵٪ روی) از <math>40^{\circ}\text{C}</math> تا <math>925^{\circ}\text{C}</math> برابر <math>\frac{1}{^{\circ}\text{C}} \times 10^{-6} \times 16</math> است مطلوب است محاسبه و تعیین درصد اضافه مجاز انقباض در طراحی مدل و همچنین اندازه طول مدل، در صورتی که طول قطعه ریختگی ۷۵cm باشد.</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>

	<p>تمرین ۳۱-۲: قطعه‌ای مکعب مستطیل شکل به ابعاد <math>۱۰ \times ۶۰ \times ۲۰</math> سانتی‌متر از جنس آلیاژی از آلومینیم با ضریب انبساط خطی <math>\frac{1}{C} \times 10^{-6}</math> را می‌خواهیم ریخته‌گری کنیم، اگر نقطه ذوب آلیاژ <math>۶۳۰^{\circ}C</math> و دمای محیط <math>۲۷^{\circ}C</math> باشد مطلوبست :</p> <p>الف) محاسبه درصد اضافه مجاز انقباض</p> <p>ب) محاسبه ابعاد مدل این قطعه</p> <p>حل (توسط هنرجو):</p>
	<p>انقباض تئوری که در قسمت قبل نحوه محاسبه آن ارائه گردید معمولاً با توجه به مواردی با انقباض عملی متفاوت است. این موارد بستگی به نحوه سرد شدن مذاب، نوع انجماد، سرعت انجماد و درجه حرارت شروع انجماد، نوع قالب، ابعاد قالب، تنش تسلیم قالب، پیچیده یا ساده بودن قالب می‌باشند که باعث ایجاد اختلافاتی بین انقباض عملی و تئوری می‌شوند. بنابراین برای به‌دست آوردن انقباض عملی لازم است که درصد انقباض تئوری در یک ضریب (<math>k</math>) که به عوامل ذکر شده بستگی دارد، ضرب شود. به عبارت دیگر خواهیم داشت :</p> $\%s_{pr} = k \times \%s$ <p>که در آن :</p> <p><math>\%s_{pr}</math> : انقباض عملی برحسب درصد</p> <p><math>\%s</math> : انقباض تئوری برحسب درصد</p> <p><math>k</math> : ضریبی است که بستگی به عوامل ذکر شده دارد و معمولاً برای قالب‌های ماسه‌ای کوچک‌تر از یک می‌باشد.</p> <p>همان‌طوری که از جدول مشاهده می‌شود هرچه قدر که ابعاد قطعه ریختگی بزرگ‌تر و جرم قطعه بیشتر باشد، درصد انقباض آن کوچک‌تر خواهد بود.</p>

جدول ۳-۲- درصد اضافه مجاز انقباض خطی آلیاژها (عملی)

آلیاژ	اندازه قطعه ریختگی	جرم قطعه ریختگی kg	انقباض خطی %
چدن	کوچک	تا ۱۰۰	۰/۷۵-۱
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۰/۵-۱
	بزرگ و خیلی بزرگ	بیشتر از ۱۰۰۰	۰/۵-۰/۷۵
فولاد ساده کربنی	کوچک	تا ۱۰۰	۱/۵-۲/۲
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۱/۵-۲
	بزرگ و خیلی بزرگ	بیشتر از ۱۰۰۰	۱/۴-۱/۸
آلیاژهای مس	کوچک	تا ۱۰۰	۱/۵-۱/۸
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۱-۱/۵
	بزرگ	۱۰۰۰ تا ۵۰۰۰	۰/۷۵-۱
آلیاژهای آلومینیم و منیزیم	کوچک	تا ۱۰۰	۱-۱/۲
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۰/۷۵-۱
	بزرگ	۱۰۰۰ تا ۵۰۰۰	۰/۵-۱

### ۳-۳-۲- تغییرات چگالی نسبت به انبساط و انقباض اجسام :

با توجه به مطالب ذکر شده افزایش دما باعث انبساط حجمی اجسام می‌گردد به عبارت دیگر حجم اجسام افزایش می‌یابد. اما تغییر دما سبب تغییر جرم جسم نمی‌شود. مقدار جرم حجمی اجسام نسبت مستقیم با جرم و نسبت عکس با حجم اجسام دارد. با افزایش درجه حرارت، جرم تغییر نمی‌کند اما حجم افزایش می‌یابد با توجه به این که جرم حجمی نسبت عکس با حجم دارد، بنابراین افزایش حجم سبب کاهش جرم حجمی خواهد شد. براساس مطالب ذکر شده می‌توان رابطه ای به دست آورد که در محاسبات فنی کاربرد دارد و به صورت زیر می‌باشد:

$$V_p = V_1(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta) \quad \text{رابطه انبساط حجمی}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{جرم : } m$$

حجم :  $V$

$$\frac{\rho_1}{1} = \frac{m_1}{V_1} \quad \text{طرفین و وسطین انجام می‌دهیم}$$

$$\rho_1 \times V_1 = m_1 \times 1 \quad \text{طرفین تساوی را بر } \rho_1 \text{ تقسیم می‌کنیم}$$

$$\frac{\rho_1 V_1}{\rho_1} = \frac{m_1}{\rho_1}$$

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$$

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

با توجه به این که جرم جسم ثابت است یعنی  $m_1 = m_2 = m$  لذا خواهیم داشت :

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1} \text{ و } V_2 = \frac{m}{\rho_2}$$

که در آن :

$m$  : جرم قطعه

$V_1$  : حجم قطعه قبل از انبساط

$\rho_1$  : جرم حجمی قطعه قبل از انبساط

$V_2$  : حجم قطعه بعد از انبساط

$\rho_2$  : جرم حجمی قطعه بعد از انبساط

با توجه به این که بعد از انبساط، حجم قطعه افزایش می یابد، بنابراین جرم حجمی قطعه کاهش می یابد. چون جرم حجمی نسبت عکس با حجم دارد لذا جرم حجمی قبل از انبساط ( $\rho_1$ ) بزرگ تر از جرم حجمی بعد از انبساط

( $\rho_2$ ) می باشد یعنی  $\rho_1 > \rho_2$

با جای گذاری مقادیر  $V_1$  و  $V_2$  در رابطه انبساط حجمی خواهیم داشت :

$$V_2 = V_1(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

$$\frac{m}{\rho_2} = \frac{m}{\rho_1}(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

طرفین رابطه را بر  $m$  تقسیم می کنیم

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1}(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1}(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

طرفین رابطه را عکس می کنیم

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)}$$

با توجه به این که ضریب  $\bar{\gamma}$  مقدار بسیار کوچکی است می توان کسر  $\frac{1}{(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)}$  را با یک تقریب برابر با  $(1 - \bar{\gamma}\Delta\theta)$  قرار داد، بنابراین خواهیم داشت :

$$\rho_2 = \rho_1 \left( \frac{1}{(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)} \right) \approx \rho_1 (1 - \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

$$\rho_p = \rho_1(1 - \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

که در آن :

$$\begin{aligned} \rho_p &: \text{جرم حجمی جسم بعد از انبساط حرارتی بر حسب } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ یا } \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ \rho_1 &: \text{جرم حجمی جسم قبل از انبساط حرارتی بر حسب } \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ یا } \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \\ \bar{\gamma} &: \text{ضریب انبساط حجمی بر حسب } \frac{1}{^\circ\text{C}} \\ \Delta\theta &: \text{تغییرات درجه حرارت بر حسب } ^\circ\text{C} \end{aligned}$$

براساس روابط ذکر شده می‌توان رابطه دیگری به‌دست آورد که به کمک آن می‌توان درصد کاهش حجم جسم را نسبت به چگالی آن در درجه حرارت‌های  $\theta_1$  و  $\theta_p$  تعیین نمود.

$$\frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_1}\right) \times 100$$

تمرین ۲-۳۲: یک قطعه ریختگی از آلیاژ آلومینیم مورد نیاز است در صورتی که ضریب انبساط خطی این آلیاژ به‌طور متوسط  $\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 10^{-6} \times 25$  و نقطه ذوب آن  $620^\circ\text{C}$  باشد مطلوبست محاسبه و تعیین چگالی قطعه در نقطه ذوب در صورتی که چگالی آن در  $45^\circ\text{C}$  برابر  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} 3100$  باشد. همچنین درصد کاهش حجم قطعه نسبت به حجم مدل را به‌دست آورید.  
حل (توسط هنجرو):

مثال ۲-۲۳: یک قطعه ریختگی از آلیاژ برنج مورد نیاز است در صورتی که ضریب انبساط خطی این آلیاژ به‌طور متوسط  $\frac{1}{^\circ\text{C}} \times 10^{-6} \times 20$  و نقطه ذوب آن  $910^\circ\text{C}$  باشد مطلوب است : محاسبه و تعیین چگالی قطعه در نقطه ذوب در صورتی که چگالی آن در  $25^\circ\text{C}$  برابر  $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} 6/7$  باشد. همچنین درصد کاهش حجم قطعه نسبت به حجم مدل (یا قالب) را به‌دست آورید.  
حل:

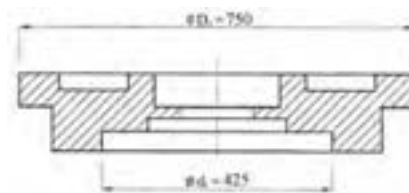
مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\rho_p = ?$	$\bar{\alpha} = 20 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$
$\frac{\Delta V}{V_1} = ?$	$\theta_i = 25^\circ\text{C}$
	$\theta_m = 910^\circ\text{C}$
	$\rho_1 = 6/7 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

	<p>مرحله ۲) نوشتن رابطه‌های مربوط به حل مسأله</p> $\rho_r = \rho_1(1 - \bar{\gamma}\Delta\theta)$ <p>مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول محاسبات ریاضی</p> $\rho_r = 6 / 7(1 - 20 \times 10^{-6} \times (910 - 25))$ $\rho_r = 6 / 7(1 - 20 \times 10^{-6} \times 885)$ $\rho_r = 6 / 7(1 - 0.0177)$ $\rho_r = 6 / 7 \times 0.9823$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\rho_r = 6 / 57 \text{ g/cm}^3</math> </div> <p>مرحله ۴) فرمول مربوطه نوشته می‌شود</p> $\frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \left(1 - \frac{\rho_r}{\rho_1}\right) \times 100$ $\frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \left(1 - \frac{6/57}{6/7}\right) \times 100$ $\frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = (1 - 0.9823) \times 100$ $\frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = 0.0177 \times 100$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = 1.77\%</math> </div>
	<p>تمرین ۲-۳۳: یک قطعه ریختگی از آلیاژ سیلومین مطابق نقشه زیر مورد نیاز است. در صورتی که ضریب انبساط خطی این آلیاژ به‌طور متوسط <math>\frac{1}{20} \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}</math> و نقطه ذوب آن <math>670^\circ\text{C}</math> باشد مطلوب است :</p> <p>الف) درصد اضافه مجاز انقباض خطی آلیاژ از نقطه ذوب تا درجه حرارت <math>22^\circ\text{C}</math></p>



ب) تعیین ابعاد مدل این قطعه بر حسب mm  
 ج) محاسبه و تعیین چگالی قطعه در نقطه ذوب  
 در صورتی که چگالی آن در  $۲۲^{\circ}\text{C}$  برابر  $۳/۲۵ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  باشد و همچنین درصد کاهش حجم قطعه نسبت به  
 حجم مدل را به دست آورید.



شکل ۵-۲- تعیین ابعاد مدل یک قطعه ریختگی

تمرین ۳۴-۲: ارتفاع یک استوانه فلزی در  $۲۵^{\circ}\text{C}$  برابر  $۲۵۰۰\text{ mm}$  و در  $۱۲۰^{\circ}\text{C}$  برابر  $۲/۵۱\text{ m}$  می‌باشد ضریب انبساط خطی متوسط این فلز را به دست آورید.  
حل (توسط هنجو):

مثال ۲۴-۲: طول یک میله فلزی در صفر درجه سانتی‌گراد  $۲۰۰۰\text{ mm}$  و در  $۱۰۰^{\circ}\text{C}$  برابر  $۲۰۰۳\text{ mm}$  می‌باشد ضریب انبساط خطی متوسط این فلز را به دست آورید.

حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\bar{\alpha} = ? \quad \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$	$\theta_1 = 0^{\circ}\text{C}$ $L_1 = 2000\text{ mm}$ $\theta_p = 100^{\circ}\text{C}$ $L_p = 2003\text{ mm}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه‌های مرتبط :

$$L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta)$$

$$\Delta\theta = \theta_p - \theta_1 \quad \text{می دانیم}$$

$$L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

$$2003 = 2000(1 + \bar{\alpha}(100 - 0))$$

$$2003 = 2000(1 + 100\bar{\alpha})$$

$$2003 = 2000 + 2000 \times 100\bar{\alpha}$$

$$2003 = 2000 + 200000\bar{\alpha}$$

عددهای معلوم در یک تساوی قرار می‌گیرند

$$2003 - 2000 = 200000\bar{\alpha}$$

$$3 = 200000\bar{\alpha}$$

طرفین را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم

$$\frac{3}{200000} = \frac{200000\bar{\alpha}}{200000}$$

$$\bar{\alpha} = 1/5 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$

تمرین ۲-۳۵: حجم یک مکعب فولادی در  $15^{\circ}\text{C}$  برابر  $2/5 \times 10^{-6} \text{ m}^3$  می باشد حجم آن را در  $450^{\circ}\text{C}$  حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد  $12/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$  می باشد.

حل (توسط هنجو):

مثال ۲-۲۵: حجم یک گلوله فولادی در  $0^{\circ}\text{C}$  برابر  $200 \text{ cm}^3$  می باشد حجم آن را در  $400^{\circ}\text{C}$  حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد  $12/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$  می باشد.

حل:

مرحله (۱) داده ها و خواسته ها را به طور خلاصه و همراه با واحدها می نویسیم

خواسته ها	داده ها
$V_p = ? \text{ cm}^3$	$\theta_1 = 0^{\circ}\text{C}$ $V_1 = 200 \text{ cm}^3$ $\theta_p = 400^{\circ}\text{C}$ $\bar{\alpha} = 12/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$

مرحله (۲) رابطه مرتبط با حل مسأله نوشته می شود

$$V_p = V_1(1 + \bar{\gamma}\Delta\theta)$$

می دانیم  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$  و  $\bar{\gamma} = 3\bar{\alpha}$  خواهیم داشت:

$$V_p = 200(1 + 3 \times 12/5 \times 10^{-6} (400 - 0))$$

مرحله (۳) محاسبات ریاضی

$$V_p = 200(1 + 37/5 \times 10^{-6} \times 400)$$

$$V_p = 200(1 + 0/015)$$

$$V_p = 200 \times 1/015$$

$$V_p = 203 \text{ cm}^3$$

تمرین ۳۶-۲: یک ورق آلومینیومی که طول و عرض آن در  $35^{\circ}\text{C}$  به ترتیب  $90\text{cm}$  و  $65\text{cm}$  می‌باشد تا  $145^{\circ}\text{C}$  گرم کرده ایم، سطح ورق را پس از انبساط برحسب  $\text{m}^2$  حساب کنید ( $\bar{\alpha} = 23 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$ )  
حل (توسط هنجرو):

مثال ۲۶-۲: یک ورق آهنی به شکل مستطیل را که طول و عرض آن در  $25^{\circ}\text{C}$  به ترتیب  $0.8\text{m}$  و  $0.4\text{m}$  می‌باشد تا  $125^{\circ}\text{C}$  گرم کرده ایم، سطح ورق را پس از انبساط برحسب  $\text{cm}^2$  حساب کنید،  
$$\bar{\alpha} = 12 / 5 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$$
  
حل:

مرحله (۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه

می‌نویسیم

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_p = ? \text{ cm}^2$	$0.8\text{m} = \text{طول ورق}$ $0.4\text{m} = \text{عرض ورق}$ $\theta_p = 125^{\circ}\text{C}$ $\bar{\alpha} = 12 / 5 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$ $\theta_1 = 25^{\circ}\text{C}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوطه :

$$A_p = A_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta)$$

می‌دانیم که  $\Delta\theta = \theta_p - \theta_1$

$$A_1 = 0.4 \times 0.8 = 0.32\text{m}^2 \quad \text{مساحت مستطیل}$$

قبل از انبساط

$$A_p = 0.32(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$A_p = 0.32(1 + 12 \times 10^{-6} \times (125 - 25))$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی

$$A_p = 0.32(1 + 12 \times 10^{-6} \times 100)$$

$$A_p = 0.32(1 + 12 / 5 \times 10^{-3})$$

	$A_p = 0 / 32(1 / 0025)$ $A_p = 0 / 3208m^2$ <p>چون جواب را برحسب <math>cm^2</math> خواسته است لذا <math>m^2</math> را به <math>cm^2</math> تبدیل می‌کنیم</p> $1m^2 = 10000cm^2$ $A_p = 0 / 3208m^2$ $A_p = 0 / 3208 \times (10000cm^2)$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> <math display="block">A_p = 3208cm^2</math> </div>							
<p>تمرین ۳۷-۲: طول یک قطعه فلزی در <math>15^\circ C</math> برابر <math>15dm</math> و در <math>120^\circ C</math> برابر <math>15/03dm</math> می‌باشد.</p> <p>الف) تغییر طول این قطعه را در این فاصله دمایی مشخص کنید (برحسب mm)</p> <p>ب) ضریب انبساط خطی متوسط این قطعه را به‌دست آورید.</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۲۷-۲: طول یک میله فلزی در <math>0^\circ C</math> برابر <math>1000mm</math> و در <math>100^\circ C</math> برابر <math>1001/5</math> می‌باشد</p> <p>الف) تغییر طول این میله را در این فاصله دمایی مشخص کنید.</p> <p>ب) ضریب انبساط خطی متوسط (<math>\bar{\alpha}</math>) این فلز را به‌دست آورید.</p> <p>حل:</p> <p>داده‌ها و خواسته مسأله را به‌صورت خلاصه می‌نویسیم</p> <table border="1" style="margin: 10px auto; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="padding: 5px;">داده‌ها</th><th style="padding: 5px;">خواسته‌ها</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_1 = 0^\circ C</math></td><td rowspan="4" style="padding: 5px; vertical-align: top;"> <math>\Delta L = ?</math>   <math>\bar{\alpha} = ?</math> </td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>L_1 = 1000mm</math></td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>\theta_p = 100^\circ C</math></td></tr> <tr> <td style="padding: 5px;"><math>L_p = 1001/5</math></td></tr> </tbody> </table> <p>مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به مسأله</p> $L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta)$	داده‌ها	خواسته‌ها	$\theta_1 = 0^\circ C$	$\Delta L = ?$  $\bar{\alpha} = ?$	$L_1 = 1000mm$	$\theta_p = 100^\circ C$	$L_p = 1001/5$
داده‌ها	خواسته‌ها							
$\theta_1 = 0^\circ C$	$\Delta L = ?$  $\bar{\alpha} = ?$							
$L_1 = 1000mm$								
$\theta_p = 100^\circ C$								
$L_p = 1001/5$								

	$L_p = L_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$ <p>مرحله ۳) جای گذاری مقادیر داده ها در فرمول</p> $1001/5 = 1000(1 + \bar{\alpha}(100 - 0))$ $1001/5 = 1000(1 + 100\bar{\alpha})$ $1001/5 = 1000 + 100000\bar{\alpha}$ $1001/5 - 1000 = 100000\bar{\alpha}$ $1/5 = 100000\bar{\alpha}$ <p>طرفین تساوی را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم</p> $\frac{1/5}{100000} = \frac{100000\bar{\alpha}}{100000}$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\bar{\alpha} = 1/5 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}</math> </div> $\Delta L = L_p - L_1$ $\Delta L = 1001/5 - 1000$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <math display="block">\Delta L = 1/5 \text{ mm}</math> </div>
<p>تمرین ۳۸-۲: ارتفاع یک مخروط مسی در <math>10^{\circ}\text{C}</math> برابر <math>3/5 \text{ m}</math> است. اختلاف ارتفاع آن را در دماهای <math>50^{\circ}\text{C}</math> و <math>-20^{\circ}\text{C}</math> به دست آورید. <math>\alpha = 18 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}</math> حل (توسط هنجو):</p>	<p>مثال ۲۸-۲: قطر یک میله فولادی در <math>0^{\circ}\text{C}</math> برابر <math>25 \text{ mm}</math> است. اختلاف قطر آن را در دماهای <math>30^{\circ}\text{C}</math> و <math>40^{\circ}\text{C}</math> به دست آورید. <math>\bar{\alpha} = 12/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}</math> فولاد</p> <p>حل:</p> <p>۱) داده ها و خواسته ها را به طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می شود</p>

خواسته‌ها	داده‌ها
$D_p = ?$ mm قطر میله در $-30^\circ\text{C}$	$\theta_1 = 0$ $D_1 = 25$
$D_s = ?$ mm قطر میله در $40^\circ\text{C}$	$\theta_p = -30$ $\theta_s = 40^\circ\text{C}$
$D_s - D_p = ?$ $\Delta D = ?$	$\bar{\alpha} = 12/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

نکته: در این مسأله باید یک بار قطر میله را با استفاده از رابطه انبساط حرارتی خطی در  $-30^\circ\text{C}$  به دست آورید و یک بار نیز قطر میله را در  $40^\circ\text{C}$  به دست آورید، سپس برای به دست آوردن اختلاف قطر، تفاضل این دو را حساب می‌کنیم.

مرحله ۲) نوشتن رابطه برای محاسبه  $D_p$  :

$$D_p = D_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta_1)$$

می‌دانیم که  $\Delta\theta_1 = \theta_p - \theta_1$  لذا خواهیم داشت :

$$D_p = D_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_p - \theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$D_p = 25(1 + 12/5 \times 10^{-6}(-30 - 0))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$D_p = 25(1 + 12/5 \times 10^{-6}(-30))$$

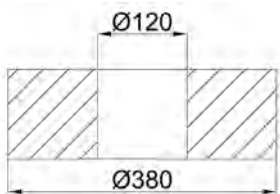
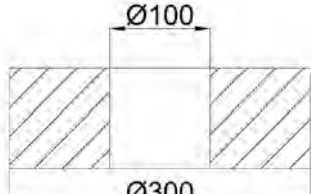
$$D_p = 25(1 + (-3/75 \times 10^{-4}))$$

$$D_p = 25 \times 0.99625$$

$D_p = 24.91 \text{ mm}$

مرحله ۵) نوشتن رابطه برای محاسبه  $D_s$  :

$$D_s = D_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta_p)$$

	<p>می دانیم که <math>\Delta\theta_p = \theta_s - \theta_1</math> لذا خواهیم داشت :</p> $D_p = D_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_s - \theta_1))$ <p>مرحله ۶) جای گذاری مقادیر داده ها در فرمول فوق</p> $D_p = 25(1 + 12/5 \times 10^{-6}(40 - 0))$ <p>مرحله ۷) محاسبات ریاضی</p> $D_p = 25(1 + 12/5 \times 10^{-6} \times 40)$ $D_p = 25(1 + 0/0005)$ $D_p = 25 \times 1/0005$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>D_p = 25/0125mm</math> </div> <p>حال برای به دست آوردن اختلاف قطر، تفاضل <math>D_p</math> و <math>D_s</math> را به دست می آوریم.</p> $\Delta D = D_s - D_p$ $\Delta D = 25/0125 - 24/991$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math>\Delta D = 0/0215mm</math> </div>
<p>تمرین ۳۹-۲: یک قطعه از جنس فولاد مطابق شکل زیر مورد نیاز است در صورتی که ضریب انبساط خطی آن برابر <math>\frac{1}{C} \times 10^{-6} = 14</math> و نقطه ذوب فولاد <math>1650^{\circ}C</math> باشد مطلوب است :</p> <p>الف) محاسبه درصد انقباض خطی این آلیاژ از نقطه ذوب تا درجه حرارت <math>20^{\circ}C</math></p> <p>ب) تعیین قطر داخلی و خارجی</p>  <p style="text-align: center;">شکل ۷-۲</p>	<p>مثال ۲۹-۲: یک قطعه از جنس آلومینیم مطابق شکل زیر مورد نیاز است در صورتی که ضریب انبساط خطی آن برابر <math>\frac{1}{C} \times 10^{-6} = 24</math> باشد و نقطه ذوب آلومینیم <math>659^{\circ}C</math> باشد مطلوب است :</p> <p>الف) محاسبه درصد انقباض خطی این آلیاژ از نقطه ذوب تا درجه حرارت محیط (<math>29^{\circ}C</math>)</p> <p>ب) تعیین قطر داخلی و خارجی</p>  <p style="text-align: center;">شکل ۶-۲</p>



حل (توسط هنجرو):

حل:

(۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با

واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
%s = ?	$\bar{\alpha} = 24 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$
$d_p = ?$ قطر داخلی	$\theta_m = 659^{\circ}\text{C}$
مدل	$\theta_i = 29^{\circ}\text{C}$
$D_p = ?$ قطر خارجی	قطر داخلی $d_i = 100\text{mm}$
مدل	قطر خارجی $D_i = 300\text{mm}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوط به محاسبه درصد

انقباض :

$$\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i) \times 100$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$\%s = 24 \times 10^{-6} (659 - 29) \times 100$$

مرحله (۴) محاسبه ریاضی :

$$\%s = 24 \times 10^{-6} \times 630 \times 100$$

$$\%s = 1.512$$

مرحله (۵) نوشتن رابطه مربوط به محاسبه قطر

داخلی مدل ( $d_p$ ) :

$$d_p = d_i \left(1 + \frac{\%s}{100}\right)$$

مرحله (۶) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$d_p = 100 \left(1 + \frac{1.512}{100}\right)$$

مرحله (۷) محاسبات ریاضی

$$d_p = 100 (1 + 0.01512)$$

	<p><math>d_p = 100 \times 1 / 0.1512</math></p> <p>قطر داخلی <math>d_p = 101 / 0.1512 \text{ mm}</math></p> <p>مرحله ۸) نوشتن رابطه برای محاسبه قطر خارجی مدل <math>(D_p)</math> :</p> <p><math>D_p = D_1 (1 + \frac{\%S}{100})</math></p> <p>مرحله ۹) جای گذاری مقادیر داده ها در رابطه فوق</p> <p><math>D_p = 300 (1 + \frac{1 / 0.1512}{100})</math></p> <p>مرحله ۱۰) محاسبات ریاضی</p> <p><math>D_p = 300 (1 + 0.00658)</math></p> <p><math>D_p = 300 \times 1.00658</math></p> <p>قطر خارجی <math>D_p = 302 / 0.1512 \text{ mm}</math></p>										
<p>تمرین ۴۰-۲: ضریب انبساط خطی متوسط یک آلیاژ روی از <math>35^\circ\text{C}</math> تا درجه حرارت ذوب آن <math>380^\circ\text{C}</math> برابر <math>\frac{1}{100} \times 10^{-6}</math> می باشد مطلوبست :</p> <p>الف) محاسبه و تعیین درصد انقباض مجاز این آلیاژ</p> <p>ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ۲۵ dm باشد</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۳۰-۲: ضریب انبساط خطی متوسط یک آلیاژ برنج از <math>25^\circ\text{C}</math> دمای محیط تا درجه حرارت ذوب برنج <math>925^\circ\text{C}</math> برابر <math>\frac{1}{100} \times 10^{-6}</math> می باشد مطلوبست :</p> <p>الف) محاسبه و تعیین درصد انقباض مجاز این برنج</p> <p>ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ۲۰ cm باشد.</p> <p>حل:</p> <p>۱) داده ها و خواسته ها به صورت خلاصه و همراه با واحدها نوشته می شود</p> <table border="1" data-bbox="788 1545 1364 1872"> <thead> <tr> <th>خواسته ها</th><th>داده ها</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\%S = ?</math></td><td><math>\theta_i = 25^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td><math>L_p = ?</math> طول مدل</td><td><math>\theta_m = 925^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td></td><td><math>\bar{\alpha} = 10^{-6} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}</math></td></tr> <tr> <td></td><td><math>L_1 = 20 \text{ cm}</math> طول قطعه</td></tr> </tbody> </table>	خواسته ها	داده ها	$\%S = ?$	$\theta_i = 25^\circ\text{C}$	$L_p = ?$ طول مدل	$\theta_m = 925^\circ\text{C}$		$\bar{\alpha} = 10^{-6} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$		$L_1 = 20 \text{ cm}$ طول قطعه
خواسته ها	داده ها										
$\%S = ?$	$\theta_i = 25^\circ\text{C}$										
$L_p = ?$ طول مدل	$\theta_m = 925^\circ\text{C}$										
	$\bar{\alpha} = 10^{-6} \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$										
	$L_1 = 20 \text{ cm}$ طول قطعه										

	<p>مرحله ۲) نوشتن رابطه برای محاسبه درصد انقباض</p> $\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i) \times 100$ <p>مرحله ۳) جای گذاری مقادیر داده ها در رابطه فوق</p> $\%s = 20 \times 10^{-6} (925 - 25) \times 100$ <p>مرحله ۴) محاسبات ریاضی</p> $\%s = 20 \times 10^{-6} \times 900 \times 100$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math display="block">\%s = \%1/\Lambda</math> </div> <p>مرحله ۵) نوشتن رابطه برای محاسبه اندازه طول مدل <math>(L_p)</math> :</p> $L_p = L_1 \left(1 + \frac{\%s}{100}\right)$ <p>مرحله ۶) جای گذاری مقادیر داده ها در رابطه فوق</p> $L_p = 200 \left(1 + \frac{1/\Lambda}{100}\right)$ <p>مرحله ۷) محاسبات ریاضی :</p> $L_p = 200(1 + 0/018)$ $L_p = 200 \times 1/018$ <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;"> <math display="block">L_p = 203/6 \text{ cm}</math> </div>
<p>تمرین ۴۱-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع چدن به طور متوسط از درجه حرارت محیط <math>25^\circ\text{C}</math> تا نقطه ذوب <math>1550^\circ\text{C}</math> برابر است با <math>\frac{1}{100} \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}</math></p> <p>الف) درصد اضافه مجاز انقباض در طراحی مدل برای قطعه ای از این آلیاژ را حساب کنید</p> <p>ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ۱m باشد را به دست آورید.</p> <p>حل (توسط هنجرو):</p>	<p>مثال ۳۱-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع آلیاژ برنج به طور متوسط از درجه حرارت محیط <math>(\theta_i = 20^\circ\text{C})</math> تا نقطه ذوب <math>\theta_m = 980^\circ\text{C}</math> برابر است با <math>\frac{1}{100} \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}</math></p> <p>مطلوبست محاسبه و تعیین :</p> <p>الف) درصد اضافه مجاز انقباض در طراحی مدل برای قطعه ای از این آلیاژ</p> <p>ب) اندازه طول مدل در صورتی که طول قطعه ۸۰cm باشد.</p>

حل:

(۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با

واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\theta_i = 20^{\circ}\text{C}$	$\theta_m = 98.0^{\circ}\text{C}$
$\%S = ?$	$\bar{\alpha} = 2.0 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}\text{C}}$
$L_p = ? \text{ cm}$	$L_i = 8.0 \text{ cm}$

مرحله (۲) نوشتن رابطه مربوط به درصد اضافه مجاز

انقباض:

$$\%S = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i) \times 100$$

مرحله (۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$\%S = 2.0 \times 10^{-6} (98.0 - 20) \times 100$$

مرحله (۴) محاسبات ریاضی

$$\%S = 2.0 \times 10^{-6} \times 96.0 \times 100$$

$$\%S = 0.192$$

مرحله (۵) نوشتن رابطه مربوط به محاسبه طول مدل

$(L_p)$ :

$$L_p = L_i \left( 1 + \frac{\%S}{100} \right)$$

مرحله (۶) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$L_p = 8.0 \left( 1 + \frac{0.192}{100} \right)$$

$$L_p = 8.0 (1 + 0.00192)$$

$$L_p = 8.0 \times 1.00192$$

$$L_p = 8.01536 \text{ cm}$$