

چند ضلعی ها



پل طبیعت، تهران

■ همه هنرمندان و معماران با هر سبک و در هر رشته به دنبال آن هستند که دیدگاه‌های خود را از زندگی و جهان اطراف در آنچه خلق می‌کنند و می‌سازند به نوعی به نمایش بگذارند. هندسه و به‌ویژه چندضلعی‌ها یکی از ابزارهای مهمی هستند که به کمک آنها می‌توان این آثار را پدید آورد.

چندضلعی ها و ویژگی هایی از آنها

با پاره خط قبلاً آشنا شده اید. مطابق شکل زیر در پاره خط AB ، نقطه های A و B را دو سر پاره خط یا نقاط انتهایی پاره خط می نامند.



به شکل های روبه رو توجه کنید. هر شکل از تعدادی پاره خط تشکیل شده است؛ اما نقاط مشترک پاره خط ها در همه شکل ها با هم یکسان نیستند.

در شکل (۳) دو پاره خط AE و FC یکدیگر را در نقطه ای به جز نقاط انتهایی شان قطع کرده اند. در شکل (۴) پاره خط DE فقط در یک انتها بعضی پاره خط ها را قطع کرده و در انتهای دیگر هیچ پاره خطی را قطع نکرده است. اما در شکل های (۱) و (۲) هر پاره خط فقط دو پاره خط دیگر را آن هم در نقاط انتهایی قطع کرده است. چنین شکل های بسته ای را که از اجتماع پاره خط های متوالی هم تشکیل شده است، چند ضلعی می نامند. در تمام این فصل شکل ها در صفحه در نظر گرفته می شوند.

تعریف: چندضلعی شکلی است شامل n ($n \geq 3$) پاره خط متوالی که:

(۱) هر پاره خط، دقیقاً دو پاره خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند.

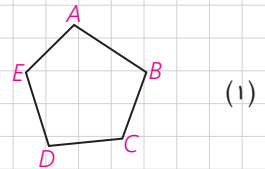
(۲) هر دو پاره خط که در یک انتها مشترک اند، روی یک خط نباشند.

هر یک از این پاره خط ها یک ضلع چند ضلعی است.

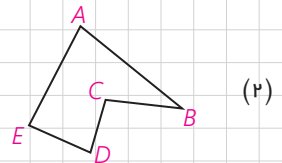
هر دو ضلع چندضلعی را که در یک انتها مشترک اند، دو ضلع مجاور و نقطه مشترک آن دو را رأس می نامند. هر دو زاویه چندضلعی را که هر دو در یک ضلع چندضلعی مشترک اند، دو زاویه مجاور به آن ضلع در چندضلعی می نامند. مانند $\angle A$ و $\angle B$ در شکل های (۱) و (۲)

هر گاه تعداد ضلع های چند ضلعی n تا باشد، آن را n ضلعی می نامند.

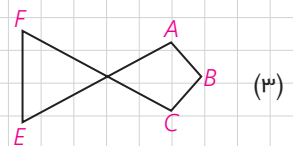
کدام یک از شکل های مقابل چند ضلعی است و تعداد ضلع ها و رأس های آن چند تا است؟ برخی ضلع های مجاور هم و غیر مجاور هم را مشخص کنید.



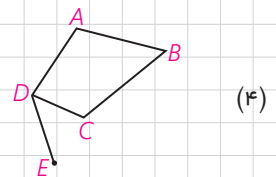
(۱)



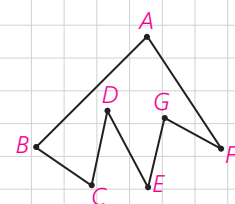
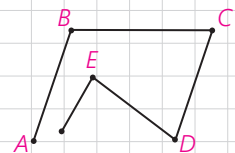
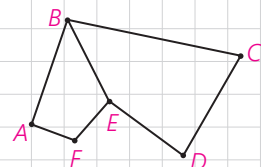
(۲)



(۳)



(۴)



■ قطر در چندضلعی‌ها

در هر n ضلعی، هر پاره‌خط را که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشند، قطر می‌نامند.

یک چهار ضلعی چند قطر دارد؟

n ضلعی $A_1A_2 \dots A_n$ را در نظر می‌گیریم. از رأس A_1 ، قطر می‌توان رسم کرد. با توجه به اینکه n رأس داریم، آیا می‌توان گفت تعداد قطرهای در n ضلعی $n(n-3)$ است؟

با این فرمول، مستطیل چند قطر دارد؟

آیا جواب به دست آمده درست است؟

با چه تغییری در این فرمول به فرمول درست محاسبه قطرهای می‌رسیم؟ چرا این تغییر لازم است؟

در هر n ضلعی تعداد قطرهای $\frac{n(n-3)}{2}$ است.

کاردرکلاس

n نقطه که هیچ سه‌تای آنها روی یک خط واقع نیستند، مفروض‌اند. با توجه به استدلالی که در محاسبه تعداد قطرهای n ضلعی به کار برده‌اید، نشان دهید از هر نقطه به نقاط دیگر پاره‌خط رسم می‌شود. بنابراین، این n نقطه را با پاره‌خط می‌توان به هم متصل کرد. چه رابطه‌ای بین این تعداد پاره‌خط و مجموع تعداد قطرهای و ضلع‌ها در n ضلعی وجود دارد؟

تعریف: n ضلعی را محدب گوییم؛ هرگاه با در نظر گرفتن خط شامل هر ضلع آن، بقیه نقاط چندضلعی در یک طرف آن خط واقع شوند.

هر «چندضلعی» را که محدب نباشد، مقعر می‌نامند.



■ چهارضلعی‌های مهم و ویژگی‌هایی از آنها

در چهارضلعی $ABCD$ در شکل، دو ضلع AB و CD ، همچنین دو ضلع AD و BC را ضلع‌های مقابل می‌نامند. در چهارضلعی هر دو ضلع غیرمجاور را دو ضلع مقابل می‌نامند.

ابتدا تعریف چهارضلعی‌های مهم را بیان می‌کنیم.

تعاریف‌ها:

- ۱- متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که، هر دو ضلع مقابل آن موازی باشند.
- ۲- مستطیل چهارضلعی‌ای است که، همهٔ زاویه‌های آن قائمه باشند.
- ۳- لوزی چهارضلعی‌ای است که، هر چهار ضلع آن هم‌اندازه باشند.
- ۴- مربع چهارضلعی‌ای است که هر چهار ضلع آن هم‌اندازه و حداقل یک زاویهٔ آن قائمه باشد.

کاردرکلاس

با توجه به تعریف‌های بالا درستی هریک از عبارت‌های زیر را توجیه کنید:

الف) مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) اگر در متوازی‌الاضلاع یک زاویه قائمه باشد، مستطیل است؛ چرا؟

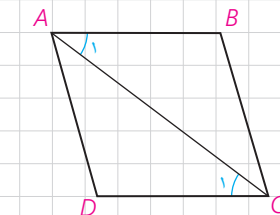
پ) لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

در لوزی $ABCD$ قطر AC را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADC به حالت هم‌نهشت‌اند. بنابراین دو زاویه و هم‌اندازه‌اند.

در نتیجه دو ضلع AB و CD موازی‌اند. به همین ترتیب دو ضلع مقابل AD و BC نیز موازی‌اند. یعنی لوزی متوازی‌الاضلاع است.

بنابراین، لوزی متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع مجاور آن هم‌اندازه باشند.

ت) مربع یک متوازی‌الاضلاع است.



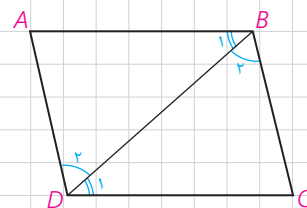
■ ویژگی‌هایی از متوازی‌الاضلاع

۱ فعالیت

متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را در نظر بگیرید و قطر BD را رسم کنید. از موازی بودن ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

دو مثلث ABD و CDB به حالت هم‌نهشت‌اند.

در نتیجه، $AD = \dots\dots\dots$ و $AB = \dots\dots\dots$.



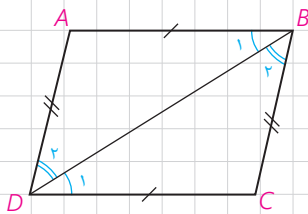
بنابراین قضیه زیر ثابت شده است؛

قضیه ۱: در هر متوازی الاضلاع هر دو ضلع مقابل هم اندازه اند.

کاردکلاس

در فعالیت (۱) مشاهده کردیم که وقتی در هر متوازی الاضلاع ABCD یک قطر مثلاً قطر BD را رسم می کنیم. دو مثلث هم نهشت ABD و CDB پدید می آیند. حال پرسش این است، اگر در یک چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم کنیم و $\triangle ABD$ و $\triangle CDB$ هم نهشت باشند، آیا چهارضلعی ABCD همواره متوازی الاضلاع است؟ اگر چنین است، آن را ثابت کنید و اگر نادرست است، مثال نقض بیاورید.

عکس قضیه ۱: اگر در یک چهارضلعی، ضلع های مقابل دویه دو هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.



در چهارضلعی ABCD قطر BD را رسم می کنیم. به حالت، $\triangle ABD \cong \triangle CDB$. از هم نهشتی این دو مثلث نتیجه می گیریم، اندازه $\angle B_1$ برابر اندازه است.

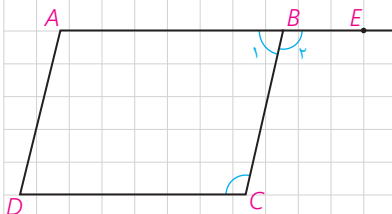
بنابراین ضلع AB موازی ضلع است. از چه قضیه ای آن را نتیجه گرفته اید؟

موازی بودن دو ضلع دیگر یعنی ضلع های AD و BC را چگونه نتیجه می گیرید؟ بنابراین چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

۲ فعالیت

چهارضلعی ABCD متوازی الاضلاع است. با توجه به شکل، $\angle B_1 = \angle C$ است؛ چرا؟ $\angle B_1$ و $\angle B_2$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ بنابراین $\angle C$ و می باشند. بنابراین قضیه زیر ثابت شده است؛

قضیه ۲: در متوازی الاضلاع هر دو زاویه مجاور مکمل اند.



عکس قضیه ۲: هر چهارضلعی که هر دو زاویه مجاور آن مکمل باشند، متوازی الاضلاع است.

در چهارضلعی ABCD، دو زاویه $\angle B$ و $\angle C$ با هم مکمل اند. در این صورت ضلع AB موازی ضلع است.
به همین ترتیب دو زاویه $\angle A$ و $\angle B$ نیز مکمل اند. در نتیجه، ضلع AD موازی ضلع است؛ بنابراین چهارضلعی ABCD است.

قضیه ۳: در هر متوازی الاضلاع، هر دو زاویه مقابل هم اندازه اند.

با توجه به قضیه قبل آن را ثابت کنید.
می توانید از فعالیت (۱) نیز استفاده کنید.

عکس قضیه ۳: اگر در یک چهارضلعی هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند، چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

فرض کنیم در چهارضلعی ABCD هر دو زاویه مقابل هم اندازه باشند. یعنی $\angle B$ و $\angle D$ و همچنین $\angle A$ و $\angle C$ هم اندازه اند. می دانیم مجموع اندازه های زاویه های درونی هر چهارضلعی محدب 360° است. چگونه به کمک آن ثابت می کنید هر دو زاویه مجاور مثلاً $\angle B$ و $\angle C$ مکمل اند؟
بنابراین به کمک عکس قضیه ۲ ثابت کرده اید چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

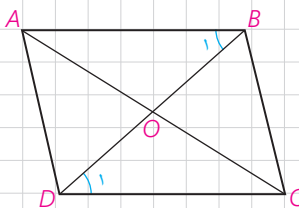
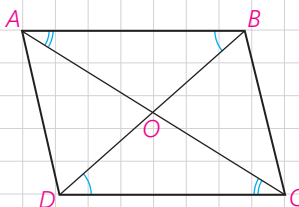
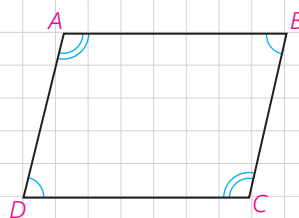
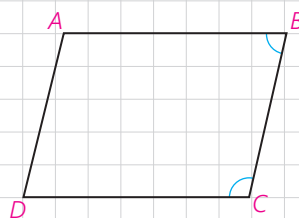
۳ فعالیت

در متوازی الاضلاع ABCD، دو قطر AC و BD را رسم می کنیم و نقطه تلاقی آن دو را O می نامیم. $\triangle AOB \cong \triangle COD$. چرا؟
بنابراین، $OA = \dots\dots$ و $OB = \dots\dots$. در نتیجه؛

قضیه ۴: در هر متوازی الاضلاع قطرها

۴ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو قطر منصف یکدیگر باشند. چگونه نشان می دهید این چهارضلعی متوازی الاضلاع است؟



نقطه تقاطع دو قطر را O می‌نامیم. $\triangle AOB \cong \triangle OCD$. چرا؟

اندازه $\angle B_1$ برابر اندازه است. در نتیجه، ضلع AB موازی ضلع است. دو مثلث دیگر را در نظر بگیرید و به طور مشابه نشان دهید دو ضلع دیگر نیز موازی‌اند.
بنابراین؛

عکس قضیه ۴: هر چهار ضلعی که قطرهای آن منصف یکدیگر باشند، متوازی‌الاضلاع است.

۵ فعالیت

فرض کنید در یک چهارضلعی دو ضلع مقابل موازی و هم‌اندازه باشند. مثلاً در چهارضلعی ABCD، ضلع‌های AB و CD هم‌اندازه و موازی‌اند. قطر AC را رسم می‌کنیم.

اندازه $\angle A_1$ با اندازه برابر است.

بنابراین، بنا بر حالت هم‌نهشتی، $\triangle ABC \cong \triangle CDA$.

در نتیجه اندازه $\angle A_2$ برابر اندازه زاویه است که از آن نتیجه می‌گیرید ضلع AD موازی ضلع است. بنابراین، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است. یعنی؛

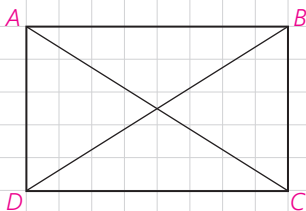
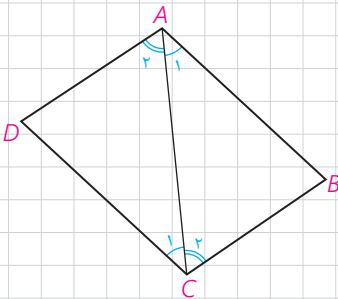
هر چهارضلعی که دو ضلع مقابل آن هم‌اندازه و موازی باشند، متوازی‌الاضلاع است.

ویژگی‌هایی از مستطیل و لوزی

کدام ویژگی از مستطیل است که در هر متوازی‌الاضلاعی که مستطیل نباشد، برقرار نیست؟ در مورد مربع چطور؟

در مستطیل ABCD، دو قطر را رسم می‌کنیم. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث می‌توان نتیجه گرفت $AC=BD$ ؟ این هم‌نهشتی را نشان دهید.

بنابراین در هر مستطیل قطرها



اگر دو قطر یک چهارضلعی هم اندازه باشند، آیا می توان نتیجه گرفت آن چهارضلعی مستطیل است؟

اگر این چهارضلعی متوازی الاضلاع باشد، چطور؟ آن را با دلیل بیان کنید.

۶ فعالیت

ویژگی مهمی در مثلث قائم الزاویه

مثلث قائم الزاویه ABC را که در آن $\angle A$ قائمه است و AM میانه وارد بر وتر است در نظر می گیریم.

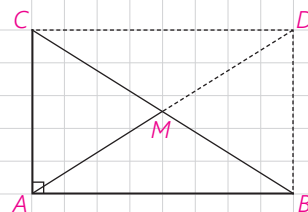
روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می گیریم که $AM = MD$.

چرا چهارضلعی $ABDC$ متوازی الاضلاع است؟

چرا این چهارضلعی مستطیل است؟

در مورد قطرها چه نتیجه ای می گیرید؟

اندازه AM چه رابطه ای با اندازه BC دارد؟ آن را بیان کنید.



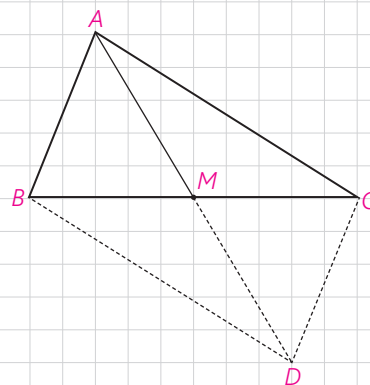
در هر مثلث قائم الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر اندازه وتر است.

می توانیم عکس این ویژگی را نیز ثابت کنیم.

اگر در مثلثی اندازه میانه وارد بر یک ضلع، نصف اندازه آن ضلع باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

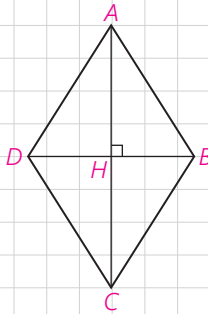
در مثلث ABC ، AM میانه وارد بر ضلع BC است و $AM = \frac{BC}{2}$. روی نیم خط AM نقطه D را چنان در نظر می گیریم که $MD = AM$.

آیا می توانید نتیجه بگیرید $AD = BC$ و قطرها AD و BC منصف یکدیگرند؟ چگونه نتیجه می گیرید $\angle A$ قائمه است؟



ویژگی‌هایی که فقط در لوزی برقرارند

آیا می‌توانید یک ویژگی از لوزی را بیان کنید که در هر متوازی‌الاضلاع یا هر مستطیل، که لوزی نیست، برقرار نباشد؟

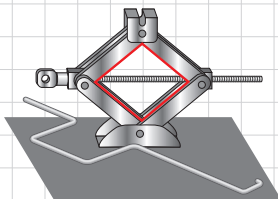


قطرهای لوزی ABCD را رسم می‌کنیم. چون لوزی متوازی‌الاضلاع است، قطرهای منصف یکدیگرند. $\triangle ABD$ چه نوع مثلثی است؟
نقطه تلاقی دو قطر را H می‌نامیم، در مثلث ABD، AH چه پاره خطی است؟
چرا پاره خط AH بر قطر BD عمود است و روی نیمساز $\angle A$ است؟
بنابراین؛

در هر لوزی قطرهای یکدیگرند و قطرهای روی
زاویه‌ها می‌باشند.

کاردرکلاس

- ۱- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که قطرهای آن بر هم عمود باشند، لوزی است.
 - ۲- نشان دهید متوازی‌الاضلاعی که در آن لااقل یک قطر روی نیمساز یک زاویه آن باشد، لوزی است.
- اکنون با توجه به ویژگی‌های مستطیل و لوزی نشان دهید در چه صورت مستطیل یا لوزی، مربع است.



در شکل یک جک اتومبیل را می‌بینید. چهار بازوی آن یک لوزی تشکیل می‌دهند. آیا حالتی از جک وجود دارد که به شکل مربع درآید؟
اگر دو بازوی بالا با هم و دو بازوی پایین نیز با هم اندازه‌های مساوی داشته باشند، اما شکل جک لوزی نباشد، هنگام بسته‌شدن جک وقتی بخواهیم دو بازوی بالا روی دو بازوی پایین قرار گیرند چه مشکلی ایجاد می‌شود؟

دوزنقه

دوزنقه چهارضلعی‌ای است که با چهارضلعی‌هایی که قبلاً بررسی کردیم، کمی متفاوت است.

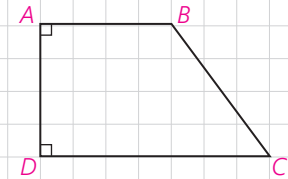
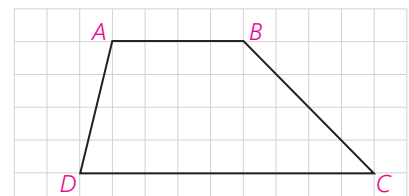
تعریف: دوزنقه چهارضلعی‌ای است که فقط دو ضلع آن موازی باشند.

هر یک از دو ضلع AB و CD را که موازی‌اند، قاعده و هر یک از دو ضلع غیرموازی را ساق می‌نامند. از موازی بودن قاعده‌های AB و CD و قاطع‌های BC و AD در مورد زاویه‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

زاویه‌های $\angle A$ و $\angle D$ هستند. همچنین زاویه‌های $\angle B$ و $\angle C$ هستند.

اگر در یک دوزنقه اندازه‌های دو ساق برابر باشند، آن را دوزنقه متساوی‌الساقین می‌نامند.

هرگاه در یک دوزنقه یک ساق بر یکی از قاعده‌ها عمود باشد، مسلماً بر قاعده دیگر نیز عمود است؛ چرا؟
در این صورت دوزنقه را قائم‌الزاویه می‌نامند.

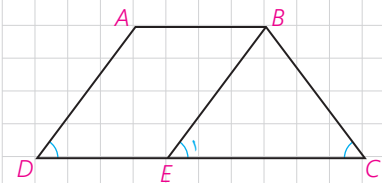


۷ فعالیت

دوزنقه متساوی‌الساقین $ABCD$ را که در آن $AD = BC$ است، در نظر می‌گیریم. از رأس B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده DC را در E قطع کند. این صورت چهارضلعی $ABED$ است.
چرا دو زاویه $\angle D$ و $\angle E$ هم اندازه‌اند؟

$BC = BE$ چرا؟

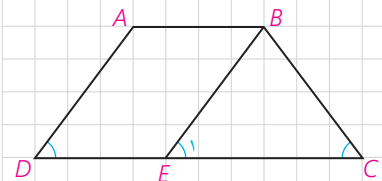
بنابراین اندازه $\angle E$ برابر اندازه است.
اکنون $\angle C$ و $\angle D$ هم اندازه‌اند. چرا؟ بنابراین:



در هر دوزنقه متساوی‌الساقین زاویه‌های مجاور به یک قاعده هم‌اندازه‌اند.

آیا عکس این ویژگی نیز درست است؟

فرض کنید در دوزنقه $ABCD$ ، دو زاویه $\angle C$ و $\angle D$ هم‌اندازه‌اند. از B خطی موازی ساق AD رسم می‌کنیم تا قاعده CD را در E قطع کند. از اینکه $\angle D$ و $\angle E$ نیز هم‌اندازه‌اند، پس دو زاویه هم‌اندازه‌اند و در نتیجه $BC = BE$.
چون $ABED$ متوازی‌الاضلاع است، پس $AD = BE$. در نتیجه، $AD = BC$ است؛ بنابراین:



اگر در یک دوزنقه دو زاویه مجاور به یک قاعده هم‌اندازه باشند، دوزنقه متساوی‌الساقین است.

به کمک ویژگی دوزنقه متساوی الساقین، ویژگی زیر به سادگی ثابت می‌شود. آن را ثابت کنید.

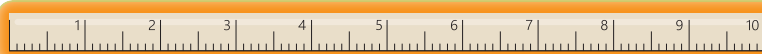
در هر دوزنقه متساوی الساقین، قطرهای مساوی دارند و بر عکس.

۸ فعالیت

در دوزنقه $ABCD$:

$AD = BC$. از هم‌نهشتی کدام دو مثلث نتیجه می‌گیرید $AC = BD$ است؟ اما اثبات عکس آن نیاز به تفکر بیشتر دارد. فرض کنیم $DB = AC$. آیا می‌توانید در شکل مقابل دو مثلث هم‌نهشت پیدا کنید که از آن $AD = BC$ یا مساوی بودن اندازه‌های دو زاویه مجاور به قاعده نتیجه شود؟

با کمی دقت مشاهده می‌کنید چنین دو مثلی ظاهراً وجود ندارند؛ اما یک ویژگی در مسئله هست که از آن هنوز استفاده نکرده‌ایم. دو قاعده دوزنقه موازی‌اند یا رأس‌های A و B از قاعده CD به یک فاصله‌اند. با رسم دو ارتفاع AH و BE و هم‌نهشتی دو مثلث $\triangle AHC$ و $\triangle BED$ تساوی اندازه‌های دو زاویه را نتیجه بگیرید. به کمک آنها هم‌نهشتی دو مثلث $\triangle ADC$ و $\triangle BCD$ نتیجه می‌شود و به حل مسئله منجر خواهد شد.



تمرین

۱- در کدام n ضلعی تعداد قطرهای و ضلع‌ها برابر است؟

۲- در دو چهارضلعی مقابل $AB = A'B'$ و $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ است. چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

اگر $\angle B = \angle B'$ و $BC = B'C'$ و $\angle C = \angle C'$ و $CD = C'D'$ و $\angle D = \angle D'$ ، در این حالت چگونه مساوی بودن اندازه‌های سایر ضلع‌ها و زاویه‌ها را نتیجه می‌گیرید؟

۳- از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی $MNPQ$ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی مستطیل است. اگر $ABCD$ مستطیل باشد، نشان دهید چهارضلعی $MNPQ$ مربع است.

۴- در مسئله قبل، اگر اندازه‌های ضلع‌های مستطیل a و b باشند، اندازه ضلع مربع را برحسب a و b محاسبه کنید.

۵- مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ را که در آن $\angle A$ قائمه و اندازه $\angle C$ برابر 30° است، در نظر می‌گیریم. میانه وارد بر وتر را رسم کنید. مثلث‌های AMB و AMC چگونه مثلث‌هایی هستند؟ نشان دهید $AB = \frac{BC}{2}$ یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر اندازه یک زاویه 30° باشد، اندازه ضلع مقابل آن نصف اندازه وتر است.

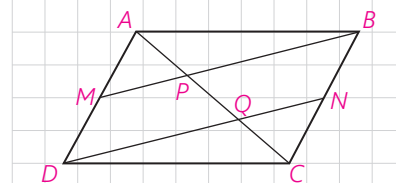
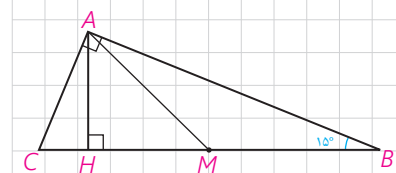
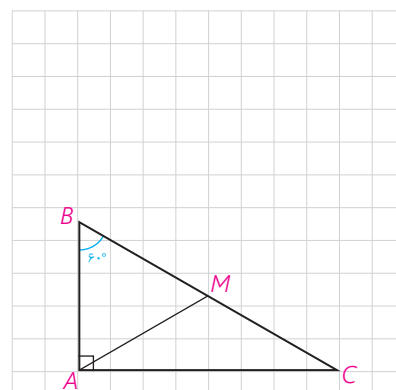
سپس با استفاده از قضیه فیثاغورث نشان دهید، $AC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$.
یعنی در هر مثلث قائم‌الزاویه اگر یک زاویه 60° باشد، اندازه ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ اندازه وتر است.

اکنون مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه یک زاویه آن 45° باشد و نشان دهید که اندازه هر ضلع زاویه قائمه در آن $\frac{\sqrt{2}}{2}$ اندازه وتر است.

۶- در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، اندازه زاویه B برابر 15° است. با رسم میانه و ارتفاع وارد بر وتر نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ اندازه وتر است.

۷- در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، M و N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های DN و MB موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید $AP = PQ = QC$.

۸- ثابت کنید اگر وسط‌های ضلع‌های هر چهارضلعی را به طور متوالی به هم وصل کنیم، یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.
این چهارضلعی باید چه ویژگی‌ای داشته باشد تا این متوازی‌الاضلاع مستطیل یا لوزی شود؟
چه رابطه‌ای بین محیط متوازی‌الاضلاع پدید آمده با اندازه‌های قطرهای چهارضلعی اولیه وجود دارد؟



مساحت و کاربردهای آن

یادآوری

در سال‌های قبل با مساحت چهارضلعی‌های مهم آشنا شده‌اید.

۱- اگر اندازه یک ضلع مربع a باشد، $S = a^2$ مساحت آن است.

۲- اگر اندازه یک ضلع مثلث a و اندازه ارتفاع نظیر آن ضلع h_a باشد، آنگاه

$$S = \frac{1}{2} a h_a$$

بنابراین در هر مثلث ABC اگر اندازه ضلع‌های BC ، AC و AB را به ترتیب به a ، b و c و اندازه‌های ارتفاع‌های نظیر آنها را به ترتیب به h_a ، h_b و h_c نشان دهیم آن‌گاه،

$$2S = a h_a = b h_b = c h_c$$

۳- اگر اندازه یک ضلع متوازی‌الاضلاع a و اندازه ارتفاع نظیر آن h باشد، $S = ah$.

۴- اگر اندازه‌های دو قطر لوزی m و n باشند، $S = \frac{1}{2} mn$.

۵- اگر اندازه‌های دو قاعده یک دوزنقه a و b و اندازه ارتفاع آن h باشد.

$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

کاردکلاس

فرض کنیم اندازه هر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع ABC برابر a باشد، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ارتفاع AH میانه نیز است؛ چرا؟

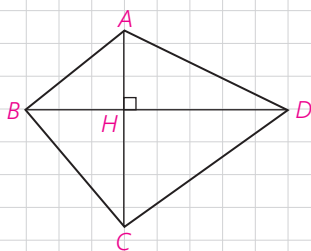
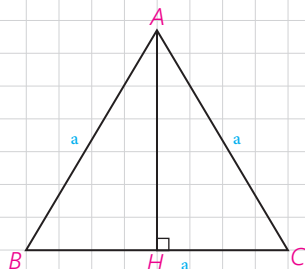
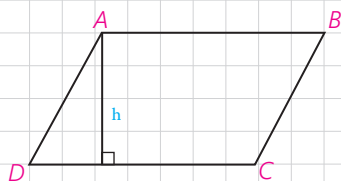
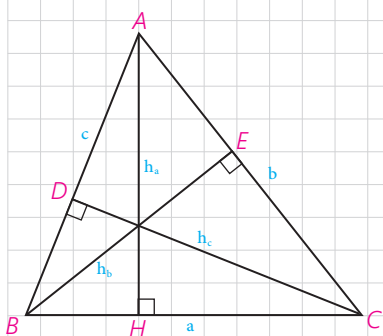
$$\text{به کمک قضیه فیثاغورث نشان دهید } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ و } S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

فعالیت

در چهارضلعی $ABCD$ دو قطر AC و DB برهم عموداند.

$$S_{ADB} = \dots\dots\dots$$

$$S_{DBC} = \dots\dots\dots$$



با جمع این دو مساحت داریم،

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}BD(\dots + \dots) = \frac{1}{4}BD\dots$$

بنابراین؛

در هر چهارضلعی که دو قطر آن برهم عمود باشند، مساحت برابر است با،

.....

■ کاربردهایی از مساحت

قبلاً با کاربرد مساحت در اثبات قضیه تالس آشنا شدید. بعضی رابطه‌ها و ویژگی‌هایی را که با آن آشنا شده‌اید یادآوری می‌کنیم.

ویژگی ۱. در دو مثلث اگر اندازه قاعده‌ها برابر باشند، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه ارتفاع‌های متناظر این قاعده‌هاست.

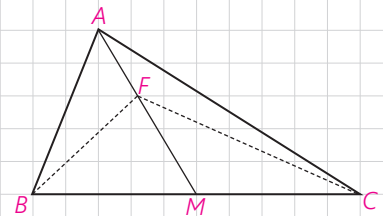
$$\frac{S}{S'} = \frac{h}{h'}$$

ویژگی ۲. در دو مثلث که اندازه دو ارتفاع برابر باشد، نسبت مساحت‌ها برابر نسبت اندازه‌های قاعده‌های متناظر این دو ارتفاع است.

کاردکلاس

نشان دهید یک میانه در هر مثلث، آن را به دو مثلث با مساحت‌های برابر تقسیم می‌کند.

اگر F هر نقطه‌ای روی میانه AM به جز نقطه M باشد آیا، $S_{FBM} = S_{FMC}$ است؟ چرا؟



فعالیت

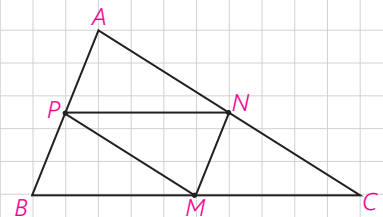
M و N و P وسط‌های سه ضلع مثلث ABC مطابق شکل اند.

پاره خط PN موازی ضلع است و پاره خط PM موازی ضلع است؛ چرا؟

بنابراین چهارضلعی PNMC است، در نتیجه، $\triangle MNP \cong \triangle NMC$ ؛ چرا؟

به همین ترتیب برای بقیه مثلث‌ها نیز می‌توان نشان داد که دو به دو هم نهشت‌اند.

$$\triangle APN \cong \triangle MNP \cong \triangle BPM$$



اگر وسط‌های سه ضلع هر مثلث را به هم متصل کنیم، چهار مثلث هم‌نهشت و در نتیجه با مساحت‌های برابر پدید می‌آید.

فعالیت

در این فعالیت ویژگی مهمی از سه میانه مثلث را ثابت می‌کنید.

دو میانه AM و BN از $\triangle ABC$ را رسم می‌کنیم. یکدیگر را در نقطه G درون مثلث قطع می‌کنند. از M وسط ضلع BC خطی را موازی میانه BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در F قطع کند. چرا F وسط NC است؟ N وسط ضلع AC است؛ بنابراین، $AF = 2NF$. چرا؟ در نتیجه، $AM = 3GM$. چرا؟

بنابراین، $GM = \frac{1}{3}AM$ و $AG = \frac{2}{3}AM$. بین G و A و M است؛ در نتیجه تنها نقطه‌ای روی نیم خط AM است که $AG = \frac{2}{3}AM$. مشابه آن ثابت می‌شود $BG = \frac{2}{3}BN$. پس برای هر دو میانه دلخواه نقطه G با این ویژگی به دست می‌آید در نتیجه هر سه میانه در G هم‌رس‌اند.

به روش دیگر، می‌توانید از M به N وصل کنید و از تشابه دو مثلث GMN و GAB استفاده کنید؛ چون $AB = 2MN$ پس $AG = 2GM$ و $BG = 2GN$. اکنون می‌توانید مانند روش قبلی ادامه دهید.

سه میانه هر مثلث در نقطه‌ای درون آن مثلث هم‌رس‌اند؛ به طوری که فاصله این نقطه تا وسط هر ضلع برابر $\frac{1}{3}$ اندازه میانه نظیر این ضلع است، و فاصله‌اش تا هر رأس $\frac{2}{3}$ اندازه میانه نظیر آن رأس است.

با رسم سه میانه مثلث نشان دهید، سه میانه مثلث آن را به شش مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کنند. بنابر فعالیت قبلی $S_{BGM} = S_{MGC} = x$. چرا؟

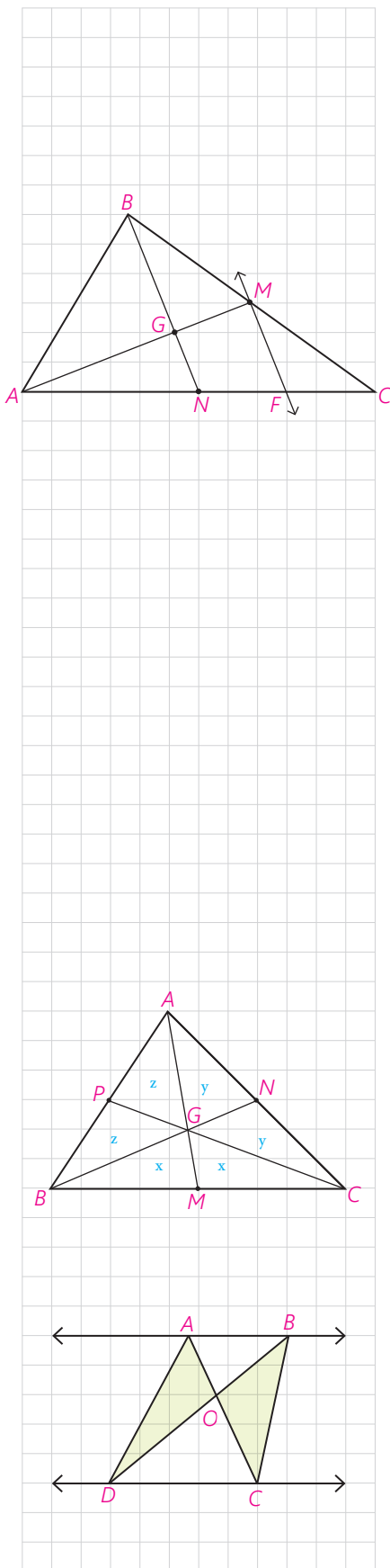
به همین ترتیب برای بقیه برقرار است.

اکنون میانه AM را در نظر بگیرید، $2z + x = \dots\dots\dots$ در نتیجه $y = \dots\dots\dots$

میانه BN را در نظر بگیرید $2z + y = \dots\dots\dots$ در نتیجه، $z = \dots\dots\dots$ پس، $\dots\dots\dots$

ویژگی ۳. فرض کنیم دو خط AB و CD موازی باشند؛ به طوری که دو خط AC و BD در نقطه‌ای مانند O متقاطع باشند. می‌دانیم: $S_{ADC} = S_{BDC}$. چگونه از آن نتیجه می‌گیرید، $S_{OAD} = S_{OBC}$ ؟

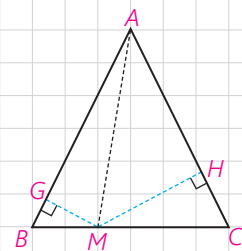
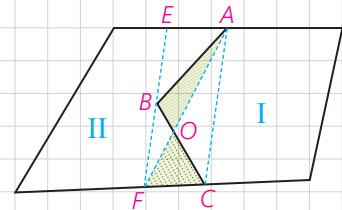
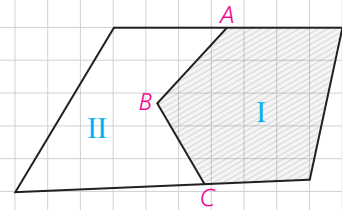
این ویژگی که در هر دوزنقه نیز برقرار است، در حل مسائل کاربرد خوبی دارد.



یک مسئله

در شکل دو مزرعه I و II متعلق به دو کشاورز است. این دو کشاورز برای استفاده از ماشین‌های کشاورزی می‌خواهند مرز مشترک ABC بین دو زمین خود را به یک پاره خط مستقیم تبدیل کنند به طوری که مساحت‌های زمین‌های آنها تغییر نکند. چگونه شما می‌توانید این کار را برای آنها انجام دهید؟
فکر اصلی این عمل براساس مسئله قبلی است.

از A به C متصل، و از B موازی خط AC رسم کنید تا دو مرز دیگر را در E و F قطع کند. اکنون نشان دهید این مرز مشترک جدید می‌تواند مرز AF باشد؛ چرا؟ البته می‌تواند مرز EC نیز باشد.

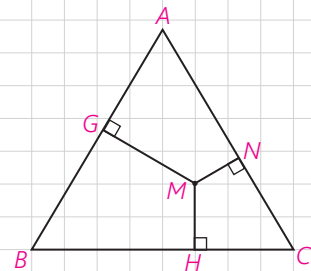


در مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است؛ نقطه دلخواه M را روی ضلع BC بین B و C در نظر بگیرید. از M دو عمود MH و MG را به ترتیب بر دو ساق AC و AB رسم کنید. S_{AMB} و S_{AMC} را بنویسید.
مساحت مثلث $\triangle ABC$ را نیز وقتی پاره خط AB یا AC قاعده باشند، بنویسید.
چه رابطه‌ای بین این مساحت‌ها وجود دارد؟ آن را بنویسید. از این رابطه چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC که $AB = AC$ است، مجموع فاصله‌های هر نقطه روی قاعده BC از برابر است.
به همین ترتیب نشان دهید در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC، قدر مطلق تفاضل فاصله‌های هر نقطه روی امتدادهای قاعده BC از خط‌های شامل دو ساق برابر اندازه ارتفاع وارد بر ساق است.

فعالیت

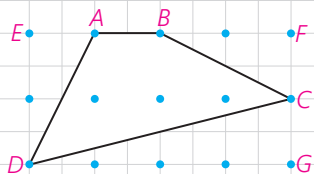
نقطه دلخواه M را درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به اندازه a در نظر بگیرید. سپس از M سه عمود بر سه ضلع رسم کنید. از M به سه رأس مثلث ABC متصل کنید.
مساحت‌های سه مثلث MAC، MBC و MAB را محاسبه کنید. این مساحت‌ها با مساحت $\triangle ABC$ چه رابطه‌ای دارند؟ آن را بنویسید. از آن چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
 $MH + MN + MG = \dots\dots\dots$



مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع برابر

اگر در یک مثلث متساوی الاضلاع فاصله‌های نقطه M درون مثلث از سه ضلع، برابر ۴، ۲ و ۶ باشند. اندازه ضلع مثلث را محاسبه کنید.

■ نقاط شبکه‌ای و مساحت



مطابق شکل نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع‌اند؛ به‌طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد است. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند ABCD را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند.

نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی را نقاط مرزی و نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها را نقاط درونی شبکه‌ای برای چندضلعی شبکه‌ای می‌نامند.

به‌طور مثال در شکل بالا چهارضلعی ABCD یک چهارضلعی شبکه‌ای است که دارای ۴ نقطه مرزی و ۳ نقطه درونی شبکه‌ای است.

در این چهارضلعی، شبکه‌ای با به‌کاربردن مساحت مثلث‌های قائم‌الزاویه و مستطیل نشان دهید مساحت چهارضلعی ABCD برابر ۴ واحد سطح است. می‌توان نقاط شبکه‌ای را در دستگاه مختصات عمود بر هم $x'x$ و $y'y$ نیز به صورت زوج مرتب‌های (x, y) که x و y هر دو اعداد صحیح‌اند، نشان داد. x و y مختص‌های هر نقطه‌اند.

در چندضلعی‌های شبکه‌ای، تعداد نقاط مرزی شبکه‌ای را با b و تعداد نقاط درونی شبکه‌ای را با i نشان می‌دهند. اکنون می‌خواهیم به‌طور شهودی رابطه‌ای بین مساحت چندضلعی شبکه‌ای و نقاط مرزی و درونی شبکه‌ای نظیر آن را پیدا کنیم.

فعالیت

۱- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه مرزی می‌تواند داشته باشد؟ چرا؟

۲- یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل چند نقطه درونی می‌تواند داشته باشد؟

۳- در تمام چندضلعی‌های شبکه‌ای زیر تعداد نقطه‌های درونی شبکه‌ای صفر است،

یعنی $i = 0$ و تعداد نقاط مرزی، $b = 3, 4, 5, \dots$.

جدول زیر را با محاسبه مساحت چندضلعی های شبکه ای کامل کنید.

$$i = 0, b = 3, 4, 5, \dots$$

تعداد نقاط مرزی i	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مساحت	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$			

بین مساحت و تعداد نقاط مرزی چه رابطه ای وجود دارد؟

$$S = \frac{b}{2} - \dots + 0$$

۴- اکنون نقاط مرزی را ثابت نگه دارید و نقاط درونی را تغییر دهید. فرض کنید تعداد نقاط مرزی شبکه ای $b = 3$ باشند. با توجه به شکل ها جدول زیر را کامل کنید. (نتیجه گیری $S = \frac{b}{2} - 1 + 0$ را که در قسمت (۳) پیدا کرده اید در نظر داشته باشید.)

تعداد نقاط درونی i	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\frac{b}{2} - 1$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
S	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$				

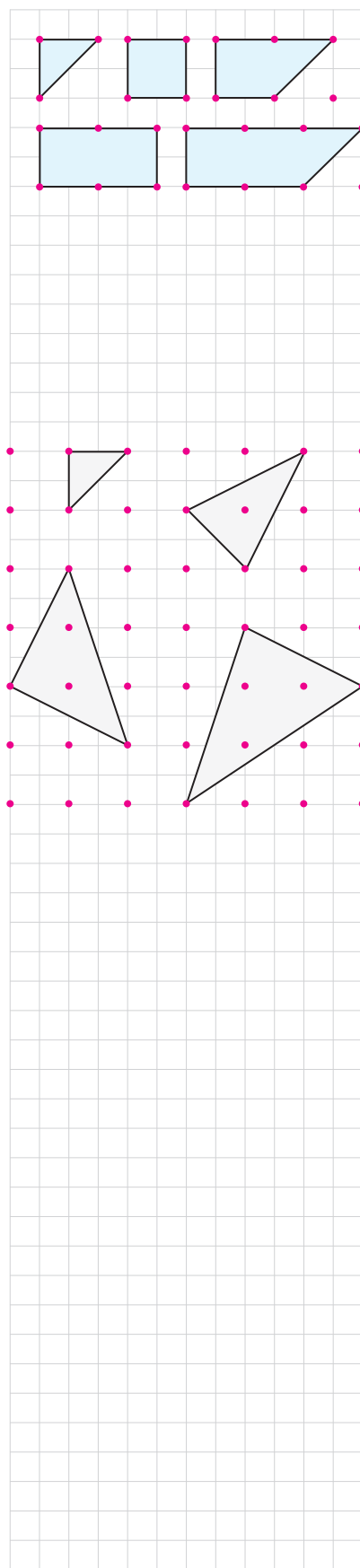
با تکمیل جدول بالا و مقایسه اعداد هر ستون تشخیص دهید که مساحت هر چندضلعی شبکه ای با تعداد نقاط مرزی و درونی چه ارتباطی دارد. از این جدول نتیجه بگیرید b و i با چه ضریب هایی ظاهر می شوند.

$$S = \frac{b}{2} - \dots + \dots$$

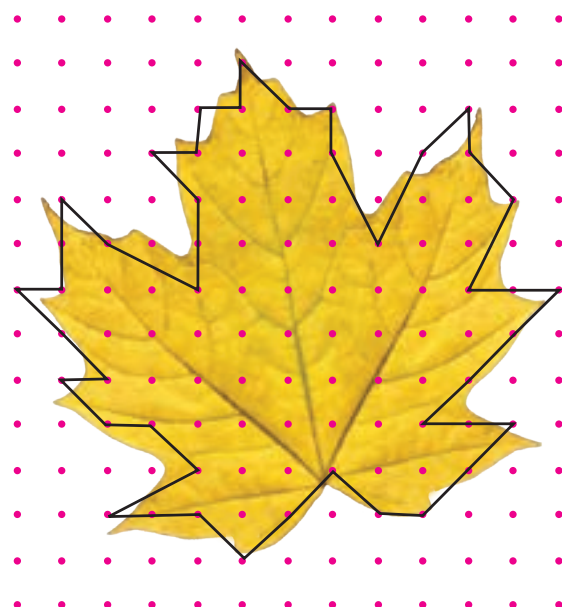
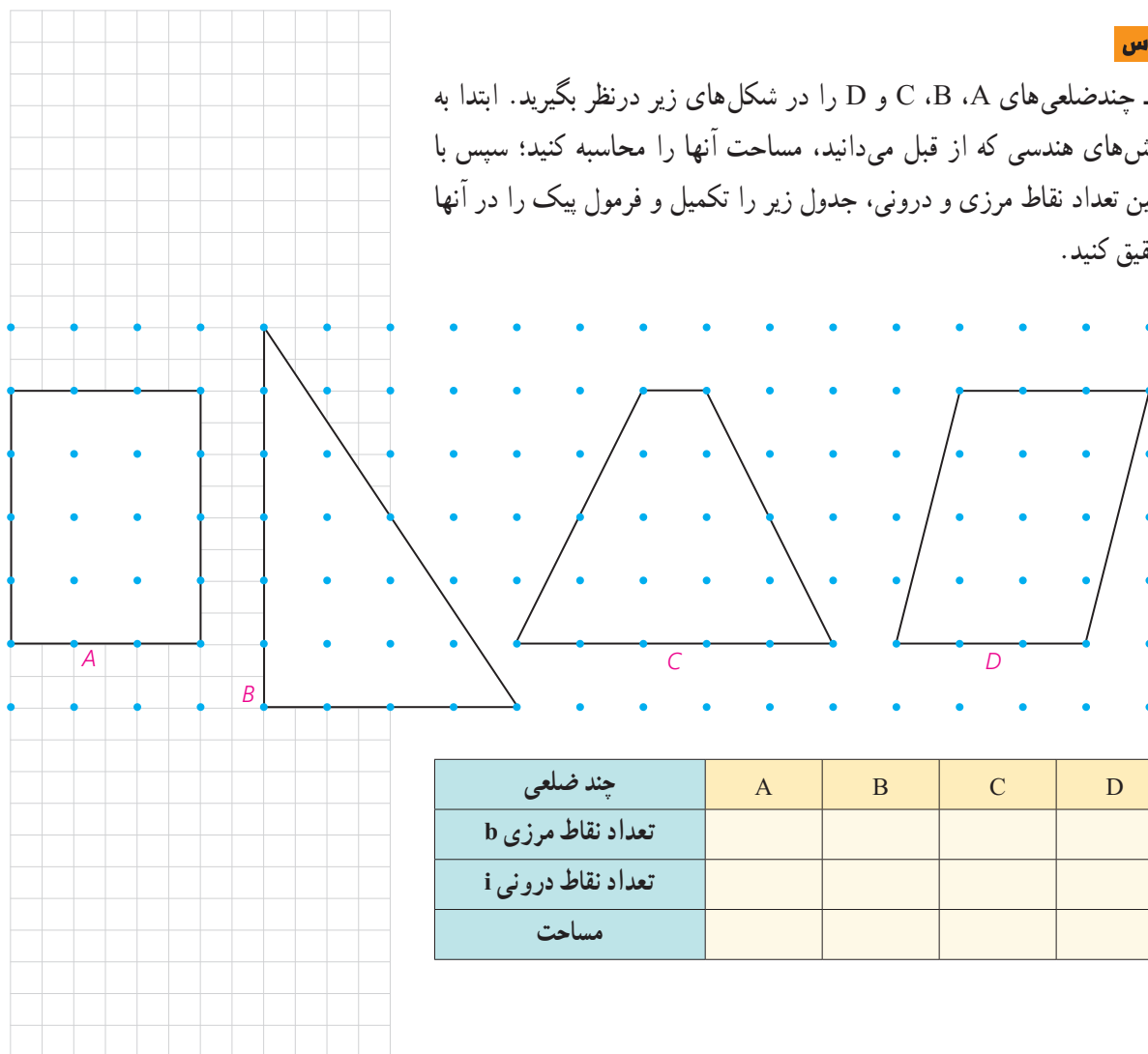
توجه داشته باشید که این فرمول را به طور شهودی پیدا کرده ایم. اثبات دقیق این فرمول در حالت کلی نیاز به مقدمات بیشتری دارد.

این فرمول به فرمول پیک معروف است که جرج الکساندر پیک (۱۹۴۳-۱۸۵۹) آن را کشف کرد و از سال ۱۹۷۰ به طور گسترده ای در کتاب های هندسه مقدماتی به کار برده شده است.

به کمک این فرمول می توانیم مساحت شکل های نامنظم هندسی را نیز به طور تقریبی پیدا کنیم.



۱- چندضلعی‌های A، B، C و D را در شکل‌های زیر در نظر بگیرید. ابتدا به روش‌های هندسی که از قبل می‌دانید، مساحت آنها را محاسبه کنید؛ سپس با تعیین تعداد نقاط مرزی و درونی، جدول زیر را تکمیل و فرمول پیک را در آنها تحقیق کنید.



اگر فاصله نقطه‌های شبکه‌ای یک سانتی‌متر باشد، یک برگ درخت را روی یک صفحه شطرنجی قرار دهید و با رسم آن مساحت آن را به‌طور تقریبی محاسبه کنید. واضح است که با کوچک‌تر کردن واحد می‌توانیم مساحت را با تقریب بهتری محاسبه کنیم.



۱- در یک لوزی اندازه هر ضلع $2\sqrt{3}$ و نسبت اندازه‌های دو قطر $\frac{1}{3}$ است. مساحت لوزی را پیدا کنید.

۲- در چهارضلعی ABCD، مطابق شکل $AB = AD$ و $BC = CD$ است. آیا قطرهای این چهارضلعی برهم عموداند؟ چرا؟ نشان دهید در این چهارضلعی قطر AC روی نیمسازهای $\angle A$ و $\angle C$ است. اگر اندازه‌های دو قطر ۸ و ۶ باشند، مساحت آن را محاسبه کنید. چهارضلعی‌ای با این ویژگی کایت نام دارد. نشان دهید در کایت یک قطر عمود منصف قطر دیگر است.

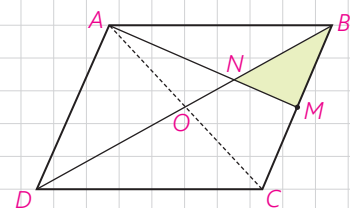
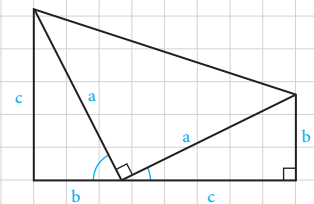
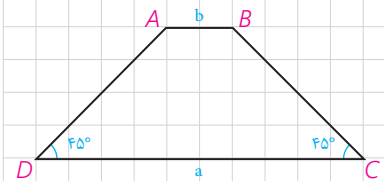
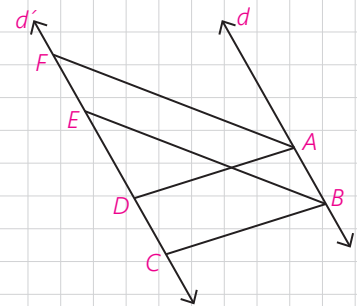
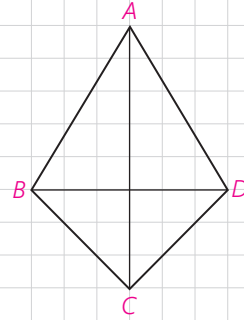
۳- در شکل دو خط d و d' موازی اند و ABCD و ABEF هر دو متوازی الاضلاع اند. اگر مساحت یکی از این متوازی الاضلاع‌ها برابر S باشد، مساحت دیگری بر حسب S چقدر است؟

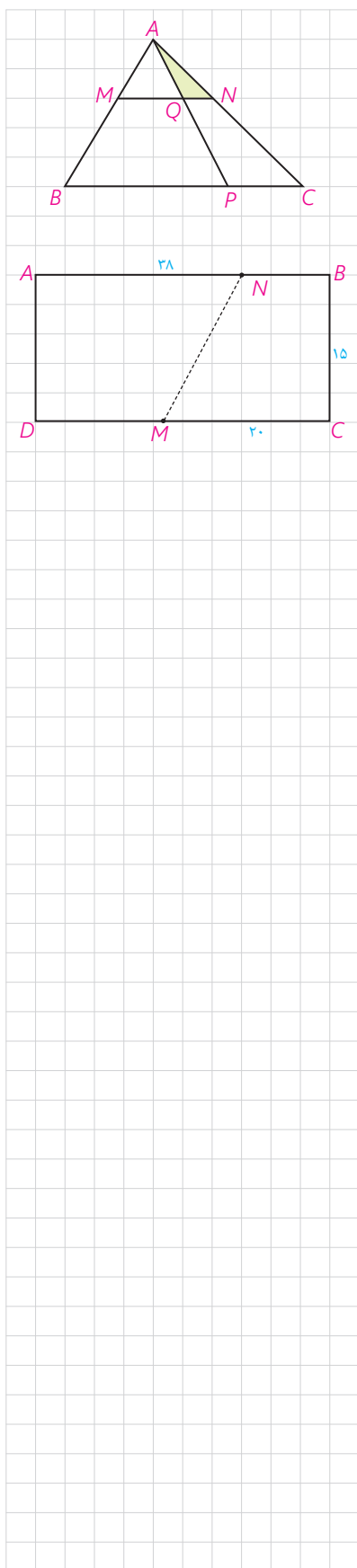
۴- در دوزنقه شکل مقابل اندازه‌های دو قاعده a و b و اندازه‌های دو زاویه مجاور به یک قاعده 45° است. مساحت دوزنقه را بر حسب a و b محاسبه کنید. از A و B بر قاعده DC عمود کنید.

۵- مساحت دوزنقه مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قرار دادن آنها چه نتیجه‌ای به دست می‌آید؟

۶- در متوازی الاضلاع ABCD، M وسط ضلع BC است و پاره خط AM قطر BD را در N قطع کرده است. نشان دهید:

$$S_{BMN} = \frac{1}{12} S_{ABCD}$$



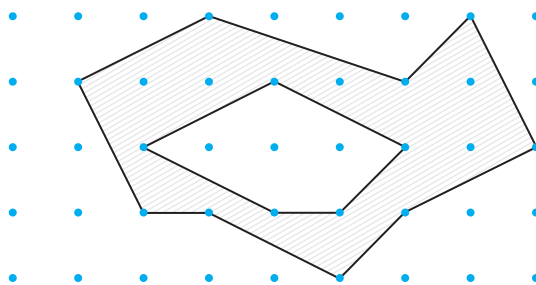


۷- در مثلث ABC ، خط MN موازی ضلع BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2}$. همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{3}$ است. S_{MQPB} و S_{AQN} چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۸- زمین مستطیل شکلی به ابعاد ۳۸ و ۱۵ متر که دو نفر به طور مساوی در آن شریک اند، مفروض است. این زمین فقط از نقطه M که $MC = 20$ است به یک کوچه راه دارد. مرز MN را چگونه رسم کنیم تا زمین به دو قطعه با مساحت های مساوی بین آن دو تقسیم شود.

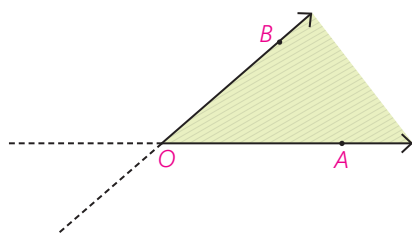
۹- سه چندضلعی متشابه روی سه ضلع یک مثلث قائم الزاویه می سازیم. ثابت کنید مساحت چندضلعی روی وتر برابر مجموع مساحت های ساخته شده روی ضلع های زاویه قائمه است.

۱۰- با توجه به مساحت چندضلعی های شبکه ای، مساحت قسمت سایه زده را محاسبه کنید.

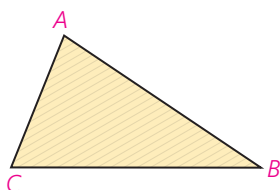


۱۱- یک مستطیل شبکه ای با ضلع های افقی و قائم که اندازه های ضلع های آن m و n واحداً مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

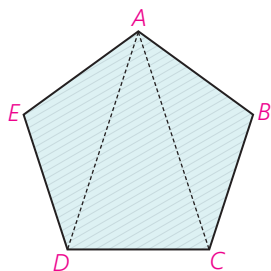
۱۲- مساحت یک چندضلعی شبکه ای ۳ واحد است. جدولی تشکیل دهید و تعداد نقاط مرزی و تعداد نقاط درونی را در حالت هایی که امکان دارد، مشخص کنید. اگر این چندضلعی شبکه ای مثلث باشد در هر حالت شکل آن را رسم کنید. در حالتی که نقاط مرزی بیشترین تعداد ممکن را دارند، شکل های چهارضلعی های نظیر آن را نیز رسم کنید.



مساحت یکی از مفاهیم اساسی هندسه است. وقتی با یک زاویه هندسی $\angle AOB$ روبه‌رو هستیم که اجتماع دو نیم خط OA و OB است، قسمت سایه زده مطابق شکل را درون زاویه $\angle AOB$ می‌نامند. به‌طور دقیق‌تر اشتراک طرفی از خط OA را که شامل B است با طرفی از خط OB که شامل A است، درون زاویه $\angle AOB$ می‌نامند.



به همین ترتیب اشتراک درون زاویه‌های مثلث را درون مثلث می‌نامند. درون مثلث و روی مثلث را ناحیه مثلثی می‌نامند.



سرانجام ناحیه چندضلعی شکلی است که بتوان آن را به‌صورت اجتماع تعداد متناهی ناحیه‌های مثلثی تبدیل کرد به‌طوری که اگر دو ناحیه مثلثی اشتراک داشته باشند، این اشتراک روی ضلعی از هر دو یا رأسی از هر دو باشد. به هر ناحیه چندضلعی عددی حقیقی و مثبت نظیر می‌کنیم که مساحت آن نامیده می‌شود.

فرض کنیم A هر ناحیه چندضلعی باشد. عددی حقیقی و مثبت به A نظیر می‌کنیم که آن را مساحت A می‌نامیم و با $S(A)$ نشان می‌دهیم که شرایط زیر در آن برقرار است:

$$S(A) > 0$$







اگر دو مثلث هم‌نهشت باشند، مساحت‌های آنها برابرند.

اگر اشتراک دو ناحیه چندضلعی فقط روی ضلع‌ها یا رأس‌ها باشد یا اصلاً اشتراک نداشته باشند، مساحت اجتماع آنها برابر مجموع مساحت‌های آنهاست.

مساحت مستطیل با ضلع‌های به اندازه‌های a و b برابر $S = ab$ است.

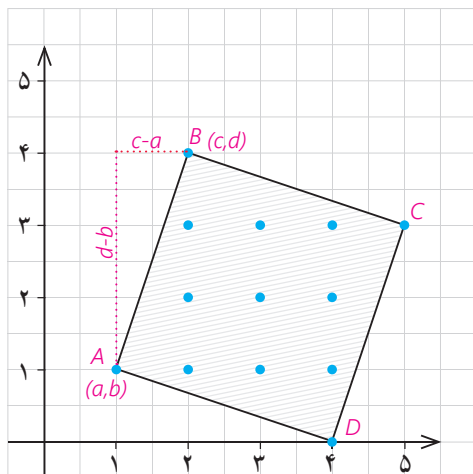
برای سادگی به جای مساحت ناحیه چندضلعی، همان مساحت چندضلعی را به کار می‌بریم.

ویژگی‌های چهارضلعی‌های مهم در یک نگاه
جدول زیر را تکمیل کنید.

ویژگی \ چهارضلعی	متوازی‌الاضلاع	مستطیل	لوزی	مربع	ذوزنقه	ذوزنقه متساوی‌الساقین
						
مساوی بودن اندازهٔ ضلع‌ها	هر دو ضلع مقابل					
موازی بودن ضلع‌ها	هر دو ضلع مقابل					
عمود بودن ضلع‌ها	به شرطی که مستطیل یا مربع باشد					کلاً وجود ندارد
زاویه‌های یا اندازه‌های برابر						
زاویه‌های مکمل						
وضعیت قطر‌ها نسبت به هم						اندازه‌های مساوی دارند

■ درباره چندضلعی‌های شبکه‌ای بیشتر بدانیم

نقطه شبکه‌ای در دستگاه محورها، نقطه‌ای به مختصات (x, y) است که x و y اعداد صحیح‌اند. بنابر فرمول پیک مساحت هر چندضلعی شبکه‌ای $S = \frac{b}{4} + i - 1$ همواره عددی گویا و مثبت است. بنابراین اگر b زوج باشد S ، عددی صحیح است.



در هر مربع شبکه‌ای مساحت صحیح و مثبت است، زیرا اگر (a, b) و (c, d) دو رأس مجاور مربع باشند، $S = (a - c)^2 + (b - d)^2$ (چرا؟) که a, b, c, d صحیح‌اند. حال اگر مثلث متساوی‌الاضلاعی شبکه‌ای داشته باشیم، بنابر فرمول پیک مساحت آن عددی گویا و مثبت است. از طرف دیگر اگر m اندازه هر ضلع آن باشد، $S = \frac{m^2 \sqrt{3}}{4}$ مساحت آن است.

اما، $m^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2$ که صحیح و مثبت است در نتیجه $\frac{m^2 \sqrt{3}}{4}$ عددی گنگ یا اصم است که متناقض با آن چیزی است که از فرمول پیک به دست می‌آید؛ بنابراین

هیچ مثلث متساوی‌الاضلاعی وجود ندارد که مختصات تمام رأس‌های آن اعداد صحیح باشند.

در شکل زیر نقشه ایران را مشاهده می‌کنید. می‌توانید با انتخاب واحدهای مناسب مساحت آن را به طور تقریبی پیدا کنید.

