

فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال



■ هندسه و بهویژه ترسیم‌های هندسی از دیرباز مورد استفاده بشر بوده است.

ترسیم‌های هندسی

انسان از دوران باستان تاکنون همواره از هندسه و به ویژه از ترسیم‌های هندسی برای حل مسائل مختلف یاری گرفته است.

از تقسیم‌بندی زمین‌های کشاورزی تا طراحی انواع ابزارهای کاربردی پیشرفته کنونی، همگی نیازمند ترسیم‌های هندسی است.

فعالیت

(برای مراحل زیر از خطکش و پرگار استفاده کنید.)

۱- نقطه‌ای مانند O را در صفحه درنظر بگیرید و برای رسم کردن از خطکش و پرگار استفاده کنید.

نقاطی را مشخص کنید که فاصله یکسانی از نقطه O دارند. (مثلاً همه نقاطی که فاصله‌شان از نقطه O برابر ۲ سانتی‌متر است).

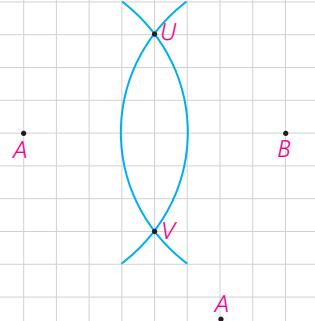
۲- نقاط A و B را درنظر بگیرید. دهانه پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز کنید و یک بار به مرکز A و بار دیگر به مرکز B و با همان شعاع قبلی کمان بزنید تا یکدیگر را در نقاط U و V قطع کنند. U و V چه ویژگی مشترکی دارند؟

۳- نقطه A ، مانند شکل مقابل به فاصله ۱ سانتی‌متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را باید که به فاصله ۲ سانتی‌متر از نقطه A باشند.

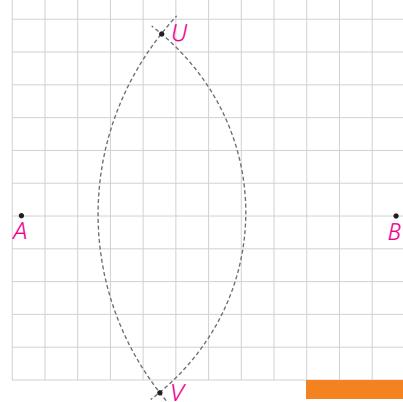
۴- نقاط A و B را به فاصله ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. دهانه پرگار را به اندازه ۳ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه A یک کمان بزنید. سپس دهانه پرگار را به اندازه ۴ سانتی‌متر باز کنید و از نقطه B یک کمان بزنید.

الف) نقاط روی کمان اول چه ویژگی مشترکی دارند؟

O



d _____



ب) نقاط روی کمان دوم چه ویژگی مشترکی دارند؟

پ) نقاط تقاطع دو کمان فاصله‌شان از نقاط A و B چگونه است؟ برای اینکه چنین نقاط تقاطعی وجود داشته باشند، اندازه شعاع آنها و فاصله نقاط A و B چه شرطی باید داشته باشند؟

ت) طول اضلاع مثلث AUB چقدر است؟

کاردکلاس

A . B .

۱- دو نقطه مانند A و B را به فاصله ۳ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. نقاطی را بیابید که فاصله‌شان از A، ۲ و از B، $\frac{2}{5}$ سانتی‌متر باشد.

۲- توضیح دهید که چگونه می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۴ و ۵ و ۶ واحد رسم کرد.

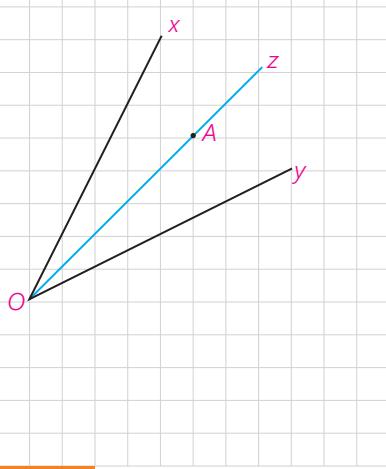
۳- جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسئله زیر :

الف) دو جواب داشته باشد.

ب) یک جواب داشته باشد.

پ) جواب نداشته باشد.

نقاط A و B به فاصله از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد.



۱- زاویه xOy و نیم خط Oz را نیمساز آن درنظر بگیرید. فرض کنید نقطه A نقطه‌ای دلخواه روی Oz باشد. ثابت کنید که فاصله نقطه A از دو ضلع زاویه xOy بیکسان است. (یعنی اگر از نقطه A عمودهایی بر نیم خط‌های Ox ، Oy رسم کنیم طول آنها باهم برابر است).

فعالیت

۱ ترتیب
اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه قرار داشته باشد

۲- زاویه xOy و نقطه A را چنان در نظر می‌گیریم که فاصله نقطه A از نیم خط‌های Oy باهم برابر باشد.

نشان دهید که نقطه A روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.

(راهنمایی: پاره خط OA، و دو عمود از نقطه A بر خطوط Ox و Oy رسم کنید و نشان دهید پاره خط OA همان نیمساز زاویه xOy است.)

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای به فاصلهٔ یکسان از دو ضلع یک زاویه باشد، آن نقطه قرار دارد.

نتیجه

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم: هر نقطه که روی یک زاویه قرار داشته باشد، و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصلهٔ یکسان باشد، روی آن زاویه قرار دارد.

فعالیت

۱- زاویه xOy را در نظر بگیرید. دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید و به مرکز O کمانی بزنید تا نیم خط‌های Ox و Oy را به ترتیب در نقاط A و B قطع کند.
– طول پاره خط‌های OA و OB نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۲- دهانهٔ پرگار را کمی باز کنید (بیش از نصف طول AB) و یک بار به مرکز A و بار دیگر با همان اندازه و به مرکز B یک کمان بزنید تا دو کمان مانند شکل در نقطه‌ای مانند W همیگر را قطع کنند.
– طول پاره خط‌های AW و BW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

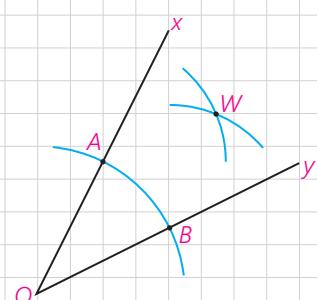
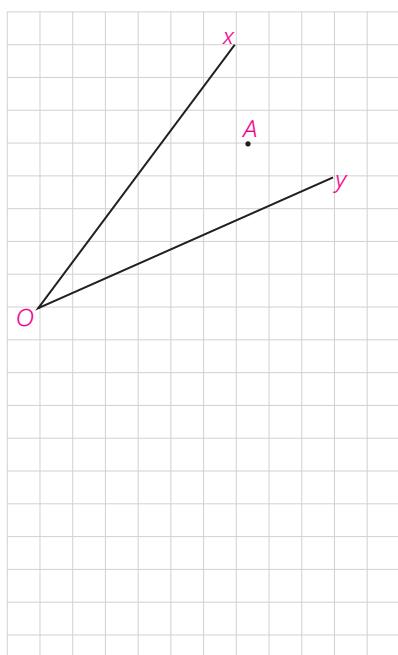
– پاره خط‌های WA و WB و OAW و OBW را رسم کنید. دو مثلث OAW و OBW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

– اندازهٔ زوایه‌های AOW و BOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

– پاره خط OW برای زاویه xOy چه نوع پاره خطی است؟

کاردرکلاس

روش رسم نیمساز یک زاویه را توضیح دهید.



برخی خواص عمودمنصف و ترسیم آن

فعالیت

- ۱- پاره خط AB و عمودمنصف آن را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید و فرض کنید W نقطه‌ای روی عمودمنصف AB باشد. نشان دهید نقطه W از دوسر پاره خط AB به یک فاصله است.

نتیجه ۱

اگر نقطه‌ای روی عمودمنصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دوسر آن پاره خط

- ۲- پاره خط AB و نقطه W را به گونه‌ای درنظر بگیرید که نقطه W از A و B به یک فاصله باشد (یعنی $WA = WB$) نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.

(راهنمایی: از نقطه W به A و B و به وسط پاره خط AB وصل کنید و نشان دهید مثلثهای ایجاد شده باهم همنهشت هستند و از این مطلب استفاده کنید و نشان دهید W روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.)

نتیجه ۲

اگر نقطه‌ای از دوسر یک پاره خط به یک فاصله باشد

از (۱) و (۲) توجه می‌گیریم: هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره خط باشد و هر نقطه که روی عمودمنصف

فعالیت

- ۱- یک نقطه را در صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از نقطه موردنظر بگذرد؟

- ۲- دو نقطه را در یک صفحه در نظر بگیرید و خطی بکشید که از آن دو نقطه عبور کند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطه موردنظر بگذرد؟

- ۳- به نظر شما برای اینکه یک خط به طور کامل مشخص باشد، حداقل چند نقطه از آن خط را باید داشته باشیم؟



فعالیت

- پاره خط AB را مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.
- ۱- دهانه پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار از نقطه A و بار دیگر با همان اندازه از نقطه B کمان بزنید تا یکدیگر را در دو نقطه مانند U و V قطع کنند.

۲- طول پاره خط‌های AU و BU نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- طول پاره خط‌های AV و BV نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۴- آیا می‌توان گفت نقاط U و V روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارند؟ چرا؟

۵- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.

کاردرکلاس

مراحل رسم عمودمنصف یک پاره خط را توضیح دهید.

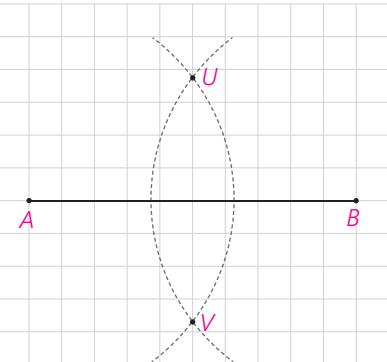
رسم خط عمود بر یک خط و رسم خط موازی با یک خط

فعالیت

- رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن خط d و نقطه M را روی آن، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید. می‌خواهیم خطی بکشیم که از M بگذرد و بر d عمود باشد.

- ۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d بیابید؛ به گونه‌ای که M وسط پاره خط AB باشد.
- ۲- عمودمنصف پاره خط AB را رسم کنید.

- ۳- عمودمنصف پاره خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه
-



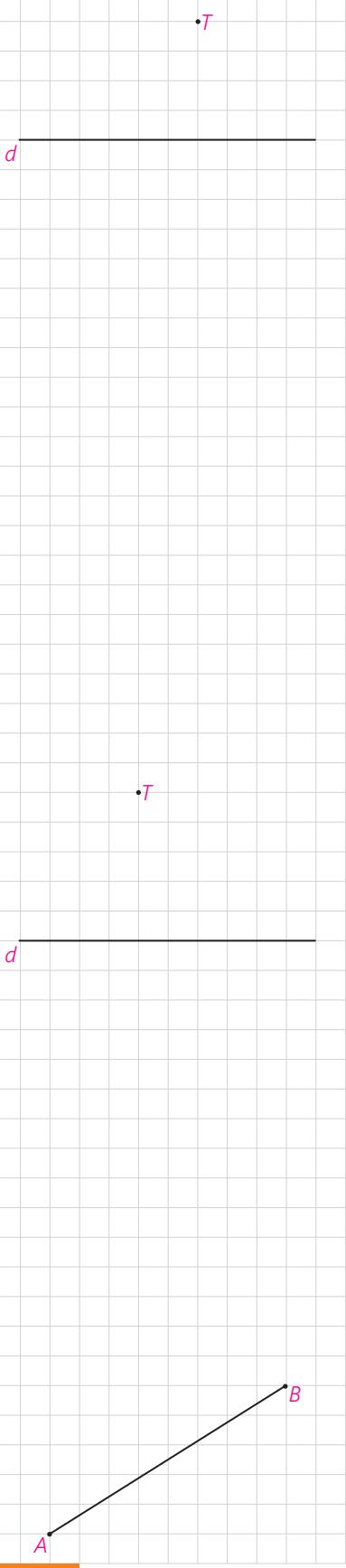
کاردرکلاس

مراحل رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن را توضیح دهید.



فعالیت

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن خط d و نقطه T را که غیر واقع بر آن است، مانند شکل مقابل درنظر بگیرید.
می‌خواهیم خطی بکشیم که از T بگذرد و بر خط d عمود باشد.



۱- به کمک پرگار چگونه می‌توانید نقاط A و B را روی خط d به گونه‌ای بیابید که از نقطه T به یک فاصله باشند.

۲- عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳- آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطه T می‌گذرد؟ چرا؟
عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d و از نقطه

کاردر کلاس

روش رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

فعالیت

رسم خط موازی با خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط d و نقطه T مانند شکل مقابل داده شده‌اند.

می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطه T بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱- خط d_1 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲- خط d_2 را به گونه‌ای رسم کنید که از نقطه T بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

۳- خط d_2 نسبت به خط d_1 چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را موزب درنظر بگیرید).

کاردر کلاس

روش رسم خط موازی با یک خط از نقطه‌ای خارج آن را توضیح دهید.

فعالیت

پاره‌خط داده شده AB در شکل مقابل را با اندازه ۴ واحد درنظر بگیرید.

(الف) عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید و فرض کنید نقطه برخورد این عمودمنصف با پاره‌خط AB ، M باشد.

ب) به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کنید تا عمودمنصف AB را در نقاط C و D قطع کند.

پ) چهارضلعی ACBD چگونه چهارضلعی ای است؟ چرا؟

کاردرکلاس

طریقہ رسم مربعی را کہ طول قطر آن داده شده باشد، توضیح دھید۔

تمرین

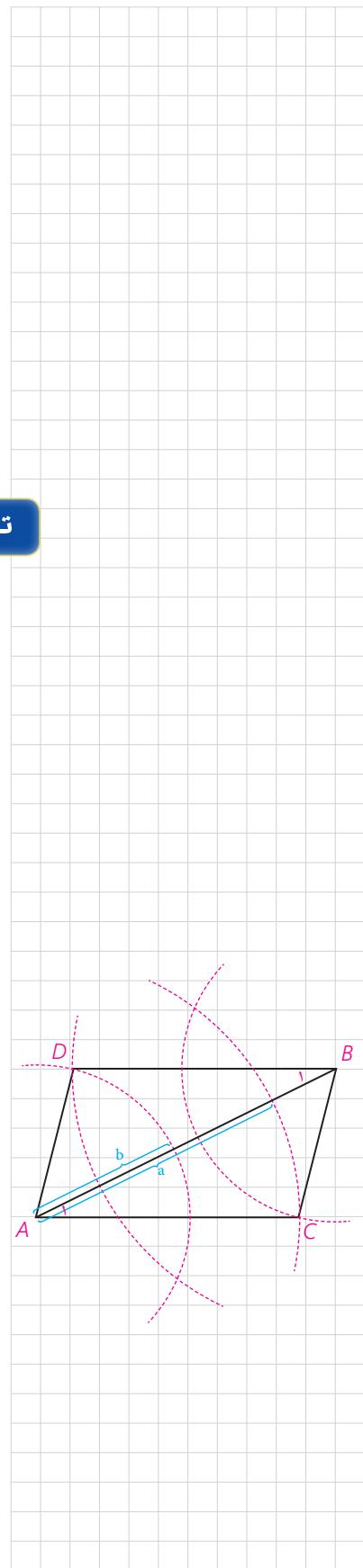


۱- می‌دانیم چندضلعی ای که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی‌الاضلاع است.
متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی‌الاضلاع
به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲- می‌دانیم چندضلعی ای که قطرهایش باهم برابر و منصف هم باشند، مستطیل است.
مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۶ سانتی‌متر باشد.

۳- پاره خط AB داده شده است. دهانه پرگار را یک بار به اندازه a و بار دیگر به اندازه b باز می‌کنیم و از نقطه A دو کمان می‌زنیم. (به طوری که مجموع a و b از اندازه AB بزرگ‌تر باشد) سپس کمان‌هایی با همان اندازه‌ها، این بار از نقطه B می‌زنیم و مانند شکل، دو نقطه از نقاط برخورد را C و D می‌نامیم. چهارضلعی ACBD چه نوع چندضلعی ای است؟ چرا؟
(راهنمایی: ابتدا بررسی کنید که مثلثهای ABC و ABD و زوایای A و B نسبت به هم چگونه‌اند.)

۴- متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول ضلع‌هایش ۳ و ۵ و طول یک قطر آن ۶ باشد.



۵- می دانیم که برای لوزی بودن یک چهارضلعی کافی است که قطرهای آن چهارضلعی عمودمنصف یکدیگر باشند. ترسیم های زیر را انجام دهید.
الف) یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۳ و ۵ باشد.

ب) یک لوزی به طول ضلع ۵ و طول قطر ۶ رسم کنید.

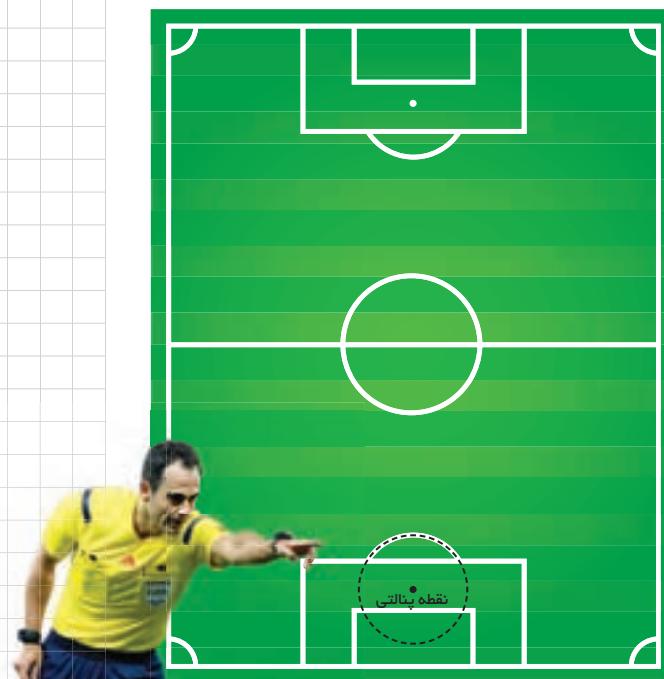
۶- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه موردنظر ۲ واحد باشد.
ب) نقطه ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه موردنظر ۴ واحد باشد.
پ) با استفاده از (الف) و (ب) نیمساز زاویه موردنظر را رسم کنید.

۷- وتری مانند AB از یک دایره را در نظر بگیرید. وضعیت عمودمنصف AB و مرکز دایره نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

آیا می دانستید که در زمین فوتبال نقطه پنالتی مرکز دایره‌ای است که قسمتی از قوس آن در جلوی محوطه جریمه کشیده شده است؟

یک داور فوتبال لحظه‌ای که اعلام پنالتی می کند، متوجه می شود که نقطه پنالتی مشخص نیست. اگر او وسایل لازم برای کشیدن خط راست و کمان دایره را داشته باشد، چگونه می تواند با استفاده از قوس جلوی محوطه هجده قدم، نقطه پنالتی را مشخص کند.



استدلال

شیوه درست استدلال در زندگی هر فرد و نیز در جامعه انسانی اهمیت فراوانی دارد. استدلال نادرست در بسیاری موضع، نتیجه‌گیری‌های غلط، تیره شدن روابط، ایجاد باورهای نادرست و پیامدهای خطرناک فردی و اجتماعی دیگری را در بی خواهد داشت و حتی ممکن است به ایجاد مشکلات شخصیتی در افراد بینجامد. ممکن است فردی با استدلال‌هایی این‌گونه، همواره راه موفقیت را بر خود بسته ببیند :

- من در اولین امتحان موفق نشدم، پس در امتحان‌های بعدی نیز موفق نخواهم شد.
- تیم مورد علاقه من از ابتدای فصل در تمام بازی‌هایش شکست خورده است، پس در بازی‌آینده نیز شکست خواهد خورد.



استقرا و استنتاج

در سال‌های قبل تاحدی با استدلال و اثبات آشنا شدید. نوعی از استدلال، که با آن رو به رو شدید به این صورت بود که از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع گرفته می‌شود یا به اصطلاح «از جزء به کل می‌رسیم». البته با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجه گرفته شده مطمئن بود.

به طور مثال اگر فردی با مشاهده اینکه سه نفر از افراد یک کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، نتیجه‌گیری کند که همه افراد آن کلاس به رنگ سبز علاقه دارند، فرد مورد نظر از استدلال استقرایی استفاده کرده است.

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شدید، براساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایه واقعیت‌هایی است که درستی آنها را پذیرفته‌ایم و به آن استدلال استنتاجی گفته می‌شود.

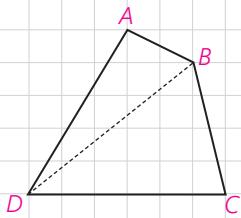
به طور مثال با دانستن رابطه بین خطوط موازی و موّب و زوایای بین آنها، اثبات اینکه مجموع زوایای داخلی یک مثلث 180° است به طریق مقابل، یک استدلال استنتاجی است که با نمادهای ریاضی نوشته شده است. توجه کنید که استدلال استنتاجی را به صورت کلامی نیز می‌توان انجام داد.

$$\begin{aligned}
 & \text{d} \parallel BC \Rightarrow \begin{cases} \hat{B} = \hat{A}_1 \\ \hat{C} = \hat{A}_2 \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ
 \end{aligned}$$

به استدلال‌هایی که دو دانشآموز برای مسئله زیر ارائه داده‌اند، دقت کنید و در مورد میزان اعتبار هریک از آنها گفت و گو کنید.

مسئله: مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

پژمان: در تمام چهارضلعی‌های مربع، مستطیل، لوزی و متوازی‌الاضلاع با توجه به اینکه زاویه‌های مجاور مکمل یکدیگرند به سادگی ثابت می‌شود که مجموع زوایای داخلی آنها 360° است. بنابراین مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.



پیمان: می‌دانیم مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است. یک چهارضلعی $\triangle ABCD$ در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم و دو رأس مقابل آن، مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ را به هم وصل می‌کنیم.

مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی $\triangle ABCD$ با مجموع زاویه‌های داخلی دو مثلث $\triangle ABD$ و $\triangle BCD$ برابر است؛ بنابراین مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی $\triangle ABCD$ برابر است با $180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$.

پیمان ادعا می‌کند که با این استدلال ثابت می‌شود که مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی برابر 360° است. آیا به نظر شما این ادعای او درست است؟

آیا همین استدلال را برای هر چهارضلعی دیگری که به شما بدھند، می‌توانید به کار ببرید؟ اگر جواب شما مثبت است، پس این ویژگی را که «مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعی $\triangle ABCD$ در مسئله قبل برابر 360° است»، به سایر چهارضلعی‌های محدب می‌توان تعمیم داد.

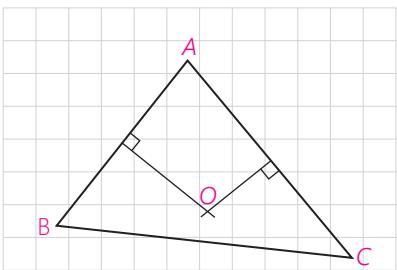
– نوع استدلال ارائه شده توسط هر کدام از دانشآموزان را بیان کنید.

مثال: می‌دانیم که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است و هر نقطه که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف آن پاره خط قرار دارد.

حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همسانند (در یک نقطه به هم می‌رسند).

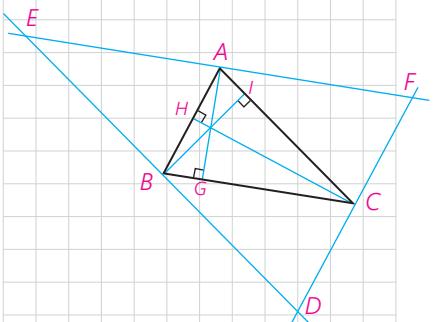
استدلال : مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. چون پاره خط‌های AB و AC متقطع‌اند، عمودمنصف‌های آنها نیز در نقطه‌ای مانند O متقطع‌اند.

- ۱- نقطه O روی عمودمنصف پاره خط AC است؛ بنابراین = =
- ۲- نقطه O روی عمودمنصف پاره خط AB است؛ بنابراین = = از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : = بنابراین نقطه O روی قرار دارد. درنتیجه نقطه O محل برخورد = هست.



مثال : استدلال استنتاجی زیر را کامل کنید و نتیجه بگیرید که سه ارتفاع هر مثلث همسنند.

استدلال : مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و از هر رأس آن خطی به موازات ضلع مقابل به آن رأس رسم کنید تا مطابق شکل مقابل مثلثی مانند DEF به وجود آید. چهارضلعی ABCF چه نوع چهارضلعی‌ای است؟ چرا؟



- 1 بنابراین = از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : = بنابراین نقطه A = پاره خط EF است.

$$\left. \begin{array}{l} AG \perp BC \\ BC \parallel EF \end{array} \right\} \Rightarrow AG \square EF$$

لذا خط AG = پاره خط EF است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد :

پاره خط BI = پاره خط DE است.

پاره خط CH = پاره خط DF است.

بنابراین، ارتفاع‌های مثلث ABC، روی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث هستند و درنتیجه همسنند.

مثال : می‌دانیم که هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. حال با کامل کردن استدلال استنتاجی بیان شده نتیجه بگیرید که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همسنند.

استدلال: مثلث دلخواه ABC در شکل مقابل را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زوایای A و B مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. از نقطه P، مانند شکل سه عمود به اضلاع مثلث رسم می‌کنیم.

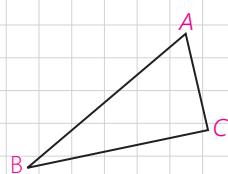
۱- نقطه P روی نیمساز زاویه A است؛ بنابراین =

۲- نقطه P روی نیمساز زاویه B است؛ بنابراین =

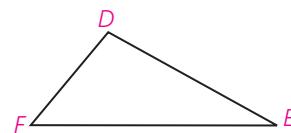
از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : = بنابراین نقطه P روی در نتیجه نقطه P محل برخورد دارد.

فعالیت

به مثلث‌های زیر دقت کنید. در سطر اول جدول، نام اضلاع مثلث را به ترتیب از بزرگ به کوچک و در سطر دوم، نام زاویه‌های مثلث را نیز به ترتیب از بزرگ به کوچک بنویسید.



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			



اضلاع			
زاویه‌ها			

چه رابطه‌ای بین هر ضلع و زاویه زیر آن وجود دارد؟

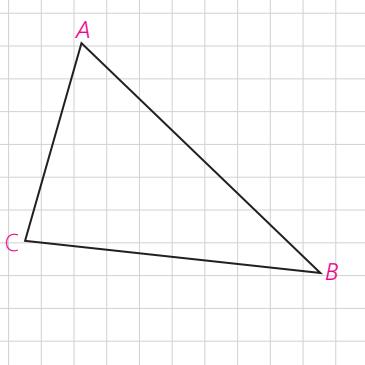
با توجه به این رابطه درباره یک مثلث دلخواه چه حدسی می‌توان زد؟

برای رسیدن به این حدس از چه نوع استدلالی استفاده کردید؟

آیا با این استدلال می‌توان مطمئن بود که حدس موردنظر درست است؟

مسئله: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از زاویه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

استدلال: برای واضح شدن مطلب و کمک به حل مسئله، شکل مثلث را رسم می‌کنیم. آیا می‌توان هر نوع مثلث دلخواهی کشید؟ مانند آنچه در مسئله گفته شده است، مثلثی می‌کشیم که دو ضلع نابرابر داشته باشد و ویژگی خاص دیگری نداشته باشد.



فرض: AB > AC

..... >

- ۱- در مثلث متساوی الساقین زوایای روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.
- ۲- اندازه هر زاویه خارجی یک مثلث برابر است با مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیرمجاورش. بنابراین هر زاویه خارجی مثلث از هر زاویه داخلی غیرمجاورش بزرگتر است.

می‌دانیم طبق فرض $AB > AC$ است؛ لذا می‌توانیم نقطه D را روی AB جایی انتخاب کنیم که $AC = AD$

$$\hat{C} \square \hat{C}_1 \quad \text{اندازه زاویه‌های } C \text{ و } C_1 \text{ نسبت به هم چگونه‌اند؟}$$

مثلث ADC چه نوع مثلثی است؟

$$\hat{C}_1 \square \hat{D}_1 \quad \text{اندازه زاویه‌های } C_1 \text{ و } D_1 \text{ نسبت به هم چگونه‌اند؟}$$

زاویه D_1 چه نوع زاویه‌ای برای مثلث DBC است؟

$$\hat{D}_1 \square \hat{B} \quad \text{اندازه زاویه‌های } D_1 \text{ و } B \text{ نسبت به هم چگونه‌اند؟}$$

از \star و $\star\star$ و $\star\star\star$ چه نتیجه‌ای درباره اندازه زاویه‌های B و C می‌توان گرفت؟

$$\hat{C} \square \hat{B}$$

همان‌طور که مشاهده کردید در مثلثی مانند $\triangle ABC$ فرض کردیم که ضلع $AB > AC$ است و شان دادیم: زاویه روبه‌رو به $AC >$ زاویه روبه‌رو به AB است.

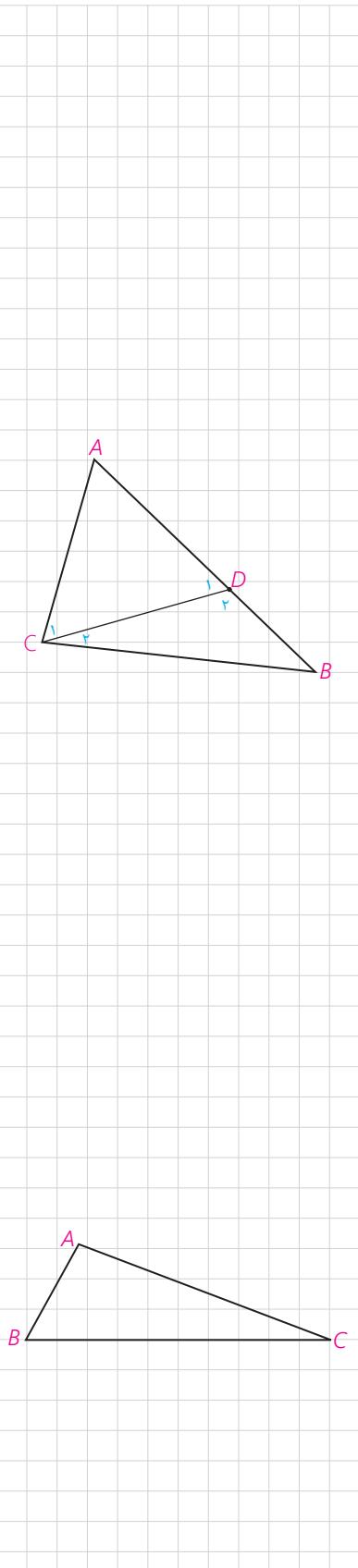
چرا می‌توان این موضوع را درباره تمام مثلث‌هایی که دو ضلع نابرابر دارند، پذیرفت؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که مانند مسئله قبل با استدلال استنتاجی به دست می‌آید، قضیه نامیده می‌شود.

قضیه ۱: اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگتر، **بزرگتر است** از زاویه رو بهرو به ضلع کوچکتر.

فرض: $AB < AC$
حکم: $\hat{C} < \hat{B}$

- بار دیگر به آنچه انجام شد، دقت کنید. بررسی اندازه‌های اضلاع و زوایای مثلث‌های مختلف، دقت در کشف رابطه میان اندازه‌ها، حدس در برقراری رابطه‌ای خاص، طرح مسئله، اثبات درستی مسئله و نهایتاً نتیجه‌گیری.

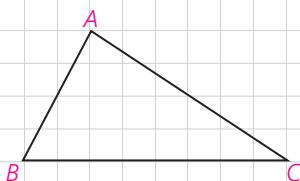


بسیاری از نتایج ریاضی، طی چنین مراحلی توسط علاقه‌مندان به ریاضی به دست آمده است. مراحل این روند و حتی حدس‌ها و تفکراتی که درست نیست اما در این مراحل صورت می‌گیرد، می‌تواند موجب ارتقای تفکر ریاضی شود.

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم به آنچه حاصل می‌شود «عکس قضیه» گفته می‌شود. عکس یک قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

به طور مثال عکس قضیه ۱ به صورت زیر است:

عکس قضیه ۱ در صفحات بعد اثبات شده است.



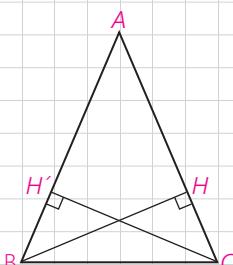
عکس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبرو به زاویه بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبرو به زاویه کوچک‌تر.

$$\begin{array}{l} \text{فرض: } \hat{C} < \hat{B} \\ \text{حکم: } AB < AC \end{array}$$

مثال:

قضیه: اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه: اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.



مثال:
قضیه: اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.

$$\begin{array}{l} \text{فرض: } AB = AC \\ \text{حکم: } BH = CH \end{array}$$

عکس قضیه: اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

$$\begin{array}{l} \text{فرض: } BH = CH \\ \text{حکم: } AB = AC \end{array}$$

درواقع معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض، که حکم از آن ناشی می‌شود با حکم جایه‌جا می‌شود؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC و ارتفاع بودن BH و CH' در خود قضیه و عکس آن جزء مفروضات است.

گزاره یک جملهٔ خبری است که دقیقاً درست یا نادرست باشد؛ اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد. گزاره می‌تواند تنها یک خبر را اعلام کند که به آن گزاره ساده می‌گویند و می‌تواند بیش از یک خبر را اعلام کند و ترکیبی از چند گزاره ساده باشد که به آن گزاره مرکب می‌گویند؛ مثلاً گزاره‌های «فردا هوا بارانی است» و «پانزده عددی اول است»، هر کدام یک گزاره ساده است و «فردا هوا بارانی و پانزده یک عدد اول است» یک گزاره مرکب است.

جمله‌های زیر مثال‌هایی از گزاره است:

– مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° درجه است.

۳<۲

جمله‌های زیر گزاره نیست:

– آیا فردا هوا بارانی است؟

– چه هوای خوبی!

– کتابت را مطالعه کن.



نقیض یک گزاره: همان‌طور که گفته شد، ارزش یک گزاره یا درست است و یا نادرست. نقیض یک گزاره مانند مثال‌های زیر ساخته می‌شود و ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش خود گزاره است.

مثال:

الف) گزاره: « a از b بزرگ‌تر است.»

نقیض آن: «چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد.» که معادل است با « a از b بزرگ‌تر نیست.» و معادل است با « a از b کوچک‌تر و یا با b برابر است.»

ب) گزاره: «مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.»

نقیض آن: «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.» که معادل است با «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.»

پ) گزاره: «یک چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 360° نیست.»

نقیض: «چنین نیست که یک چهارضلعی وجود داشته باشد که مجموع زوایای داخلی آن 360° نیست.» که معادل است با «هر چهارضلعی مجموع زوایای داخلی آن 360° است.»

در برخی گزاره‌ها به جای اینکه دربارهٔ چیزی خبری قطعی داده شود، خبری که اعلام می‌شود با یک شرط بیان می‌شود؛ مثلاً «اگر باران بیارد، مسابقه برگزار نخواهد شد.» به چنین گزاره‌هایی، گزاره‌های شرطی می‌گویند.

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. بدین صورت که به جای اینکه به طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم غلط باشد (یا به عبارتی فرض می‌کنیم، نقض حکم درست باشد) و به یک تناقض یا به یک امر غیرممکن می‌رسیم.

مثال: از یک نقطه غیر واقع بر خط نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن خط رسم کرد.

فرض: نقطه‌ای مانند A غیر واقع بر خطی مانند d وجود دارد.

حکم: از نقطه A نمی‌توان بیش از یک عمود بر خط d رسم کرد.

استدلال: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم غلط باشد؛ یعنی فرض می‌کنیم از نقطه A دو عمود بر خط d رسم کرده‌ایم که مانند شکل، خط d را در نقاط B و C قطع کرده‌اند. در این صورت مجموع زوایای داخلی مثلث ABC بزرگ‌تر از 180° خواهد شد و این غیرممکن است. پس امکان رسم دو عمود از یک نقطه غیر واقع بر یک خط وجود ندارد؛ یعنی حکم نمی‌تواند غلط باشد.

حال می‌خواهیم عکس قضیه ۱ را با برهان غیرمستقیم ثابت کنیم.

عكس قضیه ۱: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع مقابل به زاویه بزرگ‌تر، **بزرگ‌تر است** از ضلع روبرو به زاویه کوچک‌تر.

برای واضح شدن مسئله و کمک به حل آن، شکل مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن فرض و حکم را می‌نویسیم.

$\hat{A} > \hat{B}$: فرض

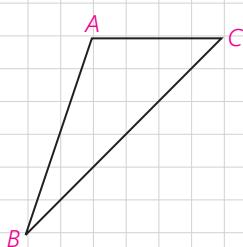
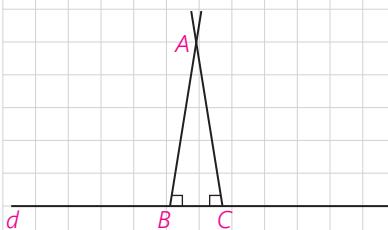
BC > AC : حکم

اثبات: با برهان غیرمستقیم فرض می‌کنیم حکم..... باشد. بنابراین باید.....

هر دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم هر دو حالت به تناقض منجر می‌شود.

حالت اول: اگر $BC < AC$ باشد، طبق قضیه ۱ باید، که با فرض در تناقض است.

حالت دوم: اگر $BC = AC$ باشد، $\triangle ABC$ یک مثلث..... خواهد بود و می‌دانیم $BC < AC$ باشد که در تناقض با فرض است. لذا هر دو حالت $BC < AC$ و $BC = AC$ غیرممکن‌اند؛ بنابراین $BC > AC$ است و حکم درست است.



قضیه‌های دو شرطی

همان گونه که دیدیم، قضیه ۱ و عکس آن هر دو درست است؛ بنابراین می‌توانیم بگوییم که :

اگر در مثلثی، دو ضلع نابرابر باشند، زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، **بزرگتر** است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر، و بر عکس.

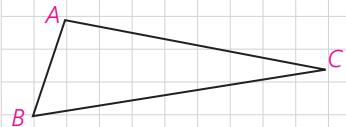
چنین قضیه‌هایی را «قضیه‌های دو شرطی» می‌نامیم.

قضیه‌های دو شرطی را می‌توان با نماد \Leftrightarrow (اگر و تنها اگر) بیان کرد؛ به طور مثال

قضیه فوق و عکس آن را می‌توان به صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم $\triangle ABC$ یک مثلث باشد

$$BC > AB \Leftrightarrow \hat{A} < \hat{C}$$



مثال: در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند؛ اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آنها با هم برابر باشند.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که با آن آشنا شده‌اید، استدلال با مثال نقض است. گاهی در برخی موضوعات (چه ریاضی و چه غیر ریاضی) یک حکم به صورت کلی بیان می‌شود؛ بدین صورت که در مورد تمام اعضای یک مجموعه یک حکم بیان می‌شود. موارد زیر نمونه‌هایی از حکم‌های کلی است :

(الف) «همه اعداد صحیح، مثبت‌اند.» (حکمی کلی در مورد تمام اعداد صحیح)

(ب) «هر چهار ضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهارضلعی‌هایی که چهار ضلع برابر دارند)

(پ) «مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.» (حکم کلی در مورد

تمام چهارضلعی‌هایی محدب)

(ت) «به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.» (حکم کلی

در مورد تمام اعداد طبیعی)

حدس خود را درباره درستی یا نادرستی حکم کلی «الف» بنویسید. چگونه می‌توانید درستی حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که $(n^2 + n + 41)$ یک عدد صحیح و منفی است؛ بنابراین حکم کلی «الف» با ارائه

همین مثال رد می شود. به چنین مثالی که نشان می دهد یک حکم کلی نادرست است،

مثال نقض گفته می شود. درباره درستی یا نادرستی «ب» چه می تواند بگوید؟

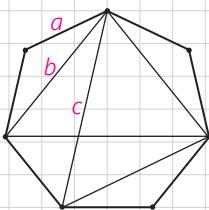
اگر برای یک حکم کلی توانیم مثال نقض بیاوریم، درباره درستی یا نادرستی آن حکم چه می توان گفت؟ آیا در موارد (پ) و (ت) می توانند مثال نقض پیدا کنند؟

آیا اگر در مورد یک حکم کلی توانیم مثال نقض پیدا کنیم، باید درستی آن حکم کلی را نتیجه گیری کنیم؟ در مورد (پ) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش حکم کلی (پ) کافی نیست و باید توجه کرد که «برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید اثبات ارائه کنیم.» درباره گزینه (ت) چه می توان گفت؟

اگر درستی یک حکم کلی را توانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز توانیم بیابیم، نمی توان درباره درستی یا نادرستی آن حکم کلی، نتیجه ای گرفت.

کارد رکلاس

۱- در شکل مقابل نقطه ها، رأس های یک هفتوالعی منتظم به طول ضلع a می باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی زیر درست است؟ «با وصل کردن هر سه رأس از این شکل یک مثلث متساوی الساقین، به دست می آید».



۲- آیا حکم های کلی زیر درست است؟ چرا؟

الف) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $B \subseteq A$ و یا

ب) هر دو مثلث که مساحت های برابر داشته باشند، هم نهشتند.

تمرین

۱- می دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می کند.

۲- با برهان خلف ثابت کنید اگر در مثلث ABC ، $AB \neq AC$ ، $\hat{B} \neq \hat{C}$.

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از چهار برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۴- با استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $(n-2) \times 180^\circ$.

۵- نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) هر لوزی یک مربع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) هیچ مثلثی بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

ت) مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

۶- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آنها را به صورت یک قضیه دوشرطی بنویسید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبرو به آنها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمودمنصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث، اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.