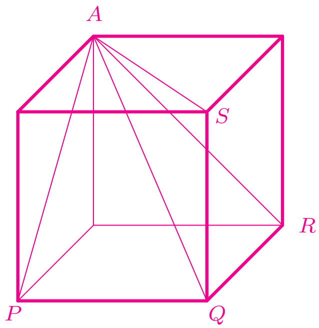
۱۸. نقطهٔ M وسط ضلع AC از مثلث ABC است. اگر نقطهٔ D چنان روی ضلع BC قرار داشته باشد که $D\widehat{M}C = B\widehat{M}A$ و $CD + DM = BM$، آنگاه ثابت کنید:

$$A\hat{C}B + A\hat{B}M = B\hat{A}C.$$

۱۹. در مکعب زیر، در بین اندازهٔ زاویه‌های $P\hat{A}Q$، $P\hat{A}R$، $P\hat{A}S$، $Q\hat{A}R$، $Q\hat{A}S$ و $R\hat{A}S$ چند مقدار مختلف وجود دارد؟

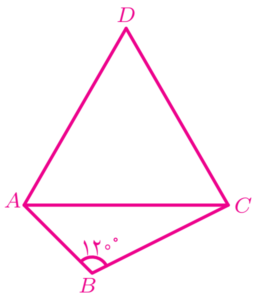


۲۰. در شکل روبه‌رو، مثلث ACD متساوی‌الاضلاع است. ثابت کنید:

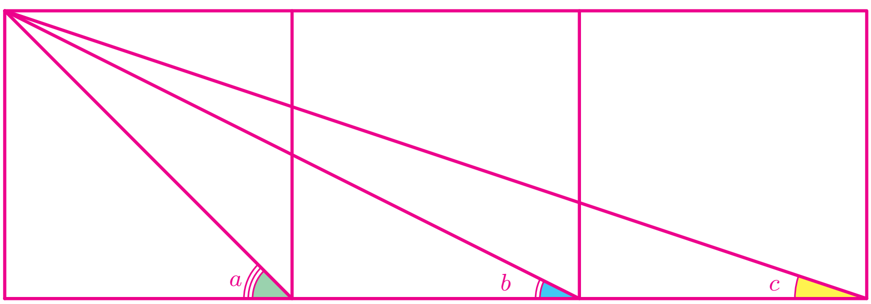
الف) پاره‌خط BD نیم‌ساز زاویهٔ B است.

ب) $BD = AB + BC$.

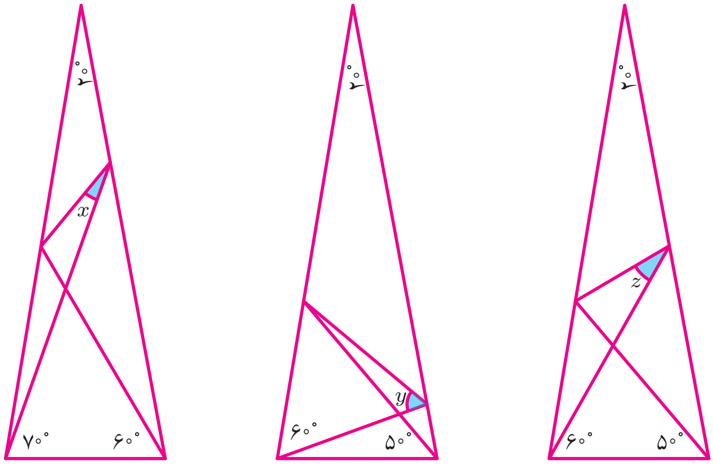
راهنمایی: BC را از طرف B به اندازهٔ AB امتداد دهید و نقطه انتها را E بنامید. سپس ثابت کنید دو مثلث ABD و AEC هم‌نهشت‌اند.



۲۱. شکل زیر از سه مربع به ضلع واحد تشکیل شده است. مطلوب است $a + b + c$.



۲۲. در زیر، سه مثلث متساوی‌الساقین می‌بینید که زاویهٔ رأس آنها ۲۰ درجه است. مقدارهای x، y و z را بیابید.



۲۳. پاره‌خط‌های AB، CD و EF در نقطه O همرس‌اند. اگر CD پاره‌خط EF را نصف کرده باشد و OE و OF به‌ترتیب میانه مثلث‌های BCO و ADO باشند، آیا می‌توان ثابت کرد دو مثلث BOE و AOF هم‌نهشت‌اند؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

هم‌نهشتی مثلث‌های قائم‌الزاویه

۱. یک سرباز کنار رودخانه ایستاده و می‌خواهد بداند عرض رودخانه چند قدم است. او شنیده است می‌تواند بدون اینکه وارد آب شود، عرض رودخانه را با استفاده از کلاهش به‌طور تقریبی اندازه بگیرد. این سرباز چگونه بفهمد عرض رودخانه چقدر است؟

۲. با ذکر دلیل مشخص کنید کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

الف) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

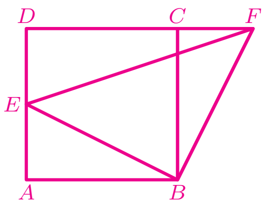
ب) اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه، با دوضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر نظیر به نظیر برابر باشد، این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۳. پاره‌خط‌های AB، CD و EF در نقطه O همرس‌اند. اگر OE و OF به‌ترتیب ارتفاع مثلث‌های AOC و BOD باشند، آیا می‌توان ثابت کرد $\triangle BOF \cong \triangle AOE$؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

۴. در مربع $ABCD$، نقطه‌های E و F به‌ترتیب روی اضلاع BC و AB قرار دارند به‌طوری‌که $AE = FC$. اگر $B\hat{A}E = ۱۵^\circ$، آنگاه زاویهٔ CFE چند درجه است؟

۵. ارتفاع AH، نیم‌ساز BD و میانهٔ CM از مثلث ABC در نقطهٔ G همرس‌اند. اگر $AG = BG$، آنگاه ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۶. در شکل زیر، $ABCD$ مربع است. نقطه E روی AD و F روی امتداد DC قرار دارد به‌طوری‌که EB بر FB عمود است. اگر $AB = ۱۶$ و $BE \times BF = ۴۰۰$، آنگاه طول CF چقدر است؟



۷. خط ℓ ضلع‌های AB و BC از مستطیل $ABCD$ را قطع کرده است. اگر فاصلهٔ نقطه‌های A، B و C از خط ℓ به‌ترتیب ۴، ۵ و ۷ سانتی‌متر باشد، آنگاه فاصلهٔ نقطهٔ D از خط ℓ چقدر است؟

راهنمایی: از نقطهٔ B خطی موازی با ℓ رسم کنید.

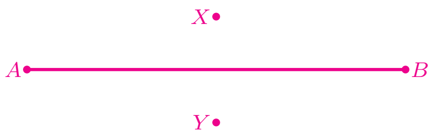
۸. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و دربارهٔ آنها با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

خط d عمودمنصف پاره‌خط AB است و AB را در نقطهٔ H قطع کرده است. نقطهٔ دلخواه M را روی خط d انتخاب می‌کنیم. دو مثلث AMH و BMH هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس می‌توان نتیجه گرفت $AM = BM$.	فاصلهٔ M از دو سر پاره‌خط AB یکسان است؛ یعنی $AM = BM$. میانهٔ MN از مثلث AMB را رسم می‌کنیم. دو مثلث AMN و BMN هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد.

نتیجه: هر نقطه دلخواه روی عمودمنصف یک پاره‌خط ....

و برعکس اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط ....

۹. در شکل زیر، $XA = YA$ و $XB = YB$.



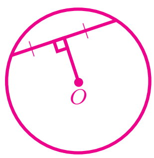
کدام‌یک از جمله‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) AB روی عمودمنصّف XY است.

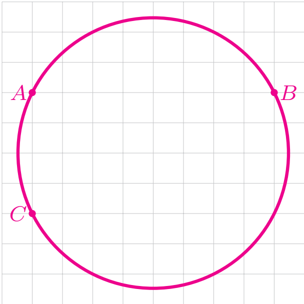
ب) XY روی عمودمنصّف AB است.

۱۰. پاره‌خط AE در نقطه R پاره‌خط BK را قطع می‌کند به‌طوری‌که $AB = AK$. آیا می‌توان ثابت کرد $AE \perp BK$؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان ثابت کرد $AE \perp BK$.

۱۱. در شکل زیر، آیا نقطهٔ O مرکز دایره است؟ چرا؟



۱۲. در شکل روبه‌رو،



الف) داخل دایره، همهٔ نقاطی را مشخص کنید که از A و B فاصلهٔ یکسان دارند.

ب) داخل دایره، همهٔ نقاطی را مشخص کنید که از A و C فاصلهٔ یکسان دارند.

ج) مرکز دایره را پیدا کنید.

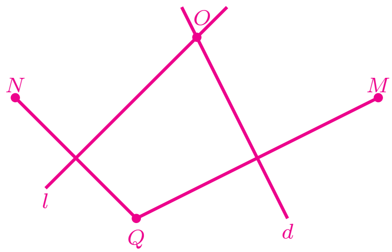
۱۳. دایره‌ای به مرکز P و دایره‌ای به مرکز Q یکدیگر را در دو نقطه X و Y قطع کرده‌اند.

الف) ثابت کنید PQ عمودمنصّف پاره‌خط XY است.

ب) آیا می‌توان گفت XY عمودمنصّف PQ است؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا XY نیز عمودمنصّف PQ باشد.

۱۴. در مثلث ABC، $AB = AC$ و $\hat{A} = ۱۰۰^\circ$. عمودمنصّف‌های اضلاع AB و AC ضلع BC را در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. زاویهٔ EAF چند درجه است؟

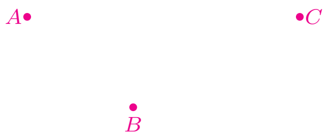
۱۵. در شکل زیر، خطوط d و ℓ عمودمنصّف پاره‌خط‌های QM و QN هستند.



الف) همهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقینی که با رأس‌های M، Q، N و O ساخته می‌شوند را با ذکر دلیل نام ببرید.

ب) با یک پرگار، به مرکز O و شعاع OQ دایره‌ای رسم کنید. چرا این دایره از M و N نیز می‌گذرد؟

۱۶. در زیر، دایره‌ای رسم کنید که هر سه نقطهٔ A، B و C روی آن دایره باشند.



۱۷. سه نقطهٔ دلخواه در یک صفحه داده شده است. آیا همواره می‌توان نقطهٔ چهارمی در همان صفحه پیدا کرد که فاصلهٔ آن از سه نقطهٔ داده شده یکسان باشد؟ اگر پاسخ خیر است شرطی به مسئله اضافه کنید که همیشه آن نقطهٔ چهارم وجود داشته باشد.

۱۸. شرکت مخابرات یک دکل مخابراتی را برای آنتن‌دهی موبایل ساکنین سه روستای نزدیک به‌هم در نظر گرفته است. شرکت مخابرات باید این دکل را در کجا نصب کند؟

۱۹. تفاوت دو مسئلهٔ زیر را مشخص کنید.

مسئلهٔ اول. ثابت کنید اگر در یک مثلث، طول میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

مسئلهٔ دوم. ثابت کنید در همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه، طول میانه‌ای که از زاویهٔ قائمه رسم می‌شود، نصف طول وتر است.

۲۰. فاطمه و مژگان دو مسئلهٔ تمرین قبل را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. دو راه‌حل زیر را با جزئیات کامل، شرح دهید.

راه‌حل فاطمه برای مسئلهٔ اول :

فرض کنید در مثلث ABC طول میانهٔ AM نصف ضلع BC باشد. بنابراین دو مثلث ABM و ACM متساوی‌الساقین هستند؛ پس در دو مثلث ABM و ACM اندازهٔ زاویه‌های پای ساق برابرند. از طرفی مجموع زاویه‌های مثلث ABC برابر ۱۸۰° است. پس می‌توان نتیجه گرفت که زاویهٔ BAC قائمه است.

راه‌حل مژگان برای مسئلهٔ دوم :

فرض کنید در مثلث قائم‌الزاویه دلخواه ABC عمودمنصف ضلع AB و وتر BC یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. پس مثلث AMB متساوی‌الساقین است. چون مجموع دو زاویهٔ B و C برابر ۹۰° و مجموع دو زاویهٔ CAM و BAM نیز برابر ۹۰° است، پس دو زاویهٔ CAM و C برابرند و در نتیجه میانهٔ AM نصف وتر BC است.

۲۱. این دو چه تفاوتی باهم دارند؟ هر یک را کامل کنید و دربارهٔ آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

نقطهٔ دلخواه D را روی نیم‌ساز زاویهٔ A انتخاب می‌کنیم. از D دو عمود DH و DK را بر ضلع‌های زاویهٔ A رسم می‌کنیم. دو مثلث AHD و AKD هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس می‌توان نتیجه گرفت $DH = DK$.

نقطهٔ M از دو ضلع زاویهٔ A فاصلهٔ یکسان دارد؛ یعنی اگر دو عمود MH و MK را بر ضلع‌های زاویهٔ A وارد کنیم، آنگاه $MH = MK$. در این صورت دو مثلث AMH و AMK هم‌نهشت‌اند. (چرا؟) پس AM نیم‌ساز زاویهٔ A است.

نتیجه: هر نقطهٔ دلخواه روی نیم‌ساز یک زاویه ....

و برعکس نقطه‌ای که از دو ضلع یک زاویه ....

۲۲. در مستطیل $ABCD$، نقطهٔ M وسط ضلع CD قرار دارد. نقطهٔ K روی ضلع BC چنان قرار دارد که KM نیم‌ساز زاویهٔ AKC است. ثابت کنید AM نیم‌ساز زاویه KAD است.

۲۳. در چهارضلعی محدب $ABCD$ قطر AC نیم‌ساز زاویه A است. اگر $AB = ۴$، $AD = ۵$ و مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، آنگاه مساحت چهارضلعی $ABCD$ چقدر است؟

۲۴. الف) ثابت کنید در دو مثلث هم‌نهشت ارتفاع‌های نظیر برابرند.

ب) دو پاره‌خط برابر AB و CD یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کرده‌اند؛ همچنین عمودمنصّف‌های دو پاره‌خط AD و BC یکدیگر را در نقطهٔ N قطع کرده‌اند. اگر نقطهٔ N درون زاویهٔ AMC باشد، آنگاه ثابت کنید MN نیم‌ساز زاویهٔ AMC است.

تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۱)

نگاهم رو دوخته بودم به چهره آقای آشتیانی ولی به پویانمایی «ظاهر و باطن» (Inside Out) فکر می‌کردم. از خودم پرسیدم: آیا شخصیتِ شادِ درون ذهن آقای آشتیانی زنده است؟ اگر زنده است، پس چرا ما خندیدن آقای آشتیانی را ندیده‌ایم؟ شاید شخصیتِ شادِ ذهنِ آقای آشتیانی در اعماق ذهن او گم شده باشد. ممکن است شادی و خشمِ ذهن او باهم دعوایشان شده باشد! شاید شخصیت خشم، شادی ذهن او را زندانی کرده باشد! شخصیتِ خشمِ ذهن آقای آشتیانی چه شکلی است؟ چقدر شبیه خود آقای آشتیانی است؟ لحظه‌ای چهرهٔ شخصیتِ خشمِ آقای آشتیانی را تصور کردم، قیافهٔ عجیبی در ذهنم ساخته شد! از این تصور خنده‌ام گرفت؛ خیلی سعی کردم خودم رو کنترل کنم، اما نشد!

آقای آشتیانی با دست راست تسبیحش را از جیبش درآورد و سرش را طوری چرخاند که نگاهش در نگاه من افتاد. او انگشت شستش را پشت دانه‌های تسبیح گذاشت و آنها را فشار داد طوری‌که تسبیحش به من اشاره می‌کرد، گفت: «به چی می‌خندی؟ کلاس که جای خندیدن نیست؟» می‌دانستم که الان با یک پرسش ریاضی به دام آقای آشتیانی می‌افتم. پرسید: «زود بگو ببینم تعداد دانه‌های تسبیح من بیشتر است یا $۴^۴$؟» سعی کردم دانه‌های تسبیح را بشمارم که آقای آشتیانی گفت: «به چی نگاه می‌کنی؟ می‌خوای دانه‌های تسبیح رو بشماری؟ تسبیح‌ها معمولاً ۱۰۱ دانه دارند.» می‌خواستم $۴^۴$ را ذهنی حساب کنم، که چند نفر از بچه‌های کلاس دستشان را بالا بردند که جواب بدهند. همین باعث شد تمرکزم به‌هم بریزد و نتوانم محاسبه کنم. آخر سر هم یکی از همین بچه‌ها گفت که $۴^۴$ می‌شه ۲۵۶. پس $۴^۴$ از تعداد دانه‌های تسبیح شما بیشتره.

ادامه دارد ... (صفحهٔ ۱۱۳)

۷

توان و جذر

تعداد شاخ و برگ درختان به‌صورت توانی زیاد می‌شوند.

توان

۱. الف) عدد $۴^{۴}$ را به چه توانی برسانیم که حاصل $۸^{۸}$ شود؟

ب) عدد $۹^{۹}$ را به چه توانی برسانیم تا به عدد $۲۷^{۱۲}$ برسیم؟

۲. حاصل عبارات زیر را به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

الف) $(۳^{۴})^{۲} \times (۵^{۲})^{۴} \times ۱۵^{۴}$

ب) $\dfrac{۳^{۳} \times ۸^{۳} \times ۲۴^{۵}}{۶^{۳} \times ۴^{۳}}$

ج) $\dfrac{(۱/۴)^{۳} \times (۰/۲)^{۳} \times ۷^{۳}}{(۲/۸)^{۶}}$

د) $\dfrac{۲^{۲} \times ۴۸^{۷} \times ۶^{۳} \times ۳^{۲} \times ۸^{۵}}{۱۶^{۱۲}}$

ه) $\dfrac{۳۸^{۲} \times ۲۶^{۵} \times ۱۱^{۷}}{۱۳^{۱۲} \times ۴۴^{۷} \times ۱۹^{۲}}$

و) $\dfrac{۳^{۲} \times ۸^{۴} \times ۲۴^{۵}}{۶^{۲} \times ۴^{۵}}$

ز) $(۳^{۵} + ۳^{۵} + ۳^{۵})(۳^{۱۱} + ۳^{۱۱} + ۳^{۱۱})$

۳. هر یک از اعداد زیر را به‌صورت تجزیه شده به عوامل اول بنویسید.

الف) $(۲^{۲} \times ۳)^{۴} \times ۱۵^{۵}$

ب) $(۱۸^{۱۹} \times ۱۹^{۱۸})^{۳} \times ۳۸^{۶}$

ج) $(۱۲^{۳} \times ۱۴^{۴})^{۵} \times (۲۱^{۲})^{۳}$

۴. در هر یک از تساوی‌های زیر مقدار x و y را بیابید.

الف) $۳^{۴} = ۳ \times ۳^{x}$

ب) $۴^{۳} = ۲^{۳} \times ۲^{x}$

ج) $۹^{۵} = ۳^{۲} \times ۸۱^{y}$

د) $۱۸^{۶} = ۳^{۶} \times ۲^{x} \times ۶^{y}$

ه) $۲۴^{۵} = ۲^{x} \times ۳^{y} \times ۱۲^{۳}$

و) $۱۲^{۸} = ۳^{۴} \times x^{y}$

۵. داخل مربع علامت $\times$ یا $\div$ قرار دهید تا تساوی برقرار شود.

الف) $۶^{۲} \;\square\; ۱۸^{۳} \;\square\; ۳^{۲} = ۱۸^{۵}$

ب) $۱۸^{۶} \;\square\; ۲^{۶} \;\square\; ۳^{۶} = ۲۷^{۶}$

ج) $۲۴^{۴} \;\square\; ۲^{۶} \;\square\; ۲۷ = ۸ \times ۲۴$

د) $۱۸^{۵} \;\square\; ۳۲ \;\square\; ۹^{۳} = ۹^{۸}$

۶. مقادیر زیر را بیابید.

الف) $۳۳۳۳۳^۳ - ۲۷ \times ۱۱۱۱۱^۳$ ب) $\left(\frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}\right)^{۲۰۰}\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)^{۲۰۰}$

۷. چهار نفر معادلهٔ زیر را حل کردند.

$$۶^۸ = ۳^۴ \times a^b$$

آنها حاصل $a+b$ را مقادیر ۱۶، ۱۴۶، ۱۲۴۶ و ۲۰۷۳۷ اعلام کردند. درستی یا نادرستی هر یک از پاسخ‌ها را بررسی کنید.

۸. اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m^n = ۲^{۲۰}$، آنگاه m و n چه اعدادی می‌توانند باشند؟

۹. در هر یک از عبارت‌های زیر توان عدد ۲ را به‌دست آورید.

الف) $۲^{۳^۴}$ ب) $(۲^۳)^۴$ ج) $۲^{۴^۳}$ د) $(۲^۴)^۳$

۱۰. می‌دانیم x، y و z سه عدد متفاوت هستند. اگر این سه عدد ۲، ۳، ۴ یا ۵ باشند، آنگاه بیشترین و کمترین مقدارِ x^{y^z} و $(x^y)^z$ را به‌دست آورید.

۱۱. با کمک یک (یا چند) پرانتزگذاری، از عدد داده شده به چند عدد متفاوت می‌توان دست یافت؟

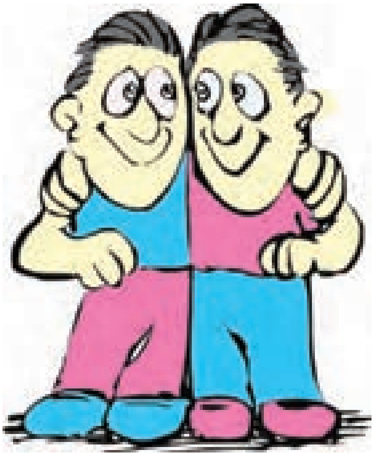
$$۲^{۳^{۴^۵}}$$

۱۲. بزرگ‌ترین عدد طبیعیِ n را بیابید به‌گونه‌ای که:

$$n^{۲۰۰} < ۵^{۳۰۰}.$$

۱۳. در یک مربع، وسط‌های ضلع‌های روبه‌رو را به هم وصل می‌کنیم. در مرحلهٔ بعد همین کار را برای هر یک از مربع‌های حاصل انجام می‌دهیم. اگر این کار را شش مرحله انجام دهیم، تعداد کلّ مربع‌ها چند تا می‌شود؟

اعداد رادیکالی



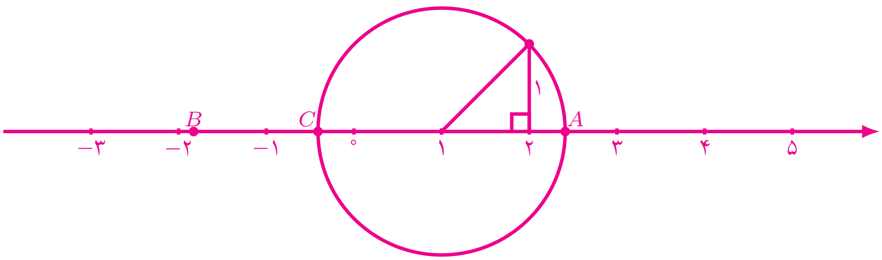
۱. مجید برای نمایش عدد $\sqrt{۷}$ روی محور از تساوی $۴^{۲} = (\sqrt{۷})^{۲} + ۳^{۲}$ استفاده کرد. مهرداد برای نمایش عدد $\sqrt{۷}$ روی محور اعداد از تساوی $(\sqrt{۷})^{۲} = ۲^{۲} + (\sqrt{۳})^{۲}$ استفاده کرد. روش مجید و روش مهرداد را با استفاده از محور اعداد شرح دهید.

۲. هر یک از اعداد زیر را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ب) $۷ - ۳\sqrt{۲}$

ج) $\sqrt{۲} + \sqrt{۵}$ د) $-\sqrt{۱۱} + \sqrt{۳}$

۳. در شکل زیر، $AB = ۳\sqrt{۲}$. نقطه‌های B و C چه اعدادی را نشان می‌دهند؟ طول پاره‌خط BC چقدر است؟



۴. اگر A و B دو نقطه روی محور اعداد باشند و طول پاره‌خط AB برابر $\sqrt{۷} - \sqrt{۲}$ و B متناظر با عدد $\sqrt{۲} + ۱$ باشد، A متناظر با چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۵. روی محور زیر، اعداد ۱ و ۱− را مشخص کنید.

۶. از نقطهٔ ۲− روی محور اعداد ۳ واحد به‌طور عمودی بالا رفته‌ایم تا به نقطهٔ A رسیده‌ایم. سپس نوک پرگار را روی نقطهٔ ۱ گذاشته‌ایم و دایره‌ای رسم کرده‌ایم که از نقطهٔ A می‌گذرد. اگر محل برخورد دایره با محور اعداد را B بنامیم و طول پاره‌خط BC برابر $۲\sqrt{۲}$ باشد، آنگاه نقطهٔ C متناظر با چه اعدادی می‌تواند باشد؟

۷. الف) هر جفت از اعداد زیر را مقایسه کنید.

- $\sqrt{۱۱}+\sqrt{۱۲},\ \sqrt{۱۰}+\sqrt{۱۳}$
- $\sqrt{۶}+\sqrt{۱۰},\ \sqrt{۵}+\sqrt{۱۲}$

ب) فرض کنید a، b، c و d چهار عدد طبیعی باشند و

$$۰ < (\sqrt{a}+\sqrt{b}) - (\sqrt{c}+\sqrt{d}) < ۰/۱.$$

تمام مقادیر ممکن کوچک‌تر از ۳۰ را برای این چهار عدد بیابید.
برای به‌دست‌آوردن جواب‌ها، می‌توانید از یکی از نرم‌افزارهای مناسبی که بر روی «www.webmath.ir» معرفی شده است، کمک بگیرید.

تخیلات یک دانش‌آموز در کلاس ریاضی (۲)

آقای آشتیانی گفت: «درسته!» بعد کنار میز معلم رفت، خودنویسش را از جیب پیراهنش درآورد، لیست کلاس را برداشت و داخل آن یادداشتی نوشت. بعد پرسید: «کسی می‌تونه بگه حاصل $۴^{۴}$ چی می‌شه؟» برای اینکه جبران کنم، سریع قلم و کاغذ برداشتم و شروع کردم به محاسبه! ولی بلافاصله آقای آشتیانی گفت: «لازم نیست دستی حساب کنید. این عدد خیلی بزرگه! با استفاده از جئوجبرا محاسبه‌اش می‌کنیم.» بعد رایانه کلاس رو روشن کرد و عدد را داخل محیط جئوجبرا نوشت. حاصل عدد خیلی بزرگی بود!

$$۴^{۴^{۴}} = ۱۳۴۰۷۸۰۷۹۲۹۹۴۲۵۹۷۰۹۹۵۷۴۰۲۴۹۹۸۲۰۵۸۴۶۱۲۷۴۷۹۳۶۵۸۲۰۵۹۲۳۹۳۳$$
$$۷۷۷۲۳۵۶۱۴۴۳۷۲۱۷۶۴۰۳۰۰۷۳۵۴۶۹۷۶۸۰۱۸۷۴۲۹۸۱۶۶۹۰۳۴۲۷۶۹۰۰$$
$$۳۱۸۵۸۱۸۶۴۸۶۰۵۰۸۵۳۷۵۳۸۸۲۸۱۱۹۴۶۵۶۹۹۴۶۴۳۳۶۴۹۰۰۶۰۸۴۰۹۶.$$

آقای آشتیانی پرسید: «حالا کی می‌تونه بگه حاصل $۴^{۴^{۴^{۴}}}$ چی می‌شه؟» یکی از بچه‌ها گفت: «آقا

اجازه! جئوجبرا.» آقای آشتیانی گفت: «نه! جئوجبرا هم نمی‌تونه حاصل این عدد رو حساب کنه!» و شروع کرد به یه سری محاسبات که من چیزی از اونا سر در نیاوردم. نتیجه محاسبات این شد:

$$۴^{۴^{۴^{۴}}} > ۱۰^{۲۴\times ۱۰^{۱۵۲}} > ۱۰^{۱۸\times ۱۰^{۱۵۲}} = \left(۱۰^{۹}\right)^{۲\times ۱۰^{۱۵۲}}.$$

بعد گفت:

اگه بخواهیم با کلمه میلیارد این عدد رو بنویسیم باید بیشتر از $۱۰^{۱۵۲} \times ۲$ بار کلمه میلیارد رو بنویسیم. مساحت کره زمین تقریباً $۱۰^{۲۱}$ سانتی‌متر مربع است، اگه در هر سانتی‌متر مربع ۱۰ بار بتونیم بنویسیم میلیارد، یعنی روی کره زمین فقط $۱۰^{۲۲}$ بار می‌تونیم بنویسیم میلیارد! فکر می‌کنید برای نوشتن چهار به توان چهار به توان چهار به توان چهار چندتا کره زمین لازمه؟!

یه مثال دیگه می‌زنم. فکر می‌کنید $۱۰^{۲۴\times ۱۰^{۱۵۲}}$ چند میلیون تومان است؟ فرض کنید اسکناس‌های یک میلیون تومانی داشته باشیم و ضخامت هر ۱۰۰ اسکناس یک سانتی‌متر باشد. فاصله زمین تا خورشید تقریباً $۱۰^{۲۲}$ سانتی‌متر است. یعنی می‌توانیم از زمین تا خورشید یک برج $۱۰^{۲۴}$ میلیون تومانی با اسکناس‌های یک میلیون تومانی بسازیم! حالا با این همه پول، چندتا برج تا خورشید می‌تونیم بسازیم؟! حالا فهمیدید این عدد چقدر بزرگه یا نه؟ بچه‌ها این عدد خیـــــــــــــــــــــلی بزرگه! خیلی خیلی خیلی بزرگـــــــه!

یکی از بچه‌ها گفت: «آقا اجازه! یعنی $۴^{۴^{۴^{۴}}}$ از $۱۰^{۱۰^{۱۰^{۱۰}}}$ هم بزرگ‌تره؟»

آقای آشتیانی از این سؤال خنده‌اش گرفت طوری‌که نتوانست خودش را کنترل کند و من برای اولین بار سفیدی دندان‌های آقای آشتیانی را دیدم! همه بچه‌ها هم خندیدند! من هم خندیدم. بعد از ۲، ۳ دقیقه، خنده آقای آشتیانی و بچه‌ها تمام شد ولی آقای آشتیانی جوابی به آن سؤال نداد؛ و من نفهمیدم چرا آقای آشتیانی و بچه‌ها خندیدند و خجالت می‌کشیدم که بپرسم چه چیزی خنده‌دار بود!

۸ آمار و احتمال

راهپیمایی اربعین در سال ۱۳۹۳ بیست میلیون نفر تخمین زده شده است. به‌نظر شما این عدد را چگونه به‌دست آورده‌اند؟

گفت‌وگو

غزاله: فائزه جان! لطفاً میانگین سه عدد ۱۶، ۱۷ و ۱۲ را حساب می‌کنی؟

فائزه: وا! خجالت نمی‌کشی تنبل خانم! این را هم بلد نیستی؟

غزاله: [با لبخند] چی شد؟!

فائزه: خب یک دقیقه صبر کن. کامپیوتر که نیستم! دارم جمع می‌کنم.

غزاله: آفرین! ادامه بده. حتماً بعدش هم می‌خواهی تقسیم کنی؟!

فائزه: خب معلومه. اشکالش چیه؟

غزاله: اشکال که چه عرض کنم! نمی‌خواد خودت را به زحمت بندازی. میانگین ۱۵ است.

فائزه: خب تو که قبلاً حساب کرده بودی برای چی منو به زحمت انداختی؟!

غزاله: من بدون محاسبه جواب دادم؛ یا حداقل می‌شود گفت که محاسباتم خیلی راحت‌تر و خلاقانه‌تر بود.

فائزه: چه جوری؟!

غزاله: مگر در تمرین‌های کتاب یاد نگرفتیم که مجموع فواصل اعداد با میانگین برابر صفر است؟

فائزه: خب بله. حالا چه ربطی دارد؟!

غزاله: حدس زدم که میانگین این سه عدد باید ۱۵ باشد. بعد فاصلهٔ میانگین را با سه عدد ۱۶، ۱۷ و ۱۲ حساب کردم:

$$۱۶ - ۱۵ = ۱, \qquad ۱۷ - ۱۵ = ۲, \qquad ۱۲ - ۱۵ = -۳,$$

مجموع سه مقدارِ حاصل، صفر است ($-۳ + ۲ + ۱ = ۰$). بنابراین حدس من درست بوده است.

فائزه: غزاله جان! روش شما کارآمد نیست. فرض کن من حدس می‌زدم که میانگین این سه عدد ۱۵/۵ است. حدس است دیگر!! آن وقت چه می‌کردی؟

غزاله: به نکتهٔ خوبی اشاره کردی دوست جان! تفاضل میانگین حدسی را از سه عدد داده شده حساب کن:

$$۱۲ - ۱۵/۵ = -۳/۵, \qquad ۱۷ - ۱۵/۵ = ۱/۵, \qquad ۱۶ - ۱۵/۵ = ۰/۵.$$

مجموع سه مقدار به‌دست آمده را حساب می‌کنیم:

$$-۳/۵ + ۱/۵ + ۰/۵ = -۱/۵.$$

برای به‌دست آوردن مقدار واقعی میانگین، مقدار حاصل را بر تعداد تقسیم می‌کنیم: $-۱/۵ \div ۳ = -۰/۵$. حالا $-۰/۵$ را با میانگین حدسی جمع می‌زنیم: $۱۵/۵ + (-۰/۵) = ۱۵$.

فائزه: وای غزاله تو یک شعبده‌باز واقعی هستی!

غزاله: فائزه جان! کافی است کمی به عقب برگردی و در مورد مفاهیم اولیه که به نظرت بدیهی و خسته کننده می‌رسد کمی بیشتر فکر کنی. برای مثال، وقتی می‌گوییم میانگین سه عدد ۱۵/۵ است یعنی $۱۵/۵ \times ۳$ باید مجموع سه عدد باشد.

تمرین. با روش غزاله میانگین هر دسته از اعداد زیر را به‌دست آورید.

الف) ۱۵۹, ۱۶۳, ۱۵۷/۵, ۱۵۵, ۱۶۲

ب) ۱۶/۵, ۲۰, ۱۹, ۱۵, ۱۶, ۱۷/۵

دسته‌بندی داده‌ها و میانگین

۱. با مراجعه به وبگاه «www.webmath.ir» می‌توانید به اطلاعاتِ مربوط به هر یک از بازیکنان حاضر در لیگ جهانی والیبال دسترسی پیدا کنید.

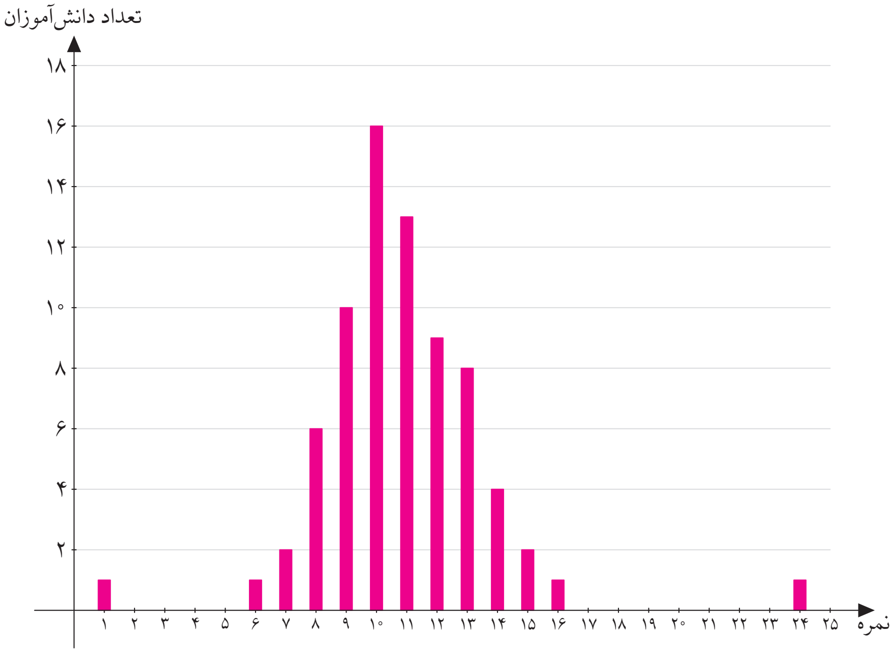
الف) قد والیبالیست‌هایی که بین ۱۹۵ تا ۲۱۰ است را به پنج دستهٔ مساوی تقسیم کنید و سپس جدول فراوانی مربوط به این پنج دسته را تشکیل دهید.

ب) میانگین قد والیبالیست‌ها در کدام دسته قرار دارد؟

ج) نمودار ستونی مربوطه را رسم کنید. در نمودار ستونی رسم شده، کدام دسته بلندترین ارتفاع را دارد و این چه معنایی دارد؟

د) آیا نمودار رسم شده متقارن است؟

۲. نمودار زیر، نمودار نمره‌های تعدادی دانش‌آموز در یک آزمون ۲۵ نمره‌ای است.



الف) تعداد دانش‌آموزان شرکت کننده در آزمون چندتا است؟

ب) نمرهٔ چند دانش‌آموز از میانگین بیشتر است؟

ج) اگر دو نفری را که کمترین و بیشترین نمره را گرفته‌اند، حذف کنیم، میانگین و دامنهٔ تغییرات چگونه تغییر می‌کند؟

د) این ۲۵ نمره را به ۵ دستهٔ مساوی تقسیم کنید. جدول فراوانی تشکیل دهید که شامل فراوانی هر دسته، مرکز دسته و مرکز دسته × فراوانی آن باشد. برای این جدول نمودار ستونی رسم کنید.

هـ) این بار میانگین نمرات را باتوجه‌به جدول فراوانی قسمت قبل به‌دست آورید. میانگین جدید چقدر با میانگین واقعی اختلاف دارد؟

۳. به نظر شما چرا از مرکز دسته برای میانگین‌گیری استفاده می‌کنیم؟

۴. فرض کنید ۱۰۰ نمره بین ۰ تا ۲۰ داریم. این ۱۰۰ نمره را به ۵ دستهٔ مساوی تقسیم کرده‌ایم و برای آنها جدول فراوانی تشکیل داده‌ایم. یک‌بار میانگین واقعی این ۱۰۰ داده را به‌دست می‌آوریم و بار دیگر با استفاده از جدول فراوانی و مرکز دسته، میانگین را به‌دست می‌آوریم. حداکثر اختلاف میانگین واقعی و میانگین به‌دست آمده از جدول فراوانی چقدر می‌تواند باشد؟ با تغییر تعداد دسته‌ها، این اختلاف چگونه تغییر می‌کند؟

۵. در روزنامه‌ای مطلبی در مورد یکی از دانشگاه‌هایی که بدون آزمون دانشجو می‌پذیرد، اعلام شده است. بنابه آمار ٪۶۸ پسرانی که جهت پذیرش در یکی از رشته‌های معماری و مهندسی اقدام می‌کنند در رشتهٔ مورد علاقهٔ خود پذیرفته می‌شوند. درحالی‌که فقط ٪۵۱ از متقاضیان خانم که در رشته‌های معماری و مهندسی خواهان پذیرش در این دانشگاه هستند، پذیرفته می‌شوند.

	دانشکدهٔ معماری		**دانشکدهٔ مهندسی**	
	متقاضیان	پذیرفته‌شدگان	متقاضیان	پذیرفته‌شدگان
خانم	۵۰۰	۱۰۰	۴۰۰	۳۶۰
آقا	۲۰۰	۲۰	۱۰۰۰	۸۰۰

الف) باتوجه‌به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکدهٔ مهندسی پذیرفته شده‌اند؟

ب) باتوجه‌به جدول فوق، چند درصد از متقاضیان خانم و چند درصد از متقاضیان آقا در دانشکدهٔ معماری پذیرفته شده‌اند؟

ج) توضیح دهید که چگونه ممکن است مطلب روزنامه و مقدارهایی که در قسمت‌های «الف» و «ب» به‌دست آوردید، همگی درست باشند؟

۶. در اواخر قرن نوزدهم میلادی، جنگی بین آمریکا و اسپانیا درگرفت. در این جنگ، در نیروی دریایی آمریکا از هر هزار نفر، نُه نفر جان خود را از دست داده بودند. در همین زمان در شهر نیویورک، آمار مرگ‌ومیر شانزده نفر در هر هزار نفر بوده است. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ آیا زندگی در نیویورک آنقدر پرخطر بوده که رفتن به میدان جنگ بهتر از قدم زدن در خیابان‌های نیویورک بوده است؟!

۷. میانگین درآمد ۱۰ نفر از کارمندان یک شرکت خصوصی، ماهیانه ۲,۹۰۰,۰۰۰ تومان است. آقای پول‌پرست فکر کرد که اگر در این شرکت کار کند، خوشبخت می‌شود! به‌همین‌خاطر به سرعت در این شرکت مشغول به‌کار شد. پس از چند روز آقای پول‌پرست متوجه شد که حقوق مدیرعامل شرکت که ماهیانه بیست میلیون تومان است نیز در میانگین حقوق کارمندان محاسبه شده است.

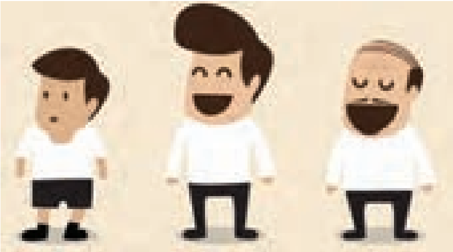
الف) بدون در نظر گرفتن حقوق مدیرعامل، میانگین حقوق افراد دیگر شرکت، ماهانه چقدر است؟

ب) در چه شرایطی نمی‌توان به میانگین اعتماد کرد؟

۸. میانگین سن چهار نفر ۲۲ سال است. سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرد به‌ترتیب ۴۵ و ۷ سال است.

الف) برای سن دو نفر دیگر سه مثال بیاورید.

ب) اگر دو نفر دیگر هم‌سن باشند، سن هر کدام چند سال است؟



۹. فرض کنید میانگین ده عدد که کوچک‌ترین آنها ۳ است، ۷/۵ باشد.

الف) بزرگ‌ترین عدد حداقل چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

ب) بزرگ‌ترین عدد حداکثر چه مقداری می‌تواند داشته باشد؟

۱۰. ده عدد طبیعی متمایز مثال بزنید که بیش از ۵ عدد از این اعداد، از میانگین بزرگ‌تر باشد.

۱۱. الف) سه نقطه روی محور اعداد صحیح بیابید که میانگین آنها صفر باشد. این مسئله چند جواب دارد؟

ب) هر یک از سه نقطهٔ قسمت قبل را ۴ واحد به سمت راست منتقل کنید. میانگین سه نقطهٔ جدید را به‌دست آورید.

ج) پنج نقطه روی محور اعداد بیابید که میانگین آنها ۲/۵− باشد.

د) چهار نقطه غیر صحیح روی محور اعداد بیابید که میانگین آنها ۱۸− باشد.

هـ) اگر میانگین ده عدد دلخواه برابر $\overline{x}$ باشد و هر یک از این ده عدد را با ۷/۲۳ جمع بزنیم، میانگین ده عدد جدید را برحسب $\overline{x}$ به‌دست آورید.

۱۲. در جدول زیر، رابطه‌ای بین اعداد سطر اول، سطر دوم و سطر سوم برقرار است. اگر در سطر اول عدد x را قرار دهیم، در سطر دوم و سطر سوم چه عددی برحسب x قرار می‌گیرد؟ میانگین اعداد سطر اول چه ارتباطی با میانگین اعداد سطر دوم و سوم دارد؟

۶	۱	۲	۴
۷۲	۱۲	۲۴	۴۸
۱۷۲	۱۱۲	۱۲۴	۱۴۸

۱۳. حمید و عماد هر کدام در پنج درس امتحان داده‌اند. میانگین هر یک از آنها در این پنج درس، ۸۰ از ۱۰۰ بوده است. نمرهٔ حمید در چهار درس از عماد بهتر بوده و عماد فقط در یک درس نمرهٔ بهتری از حمید گرفته است. مثالی از نمره‌های حمید و عماد در این پنج درس ارائه دهید.

۱۴. فائزه و غزاله برای به‌دست آوردن میانگین اعداد ۱۷۶۶، ۱۷۶۰، ۱۷۵۵ و ۱۷۵۰، راه‌حل‌های زیر را ارائه داده‌اند. درستی راه‌حل این دو نفر را بررسی کنید و هریک را شرح دهید.

راه‌حل فائزه:

$$\frac{۱۷۵۰ + ۱۷۵۵ + ۱۷۶۰ + ۱۷۶۶}{۴} = \frac{۷۰۳۱}{۴}$$

$$= ۱۷۵۷/۷۵.$$

راه‌حل غزاله:

$$۱۷۵۰ + \frac{۰ + ۵ + ۱۰ + ۱۶}{۴} = ۱۷۵۰ + \frac{۳۱}{۴}$$

$$= ۱۷۵۰ + ۷/۷۵$$

$$= ۱۷۵۷/۷۵.$$

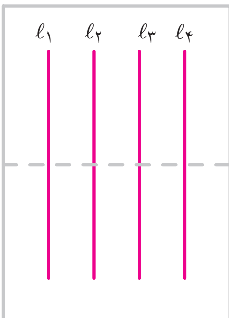
۱۵. هوشنگ در چهار آزمون نمره‌های ۸۵، ۸۰، ۶۵ و ۹۵ را کسب کرده است.

الف) هوشنگ در آزمون بعدی چه نمره‌ای بگیرد تا میانگین نمراتش حداقل ۸۰ بشود؟

ب) اگر هوشنگ سه آزمون دیگر داشته باشد، میانگین این سه آزمون چقدر باشد تا میانگین هفت آزمون هوشنگ حداقل ۸۰ شود؟ برای نمره‌های هوشنگ دو حالت مختلف مثال بزنید.

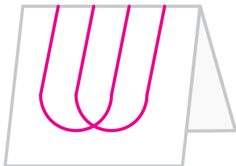
کارگاه بازی ــ حلقهٔ شانس

این بازی، یک بازی دو نفره است. برای این بازی به یک کاغذ که چهار پاره‌خط موازی روی آن رسم شده است، نیاز دارید. ابتدا کاغذ را از وسط تا بزنید.

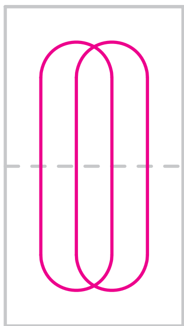


نفر اول دو جفت نیم‌خط انتخاب می‌کند و هر جفت را به هم وصل می‌نماید. برای نمونه نفر اول می‌تواند جفت‌های $\ell_1\ell_3$ و $\ell_2\ell_4$ را انتخاب کند.

نفر اول کاغذ را برمی‌گرداند و به نفر دوم می‌دهد. نفر دوم، بدون اینکه از نحوهٔ اتصال خطوط نفر اول مطلع باشد، دو جفت نیم‌خط از طرف دیگر کاغذ انتخاب می‌کند و هر جفت را به‌هم وصل می‌نماید. برای نمونه نفر دوم می‌تواند جفت‌های $\ell_1\ell_3$ و $\ell_2\ell_4$ را انتخاب کند.



سپس کاغذ را از محل تا باز کنید. اگر دو حلقه تشکیل شده باشد، نفر اول برنده است و در غیر این‌صورت نفر دوم برنده است.



در مثال بالا، نفر اول برنده شده است. زیرا در تصویر آخر دو حلقه مشاهده می‌شود.

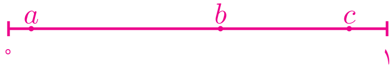
با برگزاری یک قرعه‌کشی و یک لیگ حذفی، نفر برتر کلاس را مشخص کنید. جایزهٔ او افزایش یک نمرهٔ امتحان ریاضی است.

برای دیدن یک بازی شانسی دیگر به «www.webmath.ir» بیایید.

احتمال یا اندازه‌گیری شانس

۱. در بازی حلقهٔ شانس، شانس برد نفر اول چقدر است؟

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر، «صفر»، «یک» یا «بین صفر و یک» بودنِ احتمالِ پیشامد داده شده را بررسی کنید. در مواردی که احتمال بینِ صفر و یک است دربارهٔ نزدیک بودن آن به عددهای a، b یا c (که در شکل زیر مشخص شده‌اند) بحث کنید.



الف) پیشامد اینکه در ده سال آینده آب خوراکی جیره‌بندی شود. (به شرط آنکه الگوی مصرف اصلاح نگردد.)

ب) پیشامد اینکه آب در صفر درجهٔ سانتی‌گراد بجوشد.

ج) پیشامد اینکه با سه تکه چوب به اضلاع ۲، ۷ و ۴ سانتی‌متر بتوانیم مثلث بسازیم.

د) پیشامد متولد شدن نوزاد در فصل تابستان

۳. در یک جشن با ۱۳۵ مهمان، هنگام ورود هر فرد یک دستبند به او داده می‌شود. سه نوع دستبند به رنگ‌های بنفش، زرد و آبی و از هر نوع دستبند ۴۵تا وجود دارد. هر رنگ از ۱ تا ۴۵ شماره‌گذاری شده است. در انتهای جشن قرار است یک نفر به‌تصادف انتخاب شود و جایزه‌ای بگیرد.

الف) احتمال اینکه فردی با دستبند زرد و شمارهٔ ۲۴ انتخاب شود، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فردی با دستبند بنفش و شماره‌ای بین ۱۳ و ۲۰ انتخاب شود، چیست؟

ج) احتمال اینکه فردی انتخاب شود که دستبند آبی داشته باشد یا شمارهٔ دستبند او شمارندهٔ ۱۲ باشد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه فردی انتخاب شود که شمارهٔ دستبند او عدد اول نباشد، چیست؟

۴. اعداد ۱ تا ۳۰ روی ۳۰ گوی نوشته شده‌اند و گوی‌ها داخل یک کیسه قرار دارند. یک گوی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) چقدر احتمال دارد عدد نوشته شده روی گویی که انتخاب می‌کنیم، بزرگ‌تر از ۱۵ باشد؟

ب) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده فرد باشد؟

ج) چقدر احتمال دارد عدد انتخاب شده عددی اول باشد؟

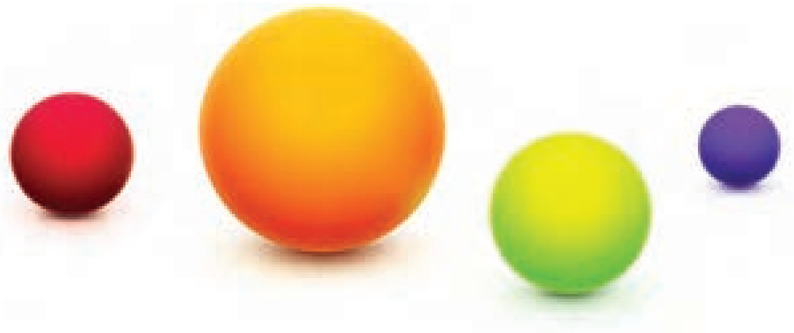
د) آیا می‌توانید مسئله‌ای بسازید که جواب آن با مجموع مقدارهای به‌دست آمده در قسمت «الف»، «ب» و «ج» برابر باشد.

۵. در ظرفی تعدادی مهرهٔ رنگی وجود دارد. اگر بخواهیم یک مهره به‌تصادف از این ظرف انتخاب کنیم، احتمال انتخاب شدن مهرهٔ آبی، قرمز و زرد به‌ترتیب $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۱}{۷}$ و $\frac{۱}{۶}$ خواهد بود.

الف) آیا در این ظرف به غیر از رنگ‌های آبی، قرمز و زرد، مهره‌ای با رنگ دیگر وجود دارد؟

ب) اگر پاسخ قسمت «الف» بلی است، آیا می‌توان گفت چند رنگ در این ظرف دیده می‌شود؟

ج) آیا می‌توان گفت در این ظرف از هر رنگ چند مهره وجود دارد؟



۶. الف) در صفحهٔ مختصات همهٔ نقاط صحیحی را مشخص کنید که $0 < x < 4$ و $0 < y < 4$ باشد.

ب) فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. اگر نقطهٔ C را به‌طور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از نقطهٔ A و B) انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که ABC یک مثلث باشد؟

ج) فرض کنید $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. دو نقطهٔ متمایز Y و Z را به‌طور تصادفی از نقاط قسمت «الف» (متمایز از X) انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که XYZ یک مثلث نباشد؟

۷. امیرحسین به‌تازگی با احتمال آشنا شده است. خواهر بزرگ او غزاله از امیرحسین می‌خواهد یک عدد سه رقمی تصادفی انتخاب کند و آن را تکرار کند تا یک عدد شش رقمی به‌دست آید. برای مثال اگر ۲۴۳ را انتخاب کرد، بنویسد ۲۴۳۲۴۳. غزاله به امیرحسین گفت: اگر تقسیم عدد شش رقمی تو بر ۷ باقی‌مانده‌ای به غیر از صفر داشت، تو برندهٔ بازی هستی و اگر باقی‌مانده صفر بود من برنده‌ام.

الف) چقدر احتمال دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم یک عدد سه رقمی تصادفی بر ۷ برابر صفر نباشد؟

ب) چقدر احتمال دارد که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد شش رقمی امیرحسین بر ۷ برابر صفر نباشد؟

۸. متن زیر[1] را با دقت بخوانید و دربارهٔ آن با همکلاسی‌های خود بحث کنید.

یک سکه را ده بار می‌اندازیم. هر ده بار پشت می‌آید. شما انتظار دارید در پرتاب یازدهم رو بیاید یا پشت؟

دو حالت وجود دارد:

۱. ایراد از سکه است و بنابراین باید انتظار داشت که بار یازدهم نیز پشت بیاید.

۲. این ده بار به‌طور اتفاقی پشت آمده و بنابراین احتمال پشت یا رو آمدن در بار یازدهم یکسان است.

اما عده‌ای از مردم انتظار دارند که در پرتاب یازدهم رو بیاید. آنها چنین استدلال می‌کنند: «احتمال یازده بار پشت آمدن خیلی کمتر از ده بار پشت آمدن است، پس در پرتاب یازدهم رو می‌آید.» مردم با همین استدلال، گاهی اوقات به زیر درختان صاعقه زده پناه می‌برند و گمان می‌کنند که صاعقه به‌ندرت دو بار بر یک جا اصابت می‌کند. در بمباران‌ها نیز بعضی اشخاص داخل گودال‌های بمب خورده می‌نشینند و تصور می‌کنند که احتمال دو بار اصابت بمب در یک مکان بسیار کم است. روان‌شناسانی که نحوهٔ استدلال اشخاص در مورد احتمالات را بررسی می‌کنند، می‌گویند: «تقریباً هرکس در معرض چنین اشتباهی قرار دارد. این استدلال اگرچه درست نیست، اما با عادت ذهنی آدمی مطابقت دارد.»

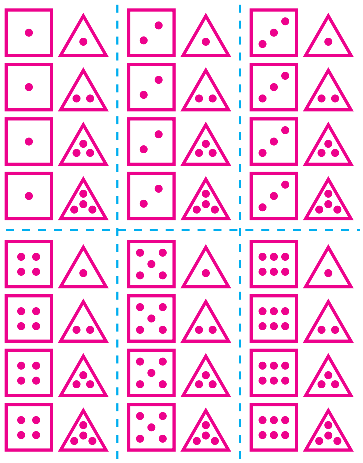
بررسی حالت‌های ممکن

۱. یک تاس شش‌وجهی و یک تاس چهاروجهی را باهم پرتاب می‌کنیم. (روی تاس شش‌وجهی اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و روی تاس چهاروجهی اعداد ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشته شده است.)

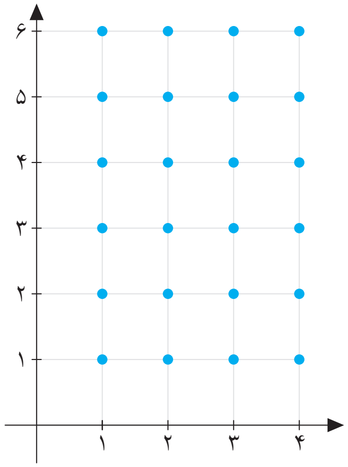
[1] برگرفته از کتاب «فلسفه در عمل» نوشتهٔ ادم مورتون، ترجمهٔ فریبرز مجیدی.

الف) فائزه و غزاله حالت‌هایی را که ممکن است در پرتاب دو تاس دیده شود، به‌صورت زیر نمایش داده‌اند. راه‌حل این دو نفر را توضیح دهید.

راه‌حل فائزه:



راه‌حل غزاله:



ب) تعداد کل حالت‌ها چند تاست؟

ج) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس شش‌وجهی ۴ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ آبی در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

د) تعداد حالت‌هایی که عدد ظاهر شده روی تاس چهاروجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد چند تاست؟ آنها را با رنگ زرد در راه‌حل‌های بالا مشخص کنید.

هـ) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس شش‌وجهی ۴ باشد، چقدر است؟

و) احتمال اینکه عدد ظاهر شده روی تاس چهاروجهی بزرگ‌تر از ۲ باشد، چقدر است؟

ز) خانه‌هایی که هم با رنگ آبی و هم با رنگ زرد رنگ شده‌اند چه کسری از کل شکل را نشان می‌دهند؟

ح) آیا می‌توانید با دو تاس بالا مسئله‌هایی بسازید که پاسخ آنها برابر صفر، $\frac{۱}{۵}$، $\frac{۲}{۳}$ یا $\frac{۳}{۴}$ باشد؟

۲. دو تاس شش‌وجهی را باهم پرتاب می‌کنیم.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را نمایش دهید.

ب) احتمال اینکه حداقل یکی از دو تاس ۶ بیاید چقدر است؟ احتمال اینکه دقیقاً یک تاس ۶ بیاید چقدر است؟

ج) احتمال اینکه هیچ‌یک از تاس‌ها عدد اول نباشد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه فقط روی یکی از تاس‌ها عدد اول ظاهر شود، چقدر است؟

هـ) احتمال اینکه یک تاس زوج و دیگری فرد بیاید، چقدر است؟

و) احتمال اینکه مجموع اعداد روی دو تاس عددی اول باشد، چقدر است؟

ز) در صورت وجود، پیشامدهایی را بیان کنید که احتمال وقوع آنها $\frac{۱}{۳۶}$، $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۳}$ باشد. برای هر یک از این پیشامدها مسئله بسازید و آنها را در جدول یا نموداری که در قسمت «الف» رسم کرده‌اید، نمایش دهید.

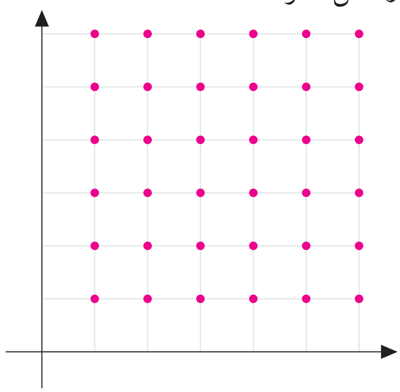
۳. روی یک قطعه چوب شش خطِّ برش طوری انتخاب شده که چوب را به هفت قسمت برابر تقسیم کرده است.

الف) به چند حالت می‌توان این تکه چوب را با دو برش، سه تکه کرد؟

ب) اگر دو خطِّ برش را به‌تصادف انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد بتوان با سه قطعه چوب حاصل، مثلث ساخت؟

۴. فائزه و غزاله قسمت «الف» مسئلهٔ قبل را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. دربارهٔ این راه‌حل‌ها بحث کنید.

راه‌حل فائزه:



راه‌حل غزاله:

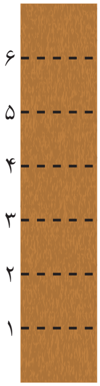
(۱, ۲) (۱, ۳) (۱, ۴) (۱, ۵) (۱, ۶)

(۲, ۳) (۲, ۴) (۲, ۵) (۲, ۶)

(۳, ۴) (۳, ۵) (۳, ۶)

(۴, ۵) (۴, ۶)

(۵, ۶)



۵. یک عدد طبیعی را «فردچهره» می‌نامیم هرگاه همهٔ رقم‌هایش فرد باشد.

الف) چند عدد چهار رقمی فردچهره وجود دارد؟

ب) یک عدد پنج رقمی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که این عدد فردچهره باشد؟

ج) ابتدا تعریفی برای عدد «زوج‌چهره» ارائه دهید. سپس پاسخ پرسش قسمت «ب» را این‌بار برای عدد زوج‌چهره به‌دست آورید.

۶. سکه‌ای را سه‌بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل دو بار رو ظاهر شود؟

۷. خانه‌های یک جدول ۲ × ۲ را به‌تصادف با رنگ سیاه یا سفید رنگ می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که هر دو خانهٔ ردیف اول این جدول سفید باشد؟

۸. در درس فیزیک بچه‌ها یاد گرفته‌اند که به کمک منشور می‌توانند طیف نور سفید (هفت رنگی که رنگ سفید ترکیب آنهاست) را تشکیل دهند. سپهر در فکر فرو رفته است که آیا او می‌تواند با استفاده از این هفت رنگ برای خودش و دوستش رمزهایی بسازد. برای مثال (بنفش، نیلی، آبی، سبز، زرد، نارنجی، قرمز) برای آنها معنای خاصی داشته باشد و (نیلی، سبز، زرد، آبی، بنفش، نارنجی، قرمز) معنای دیگری داشته باشد.

الف) سپهر چند رمز هفت رنگی می‌تواند بسازد؟

ب) اگر سپهر بخواهد از این هفت رنگ فقط از چهار رنگ استفاده کند، چند رمز چهار رنگی مختلف با این هفت رنگ می‌تواند بسازد؟

ج) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به‌تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ اول رمز آبی و رنگ دوم سبز باشد چقدر است؟

د) اگر یکی از رمزهای هفت رنگی را به‌تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه رنگ آبی بین دو رنگ سبز و قرمز باشد چقدر است؟ (لزومی ندارد آبی و سبز یا آبی و قرمز کنار هم باشند.)

۹. طاقه‌هایی از شش رنگ پارچه داریم. می‌خواهیم با سه تکه پارچهٔ هم‌عرض، پرچمی با سه رنگ متفاوت بدوزیم که در آن سه تکه افقی دوخته شوند.

الف) چند پرچم متفاوت می‌توان ساخت؟

ب) فرض کنید یکی از طاقه‌ها قرمز باشد. اگر به‌طور تصادفی سه رنگ برای دوخت پرچم انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد رنگ قرمز در پرچم به‌کار رفته باشد؟

۱۰. شش نامه و سه نفر پیک نامه‌رسان داریم. اگر این شش نامه را به‌تصادف بین سه نفر تقسیم کنیم، چقدر احتمال دارد که به پیک اول هیچ نامه‌ای نرسد؟

۱۱. یک تاس را سه بار پرتاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل یک‌بار شش بیاید؟

۱۲. الف) در چند عدد هشت رقمی مجموع رقم‌ها زوج است؟

ب) یک عدد نه رقمی به‌تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد مجموع رقم‌های این عدد زوج باشد؟

۱۳. مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان تصمیم دارد از چهار نفر از دبیران دبیرستان فرزانگان برای شرکت در جلسهٔ طرح سؤال دعوت کند. نامه‌ای رسمی برای هر یک از این چهار دبیر برجسته نوشته شده و روی چهار پاکت نیز نام این دبیران نوشته شده است. اگر یکی از کارکنان مرکز، نامه‌ها را به‌طور تصادفی در پاکت‌ها قرار دهد،

الف) احتمال اینکه فقط نامهٔ یکی از دبیران در پاکتی اشتباه (که نام ایشان نیست) قرار بگیرد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه نامهٔ دو نفر از دبیران در دو پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟

ج) احتمال اینکه نامهٔ چهار نفر دبیر در چهار پاکت اشتباه قرار گیرد، چقدر است؟

د) احتمال اینکه حداقل یک نامه در پاکت درست قرار بگیرد، چقدر است؟

۹

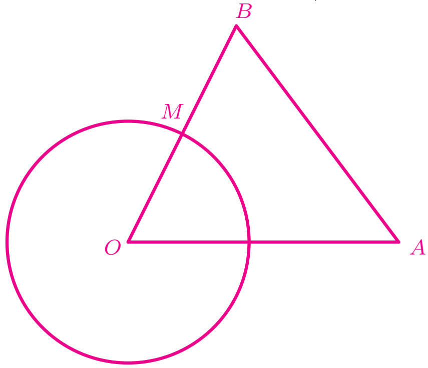
دایره

قوس پیچ‌های راه‌آهن معمولا قسمتی از یک دایره است که قسمت‌های مستقیم بر آن مماس هستند. معمولا شعاع این دایره را بزرگ‌تر از ۶۰۰ متر در نظر می‌گیرند.

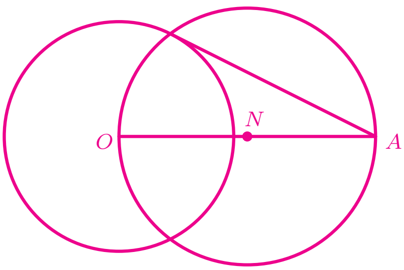
خط و دایره

۱. دایرهٔ c به مرکز O و شعاع r مفروض است. از نقطهٔ A خارج از دایرهٔ c، یک مماس بر دایره رسم کنید.

<u>راه‌حل مرضیه:</u> مثلث متساوی‌الساقین AOB به ساق OA و قاعدهٔ $OB = ۲r$ را رسم می‌کنیم. محل برخورد OB با دایره را M می‌نامیم. AM بر دایره مماس است.



<u>راه‌حل سمیه:</u> وسط پاره‌خط OA را N بنامید. به مرکز N و شعاع ON دایره‌ای رسم کنید. پاره‌خطی که A را به محل برخورد دو دایره وصل می‌کند، بر دایره مماس است.



الف) درستی روش‌های سمیه و مرضیه را بررسی کنید.

ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای رسم خط مماس از یک نقطه خارج از دایره، ارائه دهید؟

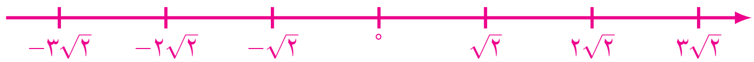
۲. از نقطهٔ A خارج از دایره‌ای به مرکز O، دو مماس AM و AN بر دایره رسم شده است.

الف) ثابت کنید OA عمودمنصّف MN است.

ب) چه شرطی به مسئله اضافه کنیم تا MN عمودمنصّف OA باشد؟

۳. ثابت کنید اگر خطی دو دایرهٔ هم‌مرکز را قطع کند، دو پاره‌خط که بین دو دایره قرار می‌گیرند، باهم برابرند.

۴. در محور زیر، هر واحد به‌اندازهٔ $\sqrt{۲}$ است. می‌خواهیم عدد ۱ را روی این محور مشخص کنیم.



آرش و سهراب مسئلهٔ بالا را این‌گونه حل کرده‌اند:

راه‌حل آرش: نقطهٔ صفر را P و نقطهٔ $-\sqrt{۲}$ را C می‌نامیم. به مرکز نقطهٔ C و شعاع CP دایره‌ای رسم می‌کنیم. از نقطهٔ C خطی عمود بر محور اعداد رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های Q و T قطع کند. از نقطهٔ C عمودی بر خط PQ رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد را M می‌نامیم. به مرکز P و شعاع PM دایره‌ای رسم می‌کنیم؛ این دایره محور اعداد را در نقاط ۱ و ۱− قطع می‌کند.

راه‌حل سهراب: به مرکز $-۳\sqrt{۲}$ و شعاع $\sqrt{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ صفر مماسی بر دایره رسم می‌کنیم و محل برخورد آن مماس با دایره را P می‌نامیم. نقطهٔ صفر را O می‌نامیم و با استفاده از رسم عمودمنصف، ابتدا وسط پاره‌خط OP (نقطهٔ N) و سپس وسط پاره‌خط ON (نقطهٔ M) را مشخص می‌کنیم. اکنون دایره‌ای به‌مرکز O و شعاع OM رسم می‌کنیم؛ این دایره محور اعداد را در نقاط ۱ و ۱− قطع می‌کند.

الف) درستی روش‌های آرش و سهراب را بررسی کنید.

ب) آیا می‌توانید روش دیگری برای این مسئله ارائه دهید؟

۵. در یک دایره وتری به طول ۸ مفروض است. اگر طول بزرگ‌ترین وتر این دایره ۱۲ باشد، آنگاه فاصلهٔ مرکز دایره تا وتر مفروض چقدر است؟

۶. دو مسئلهٔ زیر چه تفاوتی با یکدیگر دارند؟ هریک را حل کنید.

مسئلهٔ اول : ثابت کنید مرکز دایره از دو وتری که باهم برابرند، فاصلهٔ یکسان دارد.

مسئلهٔ دوم : ثابت کنید دو وتری که از مرکز دایره فاصلهٔ یکسان دارند، باهم برابرند.

تمرین‌های بعدی این بخش را با کمک مسئلهٔ اول و مسئلهٔ دوم تمرین قبل حل کنید و در هر مورد مشخص کنید که از مسئلهٔ اول استفاده کرده‌اید یا مسئلهٔ دوم.

۷. وترهای AC و BD یکدیگر را داخل دایره‌ای به مرکز O، در نقطهٔ M قطع کرده‌اند. اگر AB قطر دایره باشد و $MO \perp AB$، آنگاه ثابت کنید $AC = BD$.

۸. دو وتر برابر و غیر متقاطع AB و CD در دایره‌ای به مرکز O مفروض‌اند. اگر امتداد این دو وتر یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند، ثابت کنید OM نیم‌ساز زاویهٔ AMC است.

۹. ثابت کنید در یک دایره پاره‌خط‌های جداشده روی دو وتر متقاطع و مساوی، باهم برابرند.

۱۰. نقطه‌های A، B و C روی یک دایره قرار دارند. اگر نیم‌ساز زاویه‌های BAC و ACB یکدیگر را در مرکز دایره قطع کنند، ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

زاویهٔ مرکزی و زاویهٔ محاطی

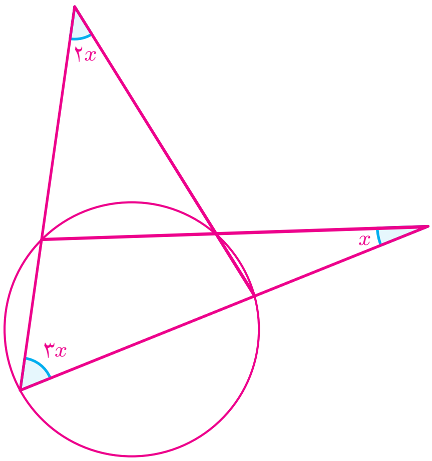
۱. در دایره‌ای به شعاع r، دو وتر AB و AC مفروض‌اند. در هر یک از حالت‌های زیر بررسی کنید که AC بر AB عمود است یا خیر؟

ب) $AB = ۲۴,\ AC = ۹,\ r = ۲۶$ الف) $AB = ۸,\ AC = ۱۵,\ r = ۱۷$

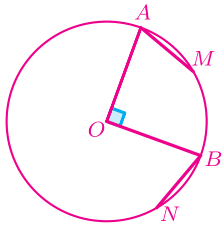
ج) $AB = ۱۰,\ AC = ۲۴,\ r = ۱۳$

۲. در دایرهٔ c به مرکز O، AB قطر و M وسط کمان AB است. نقطهٔ P روی قطر DM طوری قرار دارد که $MP = MB$. اگر K محل برخورد امتداد BP با دایره باشد، آنگاه اندازهٔ زاویهٔ KMO چقدر است؟

۳. در شکل زیر مقدار x چقدر است؟

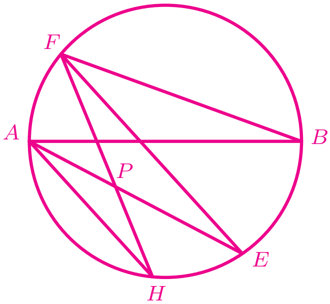


۴. در دایرهٔ زیر دو شعاع OA و OB برهم عمودند. اگر طول کمان‌های AM و BN برابر باشند، آنگاه ثابت کنید امتداد پاره‌خط‌های AM و BN برهم عمودند.



۵. الف) ثابت کنید کمان‌های محصورِ بین دو وتر موازی، باهم برابرند.

ب) در دایرهٔ زیر، وتر AH با وتر FE موازی است. اگر $F\hat{B}A = ۲۰^\circ$، آنگاه زاویهٔ HPE چند درجه است؟

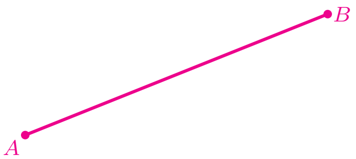


۶. الف) چرا جملهٔ زیر درست نیست؟ سعی کنید آن را اصلاح کنید.

اگر کمان‌های محصورِ بین دو وتر برابر باشند، آن دو وتر موازی‌اند.

ب) رئوس چهارضلعی $ABCD$ روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارند. اگر قطرهای $ABCD$ یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند و OM نیم‌ساز زاویهٔ CMD باشد، آنگاه ثابت کنید چهارضلعی $ABCD$ یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است.

۷. الف) در شکل زیر، همهٔ نقاطی در صفحه، مانند C، را مشخص کنید که مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد به‌طوری‌که $\widehat{C} = ۹۰^\circ$.



ب) کدام‌یک از مثلث‌هایی که در «الف» ساخته‌اید متساوی‌الساقین هستند؟

۸. مژگان و فاطمه دو مسئلهٔ زیر را این‌گونه حل کرده‌اند:

مسئلهٔ اول. ثابت کنید اگر در یک مثلث، میانهٔ وارد بر یک ضلع نصف آن ضلع باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.

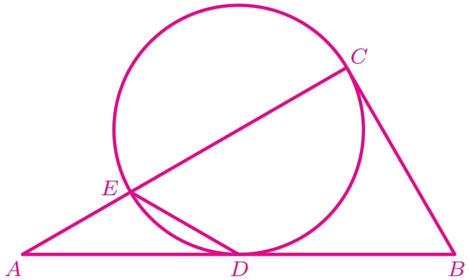
راه‌حل مژگان: فرض کنید در مثلث ABC نقطهٔ M روی ضلع BC باشد به‌طوری‌که سه پاره‌خط AM، BM و CM باهم برابر باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم زاویهٔ A قائمه است. برای این کار دایره‌ای به مرکز M و شعاع AM رسم می‌کنیم. چون BC قطر این دایره است پس $\widehat{A} = ۹۰^\circ$.

مسئلهٔ دوم. ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است.

راه‌حل فاطمه: فرض کنید در مثلث ABC زاویهٔ A قائمه باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم میانه وارد بر BC، نصف آن است. می‌دانیم که از رئوس هر مثلث، دایره‌ای می‌گذرد. اگر این دایره را رسم کنیم چون کمان روبه‌رو به $\widehat{A}$ برابر ۱۸۰° است پس مرکز دایره روی BC قرار دارد که اگر مرکز را به نقطهٔ A وصل کنیم، اثبات کامل می‌شود.

۹. در شکل زیر، EC قطر دایره است و AD و BC بر دایره مماس هستند. اگر $\widehat{ED} = ۶۰^\circ$، آنگاه ثابت کنید:

$$AD = BC = \frac{۱}{۲}AB.$$



۱۰. سه نقطهٔ A، B و C روی یک دایره چنان قرار دارند که دو وتر AB و BC برابرند. اگر نقطهٔ D را روی این دایره چنان انتخاب می‌کنیم که $ABCD$ یک چهارضلعی باشد،

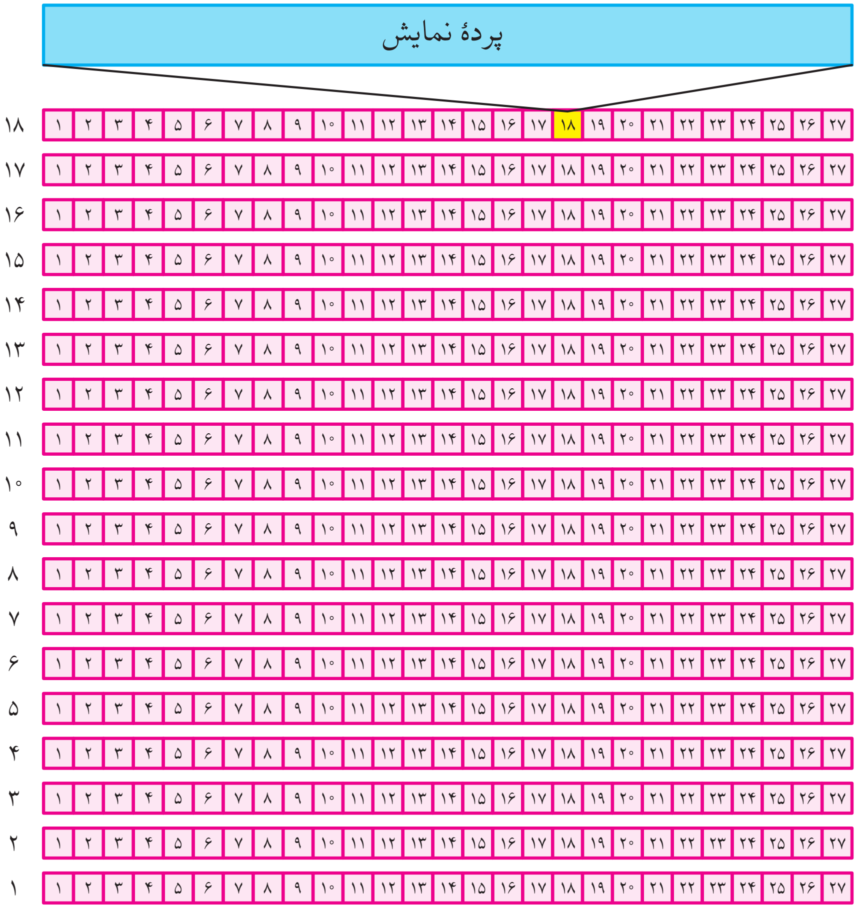
الف) آیا می‌توان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AB و BC فاصلهٔ یکسان دارد؟ اگر پاسخ خیر است چه شرطی به مسئله اضافه کنیم که بتوان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AB و BC فاصلهٔ یکسان دارد.

ب) آیا می‌توان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AD و CD فاصلهٔ یکسان دارد؟ اگر پاسخ خیر است چه شرطی به مسئله اضافه کنیم که بتوان ثابت کرد هر نقطه روی BD از دو پاره‌خط AD و CD فاصلهٔ یکسان دارد.

۱۱. روی نیم‌دایره‌ای به قطر AB دو کمان مساوی BC و CD جدا شده‌اند. خط عمود بر CD که از نقطهٔ D خارج شده است، AC را در نقطهٔ F قطع می‌کند. اگر محل برخورد AC و BD نقطهٔ E باشد، آنگاه ثابت کنید نقطهٔ F وسط AE است.

۱۲. کاظم برای دیدن یک فیلم خارجی به سینما رفته بود. او که به زبانِ فیلم تسلط نداشت، مجبور بود زیرنویس فیلم را بخواند. صندلی کاظم (همان‌طور که در تصویر صفحهٔ بعد می‌بینید) نزدیک پردهٔ نمایش فیلم بود و او برای خواندن هر خطِّ زیرنویس، باید سرش را به‌اندازهٔ فاصلهٔ دو کتفش (از راست به چپ) می‌چرخاند!

همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، اگر از صندلی کاظم دو پاره خط به دو سر پردهٔ نمایش رسم کنیم، زاویه‌ای در حدود ۱۶۰ درجه ساخته می‌شود.



کاظم اواسط فیلم گردن‌درد گرفت. او فیلم را نیمه‌کاره رها کرد و از سینما بیرون آمد ولی دلش می‌خواست بداند آخر فیلم چه می‌شود.

کاظم تصمیم گرفت این‌بار بلیت فیلم را اینترنتی تهیه کند تا بتواند خودش صندلی‌اش را انتخاب کند. او با خود فکر کرد که اگر از روی صندلی حداکثر زاویهٔ ۶۰ درجه با دو سر پردهٔ سینما داشته باشد، می‌تواند به‌راحتی فیلم را ببیند.

در شکل بالا، کاظم چه صندلی‌هایی را انتخاب کند تا خواسته‌اش برآورده شود؟

کاربردهایی از دایره

۱. در یک دایره، وتر AB بر قطر CD در نقطهٔ M عمود است. ثابت کنید:

$$AM^۲ = CM \times DM.$$

۲. عدد $\sqrt{\sqrt{۲}}$ را روی محور نشان دهید.

راهنمایی: می‌توانید از مسئلهٔ قبل کمک بگیرید.

۳. جاده و راه‌آهن هرگز یک‌باره نمی‌پیچند بلکه از یک جهت به جهت دیگر به ملایمت و روی قوسی که شکستگی نداشته باشد، تغییر مسیر می‌دهند. این قوس، معمولاً قسمتی از یک دایره است که قسمت‌های مستقیم جاده، بر آن مماس هستند. (تصویر ابتدای این فصل را ببینید.)

معمولاً شعاع قسمت منحنی جاده را بزرگ می‌گیرند که در مورد راه‌آهن کمتر از ۶۰۰ متر نیست و در بعضی موارد به ۱۰۰۰ و حتی ۲۰۰۰ متر می‌رسد.

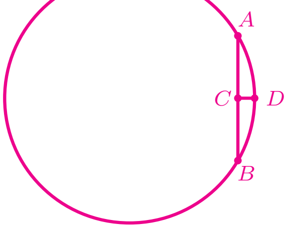
الف) با استفاده از تمرین ۱ روشی برای یافتن مرکز قوس یک جادهٔ کوهستانی بیابید. (فرض کرده‌ایم قوس جاده، قسمتی از یک دایره است.)

ب) در برخی جاده‌ها پیچ‌های خطرناکی وجود دارند که در ایران به «پیچ‌های غریب‌کُش» معروف‌اند. ویدئوی یک پیچ غریب‌کُش در «www.webmath.ir» قرار داده شده است. دربارهٔ نحوهٔ اصلاح این پیچ، در کلاس گفت‌وگو کنید.

۴. می‌دانیم عمیق‌ترین قسمت اقیانوس اطلس در گودال پورتوریکو به عمق ۸۶۰۵ متر است و عرض اقیانوس اطلس در نزدیکی خط استوا تقریباً $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره‌ای است که خط استوا روی آن قرار دارد.

می‌خواهیم بدانیم کف اقیانوس اطلس چگونه است: محدب، مقعر یا مسطح؟

فرض کنید کف اقیانوس اطلس مسطح باشد. اگر دایرهٔ زیر را خط استوا در نظر بگیریم و نقاط A و B ابتدا و انتهای اقیانوس اطلس روی این دایره باشند، حداکثر عمق اقیانوس اطلس برابر با طول پاره‌خط CD است. اگر شعاع کره زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر در نظر بگیریم، طول تقریبی پاره‌خط CD (برحسب کیلومتر) با دوتا از اعداد زیر برابر است. آن دو عدد کدام‌اند؟



الف) $۶۴۰۰ - ۳۲۰۰\sqrt{۳}$

ب) $۶۴۰۰ + ۳۲۰۰\sqrt{۳}$

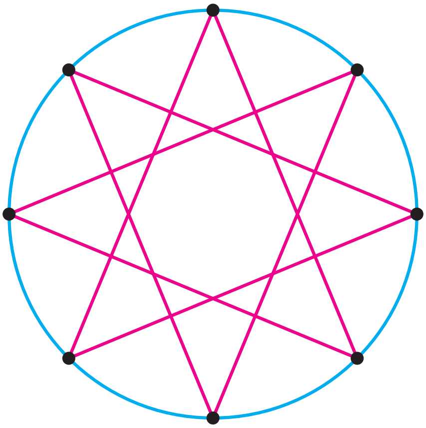
ج) ۸/۶۰۵

د) ۸۵۷/۴۳۷

اکنون باتوجه‌به تخمینی که برای طول پاره‌خط CD به‌دست آمد، تعیین کنید که کف اقیانوس اطلس، محدب است یا مقعر یا مسطح؟

۵. اگر n نقطه روی دایره، کمان‌های برابر ایجاد کرده باشند و آنها را mتا در میان به یکدیگر وصل کرده باشیم، شکل حاصل چند محور تقارن دارد؟

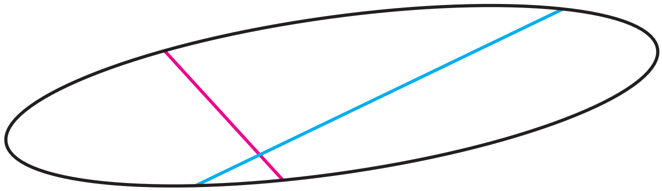
برای مثال، در شکل زیر، هشت نقطه روی دایره کمان‌های برابر ایجاد کرده‌اند ($n = ۸$). این نقاط دوتا در میان به یکدیگر وصل شده‌اند ($m = ۲$).



۶. در یک دایره نقطهٔ دلخواه M روی وتر دلخواه AB مفروض است. چند وتر برابر با AB از نقطهٔ M می‌گذرد؟

۷. پروژه. یک شکل را محدبِ بسته می‌نامیم هرگاه برای هر دو نقطهٔ P و Q که درون شکل باشند، پاره‌خط PQ نیز کاملاً درون آن شکل قرار گیرد.

پاره‌خطی که دو نقطه روی یک شکل محدب بسته (مانند شکل زیر) را به‌هم وصل می‌کند، وتر می‌نامیم. در شکل زیر، دو پاره‌خط آبی و صورتی، وتر هستند.



اگر همهٔ وترهایی که از یک نقطه می‌گذرند باهم برابر باشند، آن نقطه را نقطهٔ هم‌وتری می‌نامیم. برای مثال، در یک دایره، تمام وترهایی که از مرکز دایره می‌گذرند باهم برابرند؛ یعنی مرکز دایره، نقطهٔ هم‌وتری دایره است.

الف) چند نوع شکل محدب بسته‌ای را که نقطهٔ هم‌وتری دارند، بیابید.

ب) آیا شکل محدب بسته‌ای با دو نقطهٔ هم‌وتری وجود دارد؟

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

بیتی از حافظ

دل چو پرگار به هر سو دَوَرانی می‌کرد

واندر آن دایره، سرگشتهٔ پابرجا بود

کتاب‌نامه

[۱] محمد حسین احمدی و نرگس اخلاقی‌نیا، *خودآموز هندسه ۱ ، جلد اول*، انتشارات مبتکران، تهران، ۱۳۹۲.

[۲] محمد حسین احمدی، سعید صدری و علیرضا تاج‌بخش، *ریاضی تکمیلی سال اول دوره راهنمایی*، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.

[۳] *ریاضیات کانگورو ۷ و ۸* ، ترجمه مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.

[۴] شه‌پان النسکی، *در پی فیثاغورث*، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۸۴.

[۵] مارتین ایگنر و گونتر تسیگلر، *کتاب اثبات*، ترجمه سیامک کاظمی، انتشارات پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ۱۳۷۹.

[۶] دیوید برتن، *نظریه مقدماتی اعداد*، ترجمه محمد صادق منتخب، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۱.

[۷] واسیلی دمیتریه‌ویچ چیستیاکوف، *مسئله‌های تاریخی ریاضیات*، ترجمه پرویز شهریاری، نشر نی، تهران، ۱۳۷۴.

[۸] *ریاضیات کانگورو ۹ و ۱۰* ، ترجمه بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.

[۹] امیرحسین حمداوی، محسن کیهانی، علی قصاب و علیرضا شیخ‌عطار، *ریاضیات پایه دوم راهنمایی*، نشر سمپاد، تهران، ۱۳۸۷.

[۱۰] ارشک حمیدی، *هندسه از ابتدا تا ...*، جلد اول، نشر علوم ریاضی ره‌آورد، تهران، ۱۳۹۴.

[۱۱] الکساندر پترویچ دوموریاد، *در قلمرو ریاضیات*، ترجمه پرویز شهریاری، موسسه انتشارات امیرکبیر، چاپ دوم، تهران، ۱۳۶۳.

[۱۲] عبدالرضا زارع شحنه، *ریاضی تکمیلی سال دوم دوره راهنمایی*، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.

[۱۳] پرویز شهریاری، *۹۹ مسئله ریاضی*، موسسه چاپ سوره، تهران، ۱۳۷۹.

[۱۴] دمیتری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، *محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)*، ترجمه ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.

[۱۵] علی قصاب، *ریاضیات تکمیلی سال اول دبیرستان*، سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان، تهران، ۱۳۸۹.

[۱۶] استیون ج.کرانتس، *فنون مسئله حل کردن*، ترجمه مهران اخباری‌فر، انتشارات فاطمی، چاپ سوم، تهران، ۱۳۸۴.

[۱۷] بوریس آناستاسیویچ کوردمسکی، *اندیشه ریاضی*، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات امیرکبیر، تهران، ۱۳۶۱.

[۱۸] مارتین گاردنر، *معماهای ابوالهول*، ترجمه حسن نصیرنیا، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.

[۱۹] ادوین مویز و فلوید دانز، *هندسه*، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.

[۲۰] راجر نلسن، *اثبات بدون کلام*، ترجمه سپیده چمن آرا، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.

[۲۱] تارل هاف، *چگونه با آمار دروغ می‌گویند*، ترجمه مهدی تقوی، نشر آفتاب، تهران، ۱۳۷۱.

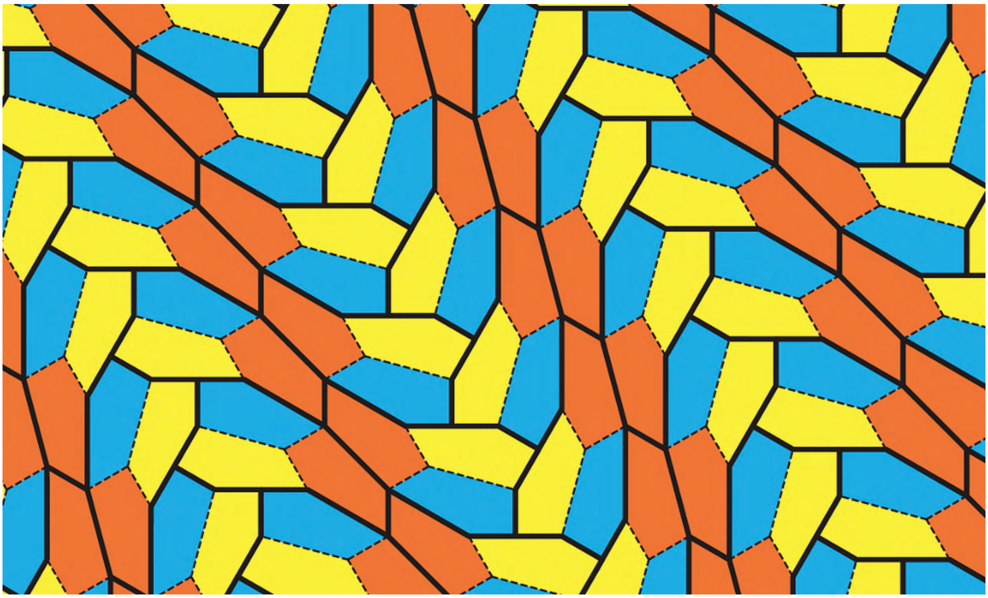
[22] Martin Erickson, *AHA Solutions*!, MAA, 2009.

[23] R. Hatcher and G. Gilbert, *Mathematics Beyond the Numbers*, Kendall Hunt, 2012.

دربارهٔ طرح روی جلد

کشور ایران با تاریخ و تمدن کهن در هنر و صنعت از دیرباز به عنوان بستری مناسب برای صنعت کاشی و هنر کاشی‌کاری مطرح بوده است. قدمت این صنعت و هنر به بیش از ۳۲۰۰ سال پیش باز می‌گردد. تا سال‌های سال هنر و ریاضی کاشی‌های ایرانی زبانزد خاص و عام بود؛ اما در سال‌های اخیر این ایرانی‌ها نبودند که روش‌های کاشی‌کاری را توسعه داده‌اند!

طرح روی جلد این کتاب، الگویی از تصویر کاشی‌کاری زیر است که اخیرا کشف شده است. برای مطالعه بیشتر، تمرین ۱۳ صفحه ۵۰ از فصل سه را ببینید.



معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند
نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران،
خیابان سپهبد قرنی، نبش سمیه، وزارت آموزش و پرورش، ساختمان
مرحوم علاقه‌مندان، طبقهٔ هفتم، کدپستی ۱۵۹۹۹-۵۸۱۱۱ و یا به نشانی رایانامهٔ
sampad@medu.ir ارسال نمایند.

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان