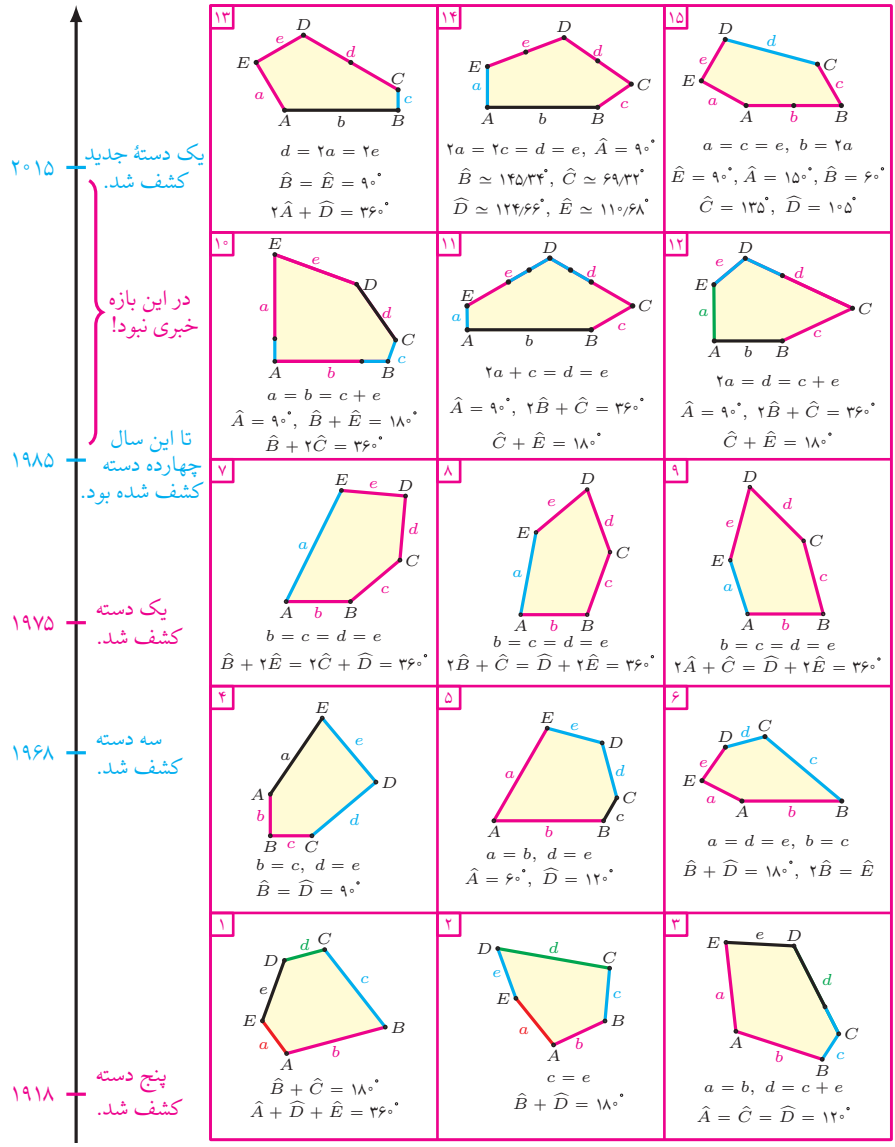
روی جلد کتاب یک نمونه از کاشی‌کاری‌های تک‌وجهی با پنج‌ضلعی‌های محدب را می‌بینید که در سال ۲۰۱۵ کشف شده است. در زیر پانزده دسته از پنج‌ضلعی‌های محدبی که می‌توان با آنها کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد به همراه تاریخچهٔ کشف این پانزده دسته پنج‌ضلعی محدب آمده است.



الف) پنج‌ضلعی روی جلد این کتاب در کدام دسته از پانزده دستهٔ داده شده قرار دارد؟

ب) پنج‌باز در کدام دسته از پانزده دستهٔ داده شده قرار دارد؟

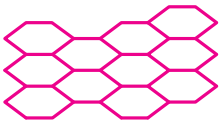
ج) **پروژه.** آیا شما همان کسی هستید که دستهٔ بعدی را کشف و کار جاودانه‌ای در ریاضیات خواهد کرد؟ کسی چه می‌داند!

۱۴. یک پنج‌ضلعی مقعر مثال بزنید که با آن بتوان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

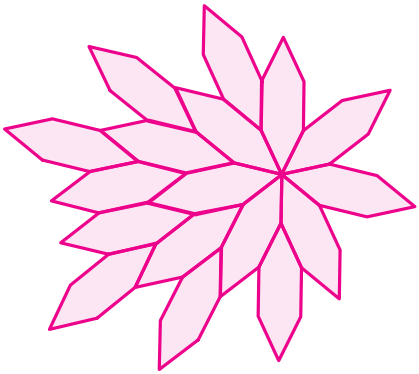
۱۵. فرض کنید n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ باشد. به شش‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی که دو زاویهٔ روبه‌روی آن $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ و بقیهٔ زاویه‌های آن باهم برابر باشند، «ششِ طولانی»[۱] می‌گویند.

الف) اگر $n = ۷$، آنگاه اندازهٔ هر یک از زاویه‌های شش طولانی مربوطه را به‌دست آورید و این شش‌ضلعی را رسم کنید.

ب) چرا با کمک هر یک از انواع شش طولانی می‌توان با روش زیر کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی کرد؟



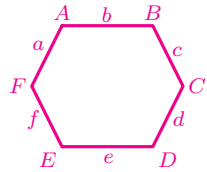
ج) نشان دهید اگر $n = ۷$، آنگاه با کمک شش طولانی ساخته شده، می‌توان به روش زیر کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی کرد.



[۱] نام نوعی کاشی که معماران و هنرمندان ایرانی به‌کار می‌برده‌اند.

د) آیا برای هر یک از انواع شش طولانی می‌توان یک کاشی‌کاری ضلع‌به‌ضلع تک‌وجهی، شبیه شکل صفحهٔ قبل ارائه داد؟

۱۶. در سال ۱۹۱۸ میلادی، کارل رینهارت[۱] نشان داد که با تنها سه نوع شش ضلعی محدب می‌توان کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد. او ضلع‌ها و زاویه‌های یک شش ضلعی محدب را به‌صورت زیر نام‌گذاری کرد و آن سه دسته را چنین معرفی کرد:



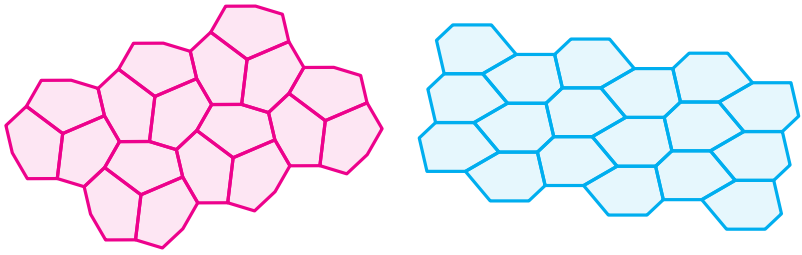
- ویژگی‌های دستهٔ اول: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۳۶۰^\circ$ ،$a=d$.
- ویژگی‌های دستهٔ دوم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{D}=۳۶۰^\circ$ ،$a=d$ ،$c=e$.
- ویژگی‌های دستهٔ سوم: $\hat{A}=\hat{C}=\hat{E}=۱۲۰^\circ$ ،$a=b$ ،$c=d$ ،$e=f$.

الف) از هر دستهٔ بالا، شکلی به‌عنوان مثال رسم کنید.

ب) شش ضلعی منتظم جزء کدام‌یک از دسته‌هاست؟

ج) شش طولانی جزء کدام‌یک از دسته‌هاست؟

د) مشخص کنید که هر یک از دو شکل زیر، روش کاشی‌کاری کدام‌یک از دسته‌ها را نشان می‌دهد؟



هـ) روش کاشی‌کاری دسته‌ای را که در شکل بالا نیامده است، بیابید.

[۱] Karl Reinhardt

کاشی‌کاری با n ضلعی‌های محدب که $n > 6$

کارل رینهارت در سال ۱۹۲۷ میلادی ثابت کرد برای $n > 6$ هیچ n ضلعی محدبی وجود ندارد که بتوان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۷. یک شش‌ضلعی مقعر مثال بزنید که بتوان با آن کاشی‌کاری تک‌وجهی کرد.

۱۸. می‌توان گفت کاشی‌کاری روی جلد کتاب با استفاده از یک نُه ضلعی مقعر ساخته شده است. چرا؟ همچنین می‌توان گفت با استفاده از یک بیست‌وشش ضلعی مقعر ساخته شده است. چرا؟

۱۹. در سال ۱۹۳۶ میلادی، هاینس ودربرگ[۱] با استفاده از یک n ضلعی مقعر، کاشی‌کاری تک‌وجهی زیر را ارائه کرد. n چه عددی است؟

[۱] Heinz Voderberg

۴
جبر و معادله

Agaoglu-Peeva is additive and $\mathcal{Y} \subseteq \operatorname{cores}\widetilde{\mathcal{Y}}$. Injective coresolutions are always $\mathcal{I}$-proper, and ... enough injectives if and only if $\operatorname{cores}\widetilde{\mathcal{I}} = \mathcal{A}$. If N is an object in $\mathcal{A}$ that admits a $\mathcal{Y}$-coresolution $N \xrightarrow{\simeq} Y$ and an injective resolution $N \xrightarrow{\simeq} I$, then there exists a quasi-isomorphism $Y \xrightarrow{\simeq} I$.

The next lemmata are standard or have standard proofs; for Lemma 1.6 see the proof of [3, Theorem 2.3], for Lemma 1.7 see the proof of [3, Proposition 2.1], for Lemma 1.8 repeatedly apply Definition 1.1, and for the 'horseshoe lemma', Lemma 1.9, see [9, proof of Lemma 8.2.1].

LEMMA 1.6. *Let $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ be an exact sequence in $\mathcal{A}$.*
(a) *If $A_3 \perp W$, then $A_1 \perp W$ if and only if $A_2 \perp W$. If $A_1 \perp W$ and $A_2 \perp W$, then $A_3 \perp W$ if and only if the given sequence is $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(-, W)$ exact.*
(b) *If $V \perp A_1$, then $V \perp A_2$ if and only if $V \perp A_3$. If $V \perp A_2$ and $V \perp A_3$, then $V \perp A_1$ if and only if the given sequence is $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(V, -)$ exact.*

LEMMA 1.7. *If $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$, then $\mathcal{X} \perp \operatorname{res}\widehat{\mathcal{Y}}$ and $\operatorname{cores}\widehat{\mathcal{X}} \perp \mathcal{Y}$.*

LEMMA 1.8. *If W is an injective cogenerator for $\mathcal{X}$, then every object X in $\mathcal{X}$ admits a proper W-coresolution, and so $\mathcal{X} \subseteq \operatorname{cores}\widetilde{W}$. If V is a projective generator for $\mathcal{Y}$, then every object Y in $\mathcal{Y}$ admits a proper V-resolution, and so $\mathcal{Y} \subseteq \operatorname{res}\widetilde{V}$.*

LEMMA 1.9. *Let $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ be an exact sequence in $\mathcal{A}$.*
(a) *Assume that A' and A'' admit proper $\mathcal{X}$-resolutions $X' \xrightarrow{\simeq} A'$ and $X'' \xrightarrow{\simeq} A''$. If the given sequence is $\operatorname{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, -)$-exact, then A is in $\operatorname{res}\widetilde{\mathcal{X}}$ with proper $\mathcal{X}$-resolution $X \xrightarrow{\simeq} A$ such that there exists a commutative diagram*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{\binom{\mathrm{id}_{X'}}{0}} & X & \xrightarrow{(0\ \mathrm{id}_{X''})} & X'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \simeq\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in which the top row is degreewise split exact and

$$\partial_n^X = \begin{pmatrix} \partial_n^{X'} & f_n \\ 0 & \partial_n^{X''} \end{pmatrix}.$$

خوارزمی برای نوشتن مسائل جبری از هیچ نمادی استفاده نمی‌کرد. اما امروزه در مقاله‌های ریاضی نمادهای زیادی به‌کار برده می‌شود. این یک مقالهٔ جبر است که در سال ۲۰۰۸ با همکاری ریاضی‌دانان ایرانی و خارجی نوشته و منتشر شده است.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y' & \xrightarrow{\binom{\mathrm{id}_{Y'}}{0}} & Y & \xrightarrow{(0\ \mathrm{id}_{Y''})} & Y'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ساده کردن عبارت‌های جبری

۱. الف) حاصل عبارت $n + \cdots + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱$ را برحسب n بیابید.

ب) الگوی زیر را با دقت ببینید.

$$۱ + ۲ = ۳$$

$$۴ + ۵ + ۶ = ۷ + ۸$$

$$۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ = ۱۳ + ۱۴ + ۱۵$$

$$۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ = ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴$$

$$۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ = ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵$$

$$۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ = ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸$$

اگر این الگو را تا سطر nاُم ادامه دهیم، با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا تساوی برای سطر nاُم نیز برقرار است؟

۲. الگوی زیر را با دقت ببینید. الهام می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۵ و مائده می‌خواست تعداد چوب‌کبریت‌های شکل ۱۰ را حساب کند.

شکل ۱

شکل ۲

شکل ۳

راه‌حل الهام:

$$۱۵ \times (۶ \times ۱۵) - (۱ \times ۶) - (۲ \times ۶) - (۳ \times ۶) - (۴ \times ۶) - \cdots - (۱۳ \times ۶).$$

راه‌حل مائده:

$$۶ + (۲ \times ۶ + ۶) + (۳ \times ۶ + ۶) + (۴ \times ۶ + ۶) + \cdots + (۱۰ \times ۶ + ۶).$$

الف) دربارهٔ راه‌حل الهام و مائده بحث کنید.

ب) برای یافتن تعداد چوب‌کبریت‌های شکل nام روش دیگری بیابید.

۳. ده عدد بعدی الگوی زیر را بنویسید.

$$۲, ۴, ۸, \ldots .$$

پاسخ چند نفر به این پرسش در زیر آمده است.

پاسخ مرضیه:

$$۲, ۴, ۸, ۱۰, ۱۴, ۱۶, ۲۰, ۲۲, ۲۶, ۲۸, ۳۲, ۳۴, ۳۸.$$

پاسخ مریم :

$$۲, ۴, ۸, ۱۲, ۱۸, ۲۴, ۳۲, ۴۰, ۵۰, ۶۰, ۷۲, ۸۴, ۹۸.$$

پاسخ نیّره :

$$۲, ۴, ۸, ۳۲, ۲۵۶, ۸۱۹۲, ۲^{۲۱}, ۲^{۳۴}, ۲^{۵۵}, ۲^{۸۹}, ۲^{۱۴۴}, ۲^{۲۳۳}, ۲^{۳۷۷}.$$

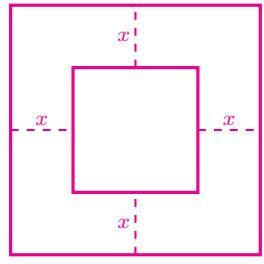
پاسخ زهرا:

$$۲, ۴, ۸, ۱۴, ۲۶, ۴۸, ۸۸, ۱۶۲, ۲۹۸, ۵۴۸, ۱۰۰۸, ۱۸۵۴, ۳۴۱۰.$$

الف) کشف کنید که هر یک از این چهار نفر با چه قانونی ده عدد بعدی را نوشته‌اند؟

ب) حداقل سه جواب دیگر برای مسئله پیدا کنید و برای یکی از آنها، جملهٔ nام را بنویسید.

۴. در شکل زیر، طول ضلع مربع بزرگ ۳ واحد است. مساحت مربع کوچک را بر حسب x به‌دست آورید.



۵. میثم و مهسا با روش‌های زیر حاصل‌ضرب $(۲x+۳)(x^۲-۵x+۴)$ را به‌دست آوردند.

روش میثم:

$$\begin{aligned}(۲x+۳)(x^۲-۵x+۴) &= ۲x(x^۲-۵x+۴)+۳(x^۲-۵x+۴)\\ &= (۲x^۳-۱۰x^۲+۸x)+(۳x^۲-۱۵x+۱۲)\\ &= ۲x^۳-۷x^۲-۷x+۱۲.\end{aligned}$$

روش مهسا:

$$\begin{array}{r} x^۲-۵x+۴ \\ ۲x+۳ \\ \hline ۳x^۲-۱۵x+۱۲ \\ ۲x^۳-۱۰x^۲+\ ۸x \\ \hline ۲x^۳-۷x^۲-۷x+۱۲ \end{array}$$

الف) دربارهٔ دو راه‌حل بالا بحث کنید.

ب) ابتدا دو عدد ۳۸ و ۱۵۴ را به‌صورت گسترده بنویسید. سپس یک‌بار با روش میثم و بار دیگر با روش مهسا حاصل ۱۵۴×۳۸ را بیابید.

ج) حاصل‌ضرب عدد دو رقمیِ $\overline{ab}$ در $\overline{ba}$ را به‌دست آورید.

۶. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(x-۳)(x^۲-۳x+۹)$

ب) $(۴x-۵y)(۳x-y)$

ج) $(۱+۲x)(x^۲-۳x+۱)$

د) $(۲x+y)(۲x+y+۳)$

ه) $(x+y-z)(x-z)$

و) $(a^۲+b)(c-b+d-a^۲)$

ز) $(z^۲-۵)(z+۱)(z^۴+۲z+۱)$

ح) $(a^۲+b)(c^۲-d)(۵-۲e)$

ط) $x(x^۲-\frac{۷}{۴})(۴x^۲-x+۱)$

ی) $(x^۳-۱)(x^۲-۲۵)(z+۱)^۲$

۷. یک عدد سه رقمیِ کوچک‌تر از ۹۰۰ انتخاب کنید. اختلاف این عدد با عدد ۹۹۹ را سمت راست آن بنویسید. عدد شش رقمی به‌دست آمده بر ۳۷ بخش‌پذیر است؛ خارج قسمتی که به‌دست می‌آید بر ۲۷ بخش‌پذیر است و خارج‌قسمت دوم یک واحد از عدد سه رقمی انتخاب شده بیشتر است.

برای مثال، اگر ۱۶۷ را انتخاب کنیم، داریم:

$$۹۹۹ - ۱۶۷ = ۸۳۲, \quad \frac{۱۶۷۸۳۲}{۳۷} = ۴۵۳۶, \quad \frac{۴۵۳۶}{۲۷} = ۱۶۸, \quad ۱۶۸ = ۱۶۷ + ۱.$$

الف) چرا مراحل بالا برای هر عدد سه رقمیِ کوچک‌تر از ۹۰۰ درست است؟

ب) قانون بالا را طوری اصلاح کنید که این قانون برای هر عدد سه‌رقمی دلخواه برقرار باشد.

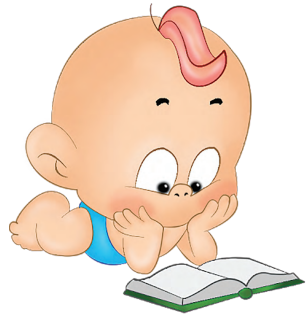
۸. صالح برای محاسبهٔ توان دوم یک عدد دو رقمی که یکان آن ۵ است، ابتدا عدد دهگان را در عدد بعدی‌اش ضرب می‌کند و سپس در سمت راست حاصل‌ضرب به‌دست آمده عدد ۲۵ را می‌نویسد. برای مثال:

$$(۷۵)^۲ = ۵۶۲۵ \qquad (۵۶ = ۷ \times ۸).$$

صالح مدعی است که چنین روشی برای یافتن مربع هر عدد سه‌رقمی با یکان ۵ نیز کار می‌کند. برای مثال:

$$(۱۰۵)^۲ = ۱۱۰۲۵ \qquad (۱۱۰ = ۱۰ \times ۱۱).$$

آیا ادعای صالح درست است؟ چرا؟



۹. صبح دیروز نرخ تبدیل دلار در سه صرافی برابر بود. ظهر، صرافی اول ٪۱ به نرخ دلار اضافه کرد و عصر ٪۱ از نرخ جدید آن کم کرد. صرافی دوم، ظهر ٪۱ از نرخ دلار کم کرد و عصر ٪۱ به نرخ جدید آن اضافه کرد. صرافی سوم نرخ دلار را تغییر نداد. عصر دیروز نرخ دلار در کدام صرافی از بقیه بیشتر بود؟

پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

۱. مقدار عبارت جبری $n^۲ + n + ۴۱$ را برای $n = ۱$، $n = ۲$، $n = ۳$، ... و $n = ۲۰$ به‌دست آورید. اعداد به‌دست آمده چه خاصیت مشترکی دارند؟

۲. از بهنام، احسان، حامد و شکیب پرسیدند:

اگر $a > ۰$، $b < ۰$ و $c < ۰$، آنگاه چندتا از عبارت‌های زیر منفی هستند؟

- $\frac{a^۳b^۳}{b^۶c^۲}$
- $(ac - b^۲c)$
- $(b - a)^۳$
- $ab^۲c$

آنها به پرسش بالا این‌گونه پاسخ داده‌اند:

بهنام: حداقل سه تا　　احسان: حداکثر سه تا

حامد: بیشتر از سه تا　　شکیب: کمتر از سه تا

دربارهٔ درستی یا نادرستی هر یک از پاسخ‌های بالا بحث کنید.

۳. اگر $x + ۲y = ۴$، آنگاه مجموع عبارت‌های جبری زیر را به‌دست آورید.

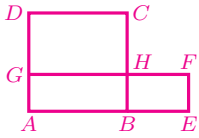
$$۳x + ۵y,\ ۲x + ۳y,\ x + ۲y,\ x + ۴y,\ ۲y,\ x.$$

۴. می‌دانیم x، y و z سه عدد متفاوت هستند و یکی از آنها ۳، دیگری ۴ و یکی دیگر ۵ است. بیشترین و کمترین مقدار هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

الف) $-x^y - z$　　ب) $-x^y - \frac{۱}{z}$

۵. همهٔ مستطیل‌های به محیط ۲۰ سانتی‌متر و طول اضلاع صحیح را رسم کنید. کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟

۶. در شکل زیر، محیط مربع $ABCD$ با محیط مستطیل $AEFG$ برابر است. طول ضلع مربع $ABCD$ را برابر a و عرض مستطیل $AEFG$ را برابر b در نظر بگیرید.



الف) طول DG را بر حسب a و b به‌دست آورید.

ب) طول BE بر حسب a و b چیست؟

ج) مساحت $BEFH$ و $GHCD$ را بر حسب a و b به‌دست آورید.

د) ثابت کنید مساحت $GHCD$ از مساحت $BEFH$ بیشتر است.

ه) ثابت کنید مساحت مربع $ABCD$ از مساحت مستطیل $AEFG$ بیشتر است.

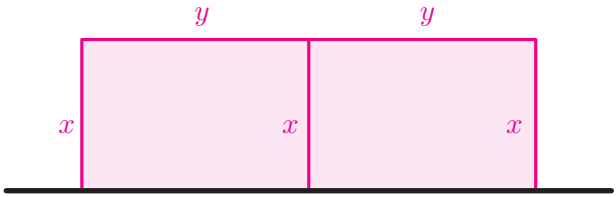
۷. اگر کلیه مستطیل‌هایی که اندازه محیط آنها برابر $4a$ است را رسم کنیم، کدام مستطیل بیشترین مساحت را دارد؟ چرا؟

راهنمایی: از تمرین قبل استفاده کنید.

۸. آقا فرامرز می‌خواهد با سیم توری، در زمین کشاورزی خود حصاری به شکل مستطیل بکشد. طول سیم توری او ۶۰۰ متر است. مطابق شکل زیر، یک ضلع مستطیل به دیوار محصور است. (فرض کنید خط سیاه زیر همان دیوار و خطوط صورتی حصار هستند!) مقدارهای x و y را طوری تعیین کنید که مساحت داخل حصار بیشترین مقدار ممکن باشد.

۹. فرض کنید f مقداری ثابت باشد. در شکل زیر، x و y را طوری تعیین کنید که مساحت صورتی رنگ بیشترین مقدار ممکن باشد به‌طوری‌که

$$۳x + ۲y = f.$$



۱۰. اگر a و b دو عدد باشند، حاصل $a \perp b$ برابر $a - \frac{b}{۲}$، و حاصل $a \top b$ برابر $b - \frac{a}{۲}$ می‌شود. برای مثال:

$$۲ \perp ۴ = ۲ - \frac{۴}{۲} = ۰, \quad ۲ \top ۴ = \frac{۲}{۲} - ۴ = -۳.$$

الف) حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

- $۳ \top (۵ \perp ۷)$
- $(۳ \top ۵) \perp ۷$
- $(۲ \top ۶) \perp (-۳ \top (-۲))$
- $-۴ \perp (۳ \top (-۱))$

ب) حاصل $x + y$ با کدام‌یک از موردهای زیر برابر است؟

- $(x) \perp (-۲y)$
- $(۲x) \top (-y)$
- $۲(x \top (x - y))$
- $۲(x \perp (x - y))$

ج) دربارهٔ درستی یا نادرستی هر یک از ادعاهای زیر، بحث کنید.

- اگر $a \top b = a \perp b$، آنگاه a و b قرینه یکدیگرند.
- اگر $a \top b = b \top a$، آنگاه a و b باهم برابرند.

د) بیشترین و کمترین مقداری را که با پرانتزگذاری عبارت زیر حاصل می‌شود، بیابید.

$$۲ \perp ۲ \top ۲ \perp ۲$$

۱۱. دستورهای زیر را در نظر بگیرید.

$\mathcal{A}$: مجذور قرینهٔ ورودی

$\mathcal{B}$: دو واحد بیشتر از نصف ورودی

$\mathcal{C}$: منهای دو برابر ورودی ستون «ب»

$\mathcal{D}$: یک واحد کمتر از یک‌چهارم ورودی

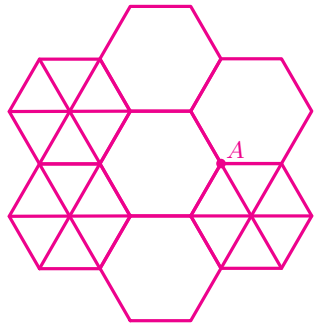
الف) خروجی هر ستون از جدول زیر را برحسب x به‌دست آورید.

	ستون «الف»	ستون «ب»	ستون «ج»	ستون «د»
ورودی	x	یک واحد کمتر از خروجی «الف»	شش برابر خروجی ستون «ب»	سه واحد کمتر از خروجی ستون «ج»
دستور	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{D}$
خروجی				

ب) اگر در خانهٔ زیرِ خانهٔ $\mathcal{D}$ بنویسیم $۳۵y^۲$ و عملیات را به‌طور معکوس انجام دهیم، در خانهٔ بالای خانهٔ $\mathcal{A}$ چه عبارتی برحسب y به‌دست می‌آید؟

۱۲. اگر k تا چندضلعی منتظم در یک رأس مشترک باشند به‌طوری‌که این چندضلعی‌ها روی هم قرار نگرفته باشند و دورتادور رأس مشترک را پوشانده باشند، به آن نقطهٔ مشترک، نقطهٔ گرهی از مرتبهٔ k می‌گویند.

برای مثال در شکل زیر، نقطهٔ A یک نقطهٔ گرهی از مرتبهٔ ۴ است.



الف) در شکل بالا چند نقطهٔ گرهی وجود دارد. مرتبهٔ هر نقطهٔ گرهی را مشخص کنید.

ب) سارا و دانا می‌خواستند بدانند با یک مثلث متساوی‌الاضلاع، یک هفت ضلعی منتظم و یک ۴۲ ضلعی منتظم، یعنی $(۳, ۷, ۴۲)$، می‌توان نقطهٔ گرهی ساخت یا نه. آن دو به‌صورت زیر عمل کردند.

روش سارا برای بررسی وجود نقطهٔ گرهی در $(۳, ۷, ۴۲)$:

کافی است در رأس مشترک از این سه چندضلعی منتظم، مجموع زاویه‌ها برابر ۳۶۰ درجه باشد.

$$\frac{(۳-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۳}+\frac{(۷-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۷}+\frac{(۴۲-۲)\times ۱۸۰^\circ}{۴۲}=۳۶۰^\circ.$$

بنابراین این چندضلعی‌های منتظم می‌توانند نقطهٔ گرهی بسازند.

روش دانا برای بررسی وجود نقطهٔ گرهی در $(۳, ۷, ۴۲)$:

کافی است درستی تساوی زیر را برای چندضلعی‌های منتظم داده شده بررسی کنیم.

$$k-۲=۲\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}\right),$$

که k تعداد چندضلعی‌های منتظم و a، b و c تعداد اضلاع هریک از چندضلعی‌های منتظم داده شده است. چون

$$۳-۲=۲\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۴۲}\right)$$

پس این چندضلعی‌های منتظم می‌توانند نقطهٔ گرهی بسازند.

ج) با دو روش بالا بررسی کنید که هریک از قسمت‌های زیر یک نقطهٔ گرهی هست یا نه.

- $(۴, ۶, ۱۲)$
- $(۵, ۵, ۱۰)$
- $(۳, ۴, ۵, ۶)$
- $(۳, ۴, ۴, ۶)$

د) چه ارتباطی بین راه‌حل سارا و دانا وجود دارد؟

ه) چرا با هفت‌تا چندضلعی منتظم نمی‌توان نقطهٔ گرهی ساخت؟

تجزیهٔ عبارت‌های جبری

۱. کدام‌یک از تساوی‌های زیر، تجزیهٔ یک عبارت جبری را نشان می‌دهد؟

الف) $x^۲ + x + ۱ = x(x + ۱) + ۱$ ب) $x + ۲\sqrt{x} + ۱ = (\sqrt{x} + ۱)^۲$

ج) $(x - ۱)a - a(۱ - x) = a(x - ۲)$ د) $۲y^۲ + ۵y = ۲y(y + \frac{۵}{۲})$

۲. با تبدیل به ضرب، صورت و مخرج هر کسر را ساده کنید.

الف) $\frac{x \times ۲^a - y \times ۲^a}{x - y}, (x \neq y)$ ب) $\frac{۴۲xy^۳ - ۳۵x^۲y}{۷xy}, (xy \neq ۰)$

۳. در زیر، از $x = ۱$ نتیجه شده $۰ = ۱$. ایراد کجاست؟

$$x = ۱ \Longrightarrow x^۲ = x$$
$$\Longrightarrow x^۲ - x = ۰$$
$$\Longrightarrow x(x - ۱) = ۰$$
$$\Longrightarrow \frac{x(x - ۱)}{x - ۱} = \frac{۰}{x - ۱}$$
$$\Longrightarrow x = ۰$$
$$\Longrightarrow ۱ = ۰.$$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را تجزیه کنید.

الف) $(u + ۱)^۲ - ۳(u + ۱)$ ب) $(a - ۱۸)^۲ + (۱۸ - a)$

ج) $(a + ۵)a - a(۷ - a)$ د) $(b - ۲)(b - ۴) + ۴b - ۸$

ه) $(t - ۱)^۲ + t(t - ۱) + ۸(t - ۱)$ و) $ab - a + b - ۱$

ز) $xz + xw - yz - yw$ ح) $tv - tr - kv + kr$

ط) $xw - ۲xz - yw + ۲yz$ ی) $۵ac - ۳۵bc - ۱۴bd + ۲ad$

۵. در تجزیهٔ عبارت $۱۲ac+۱۲bd-۲۴bc-۶ad$ کدام عبارت زیر نمی‌تواند ظاهر شود؟

الف) $۲c-d$ ب) $۲d-۴c$

ج) $۲b-a$ د) $۳a-۶b$

ه) $۱۲c-۶b$ و) $۶a-d$

۶. عبارت جبری $۳x(۲x-\frac{۱}{۳})(x-۱۸)$ را در نظر بگیرید.

الف) این عبارت جبری را ساده کنید.

ب) مقدار این عبارت جبری را برای $x=\frac{۱}{۶}$ به‌دست آورید.

ج) دو عدد بیابید که برای آنها، حاصل عبارت جبری با حاصل قسمت «ب» برابر باشد.

د) یک عبارت جبری با تنها یک نوع متغیر بیابید که با جایگذاری چهار مقدار عددی متفاوت، به عدد ۳− برسیم.

۷. برای مرکب بودن هر یک از اعداد زیر دلیل بیاورید.

الف) $۱+۲+۳+\cdots+۹۷$ ب) $۱\times۲\times۳\times\cdots\times۹۷+۸۳$

ج) $۳^{۱۰۱}+۱$ د) $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+۳۱^۲$

۸. عددهای طبیعی m و n در تساوی $۵۶m=۶۵n$ صدق می‌کنند. ثابت کنید $m+n$ عددی مرکب است.

۹. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی باشند که $n>۲$ و $m>۳$. ثابت کنید حاصل عبارت‌های زیر عددی مرکب است.

الف) $۱+۲+۳+\cdots+n$ ب) $۱\times۲\times\cdots\times m+m-۲$

ج) $n^۳-۲n^۲$ د) $mn-n-m+۱$

ه) $m^۲n-mn+n-m^۲+m-۱$ و) $mn^۲+m-n^۲-۱$

ز) $۲mn-۴n-m+۲$ ح) $mn-۲n+m-۲$

۱۰. الف) حاصل کدام‌یک از عبارت‌های زیر عددی اول است؟

- $۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱$
- $۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶$
- $۱۳۹۴ + ۱۳۹۵ + ۱۳۹۶ + ۱۳۹۷ + ۱۳۹۸$

ب) آیا ممکن است مجموع پنج عدد طبیعی متوالی، عددی اول باشد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۱۱. برای درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر دلیل بیاورید.

الف) حاصل‌ضرب دو عدد فرد، عددی فرد است.

ب) حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۳ است.

ج) برای هر عدد طبیعی n، مقدار $۲n^۲ + ۲۹$ عددی اول است.

د) مجموع سه عدد زوج متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

ه) حاصل‌ضرب سه عدد زوج متوالی مضرب ۲۴ است.

و) برای هر عدد طبیعی m که m مضرب ۴۱ نباشد، مقدار $m^۲ + m + ۴۱$ عددی اول است.

ز) اگر a و b دو عدد صحیح باشند که باقی‌ماندهٔ تقسیم آنها بر ۶ برابر ۵ باشد، آنگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم ab بر ۶ برابر ۱ است.

ح) اگر از مربع یک عدد فرد یک واحد کم کنیم، حاصل بر ۸ بخش‌پذیر است.

ط) هر مضرب ۴ را می‌توان به‌صورت تفاضل مربع دو عدد صحیح نوشت.

ی) تفاضل دو عدد مربع کامل، مضرب ۴ است.

۱۲. عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(z^۲ - ۵) - (z + ۱)(z^۴ + ۲z + ۱)$ ب) $(x^۳ - ۱)(x^۲ - ۲۵) - (x + ۱)^۲$

ج) $(z^۲ - ۵)(z + ۱) - (z^۴ + ۲z + ۱)$ د) $(x^۳ - ۱) - (x^۲ - ۲۵)(x + ۱)^۲$

۱۳. در این مسئله منظور از $\mathcal{P}$ یک جمله است که در آن فقط متغیر a با توان ۱ به‌کار رفته است. برای مثال $\mathcal{P}$ می‌تواند برابر a، $-a$، $۲a$، $-\sqrt{۳}a$ یا $\frac{۲}{۳}a$ باشد؛ ولی $\mathcal{P}$ نمی‌تواند برابر $a^۲$، $a^۲ + a$، $-ab$، $۳b$، $a + ۲$ یا ۵ باشد. در این مسئله منظور از $\mathcal{R}$ نیز یک جمله است که در آن فقط متغیر b با توان ۱ به‌کار رفته است.

الف) باتوجه‌به تعریف بالا، $\mathcal{P}$ برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر می‌تواند باشد؟ $\mathcal{R}$ برابر کدام‌یک از عبارت‌های زیر می‌تواند باشد؟

$$-۳a,\ ۵b,\ a+b,\ ab,\ ۱۲a,\ b+۱,\ -۱۸,\ b^۲,\ -a^۲,\ \frac{۱}{۲}a,\ \sqrt{۲}b.$$

ب) در جدول صفحه بعد، باتوجه‌به تعریف بالا، در هر پرانتز $\mathcal{P}$ و $\mathcal{R}$ را طوری تعیین کنید که تعداد جمله‌های حاصل‌ضربِ عبارت جبریِ هر ردیف، برابر با عدد ستون سمت راست باشد. توجه کنید که لازم نیست جمله‌ای که به‌جای $\mathcal{P}$ یا $\mathcal{R}$ در پرانتز اول و دوم هر عبارت جبری استفاده می‌کنید برابر باشد.

عبارت جبری	تعداد جمله‌های حاصل‌ضرب
$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+d+e)$	۹
$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+d)$	۸
$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+d)$	۷
$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)$	۶
$(\mathcal{P}+\mathcal{R}-c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)$	۵
$(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)(\mathcal{P}+\mathcal{R}+c)$	۴
$(a^۲+\mathcal{P}+۱)(a^۲+a+۱)$	۳
$(۲a^۲+\mathcal{P}+۱)(۲a^۲+\mathcal{P}+۱)$	۲
$(a^۲+\mathcal{P}+۱)(a^۲+\mathcal{P}+۱)$	۲

برای نمونه، دو جواب برای ردیف اول به‌دست می‌آوریم:

- $(a+b+c)(-a+d+e)$

  $= a(-a+d+e)+b(-a+d+e)+c(-a+d+e)$

  $= -a^۲+ad+ae-ab+bd+be-ac+cd+ce,$

- $(a+b+c)(a+d+e)$

  $= a(a+d+e)+b(a+d+e)+c(a+d+e)$

  $= a^۲+ad+ae+ab+bd+be+ac+cd+ce.$

۱۴. می‌دانیم a و b دو عدد صحیح هستند. با ذکر دلیل مشخص کنید که تعداد جمله‌های عبارت $(x+b)(x^۲+ax+۱)$، پس از ساده کردن چه اعدادی نمی‌تواند باشد.

۱۵. باتوجه‌به تمرین ۲ صفحهٔ ۲۷ به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

الف) آیا ادعای نینا برای هر عدد طبیعی m درست است؟ چرا؟

ب) آیا ادعای نینا ارتباطی با روش غربالِ اعداد اول دارد؟

معادله

۱. در زیر، هریک از اعداد سمت راست، جواب یکی از معادله‌های سمت چپ است. هر معادله را به جواب آن وصل کنید.

- $x^۲+x-۲=\frac{۲x-۲}{۲}+۱$
- $x^۳-x=x^۲-۱$
- $۵x^۲+x=۰$
- $(x^۲-۱)^۲=۸x^۲$

- -۱
- ۰
- $\sqrt{۲}$
- $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$
- $-\frac{۱}{۵}$

۲. چرا در همهٔ مربع‌های جادویی ۳ × ۳ که با اعداد ۱ تا ۹ ساخته می‌شوند، عدد خانهٔ وسط، همیشه ۵ است؟

۳. برای اندازه‌گیری دما در برخی کشورها از واحد سانتی‌گراد (C) و در برخی کشورها از واحد فارنهایت (F) استفاده می‌شود. آب در صفر درجهٔ سانتی‌گراد و ۳۲ درجهٔ فارنهایت یخ می‌زند. در جدول زیر، تبدیل شدهٔ دماهایی از سانتی‌گراد به فارنهایت را مشاهده می‌کنید.

C	-۳۰°	-۲۰°	-۱۰°	۰°	۱۰۰°
F	-۲۲°	-۴°	۱۴°	۳۲°	۲۱۲°

الف) می‌دانیم رابطهٔ بین F و C به‌صورت $F = mC + n$ است. باتوجه‌به جدول بالا، اعداد m و n را بیابید.

ب) در چه درجه‌ای سانتی‌گراد و فارنهایت یک عدد را نشان می‌دهند؟

۴. الف) کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند صورت مسئله‌ای باشد که معادله‌اش به‌صورت $۲x + ۳ = ۵x$ است؟

- دو دونده روزی سه کیلومتر می‌دوند. پنج دونده روزی چند کیلومتر می‌دوند؟
- قیمت پنج کیلو سیب، سه هزار تومان بیشتر از قیمت دو کیلو از همان سیب است. قیمت سه کیلو سیب چند هزار تومان است؟
- سه روز بعد از دو روز دیگر، پنج‌شنبه خواهد بود. امروز چند شنبه است؟
- دمای شهری که دو برابر دمای آن، سه واحد بیشتر از پنج برابر دمایش است، چقدر است؟

ب) با کمک همکلاسی‌های‌تان حداقل ۵ مسئله بسازید که معادلهٔ آنها به‌صورت $۲x + ۳ = ۵x$ باشد.

۵. ابتدا برای هریک از معادله‌های زیر یک مسئله بسازید و سپس آنها را حل کنید.

الف) $\frac{۴a-۶}{۲}+۳a=۱۱-۲a$

ب) $x+۲x+۳x+\cdots+۱۰x+۱۱=۶۶$

ج) $\frac{۸y-۳}{۵}=\frac{۶y+۱۰}{۴}$

د) $۴x-۸x-۱۲x-\cdots-۴۸x-۴=۵۸۴$

۶. الف) چند مستطیل با طول و عرض طبیعی وجود دارد که محیط آن ۲۰ باشد.

ب) معادلهٔ $۲x+۲y=۲۰$ چند جواب طبیعی دارد؟ همهٔ جواب‌ها را بنویسید.

۷. الف) معادلهٔ $x+۲y=۵۰$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

ب) معادلهٔ $x+۲y+۴z=۱۰۰$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

۸. چند عدد حسابی یک رقمی مانند a و b در معادلهٔ $ab=۱۰+a$ صدق می‌کنند؟

۹. چند عدد صحیح می‌توان یافت که حاصل‌ضرب آن عدد در عدد قبلی‌اش برابر با حاصل‌ضرب آن عدد در عدد بعدی‌اش شود؟

مهتاب و مهناز این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. دربارهٔ راه‌حل این دو نفر بحث کنید.

راه‌حل مهناز:

$$x(x+۱)=x(x-۱)$$
$$\Longrightarrow x^۲+x=x^۲-x$$
$$\Longrightarrow ۲x=۰$$
$$\Longrightarrow x=۰.$$

بنابراین فقط عدد صفر جواب این مسئله است.

راه‌حل مهتاب:

$$x(x+۱)=x(x-۱)$$
$$\Longrightarrow \cancel{x}\,(x+۱)=\cancel{x}\,(x-۱)$$
$$\Longrightarrow (x+۱)=(x-۱)$$
$$\Longrightarrow ۱=-۱.$$

بنابراین این مسئله جواب ندارد.

۱۰. چند عدد صحیح وجود دارد که حاصل‌ضرب آن در عدد بعدی‌اش، چهار واحد بیشتر از آن عدد باشد؟

۱۱. $\frac{۲}{۳}$ عددی از $\frac{۱}{۵}$ آن $\frac{۲}{۷}$ بیشتر است. آن عدد چیست؟

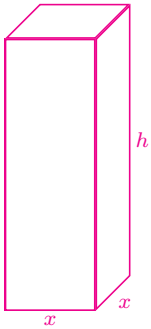
۱۲. یکی از همسایه‌های طاهره خانم، سن او را پرسید. طاهره خانم گفت: «سن من دوسوم سال‌هایی است که مانده تا ۱۰۰ ساله شوم.» سن طاهره خانم چقدر است؟

۱۳. عددی به ما داده شده است. آن را دو برابر می‌کنیم و یک واحد از نتیجه کم می‌کنیم. اگر نتیجه $۲^{۱۰۰} + ۱$ باشد، با چه عددی شروع کرده‌ایم؟

۱۴. اگر قیمت بی‌تخفیف سه تلفن همراه از یک نوع برابر قیمت با تخفیف پنج تلفن همراه از همان نوع باشد، تخفیف چند درصد است؟

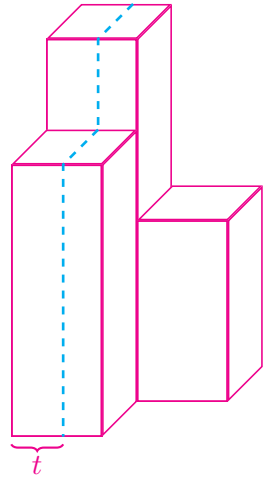
۱۵. وقتی ۳۰ درصد از یک بشکه خالی است، حجم آن ۳۰ لیتر بیشتر از زمانی است که ۳۰ درصد از آن بشکه پر است. وقتی بشکه کاملاً پر است، حجم بشکه چقدر است؟

۱۶. شکل زیر یک مکعب مستطیل است که مساحت کل آن برابر ۱۸۲ می‌باشد. اگر $x + h = ۱۰$، آنگاه h را بیابید.



۱۷. مکعب مستطیلی به ابعاد x، x و $\frac{۱۰}{۳}$ را در نظر بگیرید. این مکعب را روی وجه مربعی آن قرار داده‌ایم و تا ارتفاع h داخل آن آب ریخته‌ایم. اگر مکعب را بغلتانیم و آن را روی وجه $x \times \frac{۱۰}{۳}$ قرار دهیم، ارتفاع آب ۳ می‌شود. اگر x عددی صحیح باشد، آنگاه h را بیابید.

۱۸. سه مکعب مستطیل چوبی مانند شکل زیر به یکدیگر چسبیده‌اند. ارتفاع این مکعب مستطیل‌ها ۲، ۳ و ۴ و قاعده‌های سه مکعب مربع‌های همنهشت به طول ضلع ۱ هستند. با یک ارّه، این حجم چوبی را از محل خط‌چین به دو قسمت با حجم مساوی تقسیم می‌کنیم. t چه کسری از طول ضلع مربع است؟



۱۹. حاصل جمع پنج عدد طبیعی متوالی برابر با حاصل جمع سه عدد طبیعی متوالی بعدی است. مجموع این هشت عدد را به‌دست آورید.

۲۰. شانزده عدد طبیعی متمایز که میانگین آنها ۱۶ باشد را در نظر بگیرید. در بین این اعداد بزرگ‌ترین عدد ممکن، چه عددی است؟

۲۱. من و چهار نفر از دوستانم مقداری پول خرج کرده‌ایم. به‌طور متوسط هر کدام از ما ۸۰۰۰ تومان خرج کرده است. من ۱۰۰۰۰ تومان خرج کرده‌ام. هر کدام از دوستانم به‌طور متوسط چقدر خرج کرده‌اند؟

۲۲. تعدادی از مؤلفان کتاب‌های تکمیلی ویژهٔ استعدادهای درخشان در جلسه‌ای حضور داشتند. میانگین سن این افراد برابر تعدادشان بود. شخصی که ۶۱ ساله بود، به این جلسه اضافه شد.

الف) اگر بازهم میانگین سن افراد حاضر در جلسه برابر تعدادشان باشد، در ابتدا چند نفر در جلسه حضور داشته‌اند؟

ب) اگر میانگین سن افراد حاضر در جلسه تغییر نکرده باشد، در ابتدا چند نفر در جلسه حضور داشته‌اند؟

۲۳. الف) امیرحسین هر روز صبح با دوچرخه از خانه به مدرسه می‌رود. او صبح‌ها مسیر خانه تا مدرسه را با سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت و بعدازظهرها مسیر مدرسه تا خانه را با سرعت ۹۰ کیلومتر در ساعت رکاب می‌زند. چرا میانگین سرعت امیرحسین ۶۰ کیلومتر در ساعت نیست؟

ب) مسئله را در حالت کلی که سرعت‌های ۳۰ و ۹۰ به‌ترتیب با v و u جانشین شوند، حل کنید.

۲۴. هومن پول‌هایش را جمع می‌کند تا رایانه‌ای ۵, ۴۰۰, ۰۰۰ تومانی بخرد.

وقتی شروین از هومن پرسید: «چقدر پول جمع کرده‌ای؟» هومن گفت: «اگر یک‌پنجم بیشتر از پول الانم را داشتم، یک‌چهارم کمتر از پولی که برای خرید رایانه لازم دارم، نیاز داشتم.»

وقتی بهمن از هومن پرسید: «چقدر پول جمع کرده‌ای؟» هومن گفت: « اگر یک‌پنجم بیشتر از پول الانم داشتم، هنوز سه‌چهارم از پولِ خرید رایانه را نیاز داشتم.»

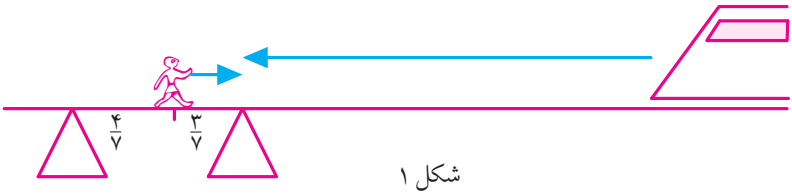
باتوجه به متن بالا آیا می‌توان گفت هومن راستگو نیست؟!

۲۵. چه عددی است که اگر آن را در ۳ ضرب کنیم، سپس $\frac{۳}{۴}$ حاصل‌ضرب را به حاصل‌ضرب اضافه کنیم، بعد حاصل این جمع را بر ۷ تقسیم کنیم و سپس $\frac{۱}{۳}$ خارج‌قسمت را از خارج‌قسمت کم کنیم و حاصل تفاضل را به توان ۲ برسانیم و ۵۲ واحد از این مجذور کم کنیم، بعد از جذر گرفتن از حاصلِ آخرین تفاضل، ۸ واحد به این جذر اضافه کنیم و نتیجه را بر ۱۰ تقسیم کنیم، پاسخ مساوی ۲ شود؟

۲۶. رامبد گفته که او و شش نفر از دوستانش باهم ۷۰۷ لبو فروخته‌اند. می‌دانیم تعداد لبوهای فروخته شدهٔ هیچ دوتای آنها یکی نیست و تعداد لبوهای کسی که بیشترین لبو را فروخته است، شش لبو بیشتر از کسی است که کمترین لبو را فروخته است. کسی که کمترین لبو را فروخته، چه تعداد لبو فروخته است؟

۲۷. رضا می‌خواست دو عدد دو رقمی را در هم ضرب کند. متأسفانه عدد اولی را در مقلوب عدد دومی ضرب کرد. جواب رضا ۳۸۱۶ واحد بیشتر از جواب درست بود. جواب درست را بیابید.

۲۸. ریزعلی روی پلی که ریلِ راه‌آهن از آن عبور می‌کرد، در حال حرکت بود. او بعد از اینکه $\frac{۴}{۷}$ مسافت روی پل را پیمود، قطاری دید که از روبه‌رو به سمت او می‌آمد. ریزعلی تشخیص داد که اگر به سمت قطار بدود در لبهٔ پل به قطار می‌رسد (شکل ۱) و می‌تواند از ریل خارج شود؛ همچنین اگر برگردد و به سمت دیگر پل بدود باز هم در لبهٔ پل قطار به او می‌رسد (شکل ۲) و می‌تواند به موقع از ریل خارج شود. اگر سرعت دویدن ریزعلی ۲۰ کیلومتر در ساعت باشد، سرعت قطار چقدر بوده است؟



شکل ۱

شکل ۲

دهقان فداکار

ریزعلی خواجوی مشهور به دهقان فداکار در سال ۱۳۴۱ توانست شب‌هنگام جان مسافران یک قطار را نجات دهد. به گفتهٔ او پس از توقف قطار، مردم ناراضی از قطار پیاده شدند و او را کتک زدند! پس از آنکه مسافران با چشم خود ریزش کوه را دیدند، به تشکر و عذرخواهی از او روی آوردند.

۵ بردار و مختصات

کشتی‌های بادبانی برای حرکت کردن فقط از نیروی باد کمک می‌گرفتند. برای این کشتی‌ها تفاوتی نداشت که باد از کدام سمت بوزد. سکان‌داران و ناخداها با به‌کارگیری مفاهیم برایند برداری، از باد برای حرکت خود در هر جهتی استفاده می‌کردند.

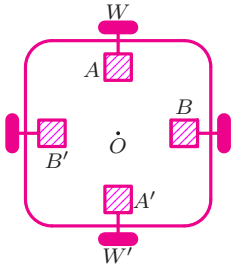
کارگاه بازی

دانش‌آموزان کلاس را به گروه‌های سه‌نفری تقسیم کنید. مطابق شکل دور کمر هر یک از اعضای گروه یک نخ کاموایی به طول تقری ۲ متر ببندید و سر دیگر این نخ را به یک قلم گره بزنید. اعضای گروه باید روی رئوس مثلث متساوی‌الاضلاعی بایستند و در طول مسابقه اجازه ندارند محل ایستادن خود را تغییر دهند. در وسط این مثلث فرضی یک بطری نوشابه خانواده قرار دهید.

مدت زمانی را که هر گروه قلم را بدون استفاده از دست و صرفاً با حرکت بدن به درون بطری هدایت می‌کند، ثبت کنید. گروهی برنده است که در زمان کمتری بتواند این کار را انجام دهد. جایزهٔ نفرات تیم برنده، افزایش نیم نمره به نمرهٔ آزمون میان‌ترم‌شان خواهد بود.

دریچه‌ای به روبوکاپ

سال گذشته دیدید که گروهی از دانش‌آموزان، روباتی به نام روپاد ساختند که می‌توانست در راستای شمال ـ جنوب و شرق ـ غرب حرکت کند.

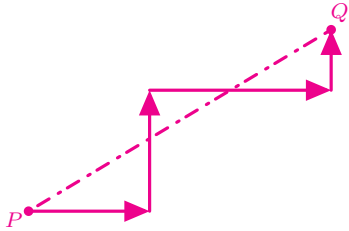


در شکل بالا، به نقطهٔ O مرکز کف روپاد می‌گوییم. در این شکل همچنین نمایی از چهار موتور و چهار چرخ روپاد را می‌بینید. برای مثال با حرکت همزمان ساعتگرد موتور A و پادساعتگرد موتور A' به‌اندازهٔ یک واحد، هر دو چرخ W و W' مجموعاً روپاد را یک واحد به سمت شرق جابه‌جا می‌کنند.

روپاد با دریافت دستوری مانندِ

$$(۱۰۰E)(۴۸N)$$

ابتدا ۱۰۰ واحد به سمت شرق و سپس ۴۸ واحد به سمت شمال حرکت می‌کرد. مدل حرکت روپاد به‌صورت پاره‌خط‌های موازی دو محور افقی و عمودی بود؛ زیرا روپاد دستورات را مرحله به مرحله اجرا می‌کرد و این کار باعث هدر رفتن انرژی و زمان می‌شد. برای مثال، روپاد برای رسیدن از نقطهٔ P به نقطهٔ Q مسیری مثل مسیر زیر را طی می‌کرد، درحالی‌که کوتاهترین مسیر ممکن مسیر مستقیم (که با خط‌چین نشان داده شده) است.



با همفکری، اعضای گروه به این نتیجه رسیدند که اگر هر دو دستهٔ موتور A و A' و همچنین B و B' همزمان حرکت کنند، از نظر فیزیکی روپاد می‌تواند مسیری مورب را طی کند. بنابراین تصمیم گرفتند که دست به‌کار شوند.

لازم نبود که مسئول مکانیک گروه روپاد تغییرات زیادی ایجاد کند؛ اما مسئول برنامه‌نویسی و الکترونیک گروه باید این فکر را عملی می‌کردند. آنها با مرور مفاهیم مختصات و بردار و الگوبرداری از نمادهای رایج کتاب درسی تغییراتی در روش برنامه دادند به‌طوری‌که تنها از دو نماد i و j استفاده می‌شد. دراین زمان مسئول الکترونیک، روپاد را جوری تغییر داد که اگر در هر مرحله مقدار حرکت راستای شمالی–جنوبی و یا شرقی–غربی مشخص می‌شد، روپاد دستور را اجرا کند. همزمان برنامه‌نویس هم دست به‌کار شد. او برنامه را جوری تغییر داد که دستورات به‌صورت رشته‌ای وارد شوند و هر بار دستورات بین دو پرانتز همزمان به موتورها ارسال شود. در این حالت روپاد مثلاً با دریافت دستورِ

$$(۳i - j)(۲i + ۷j)(-۴j - ۵i)$$

ابتدا همزمان سه واحد به سمت شرق و یک واحد به سمت جنوب، سپس همزمان دو واحد به سمت شرق و هفت واحد به سمت شمال و در آخر همزمان چهار واحد به سمت جنوب و پنج واحد به سمت غرب می‌رفت.

سپس آنها توانستند با تغییراتی در برنامه و حذف نمادهای «i» و «j» و استفاده از نماد ویرگول ریاضی (یعنی «,») شکل دستورات را ساده‌تر کنند. در این حالت مثلاً دستور بالا به‌صورت زیر نوشته می‌شد:

$$(۳, -۱)(۲, ۷)(-۵, -۴).$$

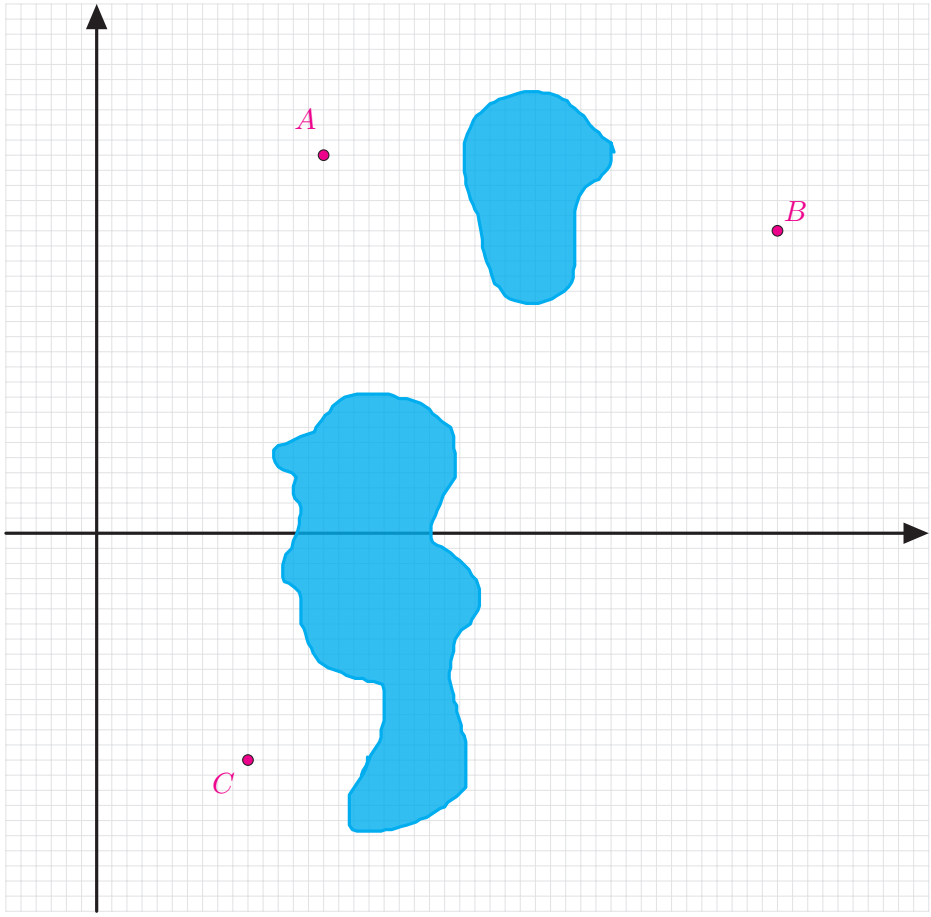
تمرین‌ها

۱. چرا مسیر مستقیم نشان داده شده در صفحهٔ قبل کوتاهترین مسیر ممکن است؟

۲. اگر روپاد در نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix}$ باشد و دستور $(۴,۵)(-۳,۹)(۲,-۸)(-۵,۲)$ را اجرا کنیم، روپاد در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟

۳. اگر پهنای روپاد ۲۰ سانتی‌متر باشد و هر یک از دو دستور $(۱,۰)$ و $(۰,۱)$ بتوانند روپاد را تنها یک میلی‌متر حرکت دهند، بر روی شکل مسیری پیشنهاد دهید که مرکز روپاد را که در ابتدا روی مبدأ مختصات است، به‌ترتیب به نقاط A، B و C برساند. توجه کنید که روپاد نمی‌تواند به ناحیه‌های تیره‌رنگ درون شکل وارد شود.

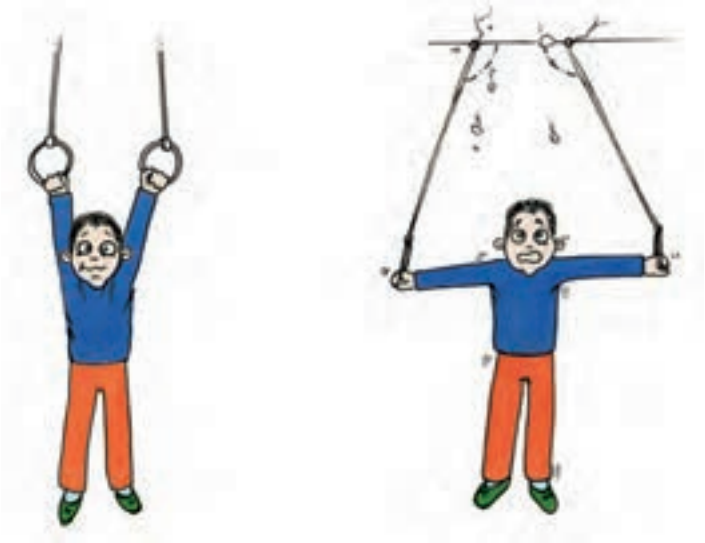
هر ضلع مربع‌های کوچک صفحهٔ شطرنجی زیر، ۱۰ سانتی‌متر است.



کاربردهایی از بردارها

۱. پدر دریا می‌خواهد تابی برای او درست کند. او شاخهٔ قطوری را انتخاب کرده است. کدام‌یک از دو حالت داده شده برای دریا تاب ایمن‌تری محسوب می‌شود؟

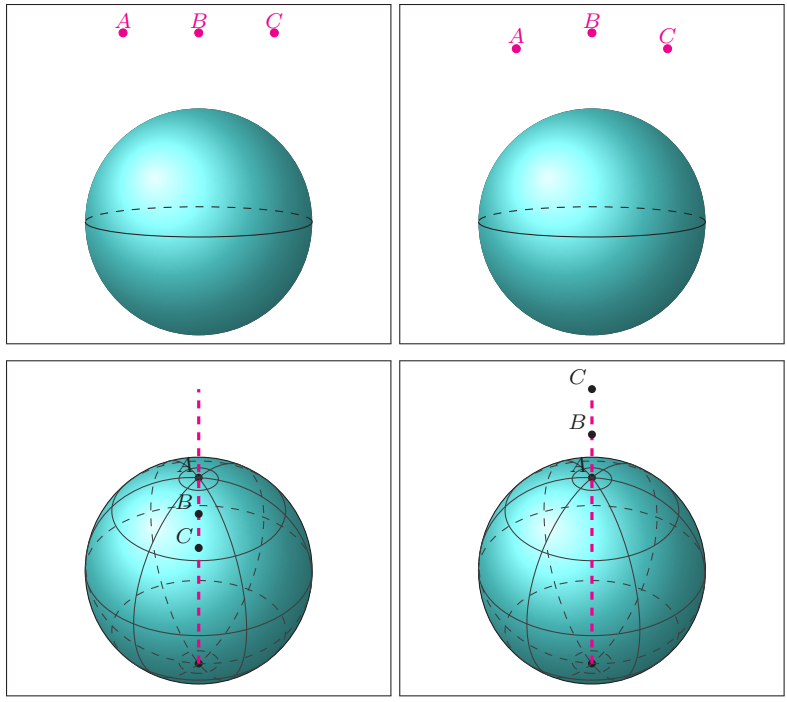
۲. در یکی از مسابقات دارحلقهٔ ژیمناستیک از طناب غیر استانداردی استفاده شده بود. در زمان مسابقه، نوجوانی مطابق شکل سمت چپ از دارحلقه آویزان شده، اما با باز کردن دست‌هایش طناب دارحلقه پاره شد و ورزشکار از ادامهٔ مسابقه بازماند. علت فنی پاره شدن طناب را توضیح دهید.



۳. الف) با جستجوی اینترنتی توصیفی از قانون جاذبه در علم نیوتن را بخوانید.

ب) با جستجوی اینترنتی معنی وزن اجسام را بخوانید.

ج) اگر کره‌های زیر، بیانگر کرهٔ زمین باشند، در هر یک از حالت‌های زیر تعیین کنید وزن یک جسم مشخص به‌ترتیب در کدام‌یک از نقاط A، B یا C بیشتر است؟ چرا؟



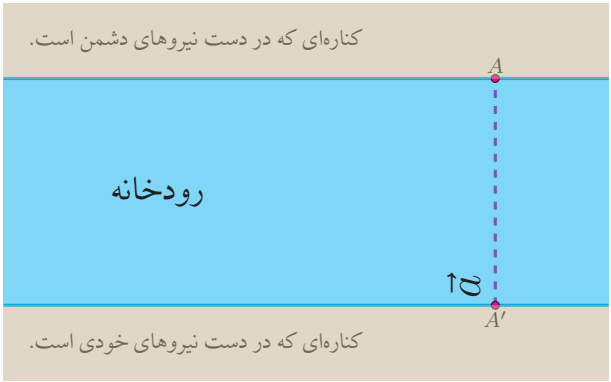
۴. **پروژه.** صدها سال پیش، اگر یک کشتی بادبانی می‌خواست به سمت ساحل حرکت کند، حتی اگر باد در جهتِ مخالفِ مسیرِ کشتی می‌وزید، بازهم ناخدای کشتی طوری آن را هدایت می‌کرد که کشتی ساحل برسد! این نوع کشتی‌ها فقط درصورتی نمی‌توانستند حرکت کنند که باد نوزد! حرکت کشتی‌های بادبانی را با استفاده از مفاهیم بردارها توجیه کنید.

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

بردار، رودخانه و غواص

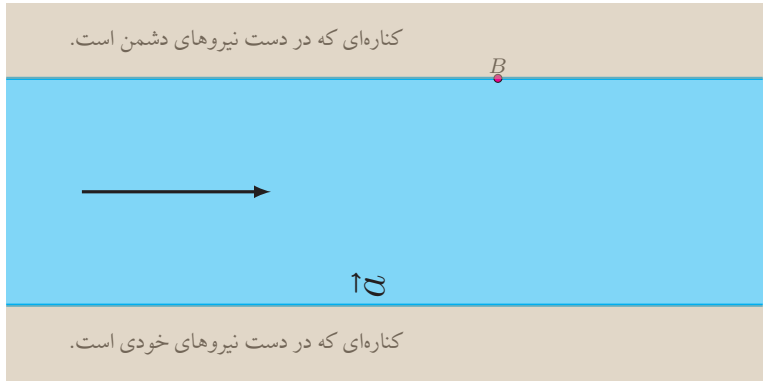
مسائل این بخش یادبودی از شهدای غواص جنگ هشت ساله ایران است که در آن به کاربردی از بردارها می‌پردازد. در جنگ گاهی نیاز بود که غواص‌های خط‌شکن در تاریکی شب و سکوت، با شنا کردن در عرض رودخانه‌ای خروشان، خود را به نقاط معینی از کنارهٔ رودی که در تصرف دشمن است، برسانند.

فرض کنید که یک غواص بتواند با نیروی ثابتی که با بردار $\vec{a}$ نشان داده شده است، عرض رودخانه را شنا کند. اگر آب رودخانه راکد باشد(!) و غواص بخواهد به نقطهٔ A برسد، واضح است که باید از نقطهٔ A' شروع به حرکت کند.

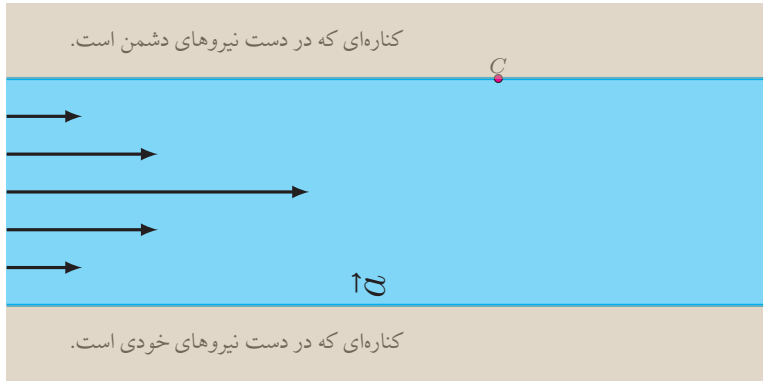


با وجود حل این مسئله، حلّ چنین مسائلی در زندگی واقعی کاربردی ندارد(!) زیرا آب رودخانه همیشه در جریان است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که رودخانه نیرویی مثل $\vec{b}$ (که در شکل با جهت افقی نشان داده شده است) را به غواص وارد می‌کند.

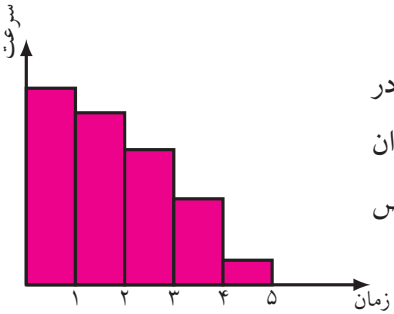
۱. در این حالت تعیین کنید که برای رسیدن به نقطهٔ B غواص باید از کدام نقطهٔ کنارهٔ مقابل رودخانه شروع به شنا کردن کند؟



حتی مسئلهٔ اخیر هم کمی غیر واقعی است، زیرا در رودخانه‌ها هر چه از کناره‌ها به وسط رودخانه نزدیک شویم سرعت حرکت آب بیشتر می‌شود؛ بنابراین مثلاً می‌توان فرض کرد که بردارهای نیروی وارد بر غواص در امتداد عرض رودخانه به‌صورت زیر باشند.



۲. در این حالت برای رسیدن به نقطهٔ C، غواص شنای خود را باید از کدام نقطه آغاز کند؟



در واقع در دنیای واقعی، قدرت بدنی غواص در طول مسیر رفته‌رفته کم می‌شود. بنابراین می‌توان فرض کرد مثلاً نمودار مقدار سرعت غواص به‌صورت روبه‌رو است.

سروده‌ای از حامد عسکری با لهجهٔ آبادانی برای شهدای غواص

نِنه‌ش می‌گفت بُواش قنداقه شو دید — رو بازوش دس کشید مثل همیشه
می‌گفت دِستاش مثه بال زِهنگه — گِمونم ای پسر غِوّاص میشه
نِنه‌ش می‌گفت: همه‌ش نزدیک شط بود — می‌ترسیدُم که دور شه از کنارُم
به مو می‌گفت: نِنِه می‌خوام بزرگ شُم — بِرُم سی لیلا مرواری ارُم
نِنه‌ش می‌گفت نمی‌خواستُم بره شط — میدیدُم هی تو قلبُم التهابه
یه روز اومد به مو گفت: بِل بِرُم شط — نفس مو بیشتِر از جاسم تو آبه
زِد و نامردای بعثی رسیدن — مثه خرچنگ افتادن تو کارون
کِهورا سوختن، نخلا شکستن — تموم شهر شد غرقابهٔ خون
نِنه‌ش می‌گفت روزی که داشت می‌رفت — پسین بود؟ صبح بود؟ یادُم نمیاد
موگفتم :بِچِه‌ای...لبخند زد گفت: — دفاع از شط شناسنامه نمی‌خواد
رفیقاش میگن: از وقتی که اومد — تو چشماش یه غرور خاص بوده
به فرمانده‌ش می‌گفته بِل بِرُم شط — ماها هف پشتمون غِوّاص بوده
ننه‌ش می‌گفت جِوونِ برگِ سِدرُم — مثه مرغابیای خسته برگشت
شبی که کربلای چاار لو رفت — یه گردان زد به خط یه دسته برگشت
نِنه‌ش می‌گفت: چشام به در سیا شد — دوای زخم نمکسودُم نِیومد
مسلمونا دلُم می‌سوزه از داغ — جِوونُم دلبَرُم رودُم نِیومد
عشیره می‌گن از وقتی که گم شد — یه خنده رو لب باباش نیومد
تا از موجا جنازه پس بگیره — شبای ساحلو دمّام می‌زد
یه گردان اومده با دست بسته — دوباره شهر غرق یاس می‌شه
ننه‌ش بندا رو وامی‌کرد باباش گفت: — مو گفتم ای پسر غِوّاص می‌شه

۳. اکنون برای رسیدن به نقطهٔ C، غواص باید چه مکانی را برای شروع شنا انتخاب کند؟

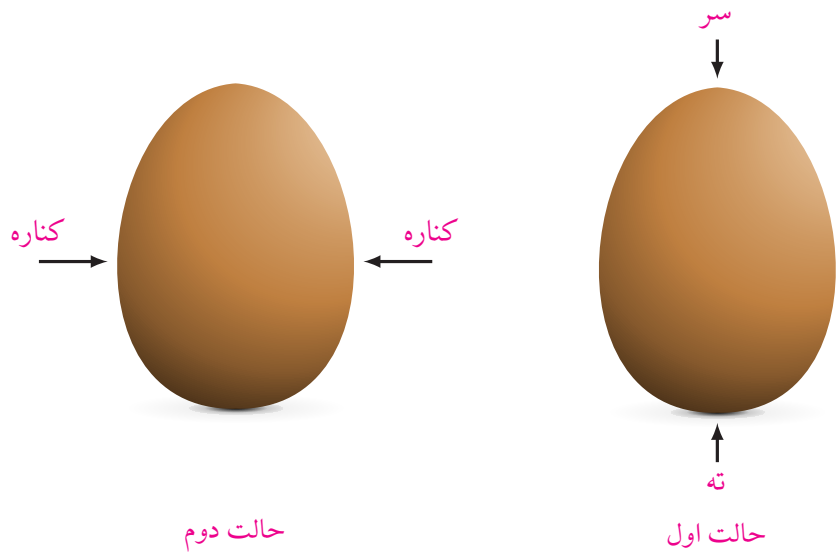
۴. **پروژه.** با مقایسهٔ جواب چهار مسئلهٔ اخیر مشاهده می‌کنید که چقدر استفاده از داده‌های دنیای واقعی و به کار نبستن دانش ریاضی می‌تواند خطرناک باشد. به نظر شما چطور می‌توان این مسئله را در دنیای واقعی بهتر مدل کرد؟

با مراجعه به «www.webmath.ir» نتایج خود را ارسال کنید.

ریاضیات تخم مرغی

می‌خواهیم با کمک تعدادی تخم مرغ شسته شده آزمایشی انجام دهیم. در کنار خود یک کاسهٔ تمیز آماده کنید تا تخم مرغ شکسته را در آن بریزید و سپس تحت نظارت والدین خود با آن یک نیمروی خوشمزه درست کنید.

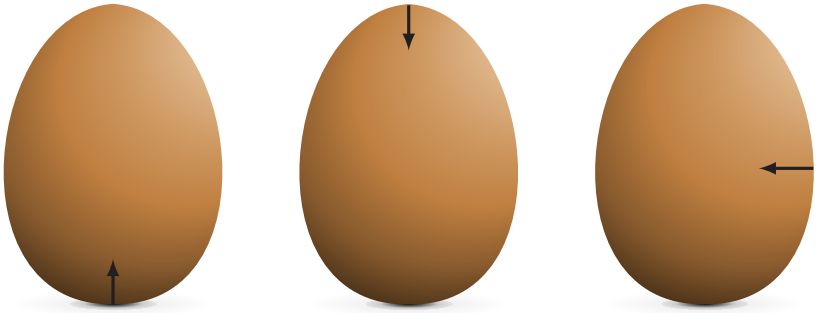
با کمک یک قاشق سعی کنید به سر، ته و کناره‌های یک تخم‌مرغ شکسته نشده و بدون ترک، ضربه‌هایی با نیروی برابر وارد کنید. مشاهده می‌کنید که تخم‌مرغ از کناره‌ها راحت‌تر می‌شکند.



۱. با کمک خط‌کش مدرج ضخامت پوستهٔ تخم‌مرغ را در سر، ته و کناره‌ها اندازه بگیرید. آیا ضخامت پوستهٔ تخم‌مرغ در سه قسمت به‌دست آمده متفاوت است؟

برای اینکه به علت تفاوت آسانی و سختی شکستن تخم‌مرغ در دو حالت گفته شده پی ببرید، از روش هوشمندانه‌ای استفاده می‌کنیم. فرض کنید پوستهٔ تخم‌مرغ از قطعات ریز به‌هم چسبیده‌ای ساخته شده است. این قطعات می‌تواند آن‌قدر ریز باشد که حتی با چشم هم دیده نشوند. هر قطعه می‌تواند (بخشی از) نیروی وارد شده به خود را به قطعه‌های کناری‌اش منتقل کند.

۲. در شکل‌های زیر، راستای تقریبی تجزیهٔ بردار نیروی وارد بر کناره، سر و ته پوستهٔ تخم‌مرغ را رسم کنید.

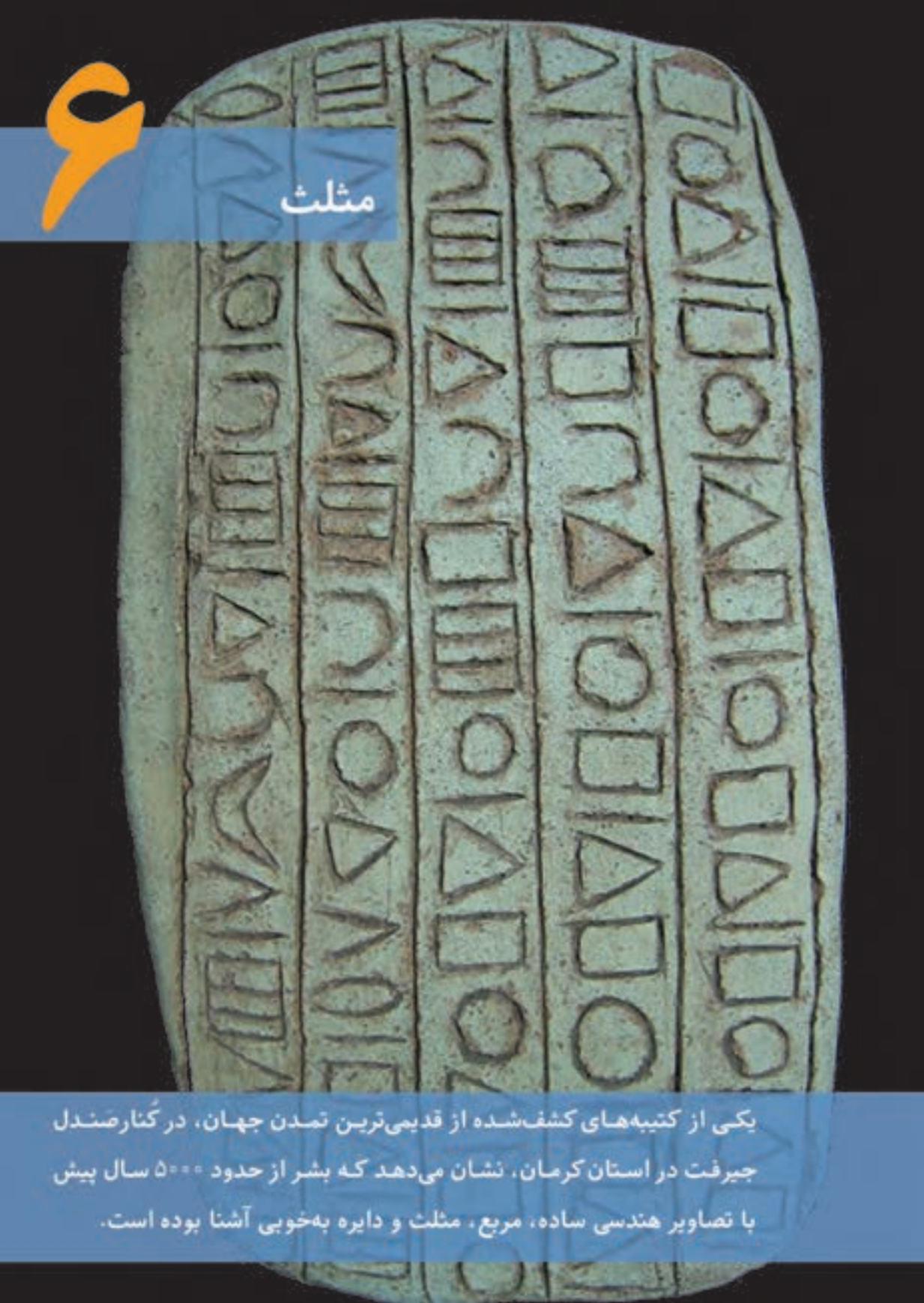


۳. در شکل بالا، با تجزیهٔ بردارهای نیرو، توضیح دهید که چرا تخم‌مرغ از کناره‌ها راحت‌تر می‌شکند.

برای دیدن فیلم شکستن تخم‌مرغ به «www.webmath.ir» بیایید.

۶

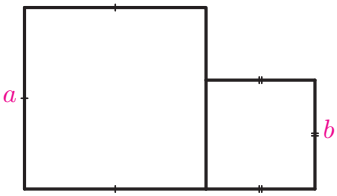
مثلث



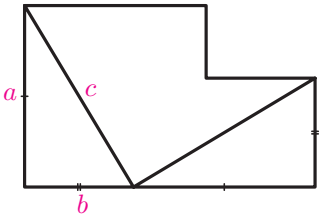
یکی از کتیبه‌های کشف‌شده از قدیمی‌ترین تمدن جهان، در کُنارصَندل جیرفت در استان کرمان، نشان می‌دهد که بشر از حدود ۵۰۰۰ سال پیش با تصاویر هندسی ساده، مربع، مثلث و دایره به‌خوبی آشنا بوده است.

رابطهٔ فیثاغورس

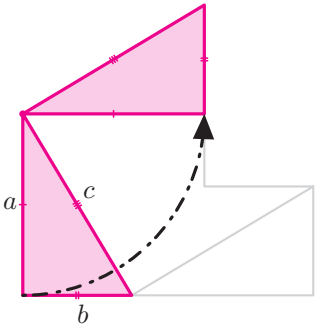
۱. شکل‌های زیر مراحل یکی از اثبات‌های قضیهٔ فیثاغورس را نشان می‌دهد. باتوجه‌به شکل‌ها، اثبات را بنویسید.



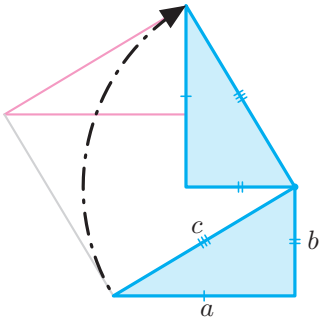
شکل ۱



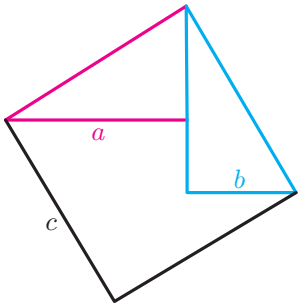
شکل ۲



شکل ۳



شکل ۴

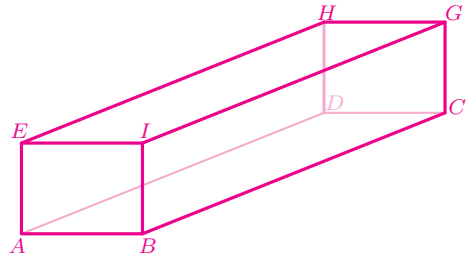


شکل ۵

۲. **پروژه.** روی وب‌گاه «www.webmath.ir» اثبات‌های متعددی از رابطهٔ فیثاغورس قرار داده شده است. این اثبات‌ها را بررسی کنید و مشخص کنید کدام‌یک از آنها مشابه یکدیگرند؟

۳. شخصی ۱ کیلومتر به سمت شمال، ۲ کیلومتر به سمت شرق، ۳ کیلومتر به سمت شمال و ۴ کیلومتر به سمت شرق حرکت می‌کند. او از نقطهٔ شروع چه فاصله‌ای دارد؟

۴. در مکعب‌مستطیل زیر، $AE = ۳$، $AB = ۴$ و $BC = ۱۲$. محیط مثلث BED چقدر است؟



۵. الف) ثابت کنید اگر m و n دو عدد طبیعی باشند و $m > n$، آنگاه $m^۲ + n^۲$ طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اضلاع آن $۲mn$ و $m^۲ - n^۲$ هستند.

ب) با استفاده از روش «الف» شش مثلث قائم‌الزاویهٔ غیر هم‌نهشت با طول اضلاع طبیعی بسازید.

ج) اگر p و q طول ضلع‌های قائم و r طول وتر یک مثلث قائم‌الزاویه باشد، نشان دهید برای هر عدد طبیعی k، اعداد kp، kq و kr طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند.

د) با استفاده از روش «ج» شش مثلث غیر هم‌نهشت (متفاوت از مثلث‌های قسمت «ب») بسازید.

۶. نقطه‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ابتدا نقطه‌ای مانند C بیابید که مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد به‌طوری‌که $\widehat{C} = ۹۰^\circ$. سپس طول AB را پیدا کنید.

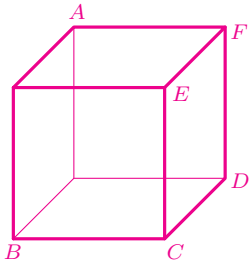
۷. مثلث‌های ABC و PQR با مختصات رأس‌های زیر داده شده‌اند.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

کدام مثلث قائم‌الزاویه و کدام مثلث متساوی‌الساقین است؟

۸. نقاط $A = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و $E = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۵ \end{bmatrix}$ را روی کاغذ شطرنجی نشان دهید. سپس ثابت کنید زاویه‌های $D\hat{E}C$ و $C\hat{A}B$ برابرند.

۹. در مکعب زیر، چند مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان ساخت به‌طوری‌که رأس‌های آن A، B، C، D، E یا F باشند؟ همهٔ این مثلث‌ها را نام ببرید.



۱۰. یک کفش‌دوزک درون یک اتاق مکعبی شکل به طول یال ۱، حرکت می‌کند. او از یک کنج اتاق شروع به حرکت می‌کند و تا کنج دیگری که در هیچ وجهی با کنج اول مشترک نیست، از طریق سقف و دیوار می‌رود. اگر او کوتاه‌ترین مسیر را پیموده باشد، چه مسافتی را طی کرده است؟

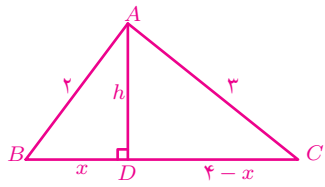
توجه کنید که جواب این مسئله ۳ نیست؛ حتی $\sqrt{۲} + ۱$ هم نیست!

۱۱. در مثلث قائم‌الزاویهٔ MOQ، ($\hat{O} = ۹۰^\circ$) نقطهٔ P روی ضلع OQ چنان قرار دارد که $MO = OP$ و $MP = PQ$. اگر $MO = a$، آنگاه طول ضلع MQ را برحسب a به‌دست آورید.

۱۲. نقطهٔ E خارج از مربع $ABCD$ قرار دارد به‌گونه‌ای‌که مثلث DCE متساوی‌الاضلاع است. نقطهٔ F درون مربع $ABCD$ قرار دارد به‌گونه‌ای‌که مثلث BCF متساوی‌الاضلاع است. اگر $AB = ۱$، آنگاه طول EF را به‌دست آورید.

۱۳. بیژن و خسرو می‌خواستند مساحت مثلثی با طول اضلاع ۲، ۳ و ۴ را حساب کنند. آن دو این مسئله را به‌صورت زیر حل کردند. دربارهٔ این دو راه‌حل بحث کنید و راه‌حل نادرست را اصلاح نمایید.

راه حل بیژن:



از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ABD نتیجه می‌شود:

$$h^۲ = ۲^۲ - x^۲.$$

از رابطهٔ فیثاغورس در مثلث ACD نتیجه می‌شود:

$$h^۲ = ۳^۲ - (۴ - x)^۲.$$

باتوجه‌به دو رابطه‌ای که در بالا به‌دست آمد، داریم:

$$۲^۲ - x^۲ = ۳^۲ - (۴ - x)^۲ \Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۹ - (۱۶ - ۴x - ۴x + x^۲)$$

$$\Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۹ - ۱۶ + ۸x - x^۲$$

$$\Longrightarrow ۱۱ = ۸x$$

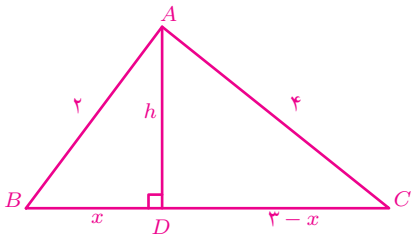
$$\Longrightarrow x = \frac{۱۱}{۸}.$$

با جایگذاری مقدار x در رابطهٔ فیثاغورس مثلث ABD داریم:

$$h^۲ = ۴ - \left(\frac{۱۱}{۸}\right)^۲ \Longrightarrow h = \frac{۳\sqrt{۱۵}}{۸}.$$

بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با $\frac{۳\sqrt{۱۵}}{۴}$.

راه حل خسرو:



$$\left.\begin{aligned} h^۲ &= ۲^۲ - x^۲ \\ h^۲ &= ۱۶ - (۳ - x)^۲ \end{aligned}\right\} \Longrightarrow ۲^۲ - x^۲ = ۱۶ - (۳ - x)^۲$$

$$\Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۱۶ - (۹ - ۳x - ۳x + x^۲)$$

$$\Longrightarrow ۴ - x^۲ = ۱۶ - ۹ + ۶x - x^۲$$

$$\Longrightarrow ۴ = ۷ + ۶x$$

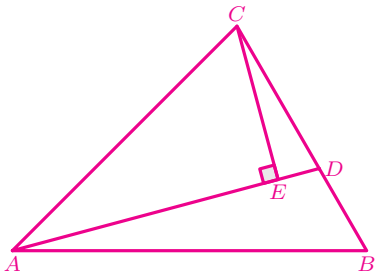
$$\Longrightarrow -۶x = ۳$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{۱}{۲}.$$

پس $h = \frac{\sqrt{۱۵}}{۲}$ و بنابراین مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۱۵}}{۲} \times ۴ = \sqrt{۱۵}.$$

۱۴. در شکل زیر، CE بر AD عمود است. اگر $AC = \sqrt{۶}$، $BC = ۳$، $AE = \sqrt{۳}$، $DE = ۱$ و $A\hat{D}B = ۱۲۰^\circ$، آنگاه اندازهٔ هریک از زاویه‌های مثلث ABC را به‌دست آورید.



۱۵. **پروژه.** عدد ۱۰ را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت:

$$۱۰ = ۱^۲ + ۳^۲.$$

عدد ۷ را می‌توان به‌صورت تفاضل مربعِ دو عدد طبیعی نوشت:

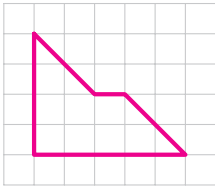
$$۷ = ۴^۲ - ۳^۲.$$

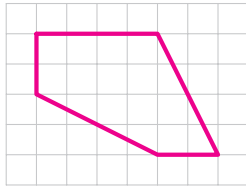
الف) چه اعدادی را می‌توان به‌صورت مجموع مربعات دو عدد طبیعی نوشت؟

ب) چه اعدادی را می‌توان به‌صورت تفاضل مربعِ دو عدد طبیعی نوشت؟

هم‌نهشتی

۱. هر یک از شکل‌های زیر را به دو قسمت هم‌نهشت تقسیم کنید. در هر مورد مشخص کنید چه تبدیل‌هایی چندضلعی‌های هم‌نهشت را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.





۲. یک مربع رسم کنید و آن را به دو پنج‌ضلعی هم‌نهشت تقسیم کنید. سپس مشخص کنید چه تبدیل‌هایی این دو پنج‌ضلعی را به یکدیگر تبدیل می‌کنند.

۳. یک مثلث کاغذی بسازید. مثلث را با قیچی به دو مثلث تقسیم کنید. آیا می‌توانید با کنارهم قرار دادن این دو مثلث، مثلثی بسازید که با مثلث اولیه هم‌نهشت نباشد؟

۴. فرض کنید نقطهٔ E محل برخورد قطرهای چهارضلعی $ABCD$ باشد. اگر دو مثلث ADE و BCE هم‌نهشت باشند، آنگاه:

الف) چرا مساحت دو مثلث ABC و ABD همواره برابر هستند؟

ب) چرا دو مثلث ABC و ABD همواره هم‌نهشت نیستند؟

۵. آیا می‌توان مثلثی را که طول سه ضلعش متفاوت‌اند، به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم کرد؟

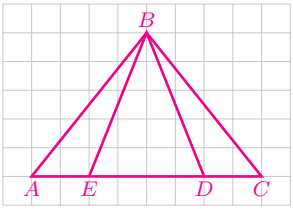
۶. اگر قطر BD در چهارضلعی $ABCD$، آن را به دو مثلث هم‌نهشت تقسیم کند، آنگاه کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟

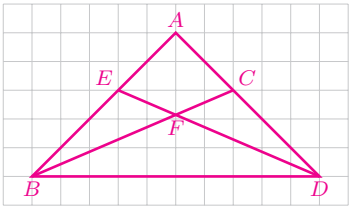
الف) $B\hat{A}D = B\hat{C}D$ ب) $AB = CD$

ج) $A\hat{B}D = C\hat{D}B$ د) $AB = BC$

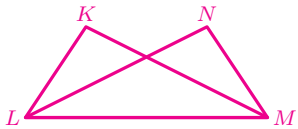
مثلث‌های هم‌نهشت

۱. در هر یک از شکل‌های زیر، حداقل دو جفت مثلث هم‌نهشت وجود دارد. آن مثلث‌ها را نام ببرید و اجزای برابر آنها را مشخص کنید.

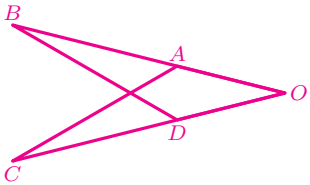




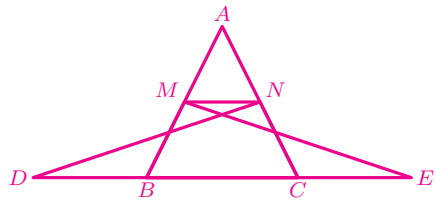
۲. در شکل زیر $KM = NL$ و $K\widehat{M}L = N\hat{L}M$. ثابت کنید دو مثلث KML و NLM هم‌نهشت‌اند و اجزای متناظر آنها را بنویسید.



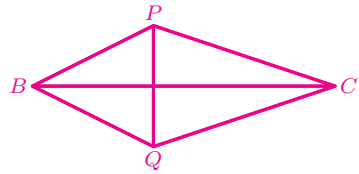
۳. در شکل زیر، $AB = CD$ و $AO = DO$. ثابت کنید $AC = BD$.



۴. در شکل زیر، $BD = CE$، $N\hat{D}B = M\hat{E}C$ و $A\hat{B}C = A\hat{C}B$. ثابت کنید مثلث AMN متساوی‌الساقین است.



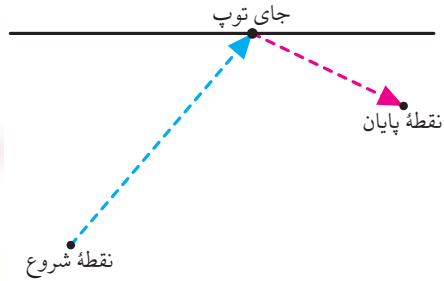
۵. در شکل زیر، $BP = BQ$ و $CP = CQ$. ثابت کنید BC بر PQ عمود است.



۶. ثابت کنید در یک پنج‌ضلعی منتظم همهٔ قطرها باهم برابرند.

۷. دو پاره‌خط AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ E قطع کرده‌اند به‌طوری‌که $AE = DC$، $AD = BE$ و $A\hat{D}C = D\hat{E}C$. اگر طول AE یک واحد کمتر از طول AB باشد، آنگاه طول EC چقدر است؟

۸. نوشین در یک مسابقه که در حیاط مهدکودک برگزار می‌شود، باید از نقطهٔ شروع به سمت دیوار (خط سیاه) بدود و توپی را که خودش قبلاً آنجا گذاشته به نقطهٔ پایان ببرد. نوشین توپ را کجا قرار دهد تا در کمترین زمان این کار را انجام دهد؟

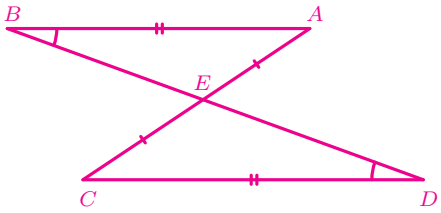


۹. پاره‌خط AB در نقطهٔ O پاره‌خط CD را نصف کرده است. اگر $AD = BC$، آیا می‌توان نتیجه گرفت دو مثلث AOD و BOC هم‌نهشت‌اند؟ اگر پاسخ خیر است، شرطی به مسئله اضافه کنید تا بتوان هم‌نهشتی این دو مثلث را ثابت کرد.

۱۰. پاره‌خط BD در نقطهٔ E، پاره‌خط AC را نصف کرده است به‌طوری‌که $CD = AB$ و $E\hat{D}C = E\hat{B}A$. ثابت کنید $BE = DE$.

بهمن این مسئله را این‌گونه حل کرده است:

چون پاره‌خط BD، پاره‌خط AC را نصف کرده است پس $AE = CE$. از طرفی بنا به صورت مسئله می‌دانیم $E\hat{B}A = E\hat{D}C$ و $AB = CD$. بنابراین دو مثلث ABE و CDE هم‌نهشت‌اند. پس $DE = BE$.



الف) چرا راه‌حل بهمن نادرست است؟

ب) راه‌حل بهمن را اصلاح کنید.

۱۱. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدام‌یک از عبارت‌های زیر همواره درست است و کدام‌یک همواره درست نیست.

الف) اگر دو زاویه و یک ضلع مثلثی با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

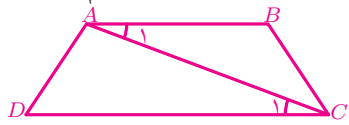
ب) اگر دو زاویه و یک ضلع از مثلثی با دو زاویه و یک ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۱۲. اگر دو ضلع و زاویهٔ غیر بین آن دو ضلع از یک مثلث با دو ضلع و زاویهٔ غیر بین آن دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر باشند، آیا این دو مثلث همواره هم‌نهشت‌اند؟

۱۳. شقایق و افرا مسئلهٔ قبل را این‌گونه حل کرده‌اند:

راه‌حل شقایق:

با یک مثال نشان می‌دهیم این دو مثلث همواره هم‌نهشت نیستند.



در ذوزنقهٔ $ABCD$، AB با CD موازی است و $AD = BC$.

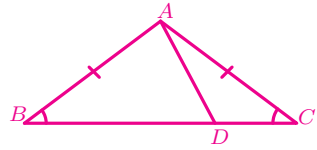
چون $AB \parallel CD$ و AC مورب است پس $\widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱$. پس دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ABC با دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ADC نظیر به نظیر برابرند:

$$AC = AC, \quad AD = BC, \quad \widehat{A}_۱ = \widehat{C}_۱.$$

اما در ذوزنقه ضلع‌های موازی، مساوی نیستند $(AB \neq CD)$. بنابراین دو مثلث ABC و ACD هم‌نهشت نیستند.

راه‌حل افرا:

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نقطهٔ D را روی BC طوری انتخاب کرده‌ایم که $BD \neq CD$.



پس رابطه‌های زیر برقرار هستند:

$$AB = AC, \quad \widehat{B} = \widehat{C}, \quad AD = AD \quad (\star)$$

چون $BD \neq CD$، پس دو مثلث ABD و ACD هم‌نهشت نیستند؛ در حالی که بنابه روابط $(\star)$ دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ABD با دو ضلع و زاویهٔ غیر بین از مثلث ACD نظیر به نظیر برابرند.

الف) دربارهٔ راه‌حل شقایق و راه‌حل افرا بحث کنید.

ب) راه‌حل دیگری برای این مسئله ارائه دهید.

۱۴. در مثلث متساوی‌الساقین ABC نقطه‌های M و N به‌ترتیب روی ساق‌های AB و AC قرار دارند به‌طوری‌که $AM = AN$. اگر نقطهٔ O محل برخورد BN و CM باشد، آنگاه ثابت کنید:

الف) دو مثلث ANB و AMC هم‌نهشت‌اند.

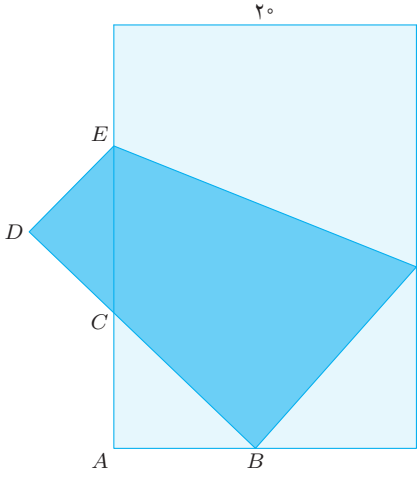
ب) دو مثلث OCN و OBM هم‌نهشت‌اند.

۱۵. ثابت کنید در هر مثلث متساوی‌الساقین،

الف) نیم‌ساز زاویه‌های پای ساق باهم برابرند.

ب) میانه‌های وارد بر ساق‌ها باهم برابرند.

۱۶. یک کاغذ مستطیلی به عرض ۲۰ سانتی‌متر را مانند شکل زیر طوری تا کرده‌ایم که یکی از رأس‌ها روی وسط ضلع دیگر افتاده است. حال دو مثلث ABC و CDE هم‌نهشت شده‌اند. طول این مستطیل را بیابید.



۱۷. ثابت کنید اگر یکی از میانه‌های مثلثی، نیم‌ساز نیز باشد، آنگاه این مثلث متساوی‌الساقین است.

راهنمایی: میانه را به اندازهٔ خودش ادامه دهید.