

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

مدارهای الکتریکی

رشته‌های الکترونیک - الکتروتکنیک

زمینه صنعت

شاخه آموزش فنی و حرفه‌ای

شماره درس ۲۰۷۲

عراقی، علی	۶۲۱
مدارهای الکتریکی/ مؤلفان: علی عراقی، فریدون علومی. - تهران: شرکت چاپ و نشر	۳۱۹/
کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۹۵.	م ۴۹۴ع/
۱۸۷ص. :مصور. - (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شماره درس ۲۰۷۲)	۱۳۹۵
متون درسی رشته‌های الکترونیک - الکتروتکنیک، زمینه صنعت.	
برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا: کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های	
درسی رشته‌های الکترونیک - الکتروتکنیک دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و	
کاردانش وزارت آموزش و پرورش.	
۱. مدارهای برقی. الف. علومی، فریدون. ب. ایران. وزارت آموزش و پرورش.	
کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف رشته‌های الکترونیک - الکتروتکنیک. د. عنوان. ه. فروست.	

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :

پیشنهادهای و نظرات خود را درباره محتوای این کتاب به نشانی
تهران - صندوق پستی شماره ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف کتاب‌های درسی
فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

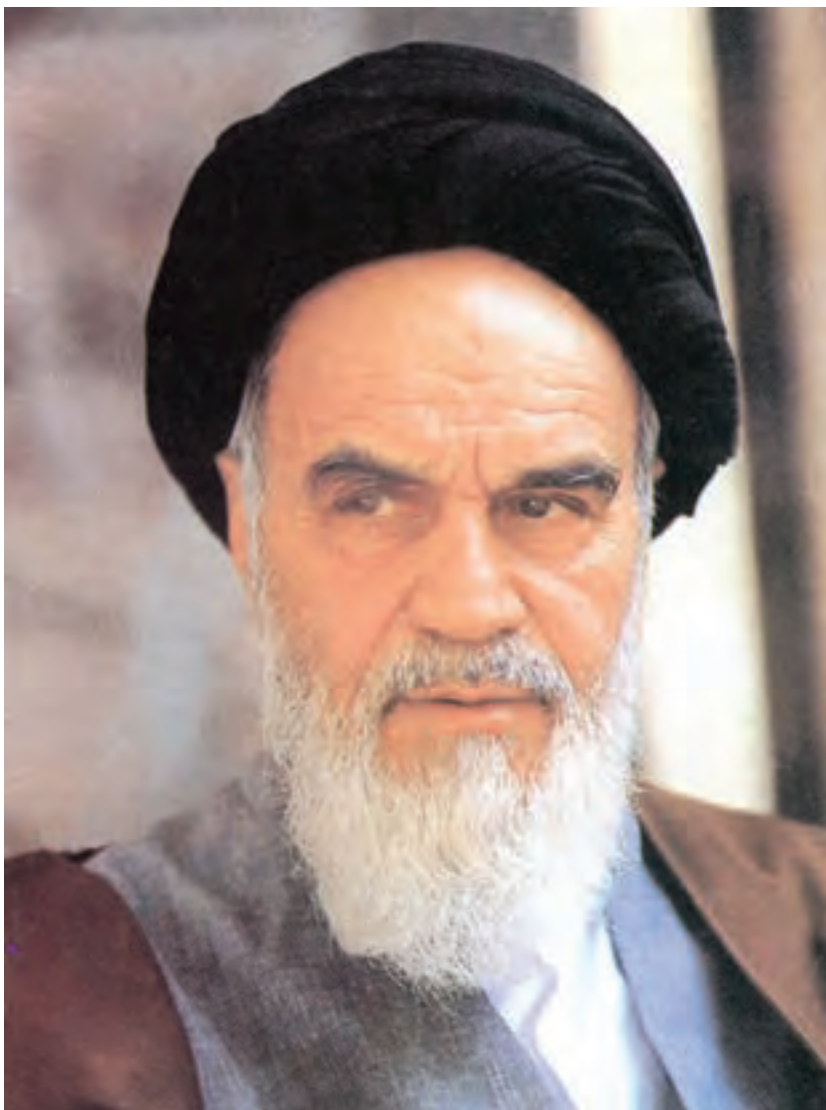
پیام‌نگار (ایمیل) tvoccd@medu.ir
وب‌گاه (وب‌سایت) www.tvoccd.medu.ir

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش
نام کتاب : مدارهای الکتریکی - ۴۸۷/۸
مؤلفان : علی عراقی، فریدون علمی
آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن : ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وب‌سایت : www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ : لیدا نیک‌روش
رسم : فاطمه رئیسیان فیروزآباد، سروش ذوالریاستین
طراح جلد : مریم کیوان
صفحه‌آرا : راحله زادفتح‌اله
حروفچین : کبری اجابتی
مصحح : نوشین معصوم‌دوست، آذر روستایی فیروزآباد
امور آماده‌سازی خبر : زینت بهشتی شیرازی
امور فنی رایانه‌ای : حمید ثابت کلاچاهی، ناهید خیام‌باشی
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروبخن)
تلفن : ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹-۳۷۵۱۵
چاپخانه : راوی
سال انتشار : ۱۳۹۵

حق چاپ محفوظ است.



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتکای به اجانب پرهیزید.

امام خمینی «قدس سرّه الشریف»

به منظور تسریع در آموزش و درهم تنیدن IT در برنامه درسی توصیه می شود برای آموزش، از نرم افزارهای مرتبط با موضوع از قبیل EWb یا Multisim یا هر نرم افزار مناسب دیگری استفاده کنید. همچنین از مدیران محترم هنرستان ها درخواست می شود رایانه، ویدیو پروژکتور در اختیار مدرسین این درس قرار دهند.

فهرست

۱

سخنی با همکاران

۳

یادآوری

۱۵

فصل اول : مدارهای الکتریکی جریان مستقیم

۵۴

فصل دوم : بردار

۷۵

فصل سوم : مدارهای R-L جریان متناوب

۹۸

فصل چهارم : مدارهای R-C جریان متناوب

۱۱۷

فصل پنجم : مدارهای L-C جریان متناوب

۱۳۳

فصل ششم : مدارهای R-L-C جریان متناوب

۱۶۶

فصل هفتم : جریان های سه فاز

۱۸۷

منابع و مآخذ

محاسبه‌ی تجهیزات تولید، انتقال، توزیع و پخش انرژی الکتریکی و مدارهای تجهیزات الکترونیکی مستلزم آشنایی با روش‌های تحلیل مدارهای الکتریکی است. برای آشنایی هنرجویان و گسترش توانایی و افزایش مهارت آن‌ها در محاسبه‌های الکتریکی، لازم است مدارهای الکتریکی در جریان متناوب و مستقیم و رفتار عناصر سلفی و خازنی و اهمی و ترکیب این عناصر مورد بررسی قرار گیرد. بدین منظور، محاسبه‌ی ساده‌ی مدارهای الکتریکی در حالت‌های ماندگار به عنوان مجموعه‌ی تحلیل مدارهای جریان الکتریکی ارایه می‌شود. در این مجموعه، علاوه بر مدارهای جریان مستقیم و جریان متناوب یک‌فاز، مدارهای سه‌فاز و محاسبه‌های آن‌ها نیز بررسی شده است.

برای ارایه‌ی مطلوب سرفصل‌های این درس، هدف‌های رفتاری مورد انتظار از هنرجو در ابتدای هر فصل مطرح شده است. بدیهی است ارزش‌یابی این درس باید با هدف‌های رفتاری آن مطابقت داشته باشد. از آن‌جا که این درس نظری و محاسبه‌ای است، بیش‌تر سؤال‌های ارزش‌یابی باید به محاسبه‌های مربوط به مدار اختصاص یابد. بهتر است که هنرجویان در طول سال تحصیلی به‌طور مرتب مورد ارزش‌یابی قرار گیرند. مدرس این درس می‌تواند مطالب ارایه شده با به‌کارگیری نرم‌افزارهای مناسب از طریق اندازه‌گیری و مشاهده‌ی پارامترهای تحلیل‌شده‌ی مدار، درک بهتر و ملموس‌تری را برای هنرجویان ایجاد کند. از مدرسان محترم و عزیزانی که این کتاب را مطالعه و تدریس می‌کنند، خواهشمندیم نظرات و پیشنهادهای اصلاحی خود را از طریق دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش وزارت آموزش و پرورش در اختیار ما قرار دهند. در پایان از همکاری‌های گروه‌های آموزشی سراسر کشور که در اصلاح کتاب‌های درسی به خصوص کتاب مدارهای الکتریکی با ما همکاری نموده‌اند سپاسگزاری می‌نمایم.

مؤلفان

هدف کلی درس

تحلیل مدارهای جریان مستقیم و مدارهای $R - L - C$ در جریان متناوب
یک فاز و مدارهای سه فاز ساده.

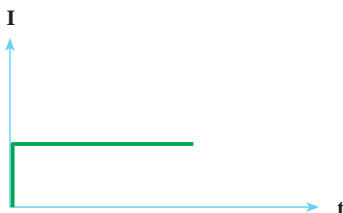
جدول زمانی پیشنهادی برای تدریس کتاب

فصل	عنوان فصل	زمان تدریس (ساعت)
اول	مدارهای الکتریکی جریان مستقیم	۲۸
دوم	بردار	۱۲
سوم	مدارهای $R-L$ جریان متناوب	۱۶
چهارم	مدارهای $R-C$ جریان متناوب	۱۶
پنجم	مدارهای $L-C$ جریان متناوب	۱۲
ششم	مدارهای $R-L-C$ جریان متناوب	۲۰
هفتم	جریان‌های سه فاز	۱۶

بنا به درخواست هنرآموزان محترم در دوره‌های بازآموزی، گردهمایی‌ها و ارزشیابی این کتاب، مباحث و روابط مورد نیاز برای درس مدارهای الکتریکی از کتاب مبانی برق در قالب یادآوری در ابتدای کتاب گنجانده شده است. همکاران محترم می‌توانند در صورت نیاز از مطالب اشاره شده در این قسمت به جهت تشریح مسایل هر بحث درسی که احساس نیاز می‌کنند استفاده نمایند. ضروری است از هنرجویان خواسته شود تا مطالب تئوری این موارد را با تعمق بیشتری از کتاب مبانی برق مطالعه کنند. لازم به ذکر است آموزش مستقیم مباحث یادآوری ضرورت ندارد.

یادآوری

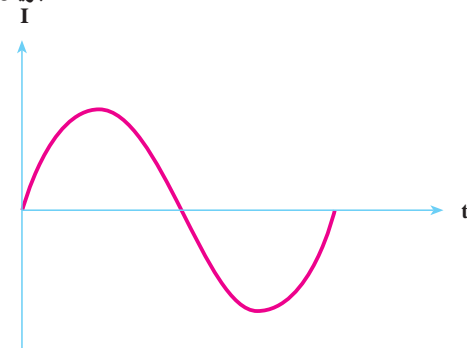
(جریان)



جریان مستقیم (DC)

جریانی است که جهت و مقدار آن نسبت به زمان تغییر نمی‌کند. باتری را به عنوان یک مولد جریان مستقیم می‌توان در نظر گرفت که شکل موج آن به صورت مقابل است.

(جریان)



جریان متناوب (AC)

جریانی است که جهت و دامنه آن نسبت به زمان تغییر می‌کند. از جمله جریان‌های متناوب، می‌توان به برق شهر اشاره کرد که یک جریان متناوب سینوسی است. و شکل موج آن به صورت مقابل است.

تعریف جریان الکتریکی

به حرکت الکترون‌های آزاد در یک هادی که در طی مدت زمانی مشخص از آن عبور می‌نماید جریان الکتریکی گفته می‌شود و می‌توان آن را از رابطه زیر برحسب آمپر محاسبه کرد.

$$I = \frac{q}{t} \quad \begin{matrix} \text{(بار الکتریکی بر حسب کولن - C)} \\ \text{(مدت زمان عبوری بر حسب ثانیه - S)} \end{matrix}$$

(جریان الکتریکی بر حسب آمپر - A)

تعریف ولتاژ

مقدار کار انجام شده بر ذره باردار را ولتاژ می‌گویند و از رابطه $V = \frac{W}{q}$ برحسب ولت به‌دست می‌آید. معمولاً ولتاژ دو سر هر عنصری در مدار از مقایسه اختلاف ولتاژ دو سر آن به‌دست می‌آید به همین دلیل این عامل را اختلاف پتانسیل می‌نامند.



$$V_{AB} = V_A - V_B$$

تعریف توان الکتریکی

به مقدار کار انجام شده بر واحد زمان توان می‌گویند و مقدار آن را می‌توان از رابطه $P = \frac{W}{t}$ برحسب وات به‌دست آورد. مقدار توان الکتریکی مدارها را در شکل کلی از روابط زیر می‌توان حساب کرد.

$$P = (\text{جریان}) \times (\text{ولتاژ}) = VI$$

$$P = (\text{جریان})^2 \times (\text{مقاومت}) = RI^2$$

$$P = (\text{ولتاژ})^2 / (\text{مقاومت}) = V^2 / R$$

تعریف مقاومت الکتریکی

هر قطعه‌ای که در مقابل عبور جریان الکتریکی (حرکت الکترون‌ها) از خود ایستادگی (مخالفت) نشان دهد «مقاومت الکتریکی» نامیده می‌شود. خاصیت مقاومت الکتریکی در مدارها به سه صورت دیده می‌شود.

الف – مقاومت اهمی R (رزیستانس)

ب – مقاومت سلفی X_L (راکتانس سلفی)

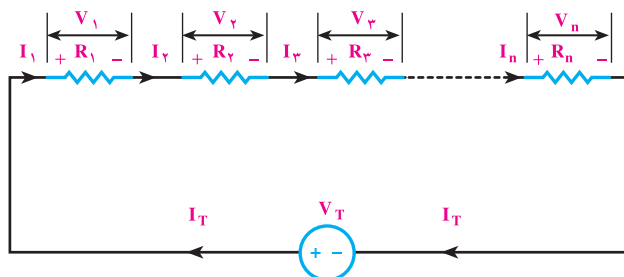
ج – مقاومت خازنی X_C (راکتانس خازنی)

تذکر: مقاومت‌های سلفی (X_L) و خازنی (X_C) فقط در زمان استفاده از سلف و خازن در جریان متناوب وجود دارند. بر همین اساس می‌توان راکتانس‌ها، را به صورت زیر تعریف کرد:

به خاصیت مقاومتی سلف و خازن در جریان متناوب راکتانس سلفی یا خازنی می‌گویند.

بررسی مدارهای اهمی (R)

اثر مقاومتی عناصر اهمی (R) در مدارهای جریان مستقیم و متناوب یکسان است این عناصر را به دو صورت سری و موازی اتصال می‌دهند که هر یک دارای ویژگی‌هایی به شرح صفحه‌ی بعد است:



اتصال سری مقاومت‌ها
هرگاه دو یا چند مقاومت مطابق شکل مقابل به یکدیگر اتصال داده شوند. اتصال مدار را سری گویند.

ویژگی‌های مدارهای سری مقاومتی

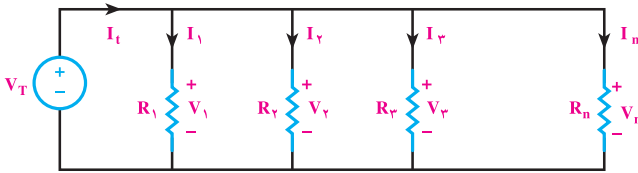
$I_T = I_1 = I_2 = I_3 = I_n$	جریان عبوری از همه مقاومت‌های سری مساوی است.	جریان
طبق قانون اهم $\begin{cases} V_1 = R_1 \cdot I_1 \\ V_2 = R_2 \cdot I_2 \\ V_3 = R_3 \cdot I_3 \\ V_n = R_n \cdot I_n \end{cases}$	$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n$ <p>در مدارهای سری ولتاژ به نسبت مقدار مقاومت‌ها در دو سر مقاومت‌های مدار تقسیم می‌شود.</p>	ولتاژ
$R_t = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$		مقاومت معادل
توان هر یک از مقاومت‌ها $\begin{cases} P_1 = V_1 I_1 = R_1 I_1^2 = \frac{V_1^2}{R_1} \\ P_2 = V_2 I_2 = R_2 I_2^2 = \frac{V_2^2}{R_2} \\ P_3 = V_3 I_3 = R_3 I_3^2 = \frac{V_3^2}{R_3} \\ P_n = V_n I_n = R_n I_n^2 = \frac{V_n^2}{R_n} \end{cases}$	$P = \frac{W}{t}$ $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ $W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$	توان و انرژی
<p>هرگاه n مقاومت مساوی به صورت سری بسته شوند مقاومت معادل از رابطه زیر محاسبه می‌شود.</p> <p>(مقدار اهم یک مقاومت) \times (تعداد مقاومت‌ها)</p> <p>هرگاه دو مقاومت به صورت سری بسته شوند تقسیم ولتاژ در دو مقاومت از روابط زیر به دست می‌آید.</p> $V_{R_1} = V_t \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ $V_{R_2} = V_t \frac{R_2}{R_1 + R_2}$		حالت خاص

اتصال موازی مقاومت‌ها

هرگاه دو یا چند مقاومت مطابق

شکل روبه‌رو به یکدیگر اتصال داده

شوند اتصال مدار را موازی گویند.

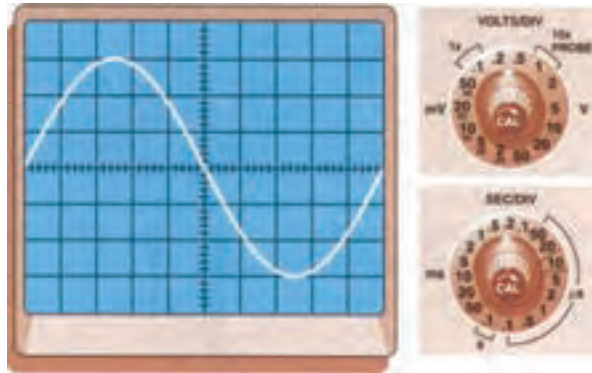


ویژگی‌های مدارهای موازی مقاومتی

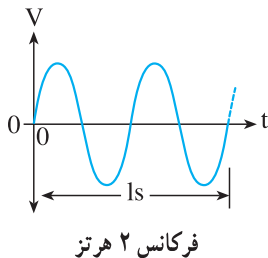
<p>بر اساس قانون اهم</p> $\begin{cases} I_1 = \frac{V_1}{R_1} \\ I_2 = \frac{V_2}{R_2} \\ I_3 = \frac{V_3}{R_3} \\ I_n = \frac{V_n}{R_n} \end{cases}$	<p>در مدارهای موازی جریان به نسبت عکس مقاومت‌ها و متناسب با مقدار مقاومت‌ها در بین آن‌ها تقسیم می‌شود.</p> $I_T = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$	جریان
$V_T = V_1 = V_2 = V_3 = V_n$	ولتاژ دو سر هر یک از مقاومت‌ها با هم برابر است.	ولتاژ
$R_T = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}}$		مقاومت معادل
<p>توان هر یک از مقاومت‌ها</p> $\begin{cases} P_1 = V_1 \cdot I_1 = R_1 I_1^2 = \frac{(V_1)^2}{R_1} \\ P_2 = V_2 \cdot I_2 = R_2 I_2^2 = \frac{(V_2)^2}{R_2} \\ P_3 = V_3 \cdot I_3 = R_3 I_3^2 = \frac{(V_3)^2}{R_3} \\ P_n = V_n \cdot I_n = R_n I_n^2 = \frac{(V_n)^2}{R_n} \end{cases}$	<p>$P = \frac{W}{t}$</p> $P_T = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ $W_T = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n$	توان و انرژی
<p>هرگاه n مقاومت مساوی موازی باشند مقاومت معادل از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.</p> $R_T = \frac{R}{n} \quad \text{(مقدار اهم یک مقاومت)}$ <p>(تعداد مقاومت‌ها)</p>	<p>هرگاه دو مقاومت نامساوی به صورت موازی وصل شوند مقاومت معادل و تقسیم جریان در دو مقاومت از روابط مقابل به‌دست می‌آید.</p> $R_T = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2}$ $I_1 = I_T \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ $I_2 = I_T \frac{R_1}{R_1 + R_2}$	حالت خاص

مشخصات جریان متناوب

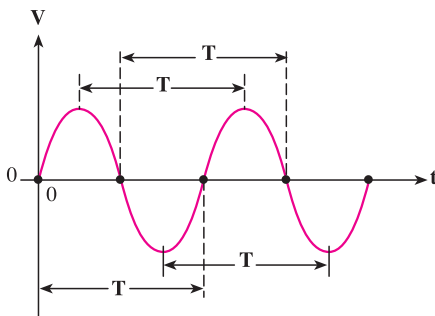
۱- سیکل: شکل موجی که در اثر گردش یک سیم پیچ در داخل میدان مغناطیسی به وجود می‌آید را یک «سیکل» می‌گویند. هر سیکل از دو نیم سیکل مثبت و منفی تشکیل می‌شود.



تصویر یک سیکل روی صفحه اسیلوسکوپ



۲- فرکانس (f): به تعداد سیکل‌ها (نوسانات) در مدت زمان یک ثانیه «فرکانس» می‌گویند. واحد فرکانس $\frac{1}{(s)}$ یا هرتز (Hz) است. فرکانس برق ایران 50° هرتز است.

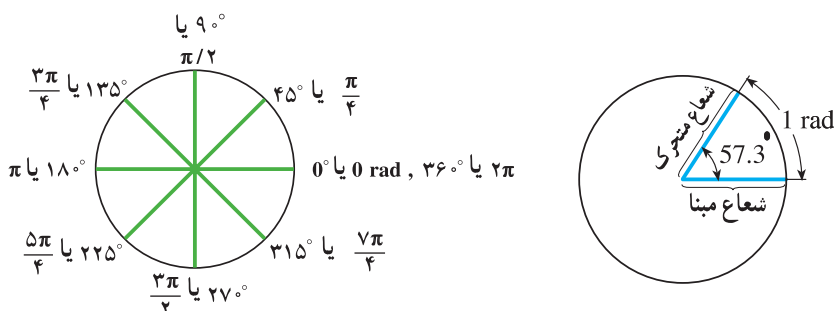


۳- مدت زمان تناوب (T): مدت زمانی را که طول می‌کشد تا یک سیکل کامل طی شود «زمان تناوب» یا «پریود» می‌گویند. واحد زمان تناوب $\left(\frac{1}{Hz}\right)$ یا ثانیه (s) است. پریود و فرکانس عکس یکدیگرند.

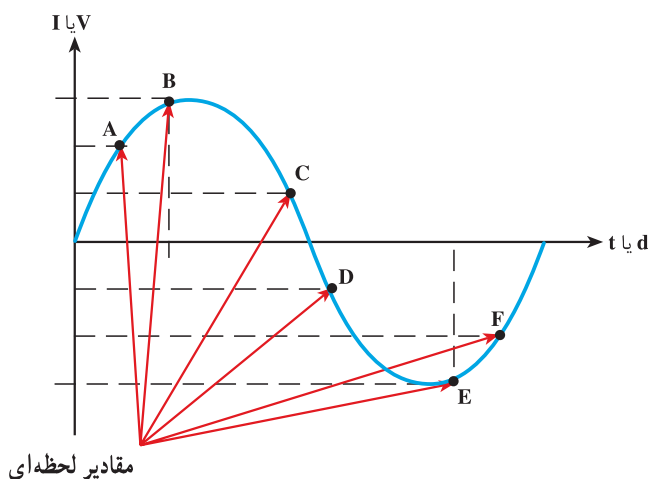
$$T = \frac{1}{f} \quad \text{یا} \quad f = \frac{1}{T}$$

۴- سرعت زاویه‌ای (ω امگا): سرعت زاویه‌ای عبارت است از زاویه‌ای که شعاع مربوط به متحرک نسبت به شعاع مبنا در مدت یک ثانیه طی می‌کند. واحد سرعت زاویه‌ای رادیان بر ثانیه است. چون یک دور چرخش داخل دایره برابر 2π رادیان است لذا اگر متحرکی در هر ثانیه f دور بزند خواهیم داشت:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{یا} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

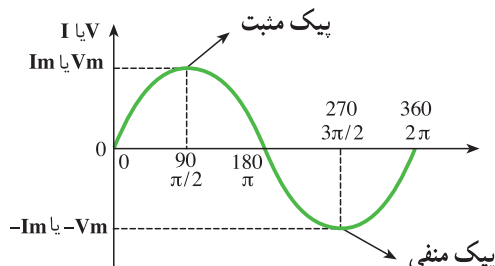


۵- دامنه: مقدار موج در هر لحظه از زمان را اصطلاحاً دامنه یا «مقدار لحظه‌ای» می‌گویند. در شکل زیر دامنه لحظه‌ای در نقاط A, B, C, D, E, F نشان داده شده است.



۱- ω (امگا) یکی از حروف یونانی است.

۶- مقدار پیک یا ماکزیمم (max-peak): حداکثر مقداری که ولتاژ یا جریان سینوسی در هر نیم سیکل دارد را مقدار ماکزیمم می‌گویند. در شکل زیر نقاط پیک مثبت و منفی نشان داده شده است.

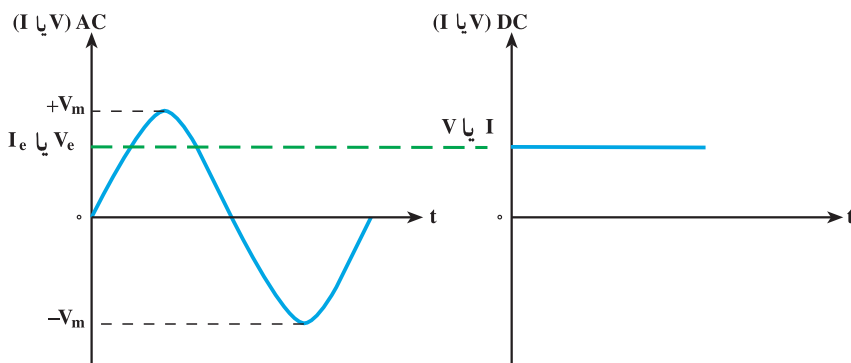


۷- مقدار مؤثر^۱: مقدار مؤثر یک جریان یا ولتاژ AC عبارت است از مقدار جریان یا ولتاژی که در یک مدار اهمی خالص (مانند اتوی برقی) همان مقدار گرمایی را تولید می‌کند که یک جریان یا ولتاژ DC با همان مقدار دامنه تولید می‌کند. مقدار مؤثر یک موج سینوسی از روابط زیر قابل محاسبه است.

$$V_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \times V_m = 0.707 \times V_m$$

$$I_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \times I_m = 0.707 \times I_m$$

به مقدار مؤثر^۲ rms نیز می‌گویند.



۱- Effective Values-(e)

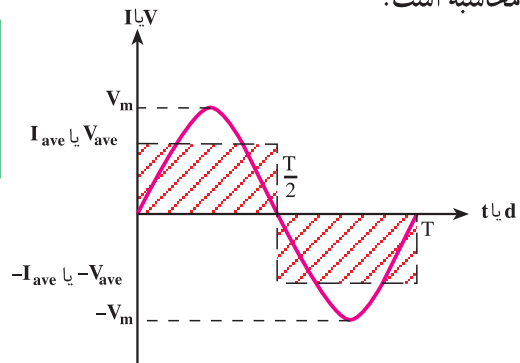
۲- Root Mean Square-rms (جذر مربعات مقادیر لحظه‌ای)

۸- مقدار متوسط^۱: به میانگین مقادیر لحظه‌ای موج سینوسی در یک نیم سیکل اصطلاحاً

متوسط موج می‌گویند. شکل زیر چون در هر نیم سیکل موج سینوسی از صفر شروع شده به مقدار حداکثر (ماکزیمم) می‌رسد و مجدداً به صفر بر می‌گردد لذا مقدار میانگین یک نیم سیکل نیز چیزی بین صفر و مقدار ماکزیمم می‌باشد. مقدار متوسط برای نیم سیکل موج سینوسی از روابط زیر قابل محاسبه است.

$$V_{ave} = \frac{2}{\pi} \times V_m = 0.637 \times V_m$$

$$I_{ave} = \frac{2}{\pi} \times I_m = 0.637 \times I_m$$



توجه: مقدار متوسط یک موج متناوب متقارن (موج سینوسی) در یک دوره تناوب برابر صفر است، زیرا:

(نیم سیکل منفی) + (نیم سیکل مثبت) = (مقدار متوسط موج)

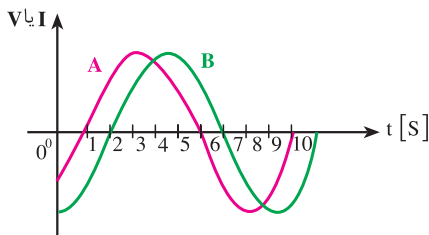
$$V_{ave_t} = V_{ave^+} + V_{ave^-}$$

$$V_{ave_t} = (0.637) \times (V_m) + (0.637) \times (-V_m)$$

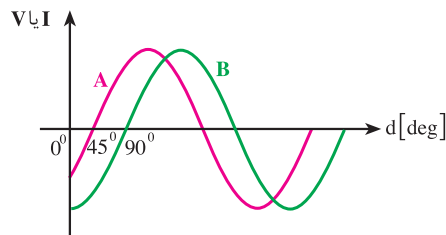
$$V_{ave_t} = 0$$

۹- فاز^۲: کلمه یا اصطلاحی است که ارتباط زمانی یا مکانی بین دو یا چند موج هم فرکانس

را بیان می‌کند.



(b) موج A با B به اندازه ۱ ثانیه فاصله دارد.



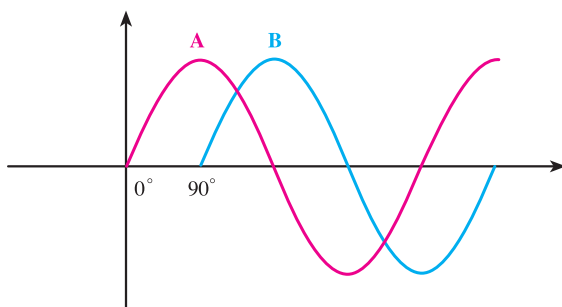
(a) موج A با B به اندازه ۴۵ درجه فاصله دارد.

^۱ - Average-(ave)

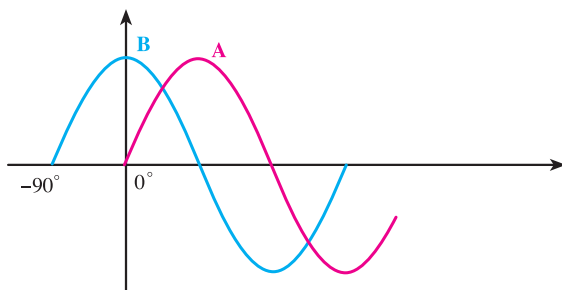
^۲ - Phase

۱۰- اختلاف فاز: برای تعیین میزان اختلاف فاز بین دو شکل موج هم فرکانس ابتدا دو نقطه

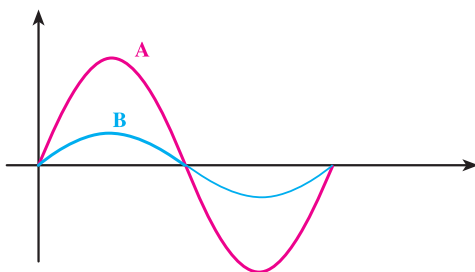
مشابه (نقطه صفر - نقطه ماکزیمم یا نقطه مینیمم) از شکل موج‌ها را بر حسب کمیت محور افقی با یکدیگر مقایسه می‌کنیم و سپس مقدار آن را با ذکر کلمه پسوند «فاز» می‌نویسیم. مثلاً در صورتی که شکل موجی از موج دیگر جلوتر (زودتر) شروع شده باشد اصطلاح «پیش فاز»^۱ و در صورتی که عقب‌تر (دیرتر) شروع شده باشد کلمه «پس فاز»^۲ و چنانچه دو شکل کاملاً مشابه باشند کلمه «هم فاز» را به کار می‌بریم (شکل زیر). در برخی موارد میزان اختلاف فاز بر حسب درجه یا ضربی از عدد π نشان داده می‌شود.



الف: شکل موج A نسبت به B به اندازه 90° درجه $(\frac{\pi}{4})$ رادیان پیش فاز است. به عبارت دیگر موج B نسبت به A به اندازه 90° درجه پس فاز است.



ب: شکل موج A نسبت به B به اندازه 90° درجه $(\frac{\pi}{4})$ رادیان پس فاز است. به عبارت دیگر موج B نسبت به A به اندازه 90° درجه پیش فاز است.



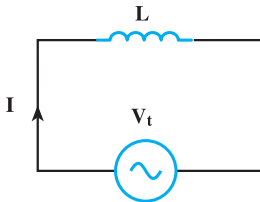
ج: شکل موج B و A با هم هم فاز هستند.

۱- Leads

۲- Lags

بررسی مدارهای سلفی (L)

به خاصیت خودالقایی که در اثر عبور جریان در یک سیم پیچ پدید می آید ضریب خودالقایی یا اندوکتانس (L) می گویند. هرگاه یک سلف ایده آل (بدون خاصیت اهمی) مطابق شکل مقابل اتصال یابد :

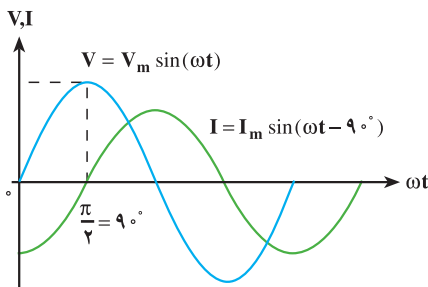


$$V_t = V_m \sin(\omega t)$$

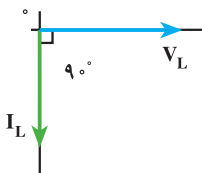
$$I_t = I_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$X_L = L\omega = 2\pi fL = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e}$$

الف: معادلات ولتاژ و جریان و راکتانس سلفی



ب: شکل موج های ولتاژ و جریان سلف



ج: دیاگرام برداری V و I در یک سلف ایده آل

جریان در سلف ۹۰ درجه از ولتاژ عقب تر است.

– سلف ها در جریان متناوب راکتانس القایی نشان می دهند که به ضریب خودالقایی (L) و فرکانس جریان (f) بستگی دارد و با X_L نشان می دهند.

– یک سلف حقیقی در جریان dc مقاومت اهمی و در جریان متناوب علاوه بر مقاومت اهمی مقاومت القایی نیز نشان می دهد.

– جریان سلف های حقیقی در مدارهای dc پس از ۵ ثابت زمانی به حالت پایدار در می آید.

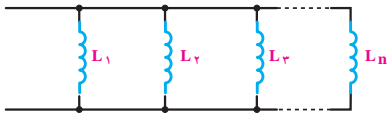

– در هر ثابت زمانی سلفی جریان سلف به اندازه ۶۳/۲٪ مقدار ماکزیمم خود افزایش یا کاهش می یابد، مدت زمان هر ثابت زمانی سلفی از رابطه $\tau = \frac{L}{R}$ محاسبه می شود.

– عبور جریان از داخل سلف سبب

می شود در سلف به اندازه $W_L = \frac{1}{2} LI^2$ ژول انرژی به صورت میدان مغناطیسی ذخیره شود.

ویژگی‌های مدارهای سلفی

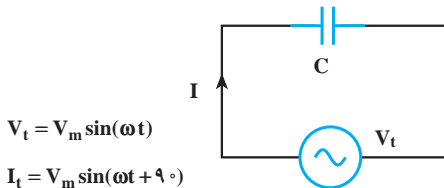
تمامی خصوصیات ولتاژی و جریانی مدارهای سلفی سری و موازی در جریان متناوب مشابه مدارهای سری و موازی مقاومتی است فقط دو عامل ضریب خودالقایی و راکتانس وجود دارند که در محاسبه آن‌ها به نکات زیر باید توجه کرد.

موازی	سری	
		
$L_T = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n}}$	$L_T = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n$	اندوکتانس معادل L_T
$X_{L_T} = \frac{1}{\frac{1}{X_{L_1}} + \frac{1}{X_{L_2}} + \frac{1}{X_{L_3}} + \dots + \frac{1}{X_{L_n}}}$ $X_{L_T} = L_T \cdot \omega$	$X_{L_T} = X_{L_1} + X_{L_2} + X_{L_3} + \dots + X_{L_n}$ $X_{L_T} = L_T \cdot \omega$	راکتانس معادل X_{L_T}

بررسی مدارهای خازنی (C)

— نسبت بار ذخیره شده به اختلاف ولتاژ
دو صفحه خازن را ظرفیت خازن یا کاپاسیتانس (C) گویند.

هر گاه یک خازن ایده‌آل (بدون خاصیت اهمی) مطابق شکل مقابل اتصال یابد:

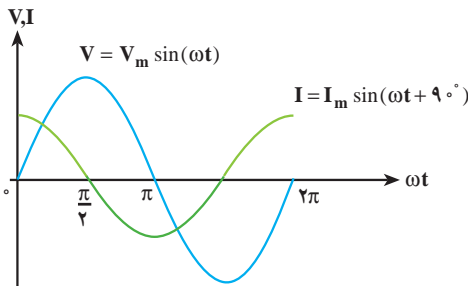


$$V_t = V_m \sin(\omega t)$$

$$I_t = V_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

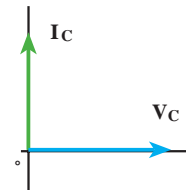
$$X_C = \frac{I}{C\omega} = \frac{1}{\omega C} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_e}{I_e}$$

الف: معادلات ولتاژ و جریان و راکتانس خازنی



ب: شکل موج‌های ولتاژ و جریان خازن

جریان در خازن 90° درجه از ولتاژ جلوتر است.

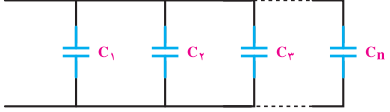



ج: دیاگرام برداری V و I در یک خازن ایده‌آل

- خازن‌ها در جریان متناوب راکتانس خازنی نشان می‌دهند که به ظرفیت خازن (C) و فرکانس جریان (f) بستگی دارد و با X_C نشان می‌دهند.
- یک خازن حقیقی در جریان dc مقاومت اهمی و در جریان متناوب علاوه بر مقاومت اهمی مقاومت خازنی نیز نشان می‌دهد.
- ولتاژ خازن‌های حقیقی در مدارهای dc پس از ۵ ثابت زمانی به حالت پایدار درمی‌آید.
- در هر ثابت زمانی خازنی ولتاژ خازن به اندازه ۶۳/۲٪ مقدار ماکزیمم خود افزایش یا کاهش می‌یابد، مدت زمان هر ثابت زمانی خازنی از رابطه $\tau = R.C$ محاسبه می‌شود.
- اعمال ولتاژ به یک خازن سبب می‌شود در خازن به اندازه $W_C = \frac{1}{2}CV^2$ ژول انرژی به صورت میدان الکترواستاتیکی ذخیره شود.

ویژگی‌های مدارهای خازنی

تمامی خصوصیات ولتاژی و جریانی مدارهای خازنی سری و موازی در جریان متناوب مشابه مدارهای سری و موازی مقاومتی است. فقط از نظر محاسبه دو عامل ظرفیت خازنی و راکتانس با یکدیگر تفاوت دارند که در محاسبه آن‌ها به نکات زیر باید توجه کرد :

موازی	سری	
		
$C_T = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$	$C_T = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}}$	ظرفیت معادل C_T
$X_{C_T} = \frac{1}{\frac{1}{X_{C_1}} + \frac{1}{X_{C_2}} + \frac{1}{X_{C_3}} + \dots + \frac{1}{X_{C_n}}}$ $X_{C_T} = \frac{1}{C_T \omega}$	$X_{C_T} = X_{C_1} + X_{C_2} + X_{C_3} + \dots + X_{C_n}$ $X_{C_T} = \frac{1}{C_T \omega}$	راکتانس معادل X_{C_T}

به منظور هماهنگی درس مدار با درس ماشین‌های الکتریکی AC، این فصل برای هنرجویان رشته‌ی الکتروتکنیک بعد از فصل هفتم آموزش داده شود.

فصل اول

مدارهای الکتریکی جریان مستقیم

هدف‌های رفتاری

- در پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :
- ۱- مفهوم تحلیل مدارهای الکتریکی را بیان کند.
 - ۲- عناصر فعال و غیرفعال مدار را تعریف کند و مشخصات آن‌ها را شرح دهد.
 - ۳- مدارهای جریان مستقیم را به روش جریان حلقه حل کند.
 - ۴- مدارهای جریان مستقیم را به روش پتانسیل گره حل کند.
 - ۵- مدارهای جریان مستقیم را به روش اصل جمع آثار تحلیل کند.
 - ۶- منابع ولتاژ و جریان را به یک‌دیگر تبدیل کند.
 - ۷- معادل تونین و نورتن مدارهای جریان مستقیم را به دست آورد.
 - ۸- شرایط انتقال ماکزیمم توان را به بار شرح دهد و ماکزیمم توان انتقالی را محاسبه کند.
 - ۹- رفتار سلف و خازن را در جریان dc در حالت ماندگار بیان کند.

۱-۱- مقدمه

در درس مبانی برق با مدارهای الکتریکی آشنا شدید. عناصر مدار را که شامل منابع ولتاژ، مقاومت‌های اهمی، سلفی و خازنی است شناختید و مشخصات آن‌ها را در جریان مستقیم و متناوب بررسی کردید. مدارهای ساده را که از یک یا چند حلقه درست شده بودند یا دارای یک منبع تغذیه بودند، مورد تجزیه و تحلیل قرار دادید و در این مدارها جریان و ولتاژ و توان را در مصرف‌کننده‌ها و منابع محاسبه کردید. هم‌چنین ولتاژ دوسر یک مقاومت را در مدار سری از طریق تقسیم ولتاژ و جریان یک مصرف‌کننده را در مدارهای موازی به روش تقسیم جریان به دست آوردید.

مقاومت، ضریب خودالقایی و ظرفیت معادل را در مدارهای سری، موازی و مختلط محاسبه کردید و بالاخره، قوانین اهم، ولتاژهای کیرشهف در مدارهای سری و جریان‌های کیرشهف در انشعاب‌ها را برای حل مسایل به کار بردید. اما با مدارهایی که شامل چند حلقه باشند و در هر حلقه منابع تغذیه وجود داشته باشد، تاکنون برخورد نداشته‌اید. ما در این فصل مدارهایی را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم که دارای منابع و حلقه‌های متعدد باشند. وقتی می‌گوییم مدار را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم، یعنی جریان‌ها و ولتاژها و نیز توان‌های هر مصرف‌کننده را محاسبه و تعیین می‌کنیم که مثلاً کدام منبع، انرژی بیش‌تری به مصرف‌کننده‌ها می‌دهد یا حتی گاهی نتیجه می‌گیریم که فلان منبع نه تنها به مدار انرژی نمی‌دهد بلکه خود مصرف‌کننده است. برای این که بتوانیم این مدارها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم، از روش‌های مختلفی می‌توانیم استفاده کنیم. برخی از این روش‌ها که در این فصل به کمک آن‌ها به تجزیه و تحلیل مدارها می‌پردازیم، عبارت‌اند از:

الف - جریان‌های حلقه

ب - پتانسیل گره

پ - اصل جمع آثار

ت - معادل سازی تونن و نورتن مدار

۱-۲- عناصر مدار

به‌طور کلی عناصر مدار را می‌توان به دو گروه عناصر فعال و عناصر غیرفعال تقسیم کرد.

عناصر غیرفعال: عناصری هستند که انرژی الکتریکی را مصرف (به عبارت دیگر تبدیل)

می‌کند یا آن را در خود ذخیره می‌سازند. این عناصر عبارت‌اند از: مقاومت‌های اهمی، سلف‌ها و خازن‌ها.

مقاومت اهمی: عنصری است که جریان آن با ولتاژ دوسر آن متناسب است.

سلف: عنصری است که ولتاژ دو سر آن با تغییرات جریان نسبت به زمان در آن متناسب است.

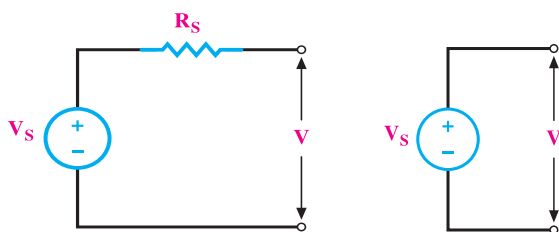
خازن: عنصری است که جریان آن با تغییرات ولتاژ دوسرش نسبت به زمان متناسب است.

البته با توجه به این که سلف در جریان مستقیم اتصال کوتاه و خازن در جریان مستقیم به صورت یک مدار باز عمل می‌کند، مدارهایی که در این فصل مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرند بیش‌تر دارای مقاومت‌های اهمی هستند.

عناصر فعال: به عناصری گفته می‌شود که انرژی مدار را تأمین می‌کنند. این عناصر عبارت‌اند از: منابع ولتاژ و منابع جریان. هریک از این عناصر فعال به دو گروه ایده‌آل و حقیقی تقسیم می‌شوند.

منبع ولتاژ ایده‌آل: منبعی است که در بارهای مختلف ولتاژ ثابتی به مدار می‌دهد.

منبع ولتاژ حقیقی: منبعی است که با افزایش جریان بار (کاهش مقاومت مدار)، ولتاژ خروجی آن کاهش می‌یابد. منبع ولتاژ حقیقی را می‌توان منبع ولتاژ ایده‌آلی دانست که یک مقاومت اهمی کوچک با آن سری شده است. منابع تغذیه در صنعت منابع ولتاژ حقیقی هستند و منابع ایده‌آل وجود خارجی ندارند ولی با تقریب می‌توان منابع ولتاژ با انرژی بسیار بزرگ را ایده‌آل فرض کرد (شکل ۱-۱).



ب: منبع ولتاژ واقعی

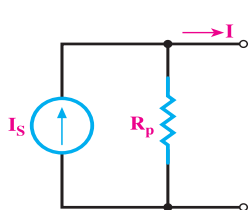
الف: منبع ولتاژ ایده‌آل

شکل ۱-۱

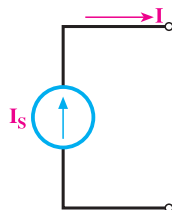
منابع جریان ایده‌آل: منابعی هستند که در بارهای مختلف جریان ثابتی به مدار می‌دهند. به عبارت دیگر، اگر مقاومت بار تغییر کند ولتاژ آن تغییر می‌کند ولی جریان آن ثابت می‌ماند. منابع جریان بیش‌تر در مدارهای الکترونیکی دیده می‌شوند و به صورت ایده‌آل وجود ندارند.

منابع جریان واقعی: منابع جریان ایده‌آلی هستند که با یک مقاومت بزرگ اهمی به صورت

موازی قرار گرفته‌اند. در نتیجه، در صورت تغییر بار با توجه به ثابت بودن جریان منبع، جریان در مصرف‌کننده قدری تغییر می‌کند (شکل ۱-۲).



ب: منبع جریان حقیقی

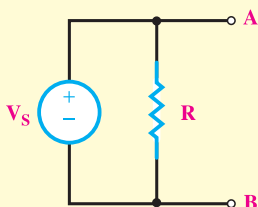


الف: منبع جریان ایده‌آل

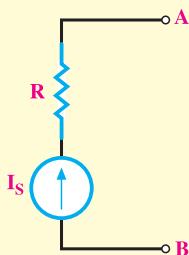
شکل ۱-۲

تذکر

از آنجایی که منابع ولتاژ و جریان ایده‌آل به ترتیب مقادیر ولتاژ و جریان ثابتی به مدار می‌دهند به همین خاطر حضور یک مقاومت موازی با منبع ولتاژ



و همچنین اتصال یک مقاومت سری با منبع جریان اثری در خروجی این منابع ندارد.



۳-۱- تحلیل مدار به روش جریان حلقه

برای تحلیل مدار به روش جریان حلقه، از قانون ولتاژهای کیرشهف^۱ (K.V.L) استفاده می‌شود. بدین منظور، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

مرحله ۱ در صورت نیاز و به‌طوری که پارامترهای مجهول مدار از بین نروند ابتدا مدار را تا حد ممکن ساده می‌کنیم.

مرحله ۲ برای هر حلقه، یک جریان در جهت دلخواه منظور می‌کنیم. برای سادگی کار و کم‌تر شدن اشتباهات، بهتر است جریان همه‌ی حلقه‌ها را در یک جهت فرض کنیم. ما در این قسمت، جریان حلقه‌ها را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت فرض می‌کنیم.

مرحله ۳ با حرکت در جهت جریان انتخابی در هر حلقه، با استفاده از قانون ولتاژهای کیرشهف (K.V.L) معادله‌ی ولتاژها را برای هر حلقه می‌نویسیم. (نقطه شروع حرکت مهم نیست)

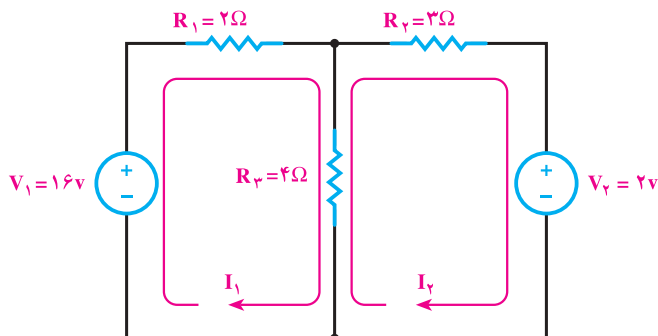
مرحله ۴ در هنگام حرکت در یک حلقه اگر به عنصری رسیدیم که با حلقه‌ی دیگری مشترک است، جریان آن عنصر از جمع جبری جریان دو حلقه‌ی طرفین آن به دست می‌آید.

مرحله ۵ با توجه به این که در مصرف‌کننده‌ها جریان به پلاریته‌ی مثبت وارد می‌شود و ما در هنگام نوشتن معادلات در جهت جریان حرکت می‌کنیم، پس ولتاژ همه‌ی مصرف‌کننده‌ها مثبت است. طبیعی است که ولتاژ منابع تغذیه با توجه به پلاریته‌ی آن‌ها در معادلات نوشته می‌شود؛ یعنی، اگر در جهت حرکت به مثبت منبع برسیم، ولتاژ آن را با علامت مثبت و اگر به منفی منبع برسیم، ولتاژ آن را با علامت منفی در معادله منظور می‌کنیم.

مرحله ۶ در این روش به تعداد حلقه‌های انتخاب شده در مدار، معادله تشکیل می‌دهیم. پس n معادله با n مجهول به دست می‌آید. مجهولات؛ جریان‌های حلقه‌ها هستند و با حل معادله‌ها جریان‌ها به دست می‌آیند در نتیجه، ولتاژها و توان‌های تمامی عناصر مدار محاسبه خواهد شد.

^۱—Kirchhof Voltage Low

مثال ۱: در مدار شکل ۱-۳ توان هر یک از مقاومت‌های مدار را حساب کنید.



شکل ۱-۳

راه حل:

الف: برای هر حلقه جریانی را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت منظور می‌کنیم و از یک نقطه در هر حلقه حرکت می‌کنیم و معادلات K.V.L. را می‌نویسیم.

حلقه ۱ KVL $R_1 I_1 + R_3 (I_1 - I_2) - V_1 = 0$

$$\rightarrow 2I_1 + 4(I_1 - I_2) - 16 = 0$$

حلقه ۲ KVL $R_2 I_2 + V_2 + R_3 (I_2 - I_1) = 0$

$$\rightarrow 3I_2 + 2 + 4(I_2 - I_1) = 0$$

ب: معادله‌ها را مرتب کرده و حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 2 \begin{cases} 6I_1 - 4I_2 = 16 \\ -4I_1 + 6I_2 = -2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 12I_1 - 8I_2 = 32 \\ -12I_1 + 12I_2 = -6 \end{cases} \Rightarrow \\ &13I_2 = 26 \quad I_2 = 2A \end{aligned}$$

$$6I_1 - 4 \times 2 = 16 \Rightarrow 6I_1 = 24 \Rightarrow I_1 = 4A$$

پ: برای محاسبه توان هر یک از مقاومت‌ها باید ابتدا جریان‌های هر مقاومت را محاسبه و سپس توان‌ها را به صورت زیر به دست آورد.

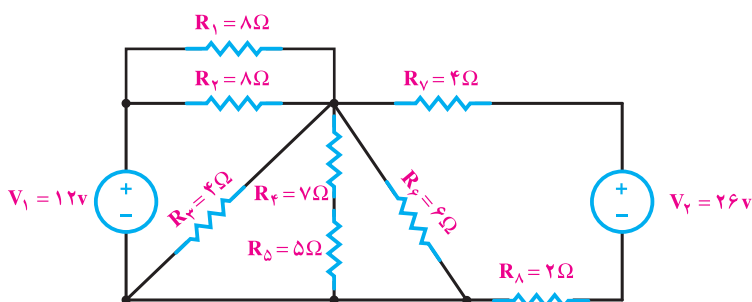
$$\begin{aligned} I_{R_1} &= I_1 = 4A \\ I_{R_2} &= I_2 = 2A \\ \Rightarrow I_{R_3} &= I_3 = I_1 - I_2 = 4 - 2 = 2A \end{aligned}$$

$$P_{R_1} = R_1 \cdot I_1^2 = 2 \times (4)^2 = 32 \text{ W}$$

$$P_{R_2} = R_2 \cdot I_2^2 = 3 \times (2)^2 = 12 \text{ W}$$

$$P_{R_3} = R_3 \cdot I_3^2 = 4 \times (2)^2 = 16 \text{ W}$$

مثال ۲: در مدار شکل ۱-۴ توانی را که هر منبع به مدار می‌دهد حساب کنید.



شکل ۱-۴

حل: در این مدار چون تعداد مقاومت‌ها زیاد است و امکان ساده‌سازی را نیز دارد به همین دلیل ابتدا مدار را بر پایه‌ی قواعد سری و موازی تا حد امکان ساده می‌کنیم.

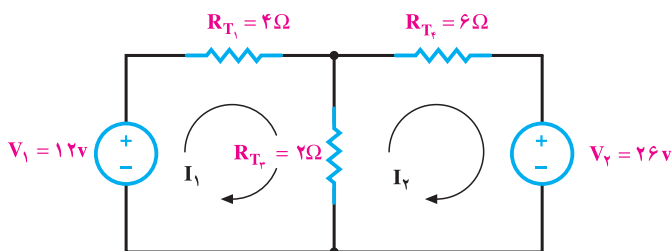
$$R_{T_1} = R_1 \parallel R_2 = \frac{8 \times 8}{8 + 8} = \frac{64}{16} = 4\Omega$$

$$R_{T_2} = R_4 + R_5 = 7 + 5 = 12\Omega$$

$$R_{T_3} = R_3 \parallel R_{T_2} \parallel R_6 = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{3+1+2}{12}} = \frac{12}{6} = 2\Omega$$

$$R_{T_4} = R_7 + R_8 = 4 + 2 = 6\Omega$$

شکل مدار پس از ساده‌سازی به صورت شکل زیر است.



با کمی دقت مشاهده می‌شود شکل مدار به دست آمده مشابه شکل ۱-۳ شده به همین خاطر بقیه‌ی مراحل را مطابق مثال قبل عمل می‌کنیم.

$$\begin{cases} \text{معادله‌ی حلقه‌ی ۱} & R_{T_1} \cdot I_1 + R_{T_2} (I_1 - I_2) - V_1 = 0 \\ \text{معادله‌ی حلقه‌ی ۲} & R_{T_2} I_2 + V_2 + R_{T_2} (I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4I_1 + 2(I_1 - I_2) - 12 = 0 \\ 6I_2 + 26 + 2(I_2 - I_1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6I_1 - 2I_2 = 12 \\ -2I_1 + 8I_2 = -26 \end{cases}$$

پس از مرتب‌سازی معادلات و حل دستگاه داریم:

$$I_1 = 1A \text{ و } I_2 = -3A$$

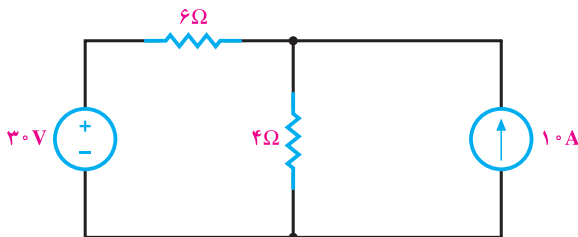
علامت منفی جریان I_2 نشان دهنده آن است که جهت انتخابی برای حلقه خلاف جهت واقعی فرض شده است.

برای محاسبه‌ی توان هر منبع باید به جهت جریان توجه داشت. چرا که براساس آن می‌توان مقدار و نوع توان را تعیین نمود. هرگاه جهت جریان به قطب مثبت منبع وارد شود علامت ولتاژ در رابطه $P = V \cdot I$ را مثبت و در صورتی که به قطب منفی وارد شود علامت آن را منفی منظور می‌کنیم. چنانچه حاصل توان منفی باشد یعنی، مولد به شبکه توان می‌دهد و اگر توان مثبت شد، یعنی، مولد، خود مصرف‌کننده شده است.

$$P_{V_1} = V_1 \cdot I_1 = (-12) \times 1 = -12 \text{ W}$$

$$P_{V_2} = V_2 \cdot I_2 = 26 \times (-3) = -78 \text{ W}$$

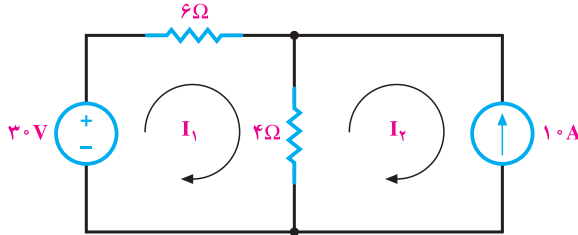
پس معلوم می‌شود که منبع ۱۲ ولت، ۱۲ وات و منبع ۲۶ ولت، ۷۸ وات توان به مدار می‌دهد در نتیجه، مشخص است که مقاومت‌های موجود در مدار در مجموع ۹۰ وات توان مصرف می‌کنند. مثال ۳: توان مصرفی در مقاومت ۴ اهم را در شکل ۱-۵ به روش جریان حلقه محاسبه کنید.



شکل ۱-۵

راه حل:

الف: ابتدا جریان حلقه‌ها را تعیین می‌کنیم (شکل ۶-۱).



شکل ۶-۱

ب: سپس معادلات حلقه‌ها را می‌نویسیم. در حلقه‌ی دوم چون منبع جریان قرار دارد پس می‌توان به راحتی و بدون نوشتن معادله‌ی KVL جریان شاخه‌ی سمت راست مدار یعنی جریان حلقه‌ی دوم را برابر 10 A آمپر در نظر گرفت. اما چون جهت جریان فرض شده برای حلقه‌ی دوم با جهت منبع جریان مخالف است باید I_2 را به صورت $I_2 = -10\text{ A}$ در نظر گرفت. پس کافی است معادله‌ی K.V.L. را برای حلقه‌ی اول بنویسیم و آن را حل کنیم تا جریان I_1 را به دست آوریم.

$$\text{KVL در حلقه‌ی ۱} \quad 6I_1 + 4(I_1 - I_2) - 30 = 0 \quad I_2 = -10\text{ A}$$

$$6I_1 + 4(I_1 + 10) - 30 = 0 \rightarrow 10I_1 = -10 \rightarrow I_1 = -1\text{ A}$$

پ: جریان مقاومت 4Ω برابر است با:

$$I_{4\Omega} = I_1 - I_2 = -1 - (-10) = 9\text{ A}$$

ت: توان در مقاومت 4Ω نیز برابر است با:

$$P_{4\Omega} = 4 \times (9)^2 = 324\text{ W}$$

۴-۱ تحلیل مدار به روش پتانسیل گره

برای حل مدار به روش پتانسیل گره از قانون جریان‌های کیرشهف^۱ (K.C.L.) استفاده می‌شود.

بدین منظور، مراحل زیر را طی می‌کنیم.

^۱—Kirishhof Current Low

مرحله ۱ مدار را تا حد ممکن ساده می‌کنیم؛ مثلاً مقاومت‌های موازی یا سری را به صورت

معادل آن‌ها قرار می‌دهیم یا گره‌های گسترده () را یک‌جا رسم () می‌کنیم.

مرحله ۲ گره‌های مدار را مشخص می‌کنیم و به هر کدام یک پتانسیل نسبت می‌دهیم؛

مانند V_1, V_2, \dots, V_n .

مرحله ۳ یکی از نقاط گره را — که بهتر است پرانشعاب‌ترین آن‌ها باشد — به عنوان گره مبنا

انتخاب می‌کنیم. فرض بر این است که پتانسیل گره مبنا صفر است.

مرحله ۴ برای هر گره، معادله‌ی جریان‌های کیرشهف (K.C.L.) را می‌نویسیم. برای نوشتن

معادله در هر گره به جز منابع جریان (که جهت جریان مشخصی دارند) جریان بقیه‌ی شاخه‌ها را خروجی در نظر می‌گیریم و با علامت مثبت منظور می‌کنیم. علامت جریان‌های ورودی به گره منفی خواهد بود^۱.

مرحله ۵ برای مداری با n گره، $n-1$ معادله نوشته می‌شود که شامل معادله‌ی گره‌ها به جز

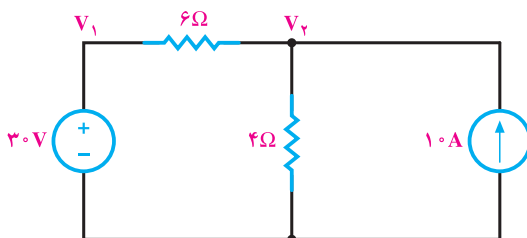
گره مبناست. تعداد معادله‌ها با تعداد مجهولات — که پتانسیل‌های گره‌ها هستند — برابر است.

مرحله ۶ با حل دستگاه معادلات چندمجهولی، پتانسیل گره‌ها را به دست می‌آوریم.

مرحله ۷ با معلوم بودن پتانسیل گره‌ها، جریان هر شاخه به راحتی به کمک قانون اهم محاسبه

می‌شود.

مثال ۴: توان مصرفی مقاومت ۴ اهم را در شکل ۷-۱ به روش پتانسیل گره حساب کنید.

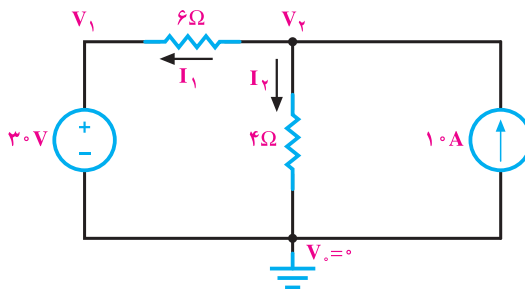


شکل ۷-۱

۱- تعیین علامت + یا - برای جریان‌های ورودی و یا خروجی یک گره اختیاری بوده و عکس حالت مرحله ۴ نیز می‌تواند

راه حل:

الف: این مدار شکل ساده‌ای دارد و ساده‌تر نمی‌شود.
 ب: گره پایین را مبنا اختیار می‌کنیم و به بقیه‌ی گره‌ها ولتاژ نسبت می‌دهیم (شکل ۸-۱).



شکل ۸-۱

پ: اکنون معادله‌ی جریان‌ها را در گره می‌نویسیم. در این مثال، پتانسیل گره ۱ معلوم است؛ زیرا از آن‌جا که یک سر منبع ولتاژ به گره مبنا وصل است، پتانسیل سر دیگر آن بسته به پلاریته‌ی منبع به اندازه‌ی اختلاف پتانسیل دوسر آن بیش‌تر یا کم‌تر از پتانسیل مبنا خواهد بود. در این‌جا گره ۱ به پلاریته‌ی مثبت منبع وصل است. پس پتانسیل آن برابر ۳۰ ولت می‌شود. در نتیجه، معادله‌ی جریان‌ها را فقط برای گره ۲ می‌نویسیم.

$$\text{KCL در گره ۲} \quad +I_1 + I_2 - 10 = 0 \quad + \frac{V_2 - V_1}{6} + \frac{V_2 - V_0}{4} - 10 = 0$$

چون جهت I_3 مخالف جهت منبع جریان است برای آن علامت منفی در نظر می‌گیریم.
 با جاگذاری مقادیر V_1 و V_0 خواهیم داشت:

$$\frac{V_2 - 30}{6} + \frac{V_2}{4} = 10$$

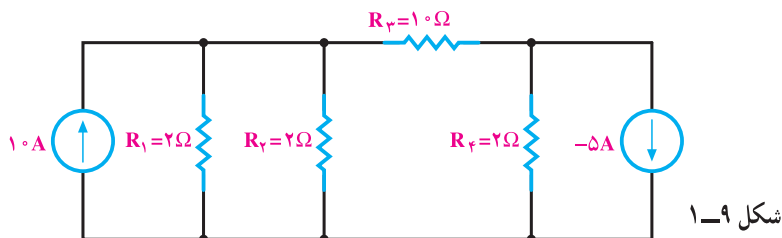
معادله‌ی بالا را حل می‌کنیم و ولتاژ V_2 را به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{2(V_2 - 30) + 3V_2}{12} = 10 \rightarrow 5V_2 - 60 = 120$$

$$5V_2 = 180 \rightarrow V_2 = \frac{180}{5} = 36V$$

$$P_{4\Omega} = \frac{V_2^2}{4} = \frac{36^2}{4} = 324W$$

مثال ۵: در مدار شکل ۹-۱ جریان را در مصرف کننده 1° اهم حساب کنید.



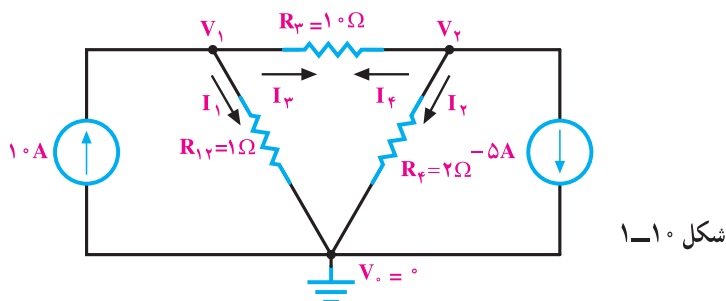
راه حل:

الف: ابتدا مقاومت R_1 و R_2 را با هم موازی می کنیم و مدار را به صورت شکل ۱۰-۱ ساده می کنیم.

$$R_{12} = (R_1 \parallel R_2) = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2 \times 2}{2 + 2} = 1\Omega$$

ب: گره های مدار را تعیین می کنیم و به هر یک پتانسیلی را نسبت می دهیم.

پ: برای هر شاخه یک جهت جریان تعیین می کنیم.



ت: در این مدار سه گره داریم. پس KCL را برای گره های ۱ و ۲ می نویسیم و برای آنها معادله تشکیل می دهیم.

گره ۱ KCL $\rightarrow -1 + I_1 + I_3 = 0 \quad -1 + \frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - V_2}{1} = 0$

گره ۲ KCL $\rightarrow +I_4 + I_3 + (-5) = 0 \quad + \frac{V_2 - V_1}{1} + \frac{V_2}{2} + (-5) = 0$


ث: معادله‌ها را مرتب کرده حل می‌کنیم تا V_1 و V_2 به دست آید.

$$\begin{cases} 11V_1 - V_2 = 100 \\ -V_1 + 6V_2 = 50 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = 10V \\ V_2 = 10V \end{cases}$$

ج: اکنون جریان مقاومت $10\ \Omega$ اهم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$I_{10\Omega} = \frac{V_1 - V_2}{10} = \frac{10 - 10}{10} = 0\text{ A}$$

پس در این مدار از مقاومت $10\ \Omega$ جریانی عبور نمی‌کند. البته در رابطه‌ی بالا می‌شد $\frac{V_2 - V_1}{10}$ هم نوشت که در این صورت جهت جریان به دست آمده از سمت گره ۲ به سمت گره ۱ تعیین می‌شد. به هر حال، در این مثال خاص که مقدار جریان صفر است، هیچ مسئله‌ای نیز در مورد جهت جریان وجود ندارد.

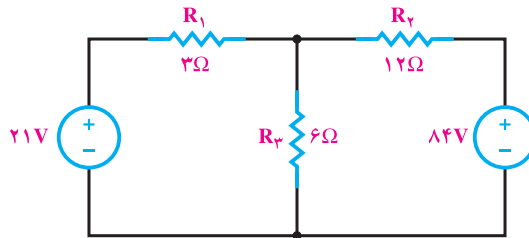
 **نتیجه:** اگر در مداری تعداد حلقه‌ها زیاد ولی تعداد گره‌ها کم باشد، استفاده از روش پتانسیل گره مناسب‌تر است، اگر تعداد حلقه‌ها کم‌تر از تعداد گره‌ها باشد، استفاده از روش جریان حلقه بهتر است؛ زیرا معادلات کم‌تری تشکیل می‌شود و حل کردن آن‌ها ساده‌تر است.

۵-۱- تحلیل مدار به روش اصل جمع آثار

در مدارهای الکتریکی که چند منبع تغذیه دارند، هریک از منابع در مدار جریانی ایجاد می‌کند و جریان هر عنصر در مدار از جمع جبری جریان‌هایی که هر منبع در آن عنصر ایجاد می‌کند به دست می‌آید. به عبارت دیگر، جریان عناصر مدار از مجموع جبری آثار تک‌تک منابع در مدار حاصل می‌شود. در تحلیل مدار به روش جمع آثار باید اثر هریک از منابع را به‌طور جداگانه با بی‌اثر کردن منابع دیگر بر کمیت مجهول محاسبه کرد. جمع آثار در مورد ولتاژ دوسر هر عنصر نیز صادق است ولی در مورد کمیت‌هایی که با مجذور جریان یا ولتاژ متناسب هستند صدق نمی‌کند. مثلاً توان در یک مقاومت اهمی را نمی‌توان از مجموع توان‌هایی به دست آورد که هر منبع به تنهایی می‌تواند در آن عنصر ایجاد کند.

وقتی منبع ولتاژ را از مدار حذف می‌کنیم، دوسر آن را اتصال کوتاه می‌کنیم در صورتی که بخواهیم منبع جریانی را از مدار حذف کنیم، باید آن را باز کرده و از مدار جدا سازیم.

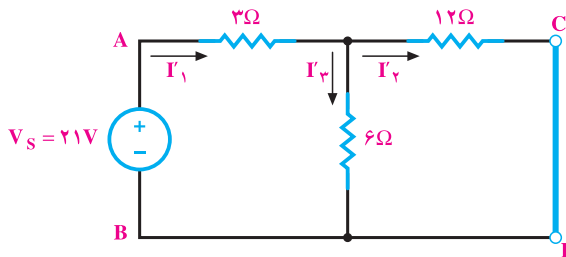
مثال ۶: در مدار شکل ۱-۱۱ جریان را در مقاومت‌های R_1 و R_2 و R_3 و توان و ولتاژ مقاومت ۶ اهم را محاسبه کنید.



شکل ۱-۱۱

راه حل:

الف: ابتدا به جز یک منبع (مثلاً ۲۱ V) بقیه منابع را از مدار حذف می‌کنیم. حال برای هر عنصر جریانی را در نظر می‌گیریم و آن‌ها را مطابق روش‌هایی که قبلاً آموخته‌ایم، حساب می‌کنیم (شکل ۱-۱۲).



شکل ۱-۱۲

می‌بینیم مقاومت ۶ اهمی به صورت موازی با مقاومت ۱۲ اهمی و مجموعه آن‌ها به صورت سری با مقاومت ۳ اهمی قرار دارد.

$$R_{AB} = (6 \parallel 12) + 3$$

$$R_{AB} = \frac{12 \times 6}{12 + 6} + 3 = 7\Omega$$

$$I'_1 = \frac{21}{7} = 3A$$

$$I'_2 = I'_1 \times \frac{6}{12 + 6} = 3 \times \frac{1}{3} = 1A$$

$$I'_3 = 3 \times \frac{12}{12 + 6} = 2A$$

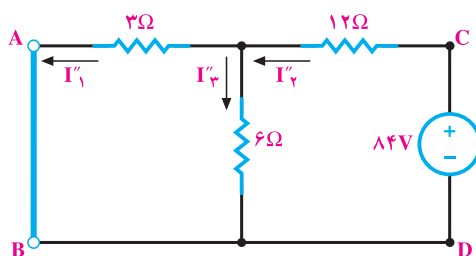
ب: این بار منبع دوم را حذف می‌کنیم و مجدداً جریان عناصر مدار را محاسبه می‌نماییم (شکل ۱۳-۱).

$$R_{CD} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + 12 = 14\Omega$$

$$I''_2 = \frac{84}{14} = 6A$$

$$I''_3 = 6 \times \frac{3}{3 + 6} = 2A$$

$$I''_1 = 6 \times \frac{6}{3 + 6} = 4A$$



شکل ۱۳-۱

اگر جریان‌های هر عنصر را که در دو حالت محاسبه شده با توجه به جهت آن‌ها با یک‌دیگر جمع کنیم، جریان هر عنصر برای زمانی که هر دو منبع در مدار هستند به دست می‌آید.

$$I_1 = I''_1 - I'_1 = 4 - 3 = 1A$$

$$I_2 = I''_2 - I'_2 = 6 - 1 = 5A$$

$$I_3 = I'_3 + I''_3 = 2 + 2 = 4A$$

ب: برای محاسبه‌ی ولتاژ مقاومت ۶ اهم، می‌توان به دو صورت زیر عمل کرد.

$$۱) V_{6\Omega} = I_3 \times 6 = 4 \times 6 = 24[V]$$

$$۲) V_{6\Omega} = I'_3 \times 6 + I''_3 \times 6 = 2 \times 6 + 2 \times 6 = 24[V]$$

ت: توان در مقاومت ۶ اهمی از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

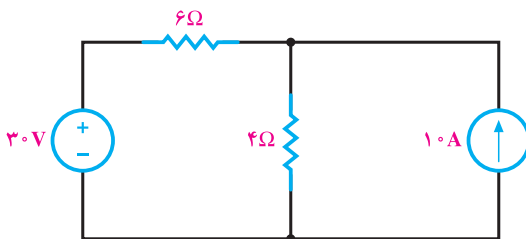
$$P = 6 \times I_3^2 = 6 \times 4^2 = 96W$$

توجه کنید که توان این مقاومت را نمی‌توان از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد؛ زیرا حاصل ۹۶ وات نمی‌شود:

$$6 \times I_3'^2 + 6 \times I_3''^2 = 6 \times 2^2 + 6 \times 2^2 = 48 \neq 96$$

مثال ۷: توان مصرفی در مقاومت ۴ اهم را در شکل ۱۴-۱ به روش اصل جمع آثار حساب

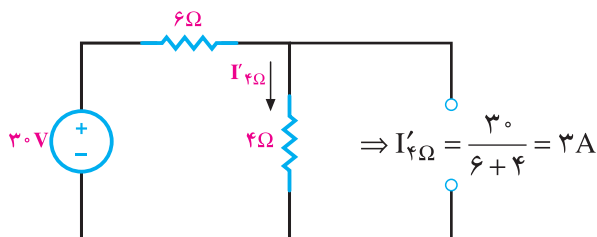
کنید.



شکل ۱۴-۱

راه حل:

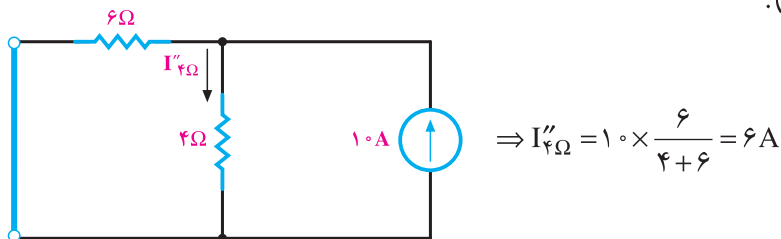
الف: منبع جریان را حذف و جریان مقاومت ۴Ω را محاسبه می‌کنیم (شکل ۱۵-۱).



شکل ۱۵-۱

ب: منبع ولتاژ را حذف می‌کنیم و مجدداً جریان مقاومت ۴Ω را به‌دست می‌آوریم (شکل

۱۶-۱).




شکل ۱۶-۱

پ: اکنون با جمع آثار، جریان مقاومت 4Ω را در مدار اصلی به دست می آوریم و سپس توان آن را حساب می کنیم.

$$I_{4\Omega} = I'_{4\Omega} + I''_{4\Omega} = 3 + 6 = 9A$$

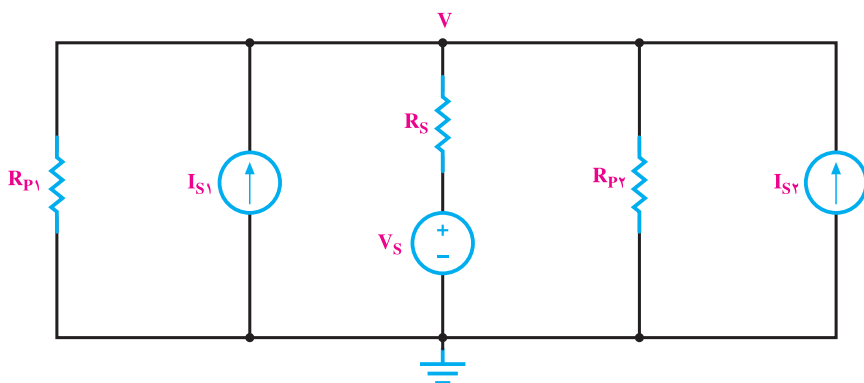
$$P_{4\Omega} = 4 \times 9^2 = 324W$$

همان طور که دیدید، مدار فوق را به هر سه روش اصل جمع آثار، پتانسیل گره و جریان حلقه حل کردیم و در هر سه مورد به یک پاسخ رسیدیم. پس مدارها را به روش های مختلف می توان تحلیل کرد ولی باید ببینیم که در کدام روش با تعداد معادلات کمتری و ساده تر به نتیجه می رسیم.

 نتیجه: در روش جمع آثار به ازای هر منبع، مدار یکبار تحلیل می شود. این روش زمانی نسبت به سایر روش ها ترجیح داده می شود که مدار ساده تر حل شود.

۶-۱- تبدیل منابع ولتاژ و جریان به یک دیگر

در تحلیل مدارهای الکتریکی مواردی پیش می آید که به نظر می رسد اگر به جای منبع ولتاژ، یک منبع جریان در مدار قرار داشته باشد، تحلیل مدار ساده تر انجام می گیرد. به شکل ۱۷-۱ توجه کنید. اگر در این مدار به جای منبع واقعی V_s یک منبع جریان واقعی وجود داشت، همه ی مقاومت های منابع مدار با هم موازی بودند و به راحتی با یک محاسبه مقاومت معادل، استفاده از قوانین اهم و جریان های کیرشهف ولتاژ V به دست می آمد. مطلب یادشده این فکر را به وجود می آورد که چگونه می توان منابع ولتاژ و جریان را جایگزین یک دیگر کرد. برای این منظور، چنانچه منابع را جایگزین هم کنیم، نباید در ولتاژ و جریان مصرف کننده تغییری ایجاد شود. پس اگر منبع ولتاژی را جایگزین منبع جریانی کنیم بدون آن که جریان و ولتاژ مصرف کننده تغییر کند، می توان گفت این دو منبع معادل هم هستند. با توجه به توضیحات فوق منابع معادل را هم به صورت زیر می توان محاسبه کرد.

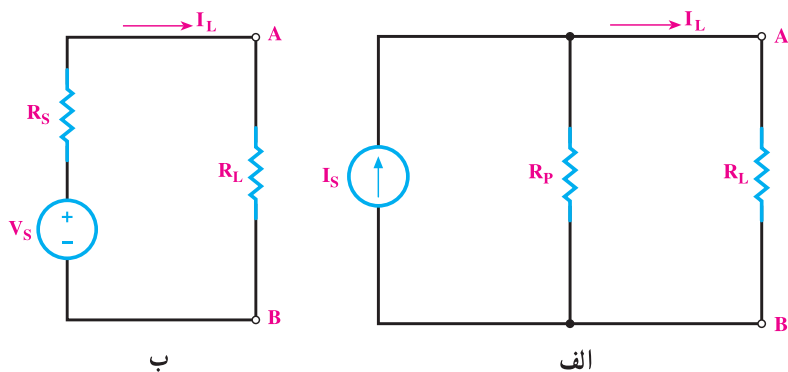


شکل ۱۷-۱

به شکل های ۱۸-۱ نگاه کنید؛ مصرف کننده ی R_L در هر دو مدار یکی است. ابتدا جریان مصرف کننده ها را در هر دو مدار حساب می کنیم.

$$I_L = I_S \frac{R_P}{R_L + R_P} \quad \text{در مدار «الف» داریم:}$$

$$I_L = \frac{V_S}{R_L + R_S} \quad \text{در مدار «ب» داریم:}$$



شکل ۱۸-۱

اکنون برای این که دو منبع شکل های ۱۸-۱ معادل هم باشند، باید جریان I_L در هر دو حالت برابر باشد. با مساوی قرار دادن جریان ها داریم:

$$I_{L_S} = I_{L_P}$$

$$\frac{V_S}{R_L + R_S} = \frac{I_S R_P}{R_L + R_P}$$

در معادله‌ی صفحه قبل اگر صورت کسرها باهم برابر باشند، زمانی تساوی برقرار می‌شود که
مخرج کسرها نیز باهم برابر باشند. در این صورت می‌توان نوشت:

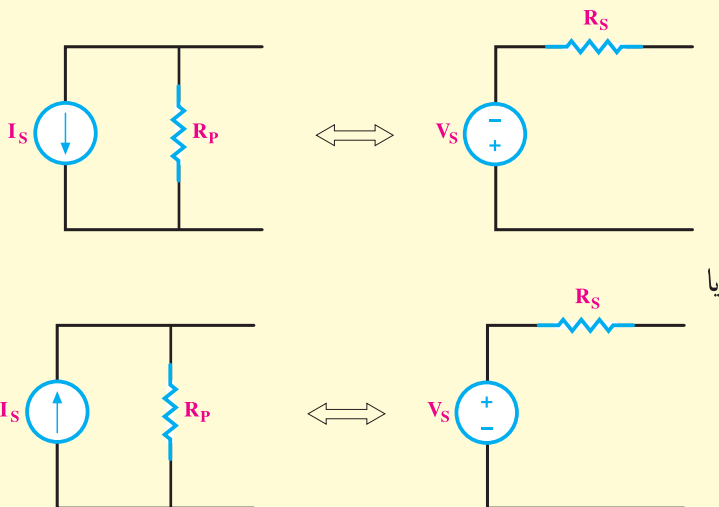
$$\cancel{R_L} + R_S = \cancel{R_L} + R_P \rightarrow R_S = R_P$$

$$V_S = I_S R_P \quad \text{و} \quad I_S = \frac{V_S}{R_S}$$

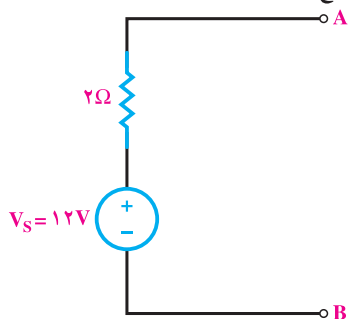
👉 نتیجه: برای تبدیل یک منبع جریان به منبع ولتاژ، باید مقدار جریان منبع را در مقاومت داخلی آن ضرب کنیم تا مقدار منبع ولتاژ معادل به دست آید. به عکس، اگر بخواهیم منبع ولتاژی را به منبع جریان تبدیل کنیم، کافی است ولتاژ منبع را بر مقاومت داخلی آن تقسیم کنیم تا مقدار منبع جریان معادل به دست آید. بدیهی است که مقاومت داخلی منابع جریان و ولتاژ با هم برابر خواهد بود.

توجه

- ۱- اگر در یک مدار، اطلاعاتی از مصرف کننده‌ها یا منابع خواسته شود تبدیل منبع در آن قسمت صحیح نمی‌باشد.
- ۲- در تبدیل منابع ولتاژ و جریان به یکدیگر ضروری است به جهت و علامت منابع مطابق شکل زیر توجه شود.



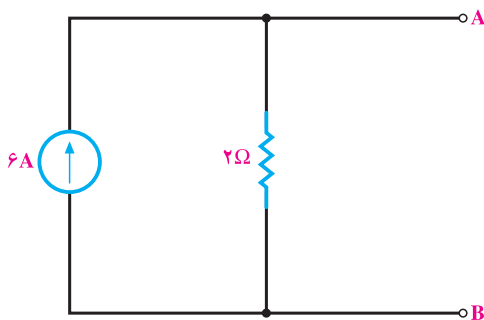
مثال ۸: منبع جریان معادل منبع ولتاژ شکل ۱۹-۱ را به دست آورید.



شکل ۱۹-۱

راه حل: $R_P = R_S = 2\Omega$ و $I_S = \frac{12}{2} = 6A$

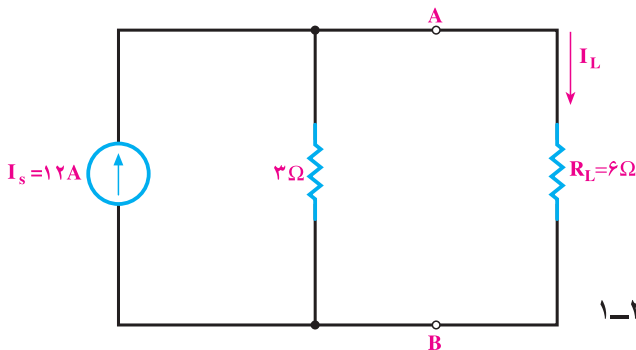
پس منبع جریان معادل به صورت شکل ۲۰-۱ درمی آید.



شکل ۲۰-۱

مثال ۹: در شکل ۲۱-۱ ابتدا جریان مصرف کننده (R_L) را حساب کنید. سپس منبع ولتاژ

معادل منبع جریان مدار را محاسبه کرده شکل مدار را رسم کنید و بار دیگر جریان مصرف کننده را محاسبه نمایید.



شکل ۲۱-۱

$$I_L = 12 \times \frac{3}{3+6} = 4A$$

راه حل:

$$V_S = 12 \times 3 = 36V \text{ و } R_S = 3\Omega$$

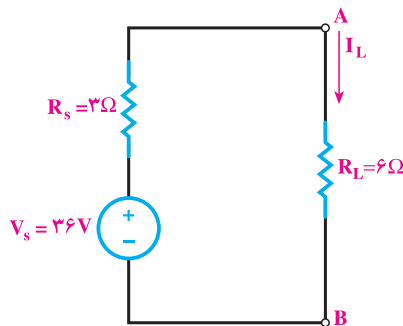
اکنون مدار به صورت شکل ۱-۲۲ خواهد شد.

$$I_L = \frac{36}{3+6} = 4A$$

در این حالت، جریان I_L را داریم:

ملاحظه می کنید که جریان مصرف کننده باز هم ۴ آمپر است. بدیهی است ولتاژ و توان مصرفی آن نیز تغییر نمی کند.

لازم به یادآوری است که منابع ایده آل را نمی توان به یک دیگر تبدیل کرد.



شکل ۱-۲۲

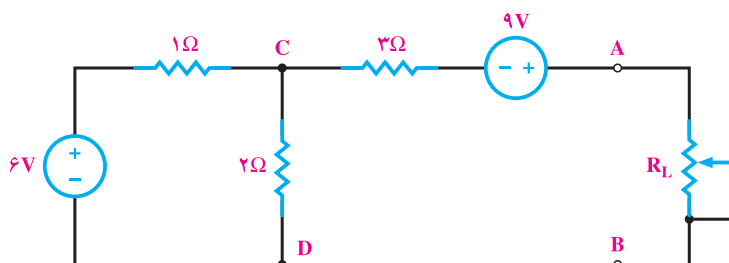
۱-۷- مدار معادل تونن و نورتن مدارهای الکتریکی

در تجزیه و تحلیل مدارهای الکتریکی به مواردی برخورد می کنیم که مدار از عناصر زیادی درست شده است و تعداد زیادی گره و حلقه دارد اما هدف ما فقط بررسی یک عنصر در مدار است و می خواهیم بدانیم با تغییرات این عنصر، مثلاً جریان یا توان آن چه تغییری خواهد داشت. در این مورد، تحلیل تکراری مدار بسیار مشکل خواهد بود. حتی اگر از روش های رایانه ای نیز برای تحلیل استفاده کنیم، باز محاسبه های مکرر به زمان بیش تری نیاز دارد. برای از بین بردن این مشکل راه حل هایی ارایه شده است. به این ترتیب که همیشه می توان تمامی عناصر مدار را از دو سر بار یا عنصر مورد نظر به صورت یک منبع واقعی جریان یا ولتاژ، معادل سازی کرد. اگر مدار را به صورت یک منبع ولتاژ واقعی معادل سازی کنیم، مدار را **معادل تونن** گویند و اگر مدار به صورت منبع جریان واقعی معادل سازی شود، آن را **معادل نورتن** مدار گویند. در این جا با ذکر مثال هایی چگونگی محاسبه ی معادل تونن و نورتن مدارهای الکتریکی را بیان می کنیم. تونن و نورتن دو دانشمند بودند که در زمینه ی مخابرات کار می کردند.

۱-۷-۱- معادل تونن مدارهای الکتریکی: برای به دست آوردن معادل تونن مدار، ابتدا

بار یا عنصر مورد نظر را از مدار جدا می‌کنیم، سپس اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ای را که بار از آن جا جدا شده است، به یکی از روش‌های تحلیل که قبلاً آموخته‌ایم محاسبه می‌کنیم. ولتاژ به دست آمده که به آن **ولتاژ مدار باز** (V_{OC})^۱ گفته می‌شود، همان ولتاژ تونن (V_{th})^۲ مدار است. برای به دست آوردن مقاومت معادل مدار، تمام منابع را بی‌اثر می‌کنیم (منابع جریان باز و منابع ولتاژ اتصال کوتاه). سپس با نگاه کردن به مدار از دو نقطه‌ای که بار از آنجا باز شده، مقاومت معادل کل را به دست می‌آوریم. این مقاومت تونن مدار (R_{th})^۳ خواهد بود.

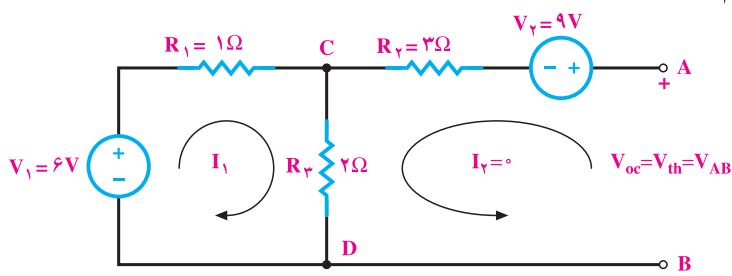
مثال ۱۰: در مدار شکل ۱-۲۳ برای این که بتوانیم اثر تغییرات بار را بررسی کنیم، معادل تونن مدار را به دست می‌آوریم.



شکل ۱-۲۳

راه حل:

۱- ابتدا مطابق شکل ۱-۲۴ بار را از مدار جدا کرده و سپس ولتاژ بین دو پایانه‌ی A و B را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۱-۲۴

۱- V_{OC} - Voltage Open Circuit

۲- V_{th} - Voltage Thevenin

۳- R_{th} - Resistance Thevenin

در مدار شکل ۱-۲۴ بین دو نقطه‌ی A و B باز است؛ بنابراین $I_2 = 0$ می‌شود و با

اعمال KVL به حلقه‌ی ۱ داریم: $-V_1 + R_1 I_1 + R_3(I_1 + I_2) = 0$ KVL در حلقه‌ی ۱

مقادیر V_1 و I_2 را جایگزین می‌کنیم و I_1 را به دست می‌آوریم.

$$-6 + 1 \times I_1 + 2(I_1 + 0) = 0 \Rightarrow I_1 = 2A$$

با به دست آوردن I_1 می‌توان V_{OC} را با اعمال KVL به حلقه‌ی ۲ به دست آورد:

اعمال KVL در حلقه‌ی ۲: $R_3(I_2 + I_1) - V_{OC} + V_2 + R_2 I_2 = 0$

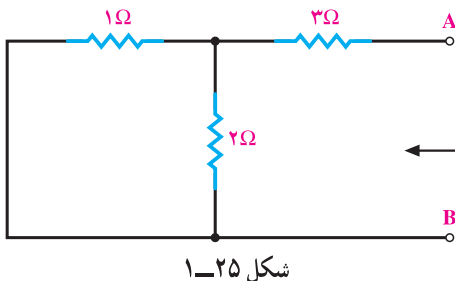
$$2(0 + 2) - V_{OC} + 9 + 3(0) = 0$$

بنابراین، داریم:

$$V_{OC} = 9 + 4 = 13V$$

$$V_{OC} = V_{th} = 13V$$

V_{OC} همان V_{th} است.



شکل ۱-۲۵

۲- اکنون منابع ولتاژ مدار

را مطابق شکل ۱-۲۵ بی‌اثر می‌کنیم

و مقاومت معادل آن را از دو پایانه‌ی

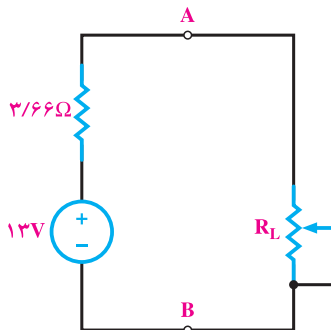
A و B به دست می‌آوریم.

$$R_{th} = \frac{1 \times 2}{1 + 2} + 3 = 3/66\Omega$$

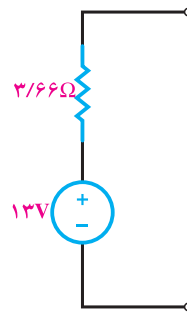
$$R_{AB} = R_{th}$$

۳- اکنون معادل تون مدار به صورت شکل ۱-۲۶ به دست آمده است. می‌توان بار را به مدار

معادل وصل کرد (شکل ۱-۲۷) و تحلیل لازم را انجام داد.



شکل ۱-۲۷

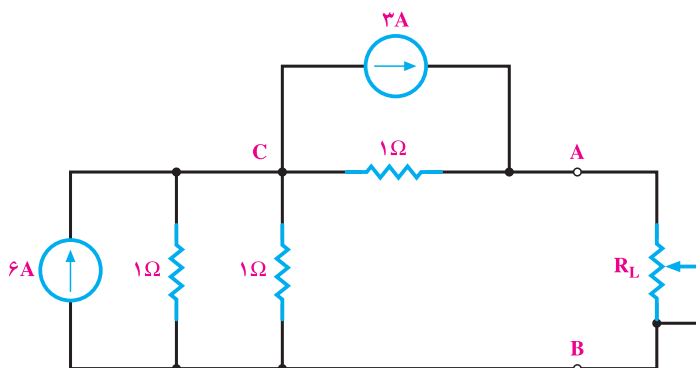


شکل ۱-۲۶

۲-۷-۱- معادل نورتن مدارهای الکتریکی: برای به دست آوردن معادل نورتن مدار،

باز هم ابتدا بار را از مدار جدا می‌کنیم. برای به دست آوردن مقاومت معادل نورتن مدار (R_N) نیز درست به همان صورتی عمل می‌کنیم که هنگام به دست آوردن مقاومت معادل تونن انجام دادیم. پس می‌توان گفت مقاومت‌های معادل تونن و نورتن یکی هستند ($R_N = R_{th}$) اما برای محاسبه‌ی جریان معادل نورتن مدار، پس از باز کردن بار، دو پایانه‌ای را که بار از آن‌جا باز شده است اتصال کوتاه می‌کنیم و سپس جریان عبوری از این اتصال کوتاه را محاسبه می‌کنیم. این جریان که به جریان مدار اتصال کوتاه (I_{SC}) معروف است، همان جریان معادل نورتن مدار (I_N) می‌باشد.

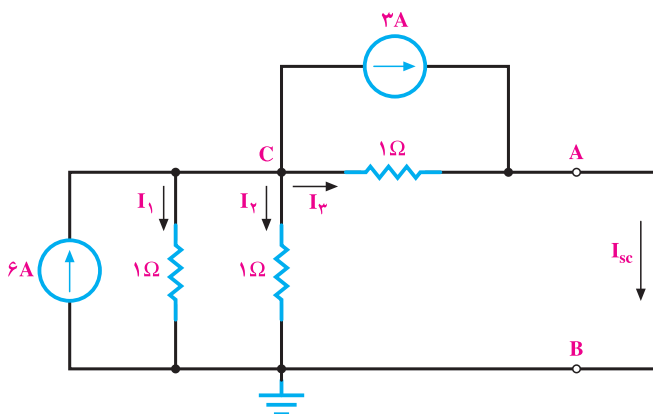
مثال ۱۱: در شکل ۱-۲۸ معادل نورتن مدار را به دست آورید.



شکل ۱-۲۸

راه حل:

۱- ابتدا بار را جدا کرده و دو پایانه‌ی A و B را اتصال کوتاه می‌کنیم (شکل ۱-۲۹).



شکل ۱-۲۹

۲- این مدار را می‌توان از روش پتانسیل گره حل کرد و I_{SC} را محاسبه نمود. توجه داشته باشید که در این حالت، گره‌های A و B به یک گره تبدیل می‌شوند. پس می‌توان نوشت:

KCL گره C $-6 + I_1 + I_2 + I_3 + 3 = 0$

$$-6 + \frac{V_c}{1} + \frac{V_c}{1} + \frac{V_c}{1} + 3 = 0 \rightarrow V_c = 1V$$

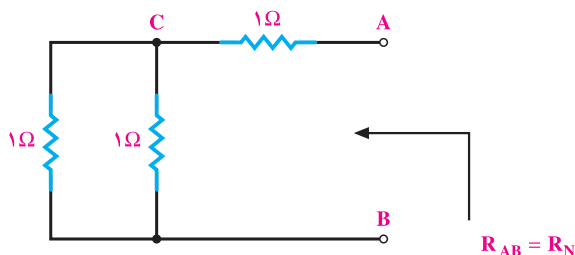
به این ترتیب، جریان در هریک از مقاومت‌ها نیز یک آمپر است، و همگی از گره C خارج می‌شوند. جریان I_{SC} نیز از مجموع دو جریان (یکی منبع ۳A و دومی جریان I_2) به دست می‌آید. پس داریم:

$$I_{SC} = 3 + 1 = 4A$$

$$I_{SC} = I_N = 4A$$

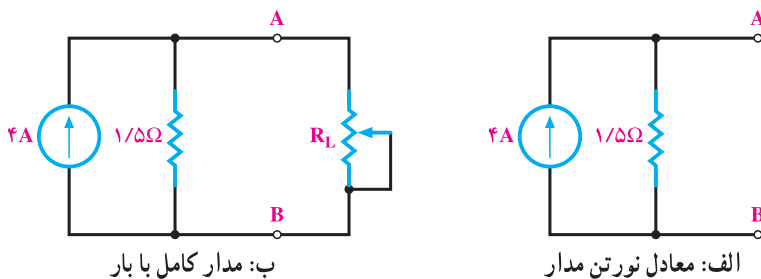
۳- مقاومت معادل نورتن با بی‌اثر کردن منابع — درحالی که مقاومت بار باز شده است — به دست می‌آید (شکل ۱-۳۰).

$$R_N = \frac{1 \times 1}{1 + 1} + 1 = 1.5 \Omega$$



شکل ۱-۳۰

۴- معادل نورتن مدار و مدار کامل به صورت شکل‌های ۱-۳۱ است.



ب: مدار کامل با بار

الف: معادل نورتن مدار

شکل ۱-۳۱

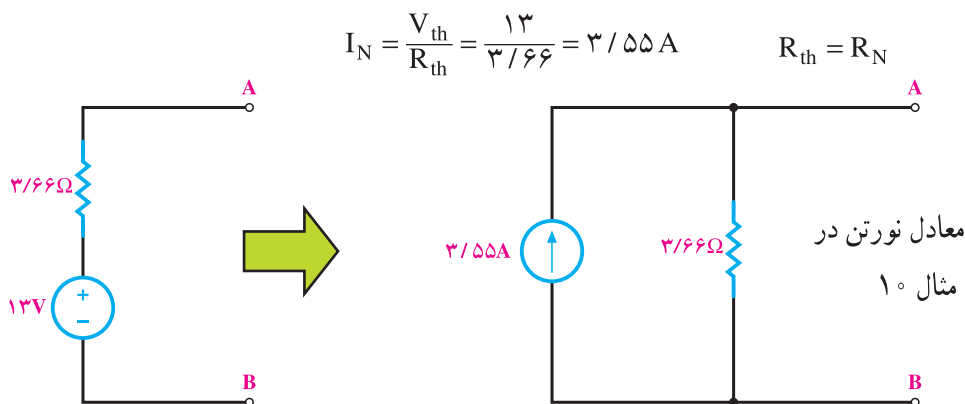
گاهی ممکن است معادل تونن مداری را داشته باشیم و بخواهیم معادل نورتن همان مدار یا به عکس معادل نورتن را داشته و به دنبال معادل تونن باشیم. در این گونه موارد به راحتی می‌توانیم با تبدیل منابع، معادل دیگر را برای مدار به دست آوریم.

مثال ۱۲: معادل نورتن مثال ۱۰ و معادل تونن مدار مثال ۱۱ را به دست آورید.

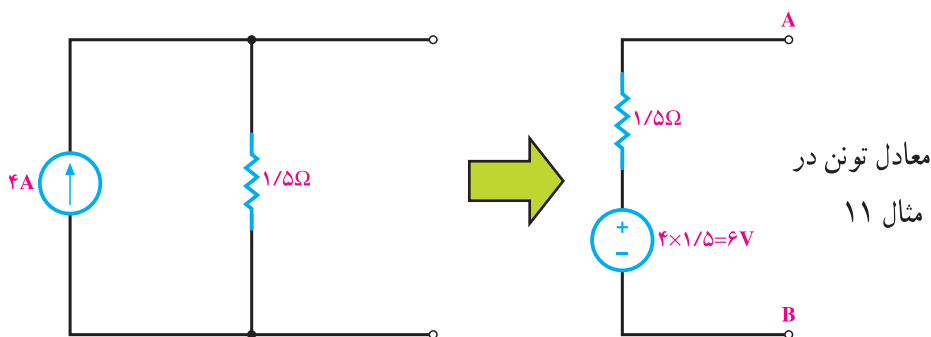
راه حل: (شکل‌های ۱-۳۲)

تذکر

برای جلوگیری از اشتباه و تعیین جهت صحیح جریان منابع و پلاریته‌ی ولتاژ آن‌ها به جهت جریان اتصال کوتاه (I_{SC}) و همچنین به پلاریته‌ی ولتاژ مدار باز (V_{OC}) کاملاً دقت کنید.



$$V_{th} = I_N \cdot R_N = 4 \times 1/5 = 6 \text{ V}$$



شکل ۱-۳۲

۸-۱- انتقال ماکزیمم توان به بار

یکی از مسائلی که در مدارهای الکتریکی مطرح می‌شود، این است که در چه شرایطی می‌توان ماکزیمم توان ممکن را به بار منتقل کرد. از آن‌جا که منابع تغذیه دارای مقاومت داخلی هستند، تمامی توانی را که به مدار تحویل می‌دهند به بار نمی‌رسد. انتقال ماکزیمم توان ممکن را به بار، **تطابق** می‌گویند. به خصوص در مدارهای الکترونیک که عناصر زیادی در مدار وجود دارد و مدار از قسمت‌ها و طبقات مختلفی درست شده است، ایجاد تطابق بین طبقات مختلف مدار و انتقال ماکزیمم توان از یک طبقه به طبقه‌ی دیگر مسئله‌ی مهمی است. در نتیجه، چگونگی انتقال ماکزیمم توان مورد توجه قرار می‌گیرد. اگر مقاومت بار صفر باشد، (اتصال کوتاه شود) چون ولتاژ دو سر خروجی صفر می‌شود پس توان آن نیز صفر خواهد بود. از طرفی، اگر مقاومت بار بی‌نهایت باشد، به دلیل صفر بودن جریان این بار توان آن نیز صفر می‌شود. بدیهی است اگر بار دارای ولتاژ و جریان باشد، دارای توان نیز خواهد بود. پس اگر مقاومت بار از صفر زیاد شود و تا بی‌نهایت افزایش یابد (مدار باز شود)، توان آن هم از صفر زیاد می‌شود و مجدداً به صفر برمی‌گردد. در این بین حالتی وجود دارد که توان مصرف‌کننده به بیشترین مقدار می‌رسد. محاسبه‌ها نشان می‌دهند که زمانی ماکزیمم توان به بار یا مصرف‌کننده منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت داخلی منبع تغذیه برابر باشد. اگر مدار دارای عناصر زیادی باشد، می‌توان با به‌دست آوردن معادل تونن یا نورتن مدار از دوسر بار، تمامی مدار را به صورت یک منبع ولتاژ یا جریان واقعی نشان داد. در این صورت، می‌توان گفت

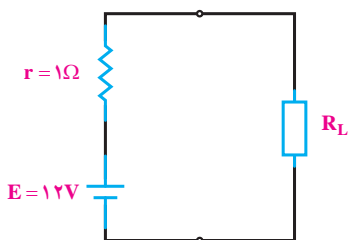
زمانی ماکزیمم توان به بار منتقل می‌شود که مقاومت بار با مقاومت معادل

تونن یا نورتن مدار برابر باشد. $R_L = R_{th} = R_N$ شرط ماکزیمم شدن توان بار)

مثال ۱۳: یک باتری مطابق شکل ۳۳-۱ با مقاومت داخلی $r = 1\Omega$ ، نیروی محرکه‌ی

$E = 12V$ ولت را تولید می‌کند. این باتری در چه جریانی می‌تواند ماکزیمم توان را به بار بدهد؟ در این

حال توان مصرف‌کننده چند وات است؟



اگر مقاومت بار را به ترتیب $R_L = 3\Omega$ ، $R_L = 5\Omega$ ،

در نظر بگیریم در هر مرحله توان مصرفی چند وات می‌شود؟

شکل ۳۳-۱

راه حل:

اولاً در صورت انتقال توان ماکزیمم مقاومت مصرف کننده باید با مقاومت داخلی مولد

– یعنی ۱ اهم – برابر باشد. پس می توان نوشت :

$$R_L = r = 1\Omega$$

$$I = \frac{E}{r + R_L} = \frac{12}{1+1} = 6A$$

$$P_{\max_1} = R_L \times I^2 = 1 \times 6^2 = 36W$$

$$P_{r_1} = R_L \left(\frac{E}{r + R_L} \right)^2 = 1 \times \left(\frac{12}{1+1} \right)^2 = 36W$$

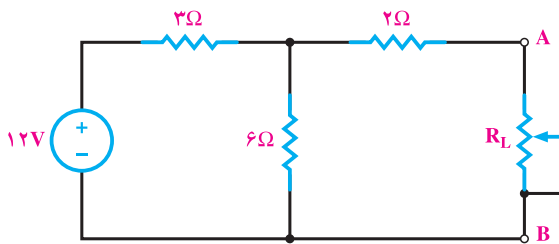
ثانیاً :

$$P_{r_2} = 0.5 \times \left(\frac{12}{1+0.5} \right)^2 = 32W$$

ملاحظه می شود توان مصرفی در هر دو حالت فرض دوم از حالت اول کم تر است ؛ یعنی، وقتی مقاومت بار از ۱ اهم کمتر، یا از آن زیادتر شود، توان مصرفی کوچک شده است. پس در مقاومت ۱ اهم، توان مصرفی ماکزیمم است.

مثال ۱۴: در مدار شکل ۱-۳۴ ماکزیمم توانی که می تواند به بار منتقل شود، چند وات

است و در چه مقدار از مقاومت بار حاصل می شود؟



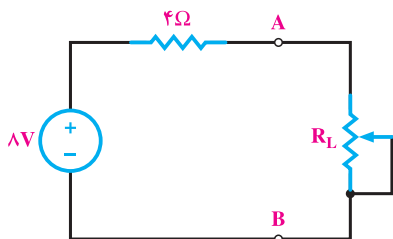
شکل ۱-۳۴

راه حل:

ابتدا مقاومت بار را از مدار جدا می کنیم و معادل تونن مدار را از دو نقطه ی A و B به دست می آوریم. با توجه به این که در صورت باز شدن R_L از مقاومت ۲ اهمی جریان نمی گذرد و ولتاژ آن صفر است، پس V_{OC} همان ولتاژ دو سر مقاومت ۶ اهم است. در نتیجه، می توان نوشت :

$$V_{th} = V_{OC} = V_{6\Omega} = 12 \times \frac{6}{3+6} = 8V$$

$$R_{th} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + 2 = 2 + 2 = 4 \Omega$$



شکل ۳۵-۱

اکنون مدار را به صورت شکل ۳۵-۱ داریم :
برای انتقال ماکزیمم توان باید R_L مساوی ۴ اهم باشد
و توان ماکزیمم در R_L برابر است با :

$$P_{max} = \left(\frac{8}{4 + 4} \right)^2 \times 4 = 4W$$

👉 نتیجه: اگر مقاومت بار با مقاومت داخلی منبع برابر باشد ماکزیمم توان به بار منتقل می شود و اندازه توان ماکزیمم در معادل تونن و نورتن را می توان از روابط زیر به دست آورد.

$$P_{max} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}} \quad (\text{ماکزیمم توان بار براساس معادل تونن مدار})$$

$$P_{max} = \frac{1}{4} R_N I_N^2 \quad (\text{ماکزیمم توان بار براساس معادل نورتن مدار})$$

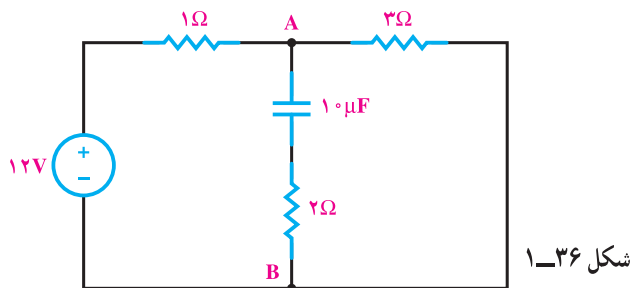
۹-۱- مدارهای شامل سلف و خازن

همان طور که در درس مبانی برق خواندید، وقتی یک خازن به منبع ولتاژ جریان مستقیم وصل می شود، ابتدا جریان نسبتاً بزرگی در مدار جریان می یابد و خازن رفته رفته شارژ می شود تا ولتاژ دوسر آن به اندازه ولتاژ منبع برسد. در همین حالت، جریان مدار هم به تدریج کاهش می یابد تا وقتی که خازن کاملاً شارژ شود. در این حالت، جریان مدار به صفر می رسد. پس از این فرآیند که حدود ۵ ثابت زمانی طول می کشد، خازن در مدار مانند یک کلید باز عمل می کند. وقتی ۵ ثابت زمانی سپری می شود، در اصطلاح می گویند مدار به حالت پایدار یا ماندگار خود رسیده است. پس در مدارهای جریان مستقیم و در حالت ماندگار عبوری از خازن صفر است و خازن به صورت یک کلید باز عمل می کند. در حالی که به اندازه ولتاژ اعمال شده به دوسر آن، شارژ شده است. هم چنین ملاحظه کردید که سلف در مدار با تغییرات جریان مخالف است؛ بنابراین، وقتی در یک مدار جریان مستقیم شامل سلف، کلید مدار را وصل می کنیم، ابتدا سلف با ایجاد یک ولتاژ خودالقایی در خلاف جهت ولتاژ اعمال شده، با برقراری جریان مخالفت می کند؛ و جریان کمی در مدار جاری می شود اما رفته رفته این مخالفت

کاهش می‌یابد و از بین می‌رود به‌طوری که پس از گذشت ۵ ثابت زمانی، جریان مدار به حداکثر مقدار خود می‌رسد و نیروی محرکه‌ی خودالقایی سلف صفر می‌شود. به‌طوری که می‌توان گفت **وقتی یک مدار جریان مستقیم شامل سلف به حالت ماندگار می‌رسد، ولتاژ دو سر سلف صفر است و سلف به‌صورت یک هادی اتصال کوتاه عمل می‌کند.** در واقع دیگر در مدار دیده نمی‌شود و نقشی ندارد. البته در این حالت، به دلیل عبور جریان از سلف، مقداری انرژی در آن ذخیره می‌شود. ضمن این که جریان مدار ماکزیمم است. از زمان کلیدزنی تا زمان پایدار شدن را می‌گوییم مدار در حالت گذراست. از آن جا که در عمل در بسیاری موارد و به‌خصوص در وسایل الکترونیکی به مدارهای جریان مستقیمی برمی‌خوریم که از عناصر غیرفعالی چون سلف، خازن و مقاومت اهمی درست شده‌اند، به حل کردن نمونه‌هایی از این مدارها در حالت پایدار می‌پردازیم. لازم به ذکر است که بررسی مدارها در حالت گذرا از حیطه‌ی این درس خارج است و در دوره‌های بالاتر به آن می‌پردازند.

مثال ۱۵: مدار شکل ۱-۳۶ در حالت ماندگار است. مطلوب است محاسبه‌ی :

الف - جریان مقاومت ۳ اهمی. ب - انرژی ذخیره شده در خازن.

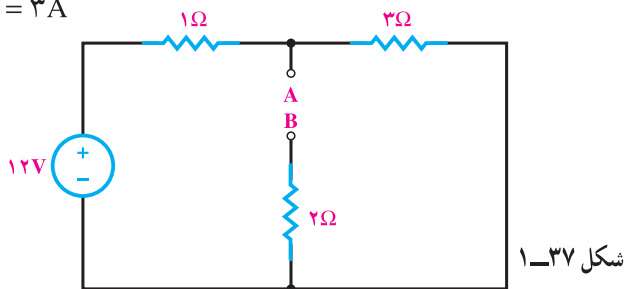


شکل ۱-۳۶

راه حل:

الف - در حالت ماندگار، خازن شارژ می‌شود و مانند کلید باز عمل می‌کند. پس مدار به‌صورت شکل ۱-۳۷ درمی‌آید و جریان مقاومت ۳ اهمی برابر است با :

$$I_{3\Omega} = \frac{12}{1+3} = 3A$$



شکل ۱-۳۷

ب : اختلاف پتانسیل بین دو نقطه‌ی A و B برابر است با :

$$V_{AB} = 3\Omega \times 3A = 9V$$

چون از شاخه‌ی خازن دار جریان عبور نمی‌کند، پس افت ولتاژ دوسر مقاومت ۲ اهمی صفر و ولتاژ شارژ خازن همان $V_C = V_{AB} = 9V$ است. در نتیجه، داریم :

$$W_C = \frac{1}{2} CV_C^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-6} \times 9^2 = 405 \times 10^{-6} \text{ ژول}$$

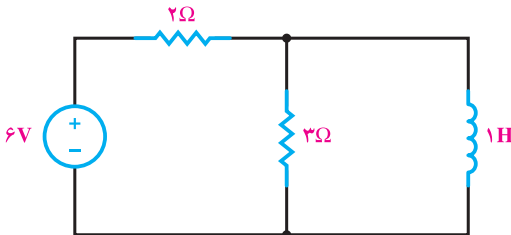
همان‌طور که می‌بینید، با وجود این که جریان خازن صفر است ولی در آن مقداری انرژی ذخیره شده است.

مثال ۱۶: مدار شکل ۱-۳۸ در حالت

پایدار است. مطلوب است محاسبه‌ی :

الف : جریان مقاومت ۳ اهمی.

ب : انرژی ذخیره شده در سلف.



شکل ۱-۳۸

راه حل:

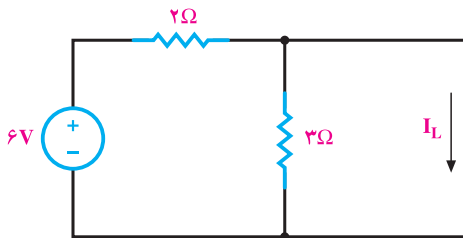
الف : در حالت ماندگار سلف، به صورت

اتصال کوتاه عمل می‌کند ؛ یعنی مدار به صورت

شکل ۱-۳۹ در می‌آید و چون دوسر مقاومت ۳

اهمی اتصال کوتاه است، پس جریان از آن

نمی‌گذرد و داریم : $I_{3\Omega} = 0$



شکل ۱-۳۹

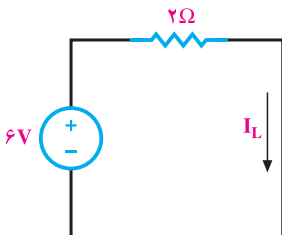
ب : در حالت ماندگار، مدار به صورت شکل ۱-۴۰ است.

در نتیجه، جریانی که از سلف می‌گذرد برابر است با :

$$I_L = \frac{6V}{2\Omega} = 3A$$

پس انرژی ذخیره شده در سلف برابر است با :

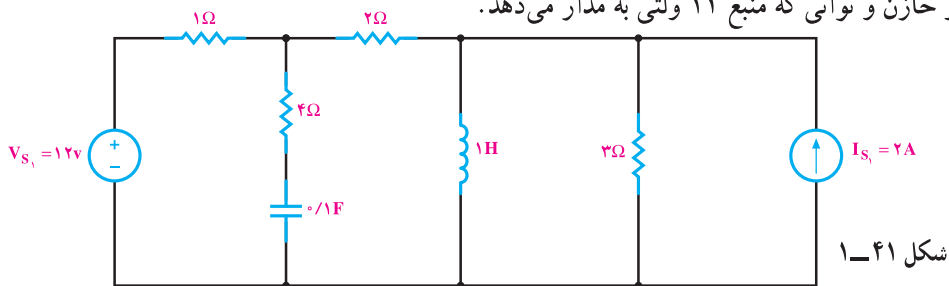
$$W_L = \frac{1}{2} LI_L^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3^2 = 4.5 \text{ ژول}$$



شکل ۱-۴۰

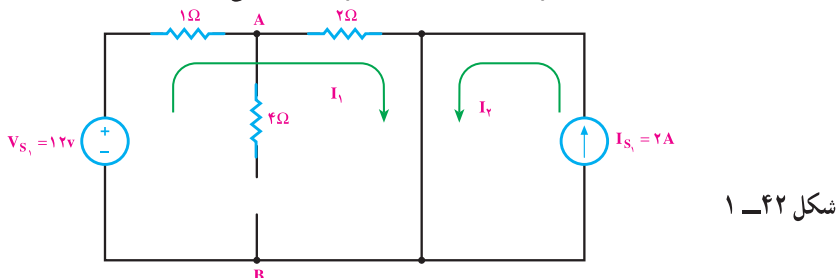
مثال ۱۷: مدار شکل ۱-۴۱ در حالت پایدار است. مطلوبست انرژی ذخیره شده در سلف

و خازن و توانی که منبع ۱۲ ولتی به مدار می‌دهد.



راه حل:

چون مدار در حالت پایدار قرار دارد، پس سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. در نتیجه، مقاومت ۳ اهم نیز اتصال کوتاه است و مدار به صورت شکل ۱-۴۲ درمی‌آید. در این حالت جریان عبوری از سلف و ولتاژ دو سر خازن به صورت زیر محاسبه می‌شود.



$$I_1 = \frac{12}{1+2} = 4A$$

$$I_2 = 2A$$

$$I_L = I_1 + I_2 = 4 + 2 = 6A \quad \text{جریان عبوری از سلف}$$

$$V_{1\Omega} = R_{1\Omega} \times I_1 = 1 \times 4 = 4V$$

$$V_{AB} = V_C = V_{S_1} - V_{1\Omega} = 12 - 4 = 8V$$

ولتاژ دو سر خازن

$$W_L = \frac{1}{2} L \cdot I_L^2 = \frac{1}{2} \times 1 \times (6)^2 = 18J$$

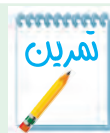
انرژی ذخیره شده در سلف

$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot V_C^2 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times (8)^2 = 3.2J$$

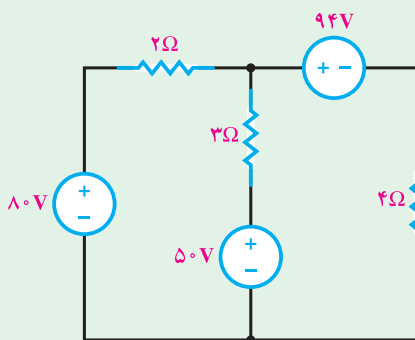
انرژی ذخیره شده در خازن

توانی که منبع ۱۲ ولت به مدار تزریق می‌کند برابر است با:

$$P_{12V} = -12 \times 4 = -48 \text{ W}$$

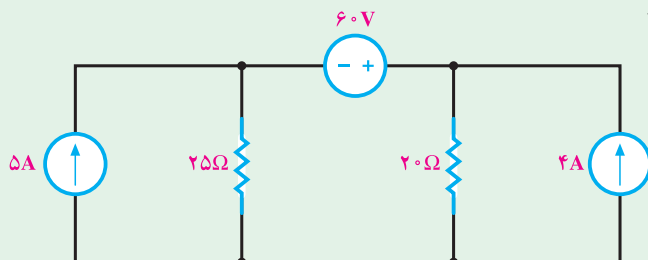


۱- در مدار شکل ۱-۴۳ با استفاده از روش جریان حلقه، توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را حساب کنید.



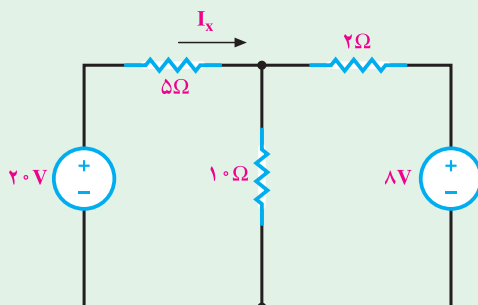
شکل ۱-۴۳

۲- در مدار شکل ۱-۴۴ با استفاده از روش جریان حلقه و بدون تبدیل منابع، توان منبع ولتاژ را محاسبه کنید.



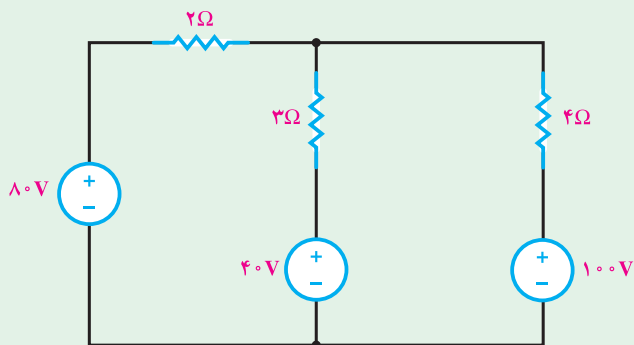
شکل ۱-۴۴

۳- با استفاده از روش پتانسیل گره و بدون تبدیل منابع جریان I_X را حساب کنید.



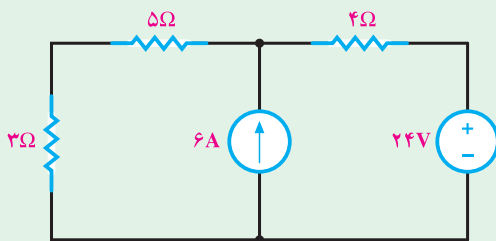
شکل ۱-۴۵

۴- در مدار شکل ۱-۴۶ با استفاده از روش پتانسیل گر و بدون تبدیل منابع توان مصرفی در مقاومت ۳ اهمی را محاسبه کنید.



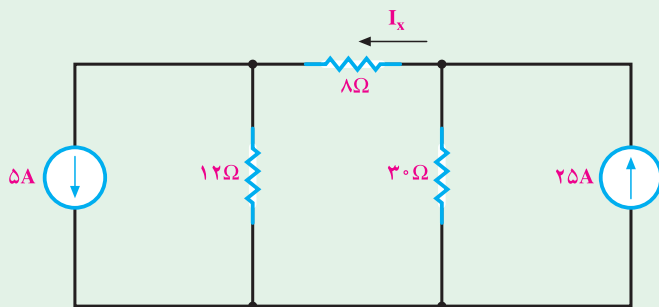
شکل ۱-۴۶

۵- در شکل ۱-۴۷ با استفاده از اصل جمع آثار، توان را در مقاومت ۳ اهمی محاسبه کنید.



شکل ۱-۴۷

۶- با استفاده از روش جمع آثار جریان I_X را در مدار شکل ۱-۴۸ حساب کنید.



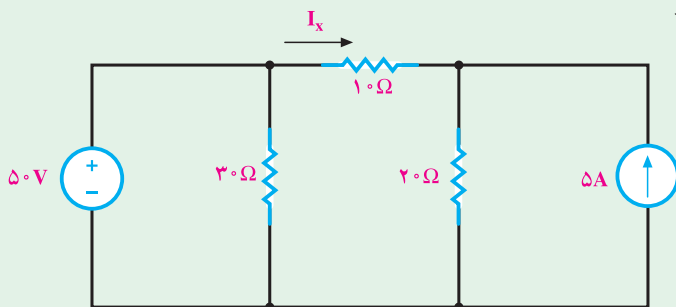
شکل ۱-۴۸

۷- در مدار شکل ۱-۴۹، مطلوب است محاسبه‌ی جریان I_X با استفاده از روش‌های

الف: اصل جمع آثار

ب: پتانسیل گره

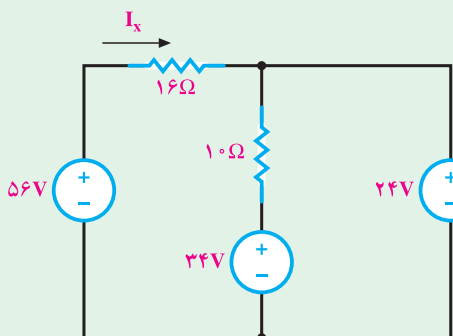
پ: جریان حلقه.



شکل ۱-۴۹

۸- در مدار شکل ۱-۴۴ ابتدا منابع جریان را به منبع ولتاژ تبدیل کنید و سپس به کمک روش جریان حلقه، جریان منبع 60 ولت را حساب کنید.

۹- در مدار شکل ۱-۴۷ ابتدا منابع ولتاژ را به منبع جریان تبدیل کنید و سپس با کمک روش پتانسیل گره جریان مقاومت 3Ω را به دست آورید.



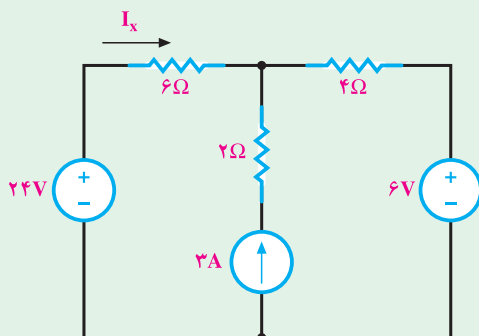
شکل ۱-۵۰

۱۰- در مدار شکل ۱-۵۰ مطلوب است:

الف: جریان I_X .

ب: توان مصرفی در مقاومت 10 اهمی.

پ: توان منبع ولتاژ 24 ولتی.



شکل ۱-۵۱

۱۱- در مدار شکل ۱-۵۱ جریان I_X را

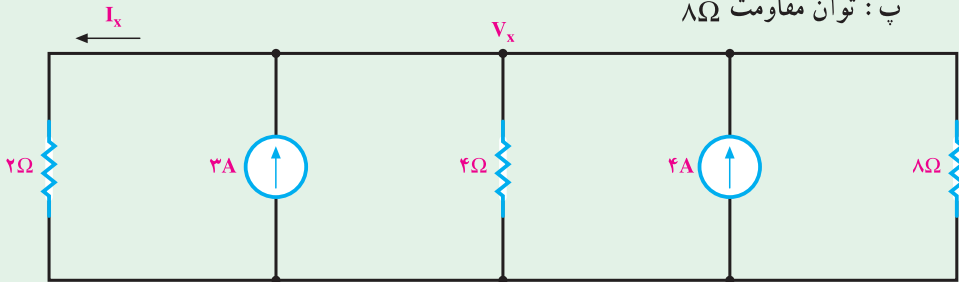
از طریق پتانسیل گره محاسبه کنید.

۱۲- در مدار شکل ۱-۵۲ مطلوب است :

الف : پتانسیل V_X

ب : جریان I_X

پ : توان مقاومت 8Ω

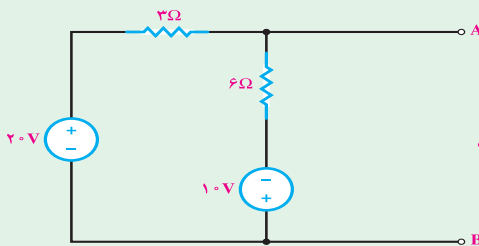


شکل ۱-۵۲

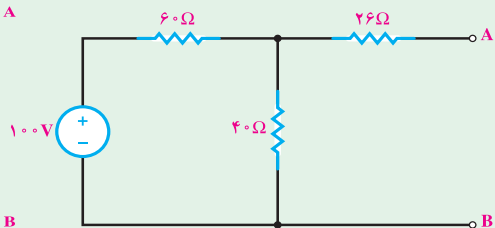
۱۳- در مدارهای شکل‌های ۱-۵۳ تا ۱-۵۶ مطلوب است :

الف : معادل تونن مدار از دو پایانه‌ی A و B .

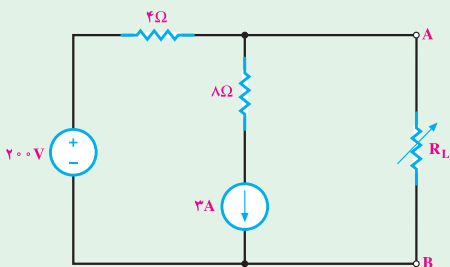
ب : معادل نورتن مدار از دو پایانه‌ی A و B .



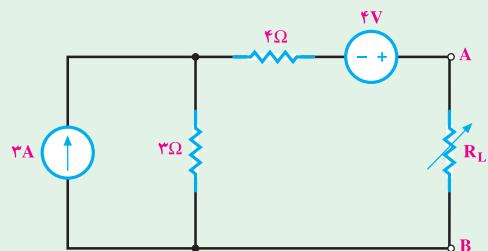
شکل ۱-۵۴



شکل ۱-۵۳

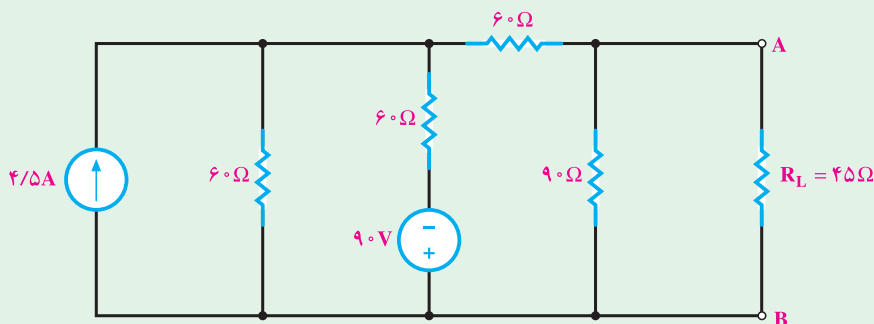


شکل ۱-۵۶



شکل ۱-۵۵

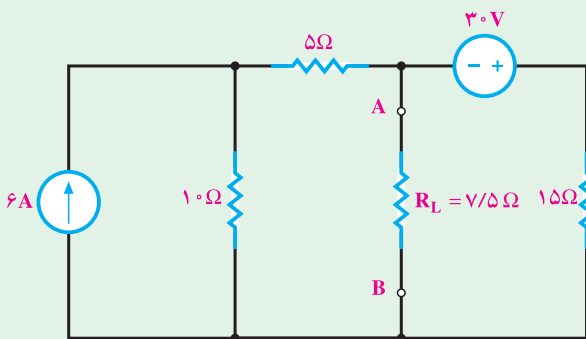
۱۴- در شکل ۱-۵۷ توان مقاومت بار (R_L) را با استفاده از معادل تونن مدار به دست آورید.



شکل ۱-۵۷

۱۵- معادل نورتن مدار شکل ۱-۵۷ را با استفاده از تبدیل تونن به نورتن به دست آورید.

۱۶- در شکل ۱-۵۸ جریان مقاومت بار (R_L) را با استفاده از معادل نورتن مدار به دست آورید.

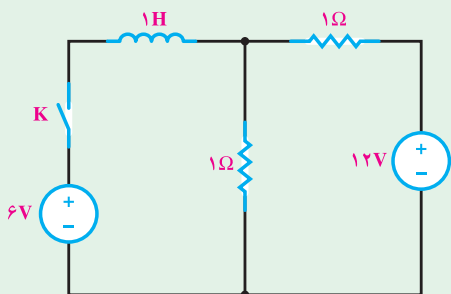


شکل ۱-۵۸

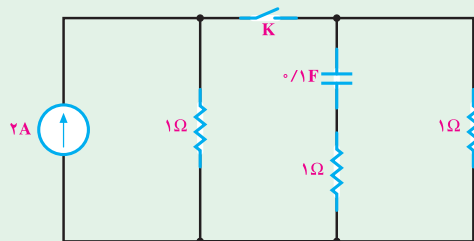
۱۷- معادل تونن مدار شکل ۱-۵۸ را با استفاده از تبدیل نورتن به تونن به دست آورید.

۱۸- در مدارهای شکل ۱-۵۹ و ۱-۶۰ پس از وصل شدن کلید و سپری شدن ۵ ثابت زمانی

انرژی ذخیره شده در سلف و خازن را حساب کنید.

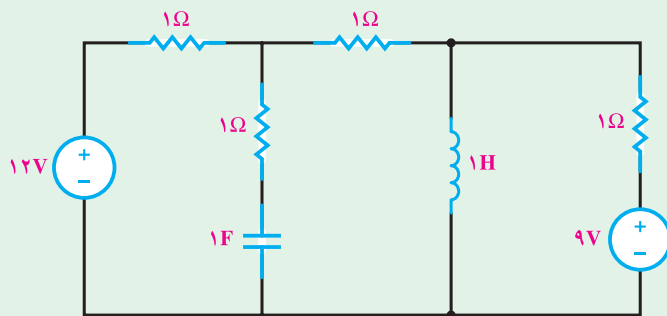


شکل ۶۰-۱



شکل ۵۹-۱

۱۹- مدار شکل ۱-۶۱ در حالت ماندگار است. توان هر کدام از منابع و انرژی ذخیره شده در سلف و خازن را حساب کنید.

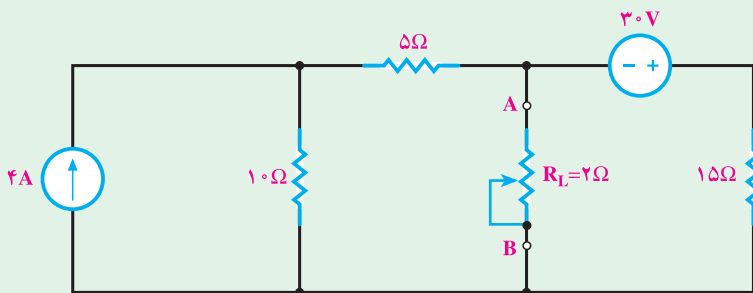


شکل ۶۱-۱

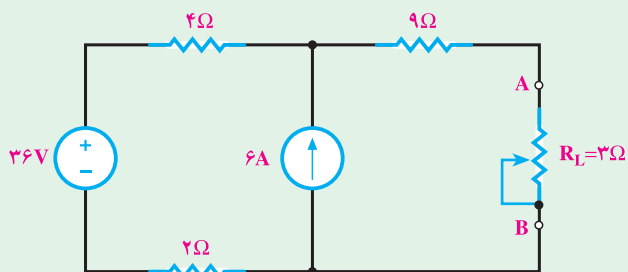
۲۰- در مدارهای شکل های ۱-۶۲ و ۱-۶۳ با استفاده از روش تونن مطلوب است :

الف : جریان R_L در شرایط فعلی مدار

ب : ماکزیمم توان انتقالی به R_L



شکل ۶۲-۱

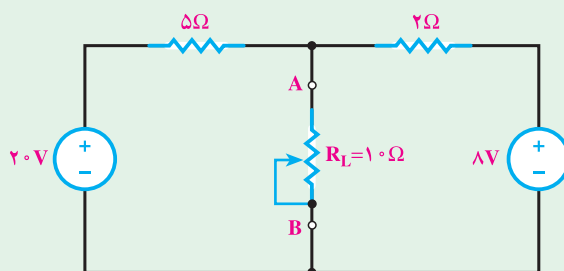


شکل ۱-۶۳

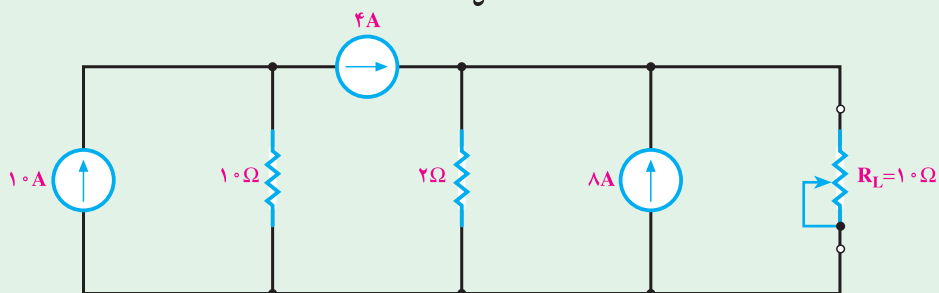
۲۱- در مدارهای شکل ۱-۶۴ و ۱-۶۵ با استفاده از روش نورتن، مطلوب است :

الف : جریان در شرایط فعلی مدار

ب : ماکزیمم توان انتقالی به R_L



شکل ۱-۶۴



شکل ۱-۶۵

بردار

هدف های رفتاری

- در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :
- ۱- بردار را تعریف کند و هم‌سنگ یک بردار را به دست آورد.
 - ۲- جمع و تفاضل بردارها را به روش هندسی معین کند.
 - ۳- برابری چندین بردار را به روش تحلیلی محاسبه کند.
 - ۴- جمع، تفاضل و ضرب داخلی دو بردار را تعریف کرده و اندازه‌ی ضرب داخلی آن‌ها را معین کند.
 - ۵- امواج متناوب سینوسی را به صورت برداری نمایش دهد.
 - ۶- مفهوم توان الکتریکی را شرح دهد.
 - ۷- توان ظاهری، حقیقی، غیر مؤثر و ضریب توان را تعریف کند.
 - ۸- توان ظاهری، حقیقی، غیر حقیقی و ضریب توان را از معادلات زمانی ولتاژ و جریان به دست آورد.
 - ۹- مثلث توان‌ها را رسم کند و از روی آن ضریب توان کل، توان اکتیو و راکتیو کل شبکه را تعیین کند.

۱-۲- مقدمه

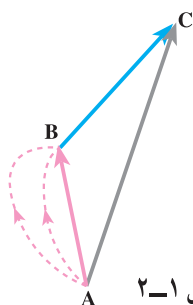
رفتار مقاومت‌های اهمی، سلفی و خازنی خالص را در جریان متناوب در دروس گذشته مطالعه کردیم و آموختیم که جریان و ولتاژ در مقاومت اهمی هم‌فاز هستند. در سلف، خالص جریان از ولتاژ دوسر سلف 90° درجه عقب‌تر و در خازن خالص جریان از ولتاژ دوسر خازن 90° درجه جلوتر است اما سلف و خازن خالص تصویری بیش نیستند و در مدارهای حقیقی نمی‌توان یک سلف یا خازن خالص پیدا

کرد. می‌دانیم یک سیم پیچ یا مقاومت سلفی از مقدار معینی هادی الکتریکی تشکیل می‌شود. هر هادی الکتریکی به طول l با توجه به رابطه‌ی $R = \rho \frac{l}{A}$ دارای مقاومت اهمی است. هم‌چنین یک خازن شارژ شده، پس از مدتی تخلیه می‌شود؛ بنابراین، خازن باید یک مقاومت اهمی داشته باشد تا از طریق آن بارهای الکتریکی تخلیه شوند. این مقاومت را **مقاومت نشتی خازن** می‌گویند. در تحلیل مدارهای الکتریکی برای کسب نتایج مطلوب، سلف و خازن حقیقی را به شکل‌های $R = L$ یا $R = C$ مدل می‌کنند. این مدل ممکن است به صورت $R = L$ یا $R = C$ سری یا موازی در نظر گرفته شود. از طرف دیگر، ممکن است مدارهای الکتریکی از ترکیب عناصر سلفی، خازنی و اهمی تشکیل شوند. بنابراین، مطالعه‌ی مدارهای C ، L و R در اتصال‌های سری و موازی ضرورت دارد. از آن‌جا که رفتار عناصر R ، L و C در جریان متناوب یکسان نیست، در یک مدار شامل R ، L و C ، برای تعیین ولتاژ قسمتی از مدار یا تعیین جریان آن، نمی‌توان از روش‌های جمع جبری ولتاژها یا جریان‌ها استفاده کرد. بدین جهت، برای تحلیل مدارهای $R = L = C$ از بردارها و عملیات برداری استفاده می‌شود. از این رو قبل از مطالعه‌ی مدارهای $R = L = C$ لازم است کمیت‌های برداری و عملیات بر روی آن‌ها را به دقت مطالعه کنیم.

۲-۲- تعریف بردار و کمیت برداری

مفهوم بعضی از کمیت‌های فیزیکی با بیان مقدار کمیت کاملاً روشن است؛ مثلاً وقتی می‌گوییم ۲۰ کیلو سیب یا به مدت ۲۰ دقیقه یا ۲۰ متر پارچه، همه مفهوم سخن ما را به طور روشن درمی‌یابند. چنین کمیت‌هایی را که با بیان اندازه کاملاً معرفی می‌شوند، **کمیت‌های عددی** یا **اسکالر** می‌گویند. اگر رهگذری که با محل زندگی شما آشنایی کافی ندارد، از شما نشانه‌ی محلی را سؤال کند، او را چنین راهنمایی می‌کنید: «۲۰۰ متر مستقیم بروید، سپس به سمت چپ بپیچید و ۵۰۰ متر جلو بروید». اگر رهگذر بدون توجه به جهت‌های گفته شده فقط ۷۰۰ متر حرکت کند، آیا به محل مورد نظر خواهد رسید؟ جواب منفی است؛ زیرا فقط طی اندازه‌ی کمیت برای رسیدن به محل نشانی کافی

نیست. باید جهت‌های گفته شده نیز رعایت شود. به چنین کمیت‌هایی که با بیان اندازه‌ی کمیت کامل نیستند و باید جهت آن‌ها مشخص شود، **کمیت برداری** می‌گویند. برای این که با کمیت‌های برداری و مشخصه‌های یک بردار بیش‌تر آشنا شویم، فرض می‌کنیم یک ذره مطابق شکل ۱-۲، موضع خود را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تغییر دهد. روشن است این جا به جایی، در مسیرهای بی‌شماری امکان‌پذیر است.



شکل ۱-۲

از نظر ما جا به جایی مؤثر، طول پاره خط \overline{AB} است. چون نقطه‌ی شروع جا به جایی A و نقطه‌ی انتهای، B است و حرکت از نقطه‌ی A به سوی نقطه‌ی B صورت گرفته است. جا به جایی ذره در مسیر AB دارای ابتدا، انتها و مقدار (\overline{AB}) است. جهت جابه‌جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B با پیکان نشان داده شده است. ذره‌ی متحرک در ادامه‌ی جابه‌جایی خود، از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C تغییر مکان می‌دهد. روشن است که جابه‌جایی مؤثر طول پاره خط \overline{BC} است. در طول جا به جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C ذره جا به جایی مؤثر \overline{AC} را خواهد داشت؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

$$(جا به جایی مسیر AC) = (جا به جایی مسیر BC) + (جا به جایی مسیر AB)$$

از طرف دیگر، در مثلث ABC مجموع دو ضلع AB و BC از اندازه‌ی ضلع سوم – یعنی AC – بزرگ‌تر است.

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

مقایسه در جمع جبری و جا به جایی نشان می‌دهد که جمع جا به جایی با جمع جبری تفاوت دارد. به طور کلی، یک کمیت برداری را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

کمیت‌های برداری کمیت‌هایی هستند که رفتار آن‌ها مانند رفتار جا به جایی است؛ دارای بزرگی^۱، جهت، ابتدا، انتها و راستا هستند و با قواعد معینی با هم جمع می‌شوند.

جا به جایی مسیر AB را به صورت \vec{AB} نشان می‌دهند و آن را بردار AB می‌گویند. در این نمایش، A ابتدای بردار، B انتها و طول پاره خط \overline{AB} ، اندازه‌ی آن و جهت این بردار از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B است. اگر در شکل ۱-۲ جا به جایی در مسیر BC را به صورت \vec{BC} نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

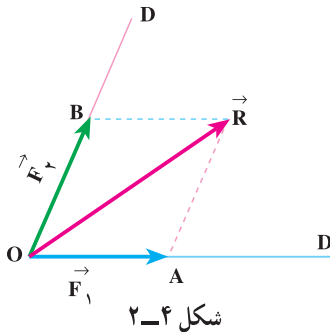
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (۱-۲)$$

۳-۲- هم‌سنگ (هم‌ارز) یک بردار

بردار \vec{AB} واقع بر راستای D را در نظر می‌گیریم. اگر از نقطه‌ی دلخواه مانند M، بردار \vec{MN} را چنان رسم کنیم که راستای آن با راستای \vec{AB} موازی بوده و اندازه‌ی آن برابر اندازه‌ی \vec{AB}

۱- بزرگی بردار را قدر مطلق، دامنه یا شدت بردار نیز می‌گویند.

۵-۲- تجزیه‌ی یک بردار به دو راستای معین



شکل ۲-۴

بردار \vec{R} و دو راستای D و D' را مطابق شکل ۲-۴

در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم بردار \vec{R} را در راستای D و D' تجزیه کنیم، کافی است از انتهای آن دو خط به موازات راستاهای

D و D' رسم کنیم. این خطوط راستای D را در نقطه‌ی B و

راستای D' را در نقطه‌ی A قطع می‌کنند. بردار $\vec{F}_1 = \vec{OA}$

را مؤلفه‌ی \vec{R} در راستای D' و بردار $\vec{F}_2 = \vec{OB}$ را مؤلفه‌ی

بردار \vec{R} در راستای D گویند. بدین ترتیب، بردار \vec{R} به دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 در راستاهای D و D' تجزیه می‌شود.

۶-۲- حاصل جمع بردارها

حاصل جمع بردارها را با روش هندسی (ترسیمی) یا روش تحلیلی (محاسبه‌ای) تعیین می‌کنند.

۱-۶-۲- روش هندسی: دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 را مطابق شکل ۲-۵ در نظر می‌گیریم. هر دو

بردار از نقطه‌ی O شروع می‌شوند و جهت مثبت آن‌ها با هم زاویه‌ی α می‌سازد.

برای تعیین براینده دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 در روش هندسی، از انتهای هر یک به موازات دیگری

خطی رسم می‌کنیم تا در نقطه‌ی C همدیگر را قطع کنند و یک متوازی‌الاضلاع به دست آید. بردار

براینده \vec{R} ، قطر متوازی‌الاضلاعی خواهد بود که بدین ترتیب ساخته می‌شود. ابتدای آن نقطه‌ی O

(نقطه‌ی شروع هر دو بردار) و انتهایش نقطه‌ی

C است. با توجه به شکل ۲-۵ می‌توان

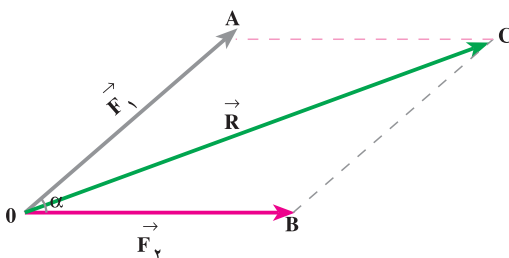
نوشت:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2-4)$$

اندازه‌ی بردار $|\vec{R}| = \overline{OC}$ است و از

رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2-5)$$



شکل ۲-۵

۲-۶-۲ روش تحلیلی: برای به دست آوردن حاصل جمع چند بردار به روش تحلیلی

در صفحه محورهاى مختصات، هم‌سنگ بردارها را مطابق شکل ۶-۲ رسم می‌کنیم. این بردارها با محور x زاویه‌هایی می‌سازند. پس از تعیین این زاویه‌ها، هر یک از بردارها را روی محورهاى افقی و عمودی تصویر می‌کنیم. سپس، جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور x به دست می‌آوریم و آن را با $\sum F_x$ نشان می‌دهیم. جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور y به دست می‌آوریم و آن را با $\sum F_y$ نشان می‌دهیم. بردار برآیند از جمع دو بردار $\sum \vec{F}_x$ و $\sum \vec{F}_y$ به دست می‌آید و اندازه و جهت آن براساس روابط زیر تعیین می‌شود:

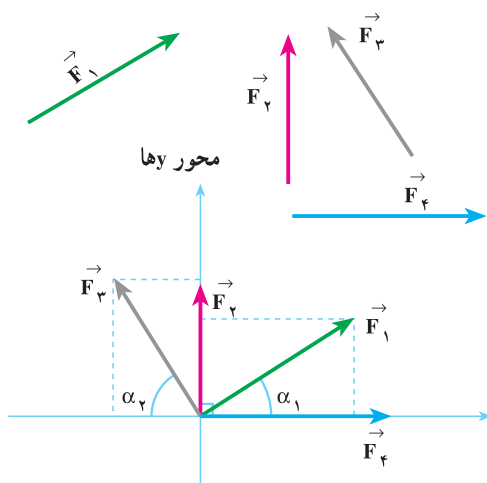
$$|\vec{R}| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (۲-۶)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \quad (۲-۷)$$

φ زاویه‌ای است که بردار برآیند با محور x می‌سازد. برای شکل ۶-۲ بردار برآیند را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\sum F_x = +|\vec{F}_1| \cos \alpha_1 + |\vec{F}_2| \cos 90^\circ + |\vec{F}_3| \cos 0^\circ - |\vec{F}_4| \cos \alpha_4 \quad (۲-۸)$$

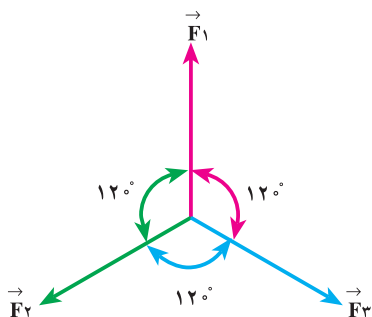
$$\sum F_y = +|\vec{F}_1| \sin(\circ) + |\vec{F}_2| \sin \alpha_1 + |\vec{F}_3| \sin 90^\circ + |\vec{F}_4| \sin \alpha_4 \quad (۲-۹)$$



شکل ۶-۲

مثال ۱: سه بردار با دامنه‌ی یکسان ۲۲°

ولتی، مطابق شکل ۲-۷ با هم زاویه‌ی ۱۲° می‌سازند. با روش تحلیلی، برآیند این سه بردار را به دست آورید.



شکل ۲-۷

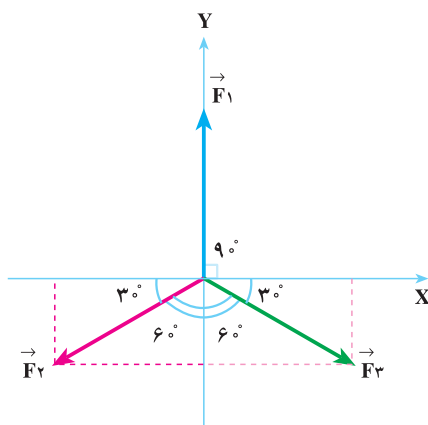
راه حل:

برای سه بردار، محورهای مختصات را چنان عبور می‌دهیم که بردار \vec{F}_1 بر محور y ها، مطابق شکل ۲-۸ منطبق شود. در این حالت، محور x ها با بردار \vec{F}_1 زاویه‌ی ۹° و با بردارهای \vec{F}_2 و \vec{F}_3 زاویه‌ی ۳° درجه تشکیل خواهد داد.

جمع جبری تصاویر بر روی محور x ها برابر است با:

$$\Sigma F_x = |\vec{F}_1| \cos 9^\circ + |\vec{F}_3| \cos 3^\circ - |\vec{F}_2| \cos 3^\circ$$

$$\Sigma F_x = ۲۲ \times (\cos 9^\circ) + ۲۲ \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - ۲۲ \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$



شکل ۲-۸

جمع جبری تصاویر بردارها بر روی محور yها برابر است با :

$$\sum F_y = |\vec{F}_1| \sin 90^\circ - |\vec{F}_2| \sin 30^\circ - |\vec{F}_3| \sin 30^\circ$$

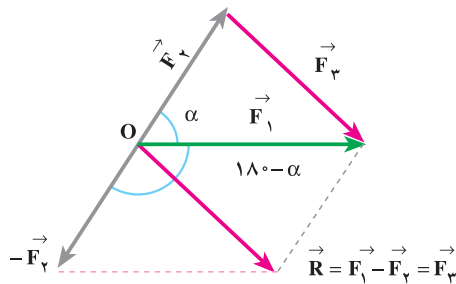
$$\sum F_y = 220 \times (1) - 220 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 220 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

بردار برآیند برابر است با :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

۲-۷- تفاضل دو بردار

در شکل ۲-۹ بردار \vec{F}_1 ، برآیند دو بردار \vec{F}_2 و \vec{F}_3 است.



شکل ۲-۹

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 \quad (2-10)$$

اگر در رابطه‌ی ۲-۱۰ بردار \vec{F}_2 را به طرف دوم تساوی انتقال دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \quad (2-11)$$

رابطه‌ی ۲-۱۱ بیان می‌کند که بردار \vec{F}_3 تفاضل دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 است. برای تعیین تفاضل

دو بردار، از ابتدای بردار \vec{F}_1 ، منفی بردار \vec{F}_2 را رسم می‌کنیم. برآیند دو بردار \vec{F}_1 و $-\vec{F}_2$ ، بردار تفاضل (\vec{R}) خواهد بود. این بردار هم‌سنگ بردار \vec{F}_3 تفاضل دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 است. بردار

$-\vec{F}_2$ با \vec{F}_1 زاویه‌ی $180^\circ - \alpha$ را می‌سازد بر اساس رابطه‌ی ۲-۵ می‌توان نوشت :

$$|\vec{R}| = |\vec{F}_3| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos(180^\circ - \alpha)} \quad (2-12)$$

اگر در رابطه‌ی ۲-۱۲ به جای $\cos(18^\circ - \alpha)$ مقدار $-\cos \alpha$ را جایگزین کنیم، دامنه‌ی تفاضل دو بردار به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{F}_3| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos \alpha} \quad (2-13)$$

در رابطه‌ی (۲-۱۳) α زاویه‌ی بین دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 است.

مثال ۲: دو نیروی $\vec{F}_1 = 8\text{N}$ و $\vec{F}_2 = 6\text{N}$ با هم زاویه‌ی 6° می‌سازند. مجموع و تفاضل

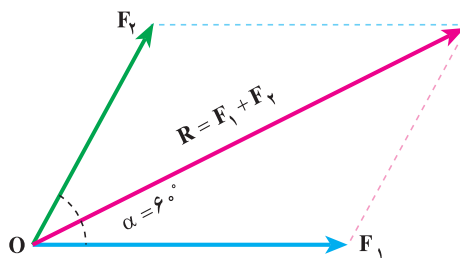
این دو بردار را به روش هندسی به دست آورید.

راه حل:

برایند دو نیروی \vec{F}_1 و \vec{F}_2 به روش هندسی مطابق شکل ۲-۱۰ به دست می‌آید.

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos \alpha}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(8)^2 + (6)^2 + 2(8)(6)\cos 6^\circ} = 12.16 \text{ نیوتن}$$



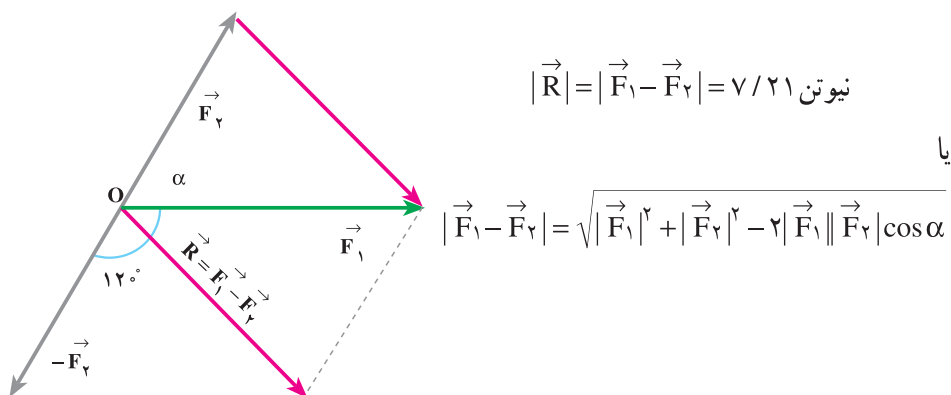
شکل ۲-۱۰ برایند مجموع \vec{F}_1 و \vec{F}_2

برای تعیین تفاضل $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ ، مطابق شکل ۲-۱۱، ابتدا منفی \vec{F}_2 را به دست می‌آوریم. با

تعیین برایند \vec{F}_1 و $-\vec{F}_2$ ، تفاضل دو بردار $(\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$ حاصل می‌شود.

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos 12^\circ}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(8)^2 + (6)^2 + 2(8)(6)(-\frac{1}{2})} = \sqrt{52}$$



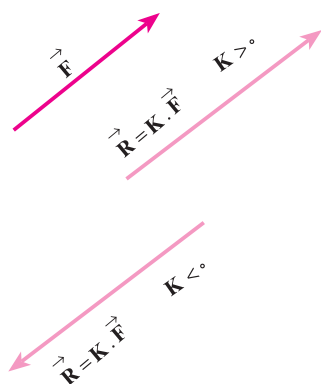
شکل ۱۱-۲ تفاضل دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2
از روش هندسی

۲-۸- ضرب بردارها

در ضرب بردارها، ضرب یک بردار در یک کمیت عددی (اسکالر) و ضرب نقطه‌ای (داخلی) را بررسی می‌کنیم.

۲-۸-۱- ضرب یک بردار در یک کمیت عددی: ضرب کمیت عددی مانند K در یک

بردار مانند \vec{F} مطابق شکل ۱۲-۲، برداری را نتیجه می‌دهد که قدر مطلق آن K برابر قدر مطلق \vec{F} است. اگر $K > 0$ باشد، بردار حاصل ضرب هم جهت با بردار \vec{F} خواهد بود و اگر $K < 0$ باشد، جهت بردار حاصل ضرب با جهت \vec{F} ، 180° درجه اختلاف خواهد داشت.

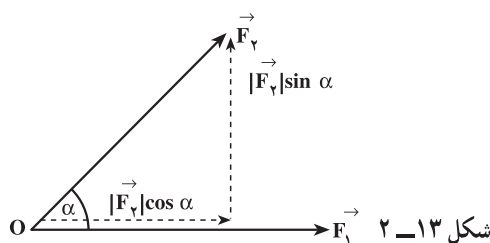


شکل ۱۲-۲

۲-۸-۲ ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار: \vec{F}_1 و \vec{F}_2 را که با هم زاویه‌ی α

می‌سازند، مطابق شکل ۲-۱۳ در نظر می‌گیریم، بردار \vec{F}_2 را به دو مؤلفه‌ی $\vec{F}_2 \cos \alpha$ و $\vec{F}_2 \sin \alpha$ که بر یک‌دیگر عمودند، تجزیه می‌کنیم. بنا به تعریف، حاصل ضرب داخلی دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 که به صورت $A = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ نشان داده می‌شود، یک کمیت عددی است. اندازه‌ی این کمیت عددی از رابطه‌ی $A = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \alpha$ محاسبه می‌شود.

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_1 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \alpha = |\vec{F}_2| |\vec{F}_1| \cos \alpha \quad (2-14)$$



کمیت‌های الکتریکی مانند توان و انرژی، کمیت‌های اسکالر یا عددی هستند. کمیت توان از حاصل ضرب عددی بردار ولتاژ (\vec{V}) و بردار جریان (\vec{I}) به دست می‌آید.

$$P = \vec{V} \cdot \vec{I} = |\vec{V}| |\vec{I}| \cos \phi \quad (2-15)$$

در رابطه‌ی ۲-۱۵، ϕ زاویه‌ی بین دو بردار \vec{V} و \vec{I} است و آن را **اختلاف فاز ولتاژ و جریان** می‌نامند.

در این کتاب با توجه به جهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ را همیشه به صورت $\theta_v - \theta_i = \phi$ (زاویه‌ی ولتاژ منهای زاویه‌ی جریان) منظور خواهیم کرد. اگر ϕ مثبت باشد، - یعنی در جهت مثلثاتی از \vec{I} به \vec{V} برسیم - جریان را پس فاز و اگر ϕ منفی باشد، - یعنی در خلاف جهت مثلثاتی از \vec{I} به \vec{V} برسیم - جریان را پیش فاز می‌نامند.

از آن‌جا که انرژی (کار) از حاصل ضرب توان در زمان به دست می‌آید ($W = P \cdot t$) و چون هر دو

کمیت توان و زمان کمیت اسکالر هستند، حاصل ضرب آن‌ها یعنی انرژی نیز کمیت اسکالر است.

مثال ۳: بردارهای $\vec{F}_1 = 1^\circ$ واحد و $\vec{F}_2 = 6^\circ$ واحد با هم زاویه‌ی 6° درجه می‌سازند.

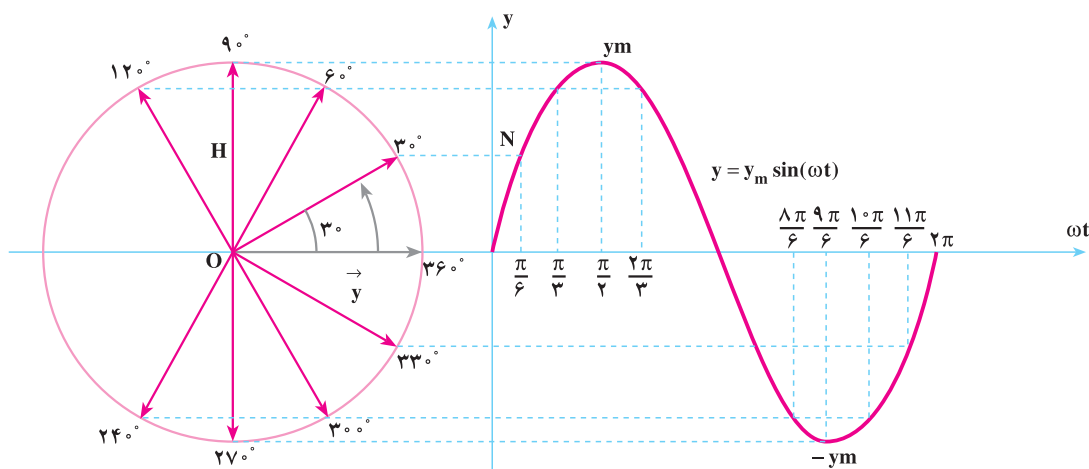
حاصل ضرب داخلی $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ را معین کنید.
راه حل:

$$A = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos 6^\circ$$

$$A = 1^\circ \times 6^\circ \times \left(\frac{1}{2}\right) = 3^\circ \quad \text{واحد}$$

۹-۲- نمایش برداری امواج متناوب سینوسی

موج سینوسی $y = y_m \sin(\omega t)$ را مطابق شکل ۱۴-۲ در نظر می‌گیریم. در هر لحظه می‌توان دامنه‌ی این موج را از تصویر بردار چرخان \vec{y} بر روی محور سینوس‌ها در دایره‌ی مثلثاتی معین کرد. بردار چرخان \vec{y} با سرعت زاویه‌ای ω در جهت مثلثاتی دوران می‌کند.

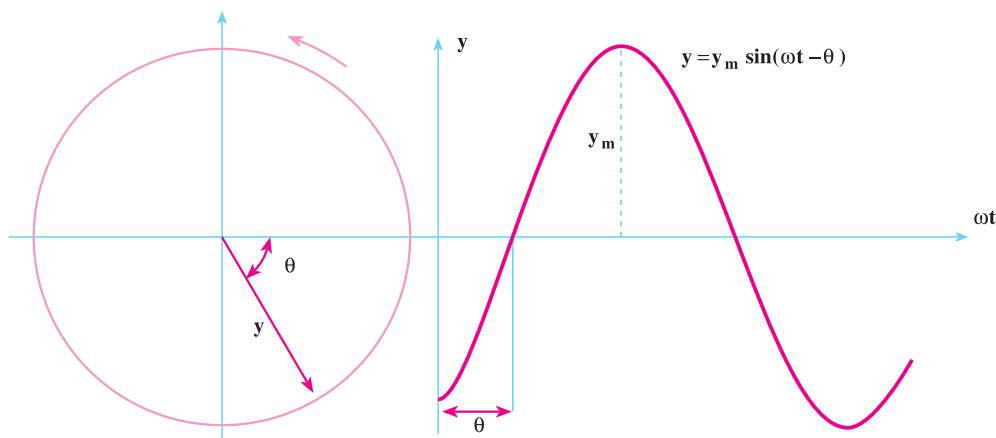


شکل ۱۴-۲

دامنه‌ی موج در $\omega t = \frac{\pi}{6}$ ، با نقطه‌ی N در روی منحنی سینوسی نشان داده شده است. این

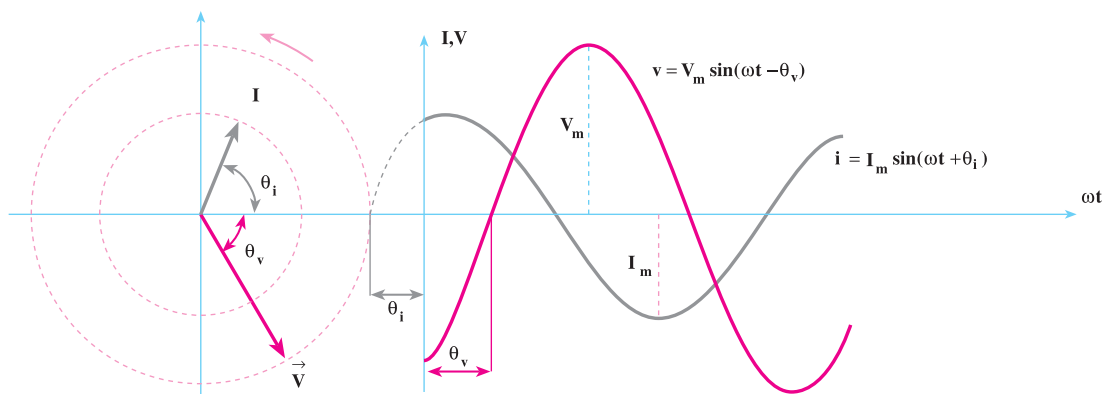
دامنه برابر پاره خط OH است. پاره خط OH تصویر بردار \vec{y} در موقعیت ON است که نسبت به موقعیت صفر، 30° در جهت مثلثاتی دوران کرده است.

امواج سینوسی، ممکن است از مبدأ مختصات شروع نشوند. مثلاً موج شکل ۲-۱۵، θ درجه عقب‌تر از مبدأ مختصات شروع می‌شود و به اصطلاح θ درجه پس فاز است. بردار این موج نسبت به محور x ها (ωt) ، θ درجه پس فاز رسم می‌شود.



شکل ۲-۱۵

در شکل ۲-۱۶ دو موج $v = V_m \sin(\omega t - \theta_v)$ و $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، بردار \vec{V} متناسب با دامنه V_m به اندازه $-\theta_v$ عقب‌تر از محور x ها (ωt) رسم شده است. بردار \vec{I} متناسب با دامنه I_m ، به اندازه $+\theta_i$ جلوتر رسم می‌شود. روشن است اختلاف فاز دو بردار \vec{V} و \vec{I} ، $\phi = -\theta_v - \theta_i = -(\theta_v + \theta_i)$ خواهد بود. علامت ϕ منفی است، زیرا جریان پیش فاز است.



شکل ۲-۱۶

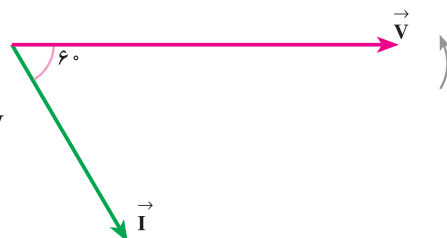
برای نشان دادن جریان و ولتاژ سینوسی به صورت برداری، در شکل های ۱۴-۲ تا ۱۶-۲، اندازه‌ی بردارها برابر دامنه‌ی ماکزیمم موج جریان و ولتاژ رسم شده است. از آن جا که در محاسبه‌ها معمولاً مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان به کار می‌رود، می‌توان اندازه‌ی این بردارها را برابر با مقدار دامنه‌ی مؤثر امواج رسم کرد.

مثال ۴: معادله‌ی زمانی دو کمیت جریان و ولتاژ به صورت $i = 20\sqrt{2} \sin(50\pi t - 60^\circ)$ و $v = 200\sqrt{2} \sin(50\pi t)$ است. پس از رسم بردارهای فاز \vec{V} و \vec{I} ، حاصل ضرب عددی $P = \vec{V} \cdot \vec{I}$ را معین کنید.

راه حل: در رسم بردارهای فاز، لازم است دامنه‌ی مؤثر و زاویه‌ی فاز بردارها تعیین گردد و در محورهای مختصات با توجه به پس فاز یا پیش فاز بودن آن‌ها رسم شود. بردار جریان دارای مقدار مؤثر $|\vec{I}| = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ و بردار ولتاژ دارای مقدار مؤثر $|\vec{V}| = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ است. زاویه‌ی فاز بردار جریان $\theta_i = -60^\circ$ و زاویه‌ی فاز ولتاژ $\theta_v = 0^\circ$ است. بنابراین، اختلاف فاز بین بردار جریان و ولتاژ برابر $\phi = \theta_v - \theta_i = 0^\circ - (-60^\circ) = 60^\circ$ خواهد بود و مقدار آن $\phi = 60^\circ$ درجه محاسبه می‌شود.

$$P = \vec{V} \cdot \vec{I} = |V||I|\cos\phi$$

$$P = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos 60^\circ = 2000 \text{ W}$$



۱۰-۲- توان الکتریکی

انرژی الکتریکی تولیدی یا مصرفی در یک ثانیه را **توان الکتریکی** می‌گویند. اگر آهنگ جذب یا تولید انرژی الکتریکی یک دستگاه ثابت باشد، توان دستگاه، مقدار کار انجام یافته در واحد زمان است و از رابطه‌ی $P = \frac{W}{t}$ تعیین می‌شود. واحد کار، ژول و واحد زمان، ثانیه است. یک ژول بر ثانیه را وات (واحد توان) می‌گویند. هر هزار وات یک کیلووات (KW) و هر یک میلیون وات یک مگاوات (MW) نامیده می‌شود.

$$1 \text{ KW} = 1000 \text{ W} \quad (\text{یک کیلو وات})$$

$$1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W} \quad (\text{یک مگا وات})$$

در جریان متناوب (AC) توان الکتریکی در چندین مفهوم بررسی می‌شود. این مفاهیم عبارت‌اند از:

توان ظاهری^۱، توان مؤثر^۲، توان غیر مؤثر^۳.

۱-۲- توان مؤثر: مقدار P_e را **توان مؤثر** یا توان مفید می‌گویند. در مدارهای الکتریکی این توان، کار مؤثر را انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی‌های دیگر توسط توان الکتریکی قابل توجیه است. ضمناً در مقاومت‌های اهمی، این توان به صورت انرژی حرارتی ظاهر می‌شود و از رابطه‌ی ۱۶-۲ به دست می‌آید. در این رابطه $\cos \phi$ را **ضریب توان** می‌گویند. هر چه ضریب توان به یک نزدیک‌تر شود، اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ (ϕ) به صفر نزدیک می‌شود و توان مؤثر افزایش می‌یابد. در سیستم SI واحد توان مؤثر «وات» [W] است.

$$P_e = V_e I_e \cos \phi \quad [W] \quad (2-16)$$

۲-۱-۲- توان غیر مؤثر: در عناصر غیر فعال نظیر مقاومت‌های سلفی و خازنی، توان غیر مؤثری ظاهر می‌شود که نمی‌توان آن را به کار مفید تبدیل کرد. این توان به شکل موج سینوسی بین مصرف‌کننده و شبکه رفت و برگشت می‌کند و کاری انجام نمی‌دهد. در شبکه‌های الکتریکی به هنگام بهره‌گیری از خواص سلفی و خازنی در ایجاد میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی، توان غیر مؤثر به طور ناخواسته در شبکه ظاهر می‌شود. این امر موجب می‌شود که مولدها نتوانند در جریان نامی توان مفید کامل به شبکه تحویل دهند. در سیستم SI واحد توان غیر مؤثر «وار» [VAR] است. توان غیر مؤثر با رابطه‌ی ۱۷-۲ بیان می‌شود:

$$P_d = V_e I_e \sin \phi \quad [VAR] \quad (2-17)$$

چون در خازن‌ها جریان پیش‌فاز است، $\phi = \theta_v - \theta_i$ منفی می‌شود و توان P_d را با علامت منفی خواهیم داشت. از آن‌جا که در مقاومت‌های سلفی $\phi = \theta_v - \theta_i > 0^\circ$ است، توان غیر مؤثر با علامت مثبت خواهد شد.

واحد توان غیر مؤثر در سیستم SI، ولت آمپر راکتیو است و با نماد V.A.R نشان داده می‌شود. هزار ولت آمپر راکتیو را کیلو ولت آمپر راکتیو می‌گویند و با علامت اختصاری KVA.R

۱- توان ظاهری را با علائم اختصاری P_s یا S نشان می‌دهند.

۲- توان مؤثر را توان اکتیو، واته و مفید نیز می‌گویند و آن را با علائم اختصاری P_e ، P_a ، P_w و P نشان می‌دهند.

۳- توان غیر مؤثر را توان راکتیو، دواته، غیر مفید نیز می‌گویند و آن را با علائم اختصاری P_d و P_r و Q نشان می‌دهند.

نشان می‌دهند. یک مگا ولت آمپر راکتیو (MV.A.R) برابر یک میلیون ولت آمپر راکتیو است.

۳-۱۰-۲ توان ظاهری: حاصل ضرب ولتاژ و جریان مؤثر را **توان ظاهری** می‌گویند و آن را با علامت اختصاری P_s یا S نشان می‌دهند. در سیستم SI، واحد توان ظاهری ولت آمپر (V.A) است. هزار برابر V.A را کیلو ولت آمپر می‌گویند و با علامت اختصاری K.V.A نشان می‌دهند. یک میلیون برابر V.A را مگا ولت آمپر می‌نامند و علامت اختصاری مشخصه‌ی آن M.V.A است. توان ظاهری از رابطه‌ی ۱۸-۲ به دست می‌آید.

$$P_s = V_e I_e \quad [V.A] \quad (2-18)$$

۴-۱۰-۲ ارتباط توان مفید و غیر مفید با توان ظاهری: بر اساس روابط ۱۶-۲ و ۱۷-۲ می‌توان نوشت:

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad [W]$$

اگر روابط ۱۶-۲ و ۱۷-۲ را مجذور کنیم، خواهیم داشت:

$$P_e^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi \quad (2-19)$$

$$P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi \quad (2-20)$$

توجه داشته باشید اگر مقدار P_d منفی هم باشد، P_d^2 همیشه مثبت است. دو رابطه‌ی ۱۹-۲ و ۲۰-۲ را جمع می‌کنیم. با توجه به این که $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ است، خواهیم داشت:

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi$$

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

بنابراین:

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 = (V_e I_e)^2$$

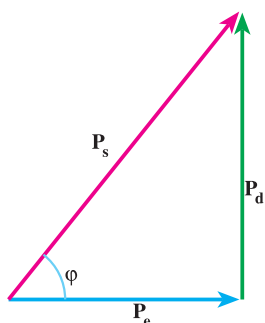
با توجه به رابطه‌ی ۱۸-۲، $V_e I_e$ توان ظاهری است؛ بنابراین:

$$P_e^2 + P_d^2 = P_s^2$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} \quad (2-21)$$

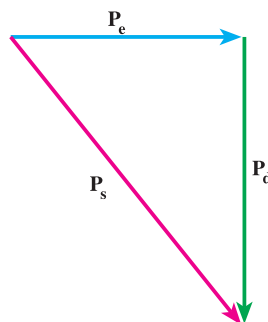
۵-۱۰-۲- مثلث توان‌ها: با توجه به رابطه‌ی ۲۱-۲، می‌توان گفت P_s توان ظاهری و تر

مثلث قائم الزامیه‌ای است که دو ضلع قائم آن توان‌های مؤثر و غیر مؤثر هستند. در رسم مثلث توان‌ها، توان مؤثر P_e را در راستای محور x ها رسم می‌کنند. از آن‌جا که در مقاومت خازنی و مقاومت سلفی خالص، جریان‌ها از ولتاژ به ترتیب 90° درجه پیش فاز و 90° درجه پس فاز است، اختلاف فاز φ در مقاومت خازنی منفی و مقاومت سلفی مثبت خواهد بود. به همین علت، توان راکتیو مربوط به مقاومت سلفی مثبت و بالای محور y ها و توان راکتیو مربوط به خازن منفی پایین محور y ها رسم می‌شوند. توان‌های راکتیو در مقاومت سلفی و خازنی به علت آن‌که 180° درجه با هم اختلاف فاز دارند، در جهت خلاف یک‌دیگر بر شبکه تأثیر خواهند گذاشت. اگر شبکه از چندین شاخه تشکیل شده باشد، می‌توانیم، توان شاخه‌ها را به دنبال هم رسم کنیم و توان مؤثر و غیر مؤثر کل شبکه را به دست آوریم و آن‌گاه توان ظاهری را معلوم کنیم.



ب: مثلث توان‌ها با توان راکتیو مثبت (سلفی)

(پس فاز $\varphi > 0$)



الف: مثلث توان‌ها با توان راکتیو منفی (خازنی)

(پیش فاز $\varphi < 0$)

شکل ۱۷-۲- مثلث توان‌ها

در مثلث توان‌ها می‌توان نوشت:

$$P_e = P_s \cos \varphi, \quad P_d = P_s \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{P_d}{P_e} \Rightarrow P_d = P_e \tan \varphi$$

مثال ۵: در یک مدار الکتریکی معادله‌ی ولتاژ $v = 20 \sin(\omega t + 8^\circ)$ و معادله‌ی جریان

$i = 5 \sin(\omega t + 2^\circ)$ است. توان‌های حقیقی، غیر مؤثر و ظاهری مدار را به دست آورید و مثلث

توان‌ها را رسم کنید.

راه حل:

$$V_m = 200V \Rightarrow V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}V$$

$$I_m = 5A \Rightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2.5\sqrt{2}A$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i$$

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ از تفاوت زاویه فازهای بردار ولتاژ و جریان به دست می‌آید.

$$\varphi = 8^\circ - 2^\circ = 6^\circ$$

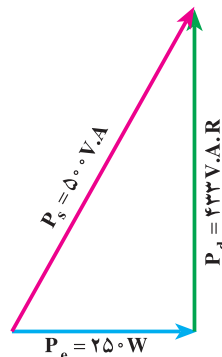
$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = 100\sqrt{2} \times 2.5\sqrt{2} \cos 6^\circ = 250W$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = 100\sqrt{2} \times 2.5\sqrt{2} \sin 6^\circ = 433 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2}$$

$$P_s = \sqrt{250^2 + 433^2} = 500 \text{ V.A}$$

شکل ۱۸-۲- مثلث توان‌ها



مثال ۶: یک شبکه‌ی الکتریکی دارای مصرف‌کننده‌هایی با مشخصات زیر است:

۱- مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۱ $P_s = 300 \text{ V.A}$, $\varphi = 3^\circ$

۲- مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۲ $P_e = 200W$, $\varphi = -6^\circ$

۳- مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۳ $P_d = 400 \text{ V.A.R}$, $P_s = 500 \text{ V.A}$

مثلث توان‌های مصرف‌کننده‌ها را به دنبال هم رسم کنید و توان مؤثر، راکتیو و ظاهری شبکه را

به دست آورید.

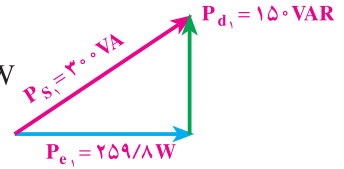
راه حل:

برای مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۱ داریم:

$$P_{s_1} = 300 \cdot V.A \quad , \quad \varphi_1 = 30^\circ$$

$$P_{e_1} = P_{s_1} \cos \varphi_1 = 300 \cdot \cos 30^\circ = 150 \cdot \sqrt{3} = 259.8 \text{ W}$$

$$P_{d_1} = P_{s_1} \sin \varphi_1 = 300 \cdot \sin 30^\circ = 150 \cdot V.A.R$$

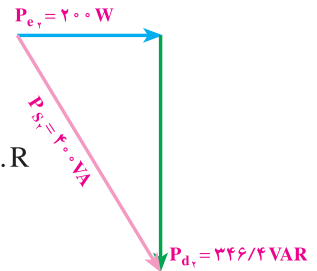


برای مصرف کننده ی شماره ی ۲ داریم :

$$P_{e_2} = 200 \text{ W} \quad , \quad \varphi_2 = -60^\circ$$

$$P_{s_2} = \frac{P_{e_2}}{\cos \varphi_2} = \frac{200}{\cos(-60^\circ)} = 400 \text{ V.A}$$

$$P_{d_2} = P_{e_2} \tan \varphi_2 = 200 \cdot \tan(-60^\circ) = -200 \cdot \sqrt{3} = -346.4 \text{ V.A.R}$$



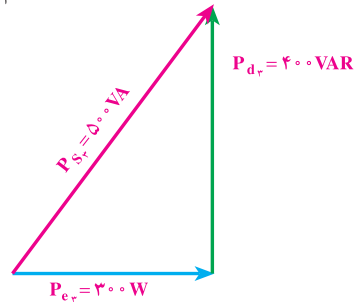
برای مصرف کننده ی شماره ی ۳ داریم :

$$P_{d_3} = 400 \text{ V.A.R} \quad , \quad P_{s_3} = 500 \text{ V.A}$$

$$P_{s_3}^2 = P_{e_3}^2 + P_{d_3}^2$$

$$500^2 = P_{e_3}^2 + 400^2 \Rightarrow P_{e_3}^2 = 90000$$

$$P_{e_3} = 300 \text{ W}$$



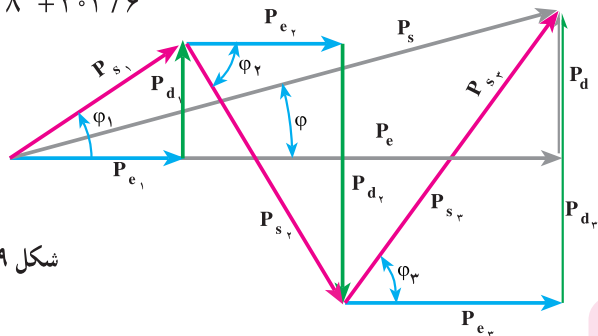
با توجه به شکل ۱۹-۲ می توان نوشت :

$$P_e = P_{e_1} + P_{e_2} + P_{e_3} = 259.8 + 200 + 300 = 759.8 \text{ W}$$

$$P_d = P_{d_1} + P_{d_2} + P_{d_3} = 150 - 346.4 + 400 = 203.6 \text{ V.A}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{759.8^2 + 203.6^2}$$

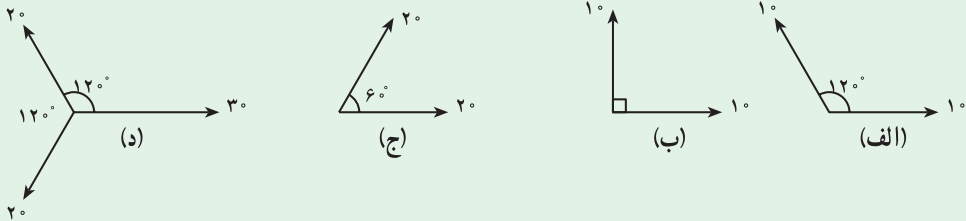
$$P_s = 786.6 \text{ V.A}$$



شکل ۱۹-۲



۱- برآیند بردارهای اشکال زیر را به دو روش تحلیلی و هندسی به دست آورید.



جواب: الف - ۱۰ ب - ۱۴/۱ ج - ۳۴/۶ د - ۱۰

۲- دو بردار $\vec{F}_1 = 10^\circ$ و $\vec{F}_2 = 20^\circ$ مفروض است. اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\alpha = 60^\circ$ باشد، مطلوب است:

الف - $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ب - $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ پ - $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ ت - $\vec{F}_1 \cdot 2\vec{F}_2$
 جواب: الف - ۲۶/۴ ب - ۱۷/۳ پ - ۱۰۰ ت - ۲۰۰

۳- برآیند دو بردار $\vec{F}_1 = 3$ و $\vec{F}_2 = 4$ برابر $\vec{R} = 5$ می‌باشد زاویه‌ی بین این دو بردار چند درجه است؟

جواب: $\alpha = 90^\circ$

۴- در یک مدار الکتریکی معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $V = 200 \sin 100^\circ t$ و $i = 10 \sin(100^\circ t - 53^\circ)$ مطلوب است الف - رسم دیاگرام برداری ب - محاسبه‌ی توان‌های حقیقی، غیر حقیقی و ظاهری مدار.

جواب: 1000 VA ، $+800 \text{ VAR}$ ، 600 W

۵- در یک مدار الکتریکی، معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $V = 50\sqrt{2} \sin 250^\circ t$ و $i = 10\sqrt{2} \sin(250^\circ t + 3^\circ)$ مطلوب است:

الف - رسم دیاگرام برداری

ب - محاسبه‌ی توان‌های حقیقی، غیر مؤثر و ظاهری مدار.

جواب: 500 VA ، -250 VAR ، 433 W

۶- توان مؤثر و غیر مؤثر یک مصرف کننده با توان ظاهری 100VA و ضریب توان 0.8 پس فاز را به دست آورید.

جواب: 80W و 60VAR +

۷- در یک شبکه ی الکتریکی دو مصرف کننده با مشخصات زیر وجود دارند:

بار شماره ی یک: پس فاز 0.8 ، $\cos \phi = 0.8$ ، $P_{e1} = 5\text{KW}$

بار شماره ی دو: پیش فاز $2\sqrt{3}\text{KW}$ ، $P_{e2} = 2\sqrt{3}\text{KW}$ ، $P_{d2} = 2\text{K.V.A.R}$ ،
مطلوب است:

الف- رسم مثلث توان ها به دنبال همدیگر

ب- محاسبه ی ضریب قدرت کل شبکه

جواب: $\cos \phi = 0.97$

۸- یک شبکه ی الکتریکی با دو بار به مشخصات زیر مفروض است. ضریب قدرت شبکه با در

نظر گرفتن دو بار با هم چه قدر است؟

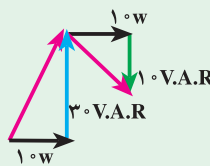
بار شماره ی یک: $P_{S1} = 100\sqrt{2}\text{V.A}$ ، $P_{e1} = 100\text{W}$ پس فاز.

بار شماره ی دو: $P_{S2} = 40\sqrt{2}\text{V.A}$ ، $P_{d2} = 40\text{V.A.R}$ پیش فاز.

جواب: $\cos \phi = 0.91$

۹- دیاگرام توان یک مدار الکتریکی جریان متناوب مطابق شکل زیر است. ضریب توان کل

شبکه چه قدر است؟



جواب: $\cos \phi = 0.7$

مدارهای $R - L$ جریان متناوب

هدف های رفتاری

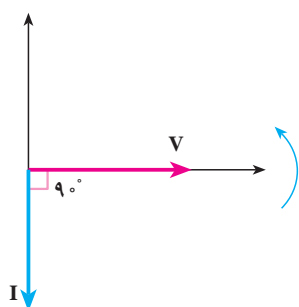
در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :

- ۱- مقادیر جریان، ولتاژ، اختلاف فاز، مقاومت ظاهری، ضریب توان، توان های مؤثر، غیر مؤثر، ظاهری را در مدارهای $R - L$ (سری و موازی) محاسبه کند.
- ۲- دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای $R - L$ سری و جریان ها را در مدارهای $R - L$ موازی رسم کند.
- ۳- ضریب کیفیت مدارهای $R - L$ سری و موازی را محاسبه کند.
- ۴- اثر تغییرات فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان و ضریب قدرت در مدارهای $R - L$ سری و موازی تشریح کند.
- ۵- منحنی های اثر تغییرات فرکانس بر روی پارامترهای امپدانس و جریان در مدارهای $R - L$ سری و موازی را با استفاده از معادله آن و از طریق نقطه یابی رسم کند.
- ۶- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای RL سری و موازی را به دست آورد.
- ۷- مدارهای RL سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

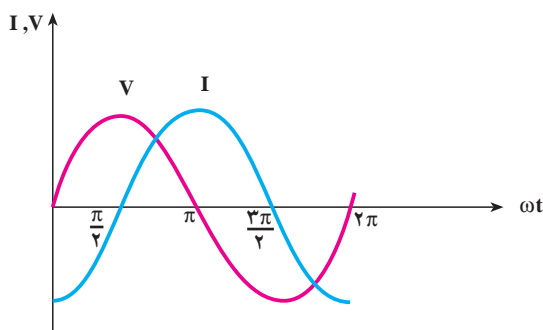
۱-۳- مقدمه

در سال گذشته، رفتار مقاومت اهمی خالص و سلف خالص را در جریان متناوب خواندیم و آموختیم که جریان و ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، هم فاز هستند؛ یعنی، منحنی تغییرات جریان و ولتاژها با هم به حداکثر یا حداقل می رسد. در سلف خالص، جریان از ولتاژ دو سر آن، 90° درجه ی

الکتریکی عقب‌تر است. با توجه به منحنی تغییرات جریان و ولتاژ در عناصر اهمی و سلفی خالص، دیاگرام برداری جریان و ولتاژ مطابق شکل‌های ۳-۱ و ۳-۲ خواهد بود.

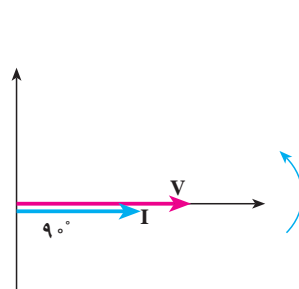


ب: دیاگرام برداری جریان و ولتاژ

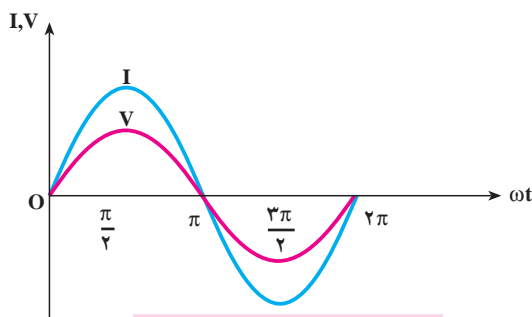


الف: منحنی تغییرات جریان و ولتاژ

شکل ۳-۱- منحنی تغییرات و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ در سلف خالص



ب: دیاگرام برداری ولتاژ و جریان

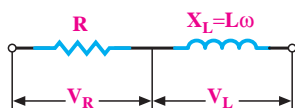


الف: منحنی تغییرات ولتاژ و جریان

شکل ۳-۲- منحنی تغییرات جریان و ولتاژ در مقاومت اهمی خالص و دیاگرام برداری آنها

۳-۲- مدار معادل الکتریکی یک سلف حقیقی

وجود مدارهای سلفی در موتورها، مولدها، ترانسفورماتورها و دستگاه‌های اندازه‌گیری الکتریکی و مدارات الکترونیکی و مخابراتی ایجاب می‌کند تا این عنصر را از منظر واقعی آن مطالعه کنیم. از آن‌جا که یک سیم پیچ (بوبین) از هادی



شکل ۳-۳- مدل یک مقاومت سلفی حقیقی

الکتریکی با یک طول معین ساخته می‌شود و با توجه به رابطه‌ی $R = \rho \frac{l}{A}$ ، سلف حقیقی علاوه بر راکتانس از مقاومت اهمی نیز برخوردار است، رفتار سلف حقیقی با رفتار مقاومت‌های سلف خالص (ایده‌آل) در مدارهای الکتریکی متفاوت خواهد بود. از این رو، یک سلف را مطابق شکل ۳-۳ به صورت یک راکتانس القایی و یک مقاومت اهمی سری با آن مدل می‌کنند. راکتانس القایی را با X_L نشان می‌دهند که، با توجه به رابطه‌ی $X_L = 2\pi fL$ به فرکانس شبکه بستگی دارد. در جریان DC به علت $f = 0$ ، راکتانس سلف، صفر است و سلف فقط خاصیت اهمی خواهد داشت. مقاومت یک سیم‌پیچ در جریان DC کم‌تر از مقاومت آن در جریان متناوب است. مقاومتی که یک سلف واقعی در جریان متناوب نشان می‌دهد، مقاومت ظاهری یا **امپدانس**^۱ نامیده می‌شود، و آن را با Z نشان می‌دهند که واحد آن اهم است. مقاومت ظاهری عناصر غیرفعال الکتریکی در جریان متناوب از رابطه‌ی عمومی ۳-۱ محاسبه می‌شود.

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} \quad (3-1)$$

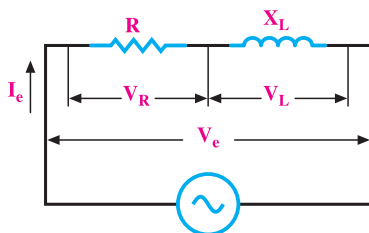
$$V_e = ZI_e \text{ و } V_m = ZI_m \quad (3-2)$$

۳-۳ محاسبه‌ی امپدانس مدار R - L سری

مدار ساده‌ی یک مقاومت اهمی و یک مقاومت سلفی با اتصال سری در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. این مدار می‌تواند معادل مدار یک سیم‌پیچ یا یک مقاومت القایی حقیقی باشد. در این مدار سری جریان I_e ، از مقاومت اهمی R و راکتانس القایی X_L عبور می‌کند. بنابراین، ولتاژهای دو سر مقاومت اهمی و مقاومت سلفی مطابق روابط ۳-۳ و ۳-۴ خواهند بود.

$$V_R = R \cdot I_e \quad (3-3)$$

$$V_L = X_L \cdot I_e = 2\pi fL \cdot I_e = L\omega I_e \quad (3-4)$$



شکل ۳-۴ مدار الکتریکی R - L سری

^۱ Impedance

ولتاژ V_R با جریان I_e هم فاز است ولی ولتاژ V_L از جریان I_e ، 90° درجه الکتریکی جلوتر خواهد بود. V_L و V_R هم فاز نیستند؛ بنابراین، برای محاسبه‌ی V_e از جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_L$ استفاده می‌شود. از آن جا که جریان در همه‌ی عناصر مدارهای سری یکسان است، برای محاسبه‌ها و تحلیل مدار، جریان را مبنا قرار می‌دهند و بقیه‌ی مشخصات مدار را براساس جریان تعیین می‌کنند. اگر معادله‌ی زمانی جریان را به صورت $i = I_m \sin \omega t$ فرض کنیم، معادله‌های زمانی ولتاژ V_R و V_L از روابط ۳-۵ و ۳-۶ تعیین خواهند شد.

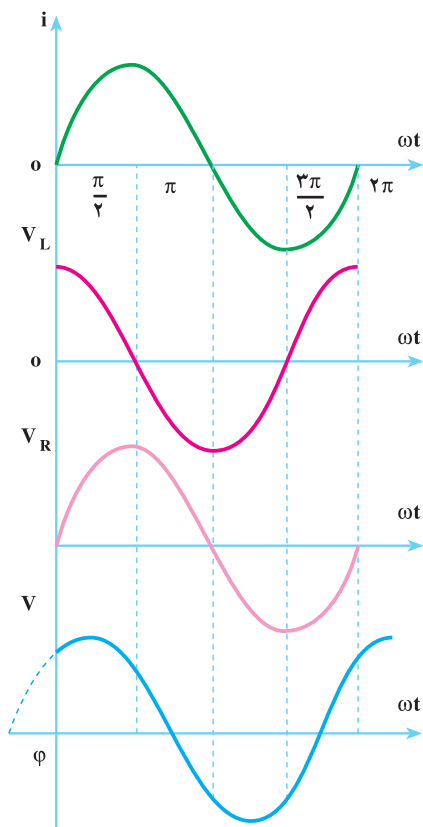
$$v_R = R \cdot I_m \sin \omega t$$

$$(3-5)$$

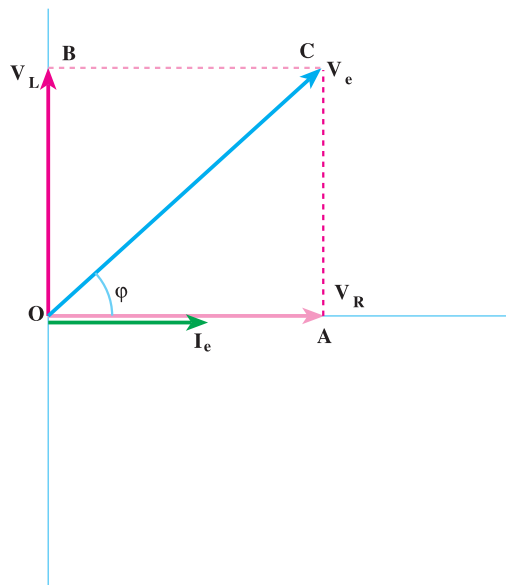
$$v_L = X_L \cdot I_m \sin(\omega t + 90^\circ)$$

$$(3-6)$$

از روابط ۳-۵ و ۳-۶ با توجه به منحنی تغییرات V_L و V_R ، دیاگرام برداری مطابق شکل ۳-۵ ب رسم می‌شود.



الف: منحنی تغییرات V, V_L, V_R, i در مدار R-L سری



ب: دیاگرام برداری مدار R-L سری

شکل ۳-۵

از شکل ۵-۳-ب دیاگرام برداری، می‌توان نوشت :

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= \vec{OA} + \vec{AC} \\ \vec{OA} &= \vec{V}_R \\ \vec{OC} &= \vec{V}_e \\ \vec{AC} &= \vec{OB} = \vec{V}_L \\ V_e &= V_R + V_L\end{aligned}\quad (3-7)$$

با منظور کردن روابط ۲-۳، ۳-۳ و ۴-۳ در رابطه‌ی ۷-۳ خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}(ZI_e)^2 &= (I_e R)^2 + (I_e X_L)^2 \\ I_e^2 Z^2 &= I_e^2 R^2 + I_e^2 X_L^2 = I_e^2 (R^2 + X_L^2)\end{aligned}\quad (3-8)$$

اگر طرفین رابطه‌ی ۸-۳ را به I_e^2 تقسیم کنیم، امپدانس مدار R - L سری مطابق رابطه‌ی ۹-۳ به‌دست خواهد آمد.

$$\begin{aligned}Z^2 &= R^2 + X_L^2 \\ Z &= \sqrt{R^2 + X_L^2}\end{aligned}\quad (3-9)$$

۳-۴-۳ اختلاف فاز و ضریب توان مدار R - L سری

۱-۴-۳-۳ اختلاف فاز: زاویه‌ی بین ولتاژ V_e و جریان I_e را **اختلاف فاز** می‌گویند و با حرف φ نشان می‌دهند.

از شکل ۵-۳-ب زاویه‌ی φ مطابق رابطه‌ی ۱۰-۳ در مدار R - L سری محاسبه می‌شود.

$$\tan \varphi = \frac{AC}{OA} = \frac{V_L}{V_R} = \frac{I_e \cdot X_L}{I_e \cdot R} = \frac{X_L}{R} = \frac{L\omega}{R} \quad (3-10)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_L}{R} \quad (3-11)$$

۲-۴-۳-۳ ضریب توان $\cos \varphi$: کسینوس زاویه‌ی φ را **ضریب توان مفید مدار R - L**

سری می‌گویند. از شکل ۵-۳-ب می‌توان مقدار آن را تعیین کرد. $\cos \varphi$ به ضریب توان معروف است و منظور از آن همان ضریب توان مفید است اما کلمه‌ی مفید یا مؤثر در اصطلاح $\cos \varphi$ بیان نمی‌شود.

$$\cos \varphi = \frac{OA}{OC} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I_e \cdot R}{I_e \cdot Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (3-12)$$

$$R = Z \cos \varphi \quad (3-13)$$

ضریب توان یکی از مشخصه‌های مهم مدارهای الکتریکی است و به صورت $\cos \varphi$ یا $p.f$ نشان داده می‌شود.

برای توان غیر مؤثر نیز ضریب توان تعریف می‌شود و آن را با $\sin \varphi$ نشان می‌دهند. از شکل ۳-۵ ب مقدار ضریب توان غیر مؤثر مطابق رابطه‌ی ۳-۱۴ محاسبه می‌شود.

$$\sin \varphi = \frac{AC}{OC} = \frac{V_L}{V_e} = \frac{I_e \cdot X_L}{I_e Z} = \frac{X_L}{Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{X_L}{Z} \quad (3-14)$$

۳-۵-۳ توان‌های مدار R - L سری

۳-۵-۳-۱ توان اکتیو (مؤثر): مدار R - L، از مقاومت اهمی و مقاومت سلفی تشکیل می‌شود و عبور جریان از مقاومت اهمی موجب می‌شود که توان مفید در مدار R - L سری به مصرف برسد. بنابراین، توان مؤثر در مدار R - L، فقط در مقاومت اهمی مصرف می‌شود. مقدار توان مؤثر در مدار R - L سری را براساس روابط زیر محاسبه می‌کنند.

$$P_e = I_e^2 \cdot R \quad (3-15)$$

$$Z = \frac{V_e}{I_e} \quad (3-16)$$

$$R = Z \cos \varphi \quad (3-17)$$

با جایگزینی روابط ۳-۱۶ و ۳-۱۷ در رابطه‌ی ۳-۱۵ خواهیم داشت:

$$P_e = I_e^2 \times Z \cos \varphi = I_e^2 \times \frac{V_e}{I_e} \times \cos \varphi \quad (3-18)$$

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi$$

۳-۵-۳-۲ توان غیر مؤثر (راکتیو یا دواته): وجود مقاومت القایی در مدار R - L سری موجب می‌شود مدار توان غیر مؤثر داشته باشد. مقدار این توان از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$P_d = I_e^2 \cdot X_L = I_e^2 \cdot L\omega \quad (3-19)$$

از رابطه‌ی ۳-۱۴ می‌توان نتیجه گرفت :

$$X_L = Z \sin \varphi \quad (3-20)$$

اگر در رابطه‌ی ۳-۱۹ به جای X_L مقدار آن را از رابطه‌ی ۳-۲۰ جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$P_d = I_e^2 \times Z \sin \varphi = I_e^2 \times \frac{V_e}{I_e} \times \sin \varphi$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi \quad (3-21)$$

۳-۵-۳- توان ظاهری: با توجه به رابطه‌های ۲-۲۴، ۳-۱۸، و ۳-۲۱ توان ظاهری در

مدار R - L سری با استفاده از رابطه‌ی ۳-۲۲ محاسبه می‌شود. چون $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ پس :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + p_d^2} = \sqrt{(V_e I_e \cos \varphi)^2 + (V_e I_e \sin \varphi)^2} = V_e I_e [V \cdot A] \quad (3-22)$$

۳-۶- ضریب کیفیت مدار R - L سری (Quality Factor)

ضریب کیفیت مدارهای الکتریکی در حالت عام به صورت رابطه‌ی ۳-۲۳ تعریف می‌شود.

$$Q = \frac{\text{ماکزیم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی مصرفی کل در هر سیکل}} \quad (3-23)$$

به عبارت دیگر، ضریب کیفیت بیانگر خاصیت مدار است که تا چه حد سلفی، خازنی یا اهمی است.

برای به دست آوردن رابطه‌ی ضریب کیفیت به کارگیری روابط (*) و (**) در اثبات ضروری

است. در زیر با چگونگی مراحل رسیدن به رابطه‌ی نهایی آشنا می‌شوید.

$$I_m = \sqrt{2} I_e \quad (*)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (**)$$

همان‌طوری که اشاره شد :

$$Q = 2\pi \frac{\text{ماکزیم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی مصرفی در هر سیکل}} = 2\pi \frac{W_L}{W_R}$$

$$\begin{cases} W_L = \frac{1}{T} \int_0^T L I_L^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T L I_{Lm}^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T L (\sqrt{2} I_e)^2 dt = L I_e^2 \\ W_R = P \cdot T = R \cdot I_e^2 \cdot T = R \cdot I_e^2 \cdot \frac{T}{\omega} \end{cases}$$

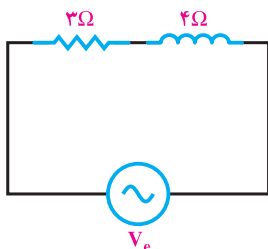
$$Q = \frac{W_L}{W_R} = \frac{L I_e^2}{R I_e^2 \frac{T}{\omega}} = \frac{L \cdot \omega}{R \cdot \frac{T}{\omega}}$$

$$Q = \frac{L \cdot \omega}{R} = \frac{X_L}{R} \quad (3-24)$$

$$Q = \frac{L\omega}{R} \quad (3-25)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۳-۲۵ با ۳-۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که در مدار R - L سری، ضریب کیفیت مدار همان $\tan \varphi$ است.

$$Q = \tan \varphi = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_L}{R} \quad (3-26)$$



شکل ۳-۶

مثال ۱: مدار R - L سری شکل ۳-۶ با ولتاژ متناوبی به

معادله، $V(t) = 5^\circ \sin 4^\circ \cdot t$ تغذیه می‌شود مطلوب است :

الف : امپدانس مدار. از رابطه‌ی ۳-۹ می‌توان محاسبه کرد :

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Omega$$

ب : معادله‌ی جریان مدار : از رابطه‌ی ۳-۱ می‌توان محاسبه کرد :

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{5^\circ}{5} = 1^\circ \text{ A}$$

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۱۱ می‌توان نوشت :

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{X_L}{R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{4}{3} \right) = 53^\circ \quad \text{و} \quad \theta_V = 0^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I$$

$$53^\circ = 0^\circ - \theta_I \Rightarrow \theta_I = -53^\circ$$

$$i_{(t)} = I_m \sin(\omega t + \theta_i) \rightarrow i_{(t)} = 1 \sin(40^\circ t - 53^\circ)$$

پ: اندازه‌ی ضریب خودالقایی سلف:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{4}{400} = 0.01 \text{ H}$$

ت: معادله‌ی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی R و القایی X_L .

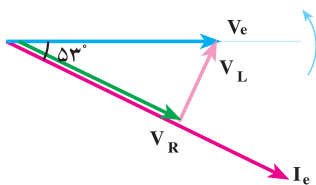
$$V_{R_m} = R \cdot I_m = 3 \times 1 = 3^\circ V \quad \text{با توجه به رابطه‌ی ۳-۵ می‌توان نوشت:}$$

$$v_{R(t)} = R \cdot I_m \sin(\omega t + \theta_i) = 3^\circ \sin(40^\circ t - 53^\circ)$$

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۶ می‌توان نوشت:

$$V_{L_m} = X_L \cdot I_m = 4 \times 1 = 4^\circ V$$

$$v_{L(t)} = X_L \cdot I_m \sin\left[(\omega t + \theta_i) + \frac{\pi}{2}\right] = 4^\circ \sin(40^\circ t - 53^\circ + 90^\circ) = 4^\circ \sin(40^\circ t + 37^\circ)$$



ث: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.

ج- توان‌ها و مثلث توان

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{5^\circ}{\sqrt{2}} \quad \text{و} \quad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1^\circ}{\sqrt{2}}$$

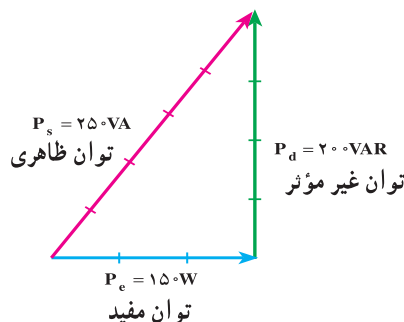
$$P_s = V_e \cdot I_e = \frac{5^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{1^\circ}{\sqrt{2}} = 25^\circ \text{ VA} \quad \text{با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۲ داریم:}$$

و با توجه به رابطه‌ی ۳-۱۸ داریم:

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = P_s \cdot \cos \varphi = 25^\circ \cos(53^\circ) = 25^\circ \times 0.6 = 15^\circ \text{ W}$$

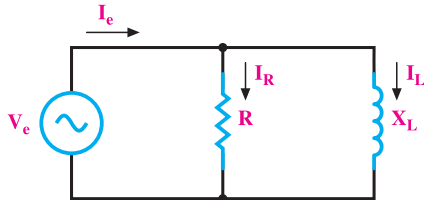
و با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۱ داریم:

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = P_s \cdot \sin \varphi = 25^\circ \sin 53^\circ = 25^\circ \times 0.8 = 20^\circ \text{ VAR}$$



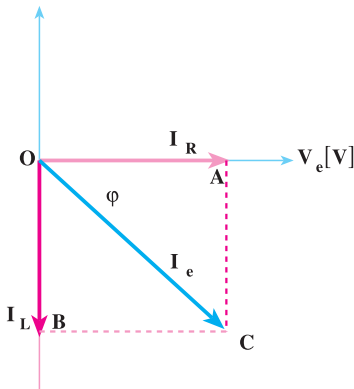
۳-۷ مدار R-L موازی

مدارهای R-L موازی از یک مقاومت اهمی و یک راکتانس القایی با اتصال موازی تشکیل می‌شوند. مدار الکتریکی اتصال موازی R-L به صورت شکل ۳-۷ است. این مدارها به طور گسترده در مدارهای الکترونیکی و مخابراتی به کار می‌روند. تله‌های امواج و فیلترسازی امواج



شکل ۳-۷ مدار الکتریکی موازی R-L

از جمله کاربردهای این مدارهاست. با توجه به مدار شکل ۳-۷ می‌توان گفت که جریان مدار (I_e) از دو جریان I_R و I_L تشکیل می‌شود. چون ولتاژ دو سر راکتانس القایی و مقاومت اهمی با هم برابرند و زاویه‌ی فاز جریان‌های I_R و I_L یکسان نیستند، در مطالعه مدارهای R-L موازی، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند و دیاگرام برداری I_R و I_L را بر اساس ولتاژ مبنا رسم می‌کنند. بردار جریان I_R با ولتاژ هم‌فاز و بردار جریان I_L از ولتاژ 90° پس‌فاز است و مطابق شکل ۳-۸ رسم می‌شوند.



شکل ۳-۸ دیاگرام برداری مدار R-L موازی

جریان کل مدار I_e از جمع برداری I_R و I_L به دست می‌آید:

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L \quad (3-27)$$

۳-۷-۱ محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L موازی: با توجه به شکل ۳-۷ و دیاگرام

برداري جريان‌ها (شکل ۳-۸) می‌توان نوشت:

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad \text{و} \quad I_R = \frac{V_e}{R} \quad \text{و} \quad I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 \quad \text{و} \quad \overline{OB} = \overline{AC}$$

$$I_e^2 = I_R^2 + I_L^2 \quad (3-28)$$

با جایگزین کردن مقادیر I_L ، I_R و I_e در رابطه‌ی ۳-۲۸ می‌توان نوشت:

$$\frac{V_e}{Z} = \frac{V_e}{R} + \frac{V_e}{X_L}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_L} \Rightarrow Z = \frac{R \cdot X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \quad (3-29)$$

۲-۷-۳. محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب توان مدار **R - L موازی** : در شکل

۳-۸ در مثلث OAC می‌توان نوشت :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_L}{I_R} = \frac{\frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_L}$$

$$\tan \varphi = \frac{R}{X_L} \quad (3-30)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{R}{X_L} \quad (3-31)$$

برای محاسبه‌ی ضریب توان‌های مؤثر و غیرمؤثر از مثلث OAC، روابط زیر را می‌نویسیم :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e}$$

$$\cos \varphi = \frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{V_e \cdot Z}{V_e \cdot R}$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R} \quad (3-32)$$

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_L}{I_e} = \frac{Z}{X_L} \quad (3-33)$$

۳-۷-۳. محاسبه‌ی توان‌های مدار **R - L موازی** : از دیاگرام برداری شکل ۳-۸

می‌توان نوشت :

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_e} \Rightarrow I_R = I_e \cos \varphi \quad (1)$$

$$P_e = I_R^2 R = I_R \cdot \frac{V_e}{I_R} = V_e \cdot I_R \quad (2)$$

با جاگذاری (۱) در (۲) خواهیم داشت :

$$P_e = I_e \cdot V_e \cdot \cos \varphi \quad (3-34)$$

با توجه به رابطه‌ی ۳-۳۳ و جای‌گذاری روابط می‌توانیم توان راکتیو را به‌دست آوریم.

$$P_d = X_L I_L^2 = \frac{V_e}{I_L} \times I_L^2 \text{ و } I_L = I_e \sin \varphi$$

$$P_d = V_e I_L = V_e I_e \sin \varphi \quad (3-35)$$

توان ظاهری از P_e و P_d به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$P_s = \sqrt{P_d^2 + P_e^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi + V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi}$$

$$P_s = V_e I_e \quad (3-36)$$

۴-۷-۳- محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R - L موازی

$$Q = \frac{2\pi \times (\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده})}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}} = \frac{2\pi(\frac{1}{2} L I_{Lm}^2)}{I_R^2 \times R \times T} = \frac{2\pi(\frac{1}{2} L I_{Lm}^2)}{I_R^2 \times R \times \frac{2\pi}{\omega}}$$

$$I_{Lm} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{\sqrt{2} V_e}{L\omega} \text{ و } I_R = \frac{V_e}{R}$$

$$Q = \frac{2\pi \left[\frac{1}{2} L \times \left(\frac{\sqrt{2} V_e}{L\omega} \right)^2 \right]}{\frac{V_e^2}{R^2} \times R \times \frac{2\pi}{\omega}} = \frac{R}{L\omega}$$

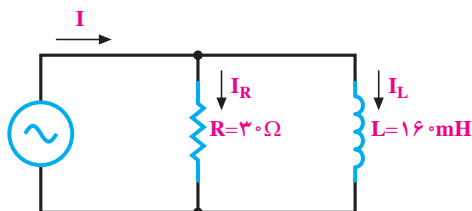
$$Q = \tan \varphi = \frac{R}{X_L} = \frac{R}{L\omega} \quad (3-37)$$

با مقایسه‌ی روابط ۳-۳۷ و ۳-۳۰ می‌توان گفت:

مثال ۲: مدار الکتریکی شکل ۳-۹ از منبع ولتاژ به معادله‌ی $v = 120\sqrt{2} \sin(250t + 45^\circ)$

تغذیه می‌شود. مطلوب است.

الف: مقاومت القایی سلف. $X_L = L \cdot \omega = 160 \times 10^{-3} \times 250 = 40 \Omega$



شکل ۳-۹

ب: معادله‌ی جریان هر شاخه.

$$I_{R_m} = \frac{V_m}{R} = \frac{120\sqrt{2}}{30} = 4\sqrt{2}A$$

جریان مقاومت هم فاز با ولتاژ

$$i_R = 4\sqrt{2} \sin(250\pi t + 45^\circ)$$

$$I_{L_m} = \frac{V_m}{X_L} = \frac{120\sqrt{2}}{40} = 3\sqrt{2}A$$

جریان سلف ۹۰ درجه عقب تر از ولتاژ

$$i_L = 3\sqrt{2} \sin(250\pi t + 45^\circ - 90^\circ)$$

$$i_L = 3\sqrt{2} \sin(250\pi t - 45^\circ)$$

پ: جریان کل و معادله‌ی زمانی آن.

$$I_R = \frac{I_{R_m}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4A$$

$$I_L = \frac{I_{L_m}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3A$$

با توجه به رابطه‌ی ۳-۲۷ داریم:

$$\dot{I}_e = \dot{I}_R + \dot{I}_L = \sqrt{\dot{I}_R^2 + \dot{I}_L^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5A$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 5\sqrt{2} A$$

براساس رابطه‌ی ۳-۳۱ می‌توان نوشت:

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{R}{X_L} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{30}{40} \right) = \tan^{-1}(0.75) = 37^\circ$$

بنابراین، جریان کل به اندازه‌ی $\phi = 37^\circ$ از ولتاژ منبع عقب تر است و داریم:

$$i = 5\sqrt{2} \sin(250\pi t + 45^\circ - 37^\circ) = 5\sqrt{2} \sin(250\pi t + 8^\circ)$$

ت: امپدانس مدار.

از رابطه‌ی ۳-۲۹ داریم:

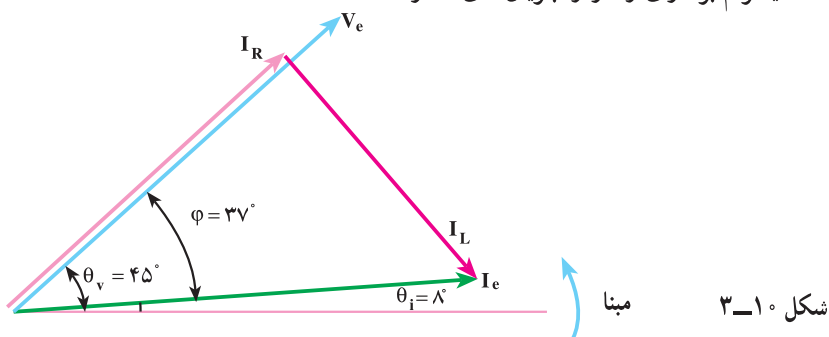
$$\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{30^2} + \frac{1}{40^2}}} = 24\Omega \quad \text{یا} \quad Z = \frac{30 \times 40}{\sqrt{30^2 + 40^2}} = 24\Omega$$

راه ساده‌ی محاسبه‌ی امپدانس مدار استفاده از رابطه‌ی ۳-۱ است.

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{120 \times \sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 24\Omega$$

ث: دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.



ج: توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

از رابطه‌ی ۳-۱۵ خواهیم داشت:

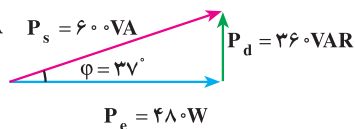
$$P_e = R \cdot I_R^2 = 30 \times (4)^2 = 480W$$

از رابطه‌ی ۳-۳۵ خواهیم داشت:

$$P_d = X_L \cdot I_L^2 = 40 \times (3)^2 = 360VAR$$

و از رابطه‌ی ۳-۳۶ خواهیم داشت:

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{480^2 + 360^2} = 600VA \quad P_s = 600VA$$



می‌توان توان‌های مدار را از روابط ۳-۳۴، ۳-۳۵ و ۳-۳۶ محاسبه کرد. بدیهی است جواب‌ها یکسان خواهند بود.

$$P_e = V_e I_e \cos \phi = 120 \times 5 \times \cos 37^\circ = 480W$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = 120 \times 5 \times 0.6 = 360 \text{ VAR}$$

$$P_s = V_e I_e = 120 \times 5 = 600 \text{ VA}$$

مثال ۳: در مثال‌های ۱ و ۲ ضریب کیفیت مدار را محاسبه کنید.

راه حل:

در مثال ۱ ضریب کیفیت برابر است با:

$$Q = \frac{L\omega}{R} = \frac{X_L}{R} = \frac{4}{3} = 1.33$$

در مثال ۲ ضریب کیفیت برابر است با:

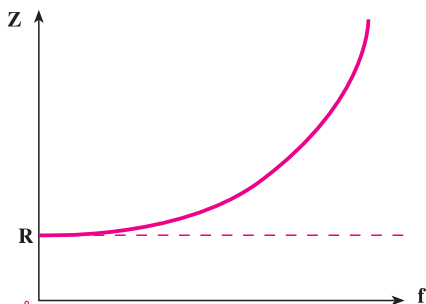
$$Q = \frac{R}{X_L} = \frac{3}{4} = 0.75$$

با وجود این که در دو مثال ۱ و ۲ نسبت راکتانس سلفی به مقاومت اهمی برابر است، در مدار سری ضریب کیفیت بزرگ‌تر است. به عبارت دیگر، خاصیت سلفی بیش‌تر نمایان است؛ در حالی که در مدار موازی خاصیت اهمی مدار بیش‌تر دیده می‌شود. مطلب ذکر شده نشان می‌دهد که در مدار سری، مقاومت و در مدار موازی، عکس مقاومت تعیین‌کننده‌ی خاصیت مدار است.

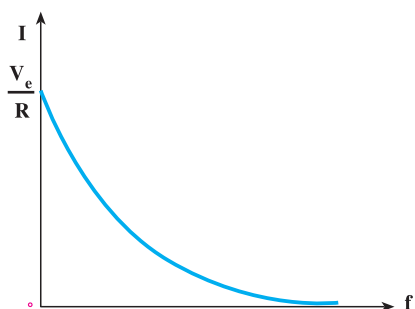
۸-۳- اثر فرکانس شبکه بر مدارهای R - L

در مدار R - L سری ارتباط عناصر مدار به صورت $Z^2 = R^2 + (\omega L)^2$ است. به طوری که اگر مقاومت اهمی مدار تغییر نکند، تغییرات فرکانس در مقاومت القایی $X_L = \omega L$ اثر می‌گذارد و امپدانس مدار را تغییر می‌دهد. اگر فرکانس مدار $f = 0$ باشد، اندازه‌ی مقاومت القایی برابر صفر خواهد بود و امپدانس مدار $Z = R$ می‌شود. این حداقل مقداری است که امپدانس مدار R - L سری دارد. در این حالت، از مدار جریان $I_e = \frac{V_e}{R}$ عبور می‌کند. این مقدار جریان، حداکثر جریانی است که از مدار R - L سری با دامنه‌ی ولتاژ ثابت V_e می‌گذرد. اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد ($f \rightarrow \infty$)، امپدانس (Z) افزایش یافته، مقدار امپدانس نیز بی‌نهایت می‌شود. در این حالت، از مدار جریانی عبور نخواهد کرد. مدار R - L، مثل مدار باز عمل می‌کند؛ بنابراین، با افزایش فرکانس مدار R - L سری را عملاً می‌توان به مدار باز تبدیل کرد. مطالب بالا در جدول زیر آورده شده است.

$f \text{ (Hz)}$	۰	∞
$Z \text{ (}\Omega\text{)}$	R	∞
$I \text{ (A)}$	$\frac{V_e}{R}$	۰



منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار RL سری به ازای تغییر فرکانس در شکل، ۱۱-۳ از طریق نقطه‌یابی رسم شده است.



شکل ۱۱-۳ اثر فرکانس در مدار RL سری

در مدار R - L موازی، امپدانس از رابطه‌ی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(j\pi fL)}$ محاسبه می‌شود.

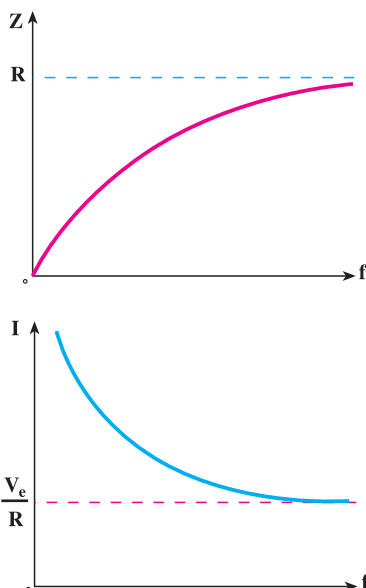
اگر فرکانس منبع صفر شود، آن‌گاه $\frac{1}{X_L} = \frac{1}{j\pi fL} = \infty$ خواهد شد و در این حالت $Z = 0$

می‌شود. به عبارت دیگر، مدار R - L موازی در فرکانس صفر اتصال کوتاه می‌کند و از مدار جریان اتصال کوتاه عبور خواهد کرد. جریان اتصال کوتاه را به $I_{s,c}$ نشان می‌دهند. اگر فرکانس مدار از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، امپدانس مدار R - L موازی از مقدار اتصال کوتاه ($Z = 0$) به اندازه‌ی مقاومت اهمی - یعنی R - تغییر می‌کند. به طوری که در فرکانس‌های خیلی زیاد می‌توان $Z = R$ در نظر گرفت. در فرکانس خیلی زیاد از مدار R - L موازی جریان $I_e = \frac{V_e}{R}$ عبور خواهد کرد.

مطالب بالا در جدول زیر آورده شده است.

$f_{(Hz)}$	0	∞
$Z_{(\Omega)}$	0	R
$I_{(A)}$	∞	$\frac{V_e}{R}$

منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار RL موازی به ازای تغییر فرکانس در شکل ۳-۱۲ از طریق نقطه‌یابی رسم شده است.



شکل ۳-۱۲ اثر فرکانس در مدار R-L موازی

اثر تغییرات فرکانس بر امپدانس مدار موجب می‌شود ضریب توان $\cos \varphi$ و اختلاف فاز φ و توان‌های اکتیو و راکتیو و ظاهری نیز تغییر کند.

در مدار R - L سری با توجه به $\cos \varphi = \frac{R}{Z}$ و $P_e = V_e I_e \cos \varphi$ و $P_d = V_e I_e \sin \varphi$ ، اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت افزایش یابد، چون امپدانس از $Z = R$ به $Z = \infty$ تغییر می‌کند، $\cos \varphi$ از ۱ به صفر، $\sin \varphi$ از صفر به یک و φ از صفر به 90° درجه تغییر خواهد کرد. بنابراین، توان اکتیو از مقدار ماکزیمم به صفر تغییر می‌یابد و توان غیرمؤثر از مقدار صفر به $P_d = V_e I_e$ رشد می‌کند.

👉 نتیجه: افزایش فرکانس در مدار R - L سری، خاصیت القایی مدار را افزایش می‌دهد.

در مدار موازی با توجه به $\cos \varphi = \frac{Z}{R}$ و $P_e = V_e I_e \cos \varphi$ و $P_d = V_e I_e \sin \varphi$ ، رشد فرکانس از صفر به مقدار خیلی زیاد موجب می‌شود امپدانس از مقدار صفر به R تغییر کند. در این حالت، $\cos \varphi$ از صفر به یک، $\sin \varphi$ از یک به صفر و φ از 90° درجه به صفر درجه تغییر می‌کند. توان اکتیو از صفر به مقدار $P_e = V_e I_e$ و توان راکتیو از مقدار حداکثر به صفر تغییر می‌کند.

👉 نتیجه: افزایش فرکانس در مدار $R-L$ موازی، خاصیت سلفی مدار را کاهش می‌دهد.

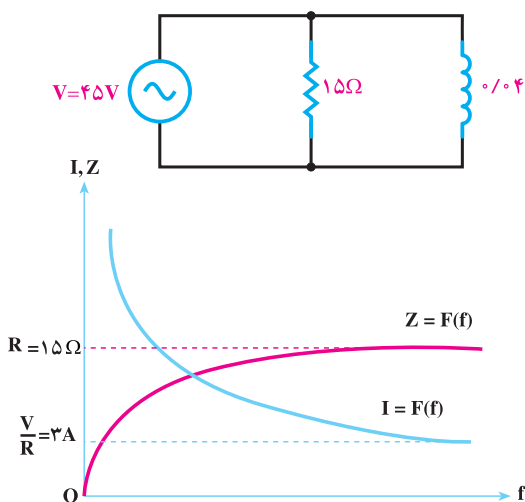
در شکل‌های ۱۳-۳ دو نمونه از اثر فرکانس بر روی I و Z در مدار $R-L$ سری و $R-L$ موازی موازی نشان داده شده است.

$f(\text{Hz})$	$Z(\Omega)$	$I(\text{A})$
۰	۰	∞
∞	$R=15$	$\frac{V}{R} = \frac{V}{15}$

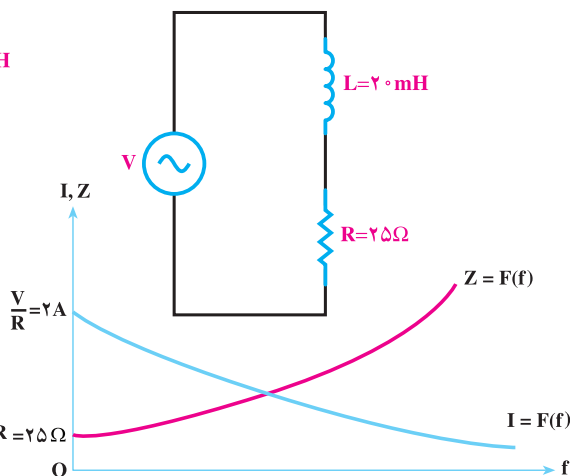
مدار $R-L$ موازی

$f(\text{Hz})$	$Z(\Omega)$	$I(\text{A})$
۰	$R=25$	$\frac{V}{R} = \frac{V}{25}$
∞	∞	۰

مدار $R-L$ سری



ب: اثر فرکانس در مدار $R-L$ موازی



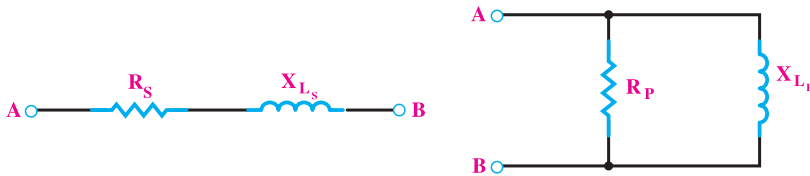
الف: اثر فرکانس در مدار $R-L$ سری

شکل ۱۳-۳

۹-۳- تبدیل مدار RL سری به RL موازی و برعکس

هر گاه بخواهیم یک مدار R-L سری را به R-L موازی و یا بالعکس تبدیل کنیم باید Z_s و φ_s در حالت سری با Z_p و φ_p در حالت موازی برابر باشند.

همان طوری که اشاره شد روابط امپدانس و ضریب قدرت در مدارهای R-L سری و R-L موازی به صورت زیر است :



$$\left\{ \begin{array}{l} Z_s = \sqrt{R_s^2 + X_{L_s}^2} \\ \cos \varphi_s = \frac{R_s}{Z_s} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_p = \frac{R_p \cdot X_{L_p}}{\sqrt{R_p^2 + X_{L_p}^2}} \\ \cos \varphi_p = \frac{Z_p}{R_p} \end{array} \right.$$

I. در تبدیل مدار R-L موازی به R-L سری داریم:

$$\cos \varphi_p = \cos \varphi_s \quad \text{شرط اول تبدیل}$$

$$\frac{Z_p}{R_p} = \frac{R_s}{Z_s} \quad \text{معادل طرفین را قرار می دهیم}$$

$$R_s = \frac{Z_p \cdot Z_s}{R_p} \quad \text{مقدار } R_s \text{ را به دست می آوریم}$$

$$R_s = \frac{Z_p^2}{R_p} \quad \text{با توجه به شرط دوم تبدیل } Z_p = Z_s \text{ در معادله } R_s \text{ قرار می دهیم.}$$

بر پایه همین مراحل برای راکتانس معادل در مدار سری نیز چنین می توان نوشت :

$$X_s = \frac{Z_p^2}{X_{L_p}}$$

II. در تبدیل مدار R-L سری با R-L موازی داریم:

$$\cos \varphi_P = \cos \varphi_S \quad \text{شرط اول تبدیل}$$

$$\frac{Z_P}{R_P} = \frac{R_S}{Z_S} \quad \text{معادل طرفین را قرار می‌دهیم}$$

$$R_P = \frac{Z_P Z_S}{R_S} \quad \text{مقدار } R_P \text{ را به دست می‌آوریم}$$

$$R_P = \frac{Z_S^2}{R_S} \quad \text{با توجه به شرط دوم تبدیل } Z_P = Z_S \text{ در معادله } R_P \text{ قرار می‌دهیم.}$$

بر پایه همین مراحل برای راکتانس معادل مدار موازی نیز چنین می‌توان نوشت:

$$X_P = \frac{Z_S^2}{X_{L_S}}$$



۱- در مدار شکل مقابل مطلوب است :

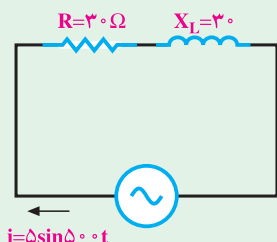
الف : ولتاژ دو سر R و X_L و معادلات زمانی آن‌ها.

ب : ولتاژ منبع و معادله‌ی زمانی آن.

پ : رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژها.

ت : توان اکتیو، راکتیو و ظاهری و رسم مثلث توان‌ها.

جواب :



$$V_R = 10.6V, P_e = 375W \text{ و } V_{R(t)} = 10.6\sqrt{2} \sin 500t$$

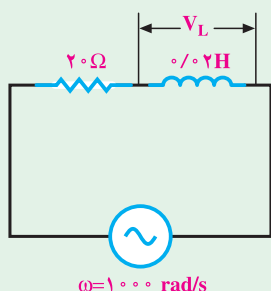
$$V_L = 10.6V, P_d = 375VAR \text{ و } V_{L(t)} = 10.6\sqrt{2} \sin(500t + 90^\circ)$$

$$V = 150V, P_s = 530/3 VA \text{ و } V_{(t)} = 150\sqrt{2} \sin(500t + 45^\circ)$$

۲- در یک مدار RL سری معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $v(t) = 200 \sin(314t + 20^\circ)$ و

$i(t) = 10 \sin(314t - 10^\circ)$ است اندازه‌ی R و L چه قدر است؟

جواب : $R = 17/32 \Omega$ و $L = 0.03H$

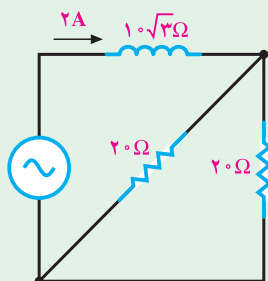


$$\omega = 1000 \text{ rad/s}$$

۳- در مدار شکل مقابل ولتاژ دو سر سلف $V_L = 40V$

است ولتاژ منبع چند ولت است؟

جواب : $V = 56/5V$



۴- در مدار شکل مقابل ولتاژ منبع چند ولت است؟

جواب : $V_e = 40V$

۵- یک مقاومت ۵ اهمی با یک سلف نامشخص به طور سری به هم متصل اند. معادله‌ی ولتاژ

دو سر مقاومت $v_R = 25 \sin(2000t + 30^\circ)$ است. اگر $\phi = \frac{\pi}{3}$ رادیان باشد، مطلوب است :

الف : ضریب خودالقایی سلف

ب : معادله‌ی جریان مدار

پ : معادله‌ی ولتاژ کل

ت : معادله‌ی ولتاژ دو سر سلف

جواب : $L = 4/3 \text{ mH}$

$$i(t) = 5 \sin(200 \cdot t + 3^\circ)$$

$$V(t) = 5 \sin(200 \cdot t + 9^\circ)$$

$$V_{L(t)} = 43/3 \sin(200 \cdot t + 12^\circ)$$

۶- از یک مدار RL سری شدت جریانی به معادله‌ی $i = 3\sqrt{2} \sin 100 \pi t$ می‌گذرد. اگر $\cos \phi = 0/6$ و ولتاژ دو سر سلف $V_L = 200 \text{ V}$ باشد، مثلث توان‌ها را با درج مقادیر رسم کنید.

جواب $P_e = 450 \text{ W}$ ، $P_d = 600 \text{ VAR}$ ، $P_s = 750 \text{ VA}$

۷- در یک مدار RL سری با $L = 10 \text{ mH}$ و $R = 3 \Omega$ مقدار فرکانس چه قدر انتخاب شود تا جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{6}$ تأخیر فاز داشته باشد.

جواب : $f = 27/5 \text{ Hz}$

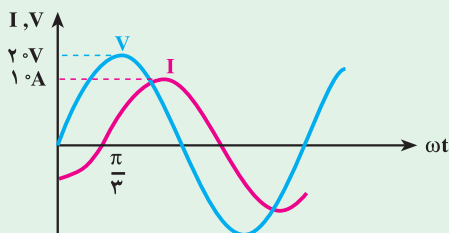
۸- در یک مدار RL سری با $L = 5 \text{ mH}$ و $R = 2 \Omega$ درچه فرکانسی ضریب کیفیت مدار

$\frac{\pi}{10}$ می‌شود؟

جواب : $f = 200 \text{ Hz}$

۹- در یک مدار RL سری تابع تغییرات ولتاژ و جریان مطابق شکل زیر است اندازه‌ی R و

X_L چه قدر است؟



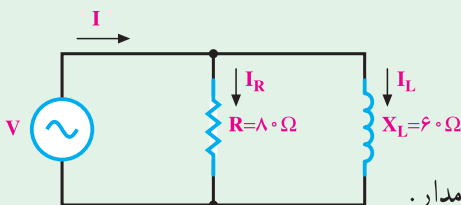
جواب : $R = 1 \Omega$ ، $X_L = 1/73 \Omega$

۱۰- در مدار شکل زیر $i(t) = 5\sqrt{2} \sin 25t$ می‌باشد، مطلوب است.
الف : امپدانس مدار.

ب : ولتاژ منبع و معادله‌ی آن.

پ : جریان I_R و I_L و معادله‌های آن‌ها.

ت : رسم دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.



ث: توان‌های اکتیو، راکتیو ظاهری و رسم مثلث توان.

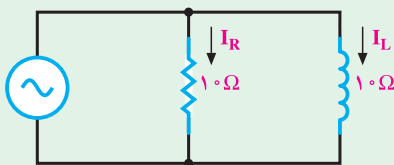
جواب: $P_e = 720 \text{ W}$, $Z = 48 \Omega$, $V_{(t)} = 240\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 53^\circ)$

$P_d = 960 \text{ VAR}$, $I_{R(t)} = 3\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 53^\circ)$

$P_s = 1200 \text{ VA}$, $I_{L(t)} = 4\sqrt{2} \sin(25^\circ t - 37^\circ)$

۱۱- در مدار شکل مقابل اگر $I_L = 3$ آمپر باشد، مطلوب است

الف: ولتاژ منبع
ب: جریان منبع



پ: معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع

جواب: $V_e = 30 \text{ V}$

$I_e = 3\sqrt{2} \text{ A}$

$V_{(t)} = 30\sqrt{2} \sin \omega t$

$I_{(t)} = 6 \sin(\omega t - 45^\circ)$

۱۲- در مدار شکل زیر، معادله‌ی ولتاژ و

جریان منبع به ترتیب $i = 2 \sin(50^\circ t - \frac{\pi}{4})$ و

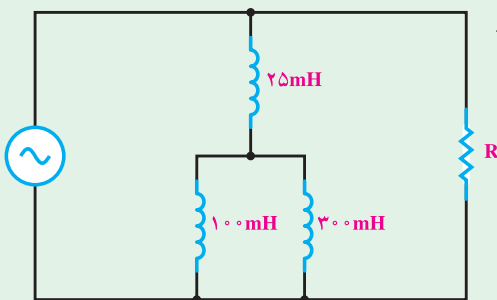
$V = 50\sqrt{2} \sin 50^\circ t$ است. مطلوب است:

الف: امپدانس کل مدار.

ب: اندازه‌ی R.

پ: توان‌های اکتیو، راکتیو، ظاهری و

مثلث توان‌ها.



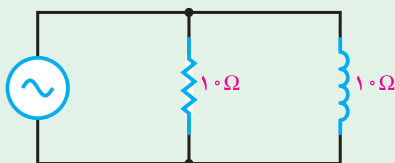
ت: رسم دیاگرام برداری ولتاژ و جریان‌های مدار.

جواب:

$R = 50 \Omega$, $Z = 25\sqrt{2} \Omega$, $P_e = 50 \text{ W}$, $P_d = 50 \text{ VAR}$, $P_s = 50\sqrt{2} \text{ VA}$

۱۳- مدار RL موازی شکل زیر را به یک مدار RL سری تبدیل کنید.

جواب:



$R_s = 50 \Omega$

$X_{Ls} = 50 \Omega$

مدارهای R - C جریان متناوب

هدف های رفتاری

- در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :
- ۱- مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان، ولتاژ، ضریب توان و ضریب کیفیت مدارهای R-C سری و موازی را با نوشتن فرمول های مربوط محاسبه کند.
 - ۲- دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای R-C سری و جریان ها را در مدارهای R-C موازی رسم کند.
 - ۳- ضریب کیفیت مدارهای R-C سری و موازی را محاسبه کند.
 - ۴- تأثیر فرکانس بر مقاومت ظاهری، جریان، اختلاف فاز و ضریب قدرت در مدارهای R-C سری و موازی را شرح دهد.
 - ۵- منحنی تغییرات اثر فرکانس بر امپدانس و جریان در مدارهای R-C سری و موازی را با استفاده از معادله آن و از طریق نقطه یابی رسم کند.
 - ۶- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R-C سری و موازی را به دست آورد.
 - ۷- مدارهای R-C سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

۴-۱- مقدمه

کاربرد عناصر اهمی و خازنی در مدارهای الکترونیکی، مخابرات، الکترونیک صنعتی و شبکه های قدرت مثلاً فیلترها^۱، تایمرها^۲، تصحیح کننده ضریب توان^۳، ضرورت بحث مدارهای R-C را ایجاب

-
- ۱- فیلترها مدارات R-L-C هستند که می توانند امواج خاص را عبور دهند یا حذف کنند.
 - ۲- تایمرها دستگاهی هستند که با استفاده از مقادیر R-C، به رله ها فرمان می دهند.
 - ۳- در صنعت برق اثرات سلفی را با خازن ها و اثرات خازن را با سلف ها برای کاهش توان راکتیو خنثی می کنند این عمل را که ضریب توان را به نزدیکی $\cos \varphi = 1$ می رساند اصلاح ضریب توان گویند.

می‌کند. از طرف دیگر، خازن ایده‌آل عملاً وجود ندارد؛ زیرا هر خازن حقیقی علاوه بر راکتانس خازنی یک مقاومت ناشی دارد. به همین علت، هر خازن حقیقی را می‌توان به صورت یک مقاومت اهمی و یک راکتانس خازنی ایده‌آل به صورت مدار R-C سری یا موازی مدل کرد و سپس مدار آن را تحلیل نمود. در این فصل، رفتار مدارهای R-C سری و موازی در جریان متناوب در حالت پایدار (ماندگار) بررسی خواهیم کرد؛ زیرا حالت‌های گذرای این مدارها از محدوده‌ی بحث ما خارج است. پاسخ گذرا در مدارهای الکتریکی عکس‌العمل مدار در مقابل تغییرات جریان و ولتاژ شبکه است که با گذشت زمان از بین می‌رود.

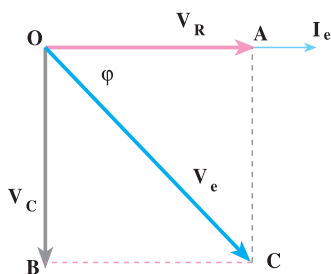
۴-۲- مدار R-C سری

مدار الکتریکی R-C سری مطابق شکل ۴-۱ است. ولتاژ منبع از ولتاژ V_R و V_C تشکیل می‌شود. جریان در هر دو عنصر C و R یکسان و برابر I_e است. ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_e هم فاز و ولتاژ دو سر خازن V_C از جریان I_e ، 90° الکتریکی پس فاز است. برای به دست آوردن ولتاژ V_e ، چون \vec{V}_R و \vec{V}_C بردارهای جداگانه‌ای هستند، از دیاگرام برداری استفاده می‌کنیم. برای رسم دیاگرام برداری، جریان I_e را مبنا قرار می‌دهیم و \vec{V}_R را هم فاز با جریان و \vec{V}_C را 90° پس فاز از جریان مطابق شکل ۴-۲ رسم می‌کنیم. جمع برداری $\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C$ ، ولتاژ منبع و به عبارت دیگر، ولتاژ دوسر R-C سری را نشان خواهد داد. اگر جریان لحظه‌ای مدار را به صورت $i = I_m \sin(\omega t)$ فرض کنیم، ولتاژ لحظه‌ای V_C و V_R به صورت‌های زیر بیان خواهند شد:

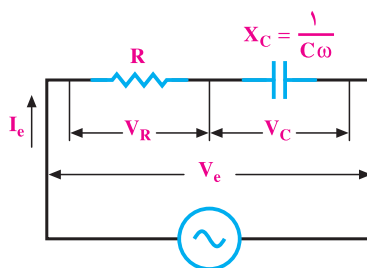
$$i = I_m \sin \omega t \quad (4-1)$$

$$v_R = I_m \cdot R \sin \omega t \quad \text{هم فاز با جریان} \quad (4-2)$$

$$v_C = I_m \cdot X_C \sin(\omega t - 90^\circ) \quad 90^\circ \text{ درجه عقب‌تر از جریان} \quad (4-3)$$



شکل ۴-۲- دیاگرام برداری مدار R-C سری



شکل ۴-۱- مدار الکتریکی R-C سری

۴-۲-۱- محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C سری: در شکل ۴-۱ و دیاگرام برداری

شکل ۴-۲ می‌توان نوشت :

$$V_R = R \cdot I_e \quad (۴-۴)$$

$$V_c = I_e X_c = I_e \times \frac{1}{C\omega} = \frac{I_e}{\omega C} \quad (۴-۵)$$

در مثلث OAC شکل ۴-۲ می‌توان نوشت :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$V_e^2 = V_R^2 + V_c^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 X_c^2$$

$$Z^2 = R^2 + X_c^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X_c^2} \quad (۴-۶)$$

۴-۲-۲- محاسبه‌ی اختلاف فاز و ضریب توان در مدار R - C سری: از شکل ۴-۲

و مثلث OAC می‌توان نوشت :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{V_c}{V_R} = \frac{I_e \cdot X_c}{I_e \cdot R} \quad (۴-۷)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با :

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{X_c}{R} = \tan^{-1} \frac{1}{R \cdot C \cdot \omega} \quad (۴-۸)$$

ضریب توان برابر است با :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I_e \cdot R}{I_e \cdot Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{V_R}{V_e} = \frac{R}{Z} \quad (۴-۹)$$

$\sin \varphi$ را از شکل ۴-۲ و مثلث OAC می‌توان به‌قرار زیر حساب کرد :

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{V_c}{V_e} = \frac{I_e \cdot X_c}{I_e \cdot Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{V_C}{V_e} = \frac{X_C}{Z} \quad (4-10)$$

۴-۲-۳- محاسبه‌ی توان‌ها در مدار R-C سری: برای توان مؤثر می‌توان نوشت:

$$P_e = RI_e^2 \quad (4-11)$$

$$R = Z \cos \varphi \quad \text{از رابطه‌ی ۴-۹ مقاومت R برابر است با:}$$

$$Z = \frac{V_e}{I_e} \quad \text{از طرف دیگر، امپدانس مدار برابر است با:}$$

با جایگزینی مقادیر در رابطه‌ی ۴-۱۱ توان مؤثر به صورت رابطه‌ی ۴-۱۲ ظاهر می‌شود:

$$P_e = Z \cos \varphi \times I_e^2$$

$$P_e = \frac{V_e}{I_e} \cos \varphi \times I_e^2$$

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad (4-12)$$

برای محاسبه‌ی توان غیر مؤثر می‌توان نوشت:

$$P_d = -I_e^2 X_C \quad (4-13)$$

از رابطه‌ی ۴-۱۰ مقادیر X_C و Z را در رابطه‌ی ۴-۱۳ جایگزین می‌کنیم.

$$X_C = Z \sin \varphi \quad \text{و} \quad Z = \frac{V_e}{I_e} \quad \text{و} \quad \sin \varphi = \frac{X_C}{Z}$$

$$P_d = I_e^2 \cdot Z \sin \varphi = I_e^2 \frac{V_e}{I_e} \sin \varphi$$

بنابراین:

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi \quad (4-14)$$

در مدارهای R - C جریان پیش فاز است؛ بنابراین قرارداد توان P_d را با علامت منفی خواهیم داشت.

یعنی:

$$P_d = -V_e I_e \sin \varphi$$

از رابطه‌های ۴-۱۲ و ۴-۱۴ توان ظاهری را به قرار زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi}$$

$$P_s = V_e I_e$$

(۴-۱۵)

مثال ۱: در یک مدار R - C سری متشکل از $R = 8\Omega$ و $C = 30\mu F$ ، در چه فرکانسی جریان مدار 3° از ولتاژ پیش فاز خواهد شد؟

راه حل:

$$\varphi = -3^\circ \quad \text{و} \quad \varphi = \tan^{-1} \frac{1}{2\pi fCR}$$

$$\tan 3^\circ = \frac{1}{2\pi fCR}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2\pi \times f \times 30 \times 10^{-6} \times 8} \Rightarrow f = \frac{3 \times 10^6}{\sqrt{3} \times 2\pi \times 30 \times 8}$$

$$f = 1149 / 2 \text{ Hz}$$

مثال ۲: در یک مدار R-C سری، تابع تغییرات ولتاژ و جریان به ترتیب $V = 220 \sin(100\pi t)$ و $i = 5 \sin(100\pi t + 6^\circ)$ است. مطلوب است:

الف - عناصر مدار R و C

ب - معادله‌ی زمانی ولتاژ دو سر مقاومت اهمی و خازن.

پ - رسم منحنی تغییرات ولتاژ و جریان کل و ولتاژ دوسر مقاومت اهمی و خازن.

ت - رسم دیاگرام برداری ولتاژها.

ث - محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان‌ها.

راه حل:

الف - از معادلات ولتاژ و جریان می‌توان نوشت:

$$V_e = \frac{220}{\sqrt{2}} = 155.6 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad I_e = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3.54 \text{ A}$$

$$\omega = 100\pi \quad \text{و} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{100\pi}{2\pi} = 50 \text{ Hz}$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i = 0 - 6^\circ = -6^\circ \quad \text{و} \quad I_m = 5 \text{ A} \quad \text{و} \quad V_m = 220 \text{ V}$$

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{220}{5} = 44\Omega$$

از روابط ۴-۹ و ۴-۱۰ می‌توان نوشت:

$$R = Z \cos \varphi = 44 \times \cos(-6^\circ) = 44 \times \frac{1}{2} = 22\Omega$$

$$X_C = Z \sin \varphi = 44 \sin 6^\circ = 44 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 38 / \Omega$$

$$C = \frac{1}{X_C \cdot \omega} = \frac{1^\circ}{38 / 1 \times 10^3 \pi} = 83 / 58 \mu F$$

$$V_R = R \cdot I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$

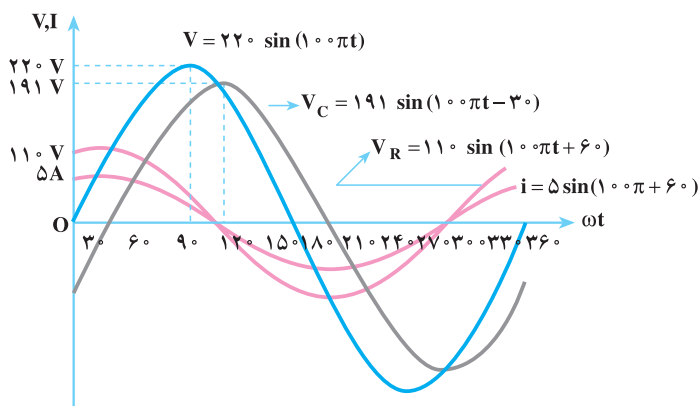
— ب

$$V_R = 22 \times 5 \sin(100\pi t + 6^\circ)$$

$$V_R = 110 \sin(100\pi t + 6^\circ)$$

$$V_C = I_m \cdot X_C \sin(100\pi t + \theta_i - 9^\circ)$$

$$V_C = 5 \times 38 / 1 \sin(100\pi t + 6^\circ - 9^\circ) = 191 \sin(100\pi t - 3^\circ)$$



— پ

شکل ۴-۳

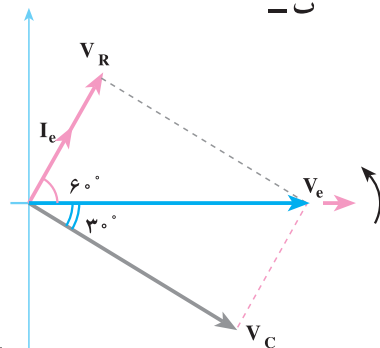
$$V_C = \frac{191}{\sqrt{2}} = 135 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_C} = -3^\circ$$

— ت

$$V_R = \frac{110}{\sqrt{2}} = 77 / 78 \text{ ولت} \quad \text{و} \quad \theta_{V_R} = 6^\circ$$

$$I_e = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3 / 53 A \quad \text{و} \quad \theta_i = 6^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_i = 0 - 6^\circ = -6^\circ$$

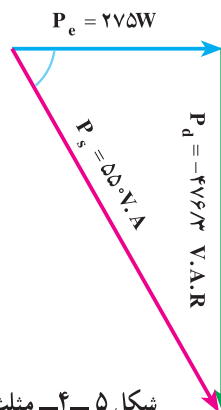


شکل ۴-۴- دیاگرام برداری

$$P_e = V_e I_e \cos \phi = I_e^2 R = \frac{22^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \cos 6^\circ = 275 \text{ W} \quad \text{ث -}$$

$$P_d = -V_e I_e \sin \phi = -I_e^2 X_C = \frac{-22^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \sin 6^\circ = -476 / 3 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = V_e I_e = \frac{22^\circ}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 55^\circ \text{ V.A}$$



شکل ۵-۴- مثلث توان ها

۴-۲-۴- ضریب کیفیت مدار R-C سری : با توجه به رابطه ی ضریب کیفیت (Q) و تحلیلی مشابه مدارهای R-L سری (قسمت ۳-۶) می توان رابطه ی (۴-۱۶) را به دست آورد.

$$Q = \frac{1}{C\omega R} \text{ یا } Q = \frac{X_C}{R} \quad (4-16)$$

مثال ۳: ضریب کیفیت در مدار مثال ۲ چه قدر است ؟

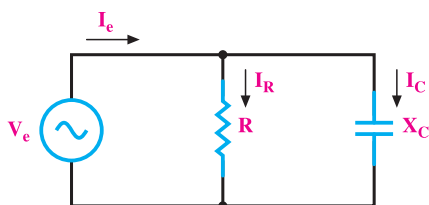
$$X_C = Z \sin \phi = 38 / 18$$

$$R = Z \cos \phi = 22 \Omega$$

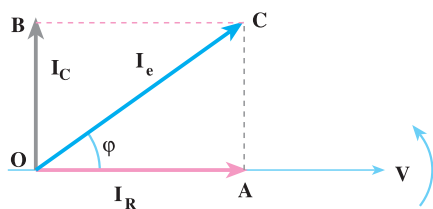
$$Q = \frac{X_C}{R} = \frac{38 / 18}{22} = 1 / 73$$

۴-۳- مدار R - C موازی

یک خازن حقیقی را عملاً به صورت یک خازن ایده آل و یک مقاومت اهمی موازی با آن مدل می کنند. مقاومت اهمی موازی شده را **مقاومت نشتی خازن** گویند و علت تخلیه ی خازن را در مرور زمان به وسیله ی این مدار توجیه می کنند. الکترون ها از طریق این مقاومت بزرگ از پلارایته ی



شکل ۴-۶ مدار الکتریکی R - C موازی



شکل ۴-۷ دیاگرام برداری مدار R - C موازی

مثبت خازن (صفحه‌ی مثبت) به طرف پلاریته‌ی منفی خازن (صفحه‌ی منفی)، مدارشان را کامل می‌کنند و خازن تخلیه می‌شود. مدار الکتریکی R-C موازی مطابق شکل ۴-۶ است. ولتاژ هر دو عنصر C و R باهم یکسان و برابر ولتاژ منبع است. جریان کل مدار از دو جریان غیرهم‌فاز I_R (اهمی) و I_C (خازنی) تشکیل می‌شود. جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع 90° درجه پیش‌فاز است. برای مطالعه‌ی مدار R-C موازی و تحلیل آن، دیاگرام برداری جریان‌ها را مطابق شکل ۴-۷ رسم می‌کنند و محاسبه‌های لازم را انجام می‌دهند.

چون ولتاژ هر دو عنصر C و R یکسان است، در رسم دیاگرام به منظور سادگی محاسبات، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند.

۴-۳-۱- محاسبه‌ی امپدانس مدار R - C موازی: با استفاده از شکل‌های ۴-۶ و

۴-۷ می‌توان نوشت :

$$I_R = \frac{V_e}{R} \quad (4-17)$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} \text{ و } I_e = \frac{V_e}{Z} \quad (4-18)$$

نتیجه‌ی جمع دو بردار \vec{I}_R و \vec{I}_C جریان \vec{I}_e است.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

با توجه به مثلث OAC خواهیم داشت :

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

$$I_e^{\vee} = I_R^{\vee} + I_C^{\vee} \quad (4-19)$$

با جایگزینی روابط ۴-۱۷ و ۴-۱۸ در رابطه‌ی ۴-۱۹ خواهیم داشت :

$$V_e = I_e Z \Rightarrow Z = \frac{V_e}{I_e}$$

$$\frac{V_e^{\vee}}{Z^{\vee}} = \frac{V_e^{\vee}}{R^{\vee}} + \frac{V_e^{\vee}}{X_C^{\vee}}$$

$$\frac{1}{Z^{\vee}} = \frac{1}{R^{\vee}} + \frac{1}{X_C^{\vee}} \Rightarrow Z = \frac{R \cdot X_c}{\sqrt{R^{\vee} + X_c^{\vee}}} \quad (4-20)$$

۴-۳-۲- محاسبه‌ی اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان و ضریب توان: برای محاسبه‌ی

اختلاف فاز بین ولتاژ و جریان از مثلث OAC شکل ۴-۷ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{I_C}{I_R}$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{V_e R}{V_e X_C}$$

با ساده کردن رابطه، خواهیم داشت :

$$\tan \varphi = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{X_C} = RC\omega \quad (4-21)$$

اگر از رابطه‌ی ۴-۲۱، \arctan گرفته شود، زاویه‌ی φ (اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ) به‌دست می‌آید .

$$\varphi = \tan^{-1}(RC\omega) \quad \text{یا} \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{I_C}{I_R}\right) \quad (4-22)$$

کسینوس زاویه‌ی φ به‌دست آمده در رابطه‌ی ۴-۲۲ ضریب توان را تعیین می‌کند. برای محاسبه‌ی ضریب توان از مثلث OAC در شکل ۴-۷ می‌توان نوشت :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OC}} = \frac{I_R}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e R}$$

بنابراین :

$$\cos \varphi = \frac{I_R}{I_e} = \frac{Z}{R} \quad (4-23)$$

برای تعیین $\sin \varphi$ ، از مثلث OAC شکل ۴-۷ می‌توان نوشت :

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{I_C}{I_e} = \frac{V_e Z}{V_e X_C}$$

$$\sin \varphi = \frac{I_C}{I_e} = \frac{Z}{X_c} \quad (4-24)$$

۴-۳-۳- محاسبه‌ی ضریب کیفیت مدار R-C موازی: می‌دانید که انرژی ذخیره‌شده

در یک خازن به ظرفیت C و ولتاژ دوسر آن (V) از رابطه‌ی $W = \frac{1}{2} CV^2$ به‌دست می‌آید. ماکزیمم انرژی ذخیره‌شده توسط ولتاژ ماکزیمم V_m ایجاد می‌شود؛ بنابراین، $W_m = \frac{1}{2} CV_m^2$ ماکزیمم انرژی ذخیره‌شده در خازن خواهد بود. انرژی مصرفی در مقاومت اهمی در یک سیکل از رابطه‌ی $I_e = \frac{V_e}{R}$ تعیین می‌شود. $W = P.T = I_e^2 R \times \frac{2\pi}{\omega}$ به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی ضریب کیفیت می‌توان نوشت :

$$Q = \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره در خازن}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{2\pi \left(\frac{1}{2} CV_m^2 \right)}{R \times \frac{V_e^2}{R} \times \frac{2\pi}{\omega}} \Rightarrow Q = RC\omega \quad (4-25)$$

۴-۳-۴- توان‌ها در مدار R-C موازی: با توجه به روش محاسبه‌ی توان‌ها در مدارهای

R-C می‌توان نوشت :

P_e توان مؤثر به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

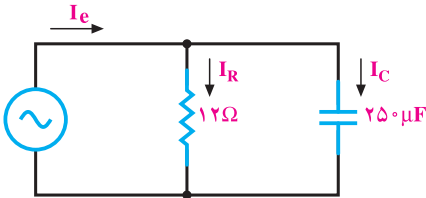
$$P_e = I_R^2 R = \frac{V_e^2}{R} = V_e I_e \cos \varphi \quad (4-26)$$

P_d توان غیر مؤثر از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود :

$$P_d = -I_C^2 X_C = -\frac{V_e^2}{X_C} = -V_e I_e \sin \phi \quad (4-27)$$

P_s توان ظاهری برابر است با :

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \quad (4-28)$$



مثال ۴: در مدار RC موازی شکل مقابل

اگر ولتاژ منبع $v = 192\sqrt{2} \sin 25^\circ t$ باشد،
مطلوب است :

الف : جریان هر شاخه و معادلات آن‌ها.

$$X_C = \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{25^\circ \times 10^{-6} \times 25^\circ} = 16 \Omega$$

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{192\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 192V$$

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{192}{12} = 16A$$

$$I_{Rm} = I_R \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}A$$

$$i_R = 16\sqrt{2} \sin 25^\circ t$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} = \frac{192}{16} = 12A$$

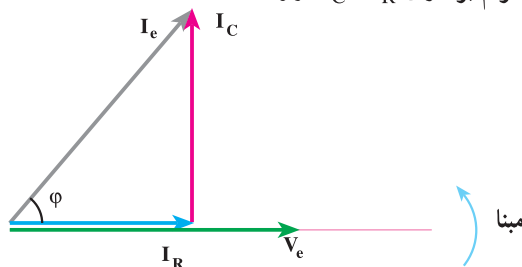
$$I_{cm} = I_C \cdot \sqrt{2} = 12\sqrt{2}A$$

$$i_C = 12\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 9^\circ)$$

جریان مقاومت هم فاز با ولتاژ

جریان خازن 9° درجه جلوتر (پیش فاز) از ولتاژ

ب : رسم دیاگرام برداری \vec{I}_R ، \vec{I}_C و \vec{I}_e .



شکل ۸-۴

پ: جریان کل و معادله ی آن:

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C = \sqrt{I_R^2 + I_C^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ A} \quad \text{با توجه به شکل ۸-۴ داریم:}$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 20 \sqrt{2} \text{ A}$$

از رابطه ی ۲۲-۴ خواهیم داشت:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_C}{I_R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{12}{16} \right) = 37^\circ$$

$$i = 20 \sqrt{2} \sin(25 \cdot t + 37^\circ) \quad \text{I به اندازه ی } \varphi \text{ از } v \text{ جلوتر است.}$$

ت: امپدانس مدار.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C} \quad \text{از رابطه ی ۲۰-۴ داریم:}$$

ولی با داشتن V_e و I_e که ساده ترین راه برای محاسبه ی Z رابطه ی ۱-۳ است.

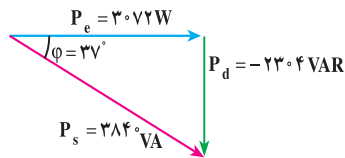
$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_m}{I_m} = \frac{192 \sqrt{2}}{20 \sqrt{2}} = 9.6 \Omega$$

ث: محاسبه ی توان ها و رسم مثلث توان.

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = 192 \times 20 \times \cos(37^\circ) = 3072 \text{ W}$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = 192 \times 20 \times \sin(-37^\circ) = -2304 \text{ VAR}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(3072)^2 + (-2304)^2} = 3840 \text{ VA}$$



۴-۴- تأثیر فرکانس بر مدارهای R - C

با توجه به امپدانس های محاسبه شده برای مدار R - C سری، $Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}$ و مدار R - C

موازی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{X_C}$ و در نظر گرفتن این که $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ ، مشخص می شود. تغییرات فرکانس

مدار در امپدانس مدار R-C سری و موازی اثر می گذارد. کمیت های $\cos \varphi$ و $\sin \varphi$ و Q به طریقی به

امپدانس مدار مرتبطاند؛ بنابراین، تغییرات فرکانس، این کمیت‌ها را نیز تغییر می‌دهد.

هم‌چنین با توجه به این‌که $I_e = \frac{V_e}{Z}$ ، $P_d = V_e I_e \sin \varphi$ ، $P_e = V_e I_e \cos \varphi$ ، $P_s = V_e I_e$ هستند، این کمیت‌ها نیز با تغییرات حاصل در فرکانس شبکه تغییر خواهند کرد. با در نظر گرفتن مطالب گفته شده تأثیر فرکانس را بر روی جریان و امپدانس مدار R - C سری و موازی به طور جداگانه بررسی می‌کنیم .

۴-۴-۱- تأثیر فرکانس در مدار R - C سری: در شکل ۴-۱ فرض می‌کنیم فرکانس منبع ولتاژ از صفر تا ∞ تغییر کند ولی دامنه‌ی ولتاژ ثابت باقی بماند. مقادیر R و C نیز در تغییرات فرکانس مقادیر ثابت باقی بمانند. فرکانس مدار را هم صفر در نظر می‌گیریم. می‌دانیم در جریان DC فرکانس مدار صفر است. خازن در مدارهای DC خیلی سریع شارژ می‌شود و جریان مدار را قطع می‌کند و منبع ولتاژ با مدار باز - یعنی امپدانس بی‌نهایت - مواجه می‌شود. بنابراین :

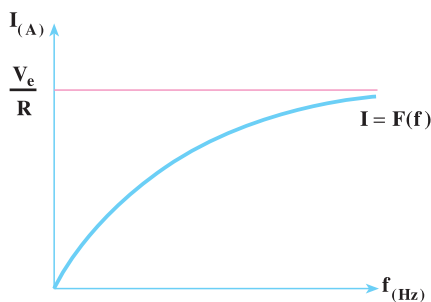
$$f = 0 \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} = \infty \quad \text{و} \quad I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\infty} = 0$$

اگر فرکانس از صفر به بی‌نهایت تغییر کند، امپدانس مدار کاهش یافته و جریان افزایش می‌یابد؛ به گونه‌ای که در فرکانس بی‌نهایت مقدار $X_C = 0$ و امپدانس مدار $Z = R$ و $I = \frac{V}{R}$ می‌شود. دلیل این‌که خازن اتصال کوتاه می‌شود، تغییرات سریع پلاریته‌ی صفحات آن در فرکانس‌های زیاد است. خازن با وجود این تغییرات سریع نمی‌تواند عکس العمل نشان دهد و جریان به راحتی از آن عبور می‌کند. بنابراین :

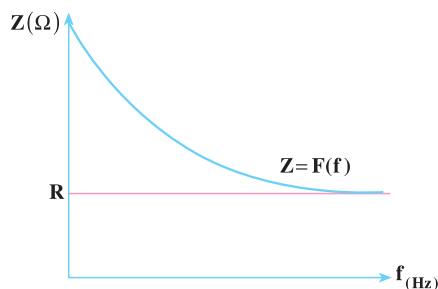
$$f \rightarrow \infty \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2} = R \quad \text{و} \quad I = \frac{V}{R}$$

ضریب کیفیت مدار $Q = \frac{1}{RC\omega} = \frac{1}{\omega RC}$ در فرکانس‌های کم‌تر خیلی بالا و در فرکانس بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کند. منحنی تغییرات جریان و امپدانس مدار R - C را در فرکانس‌های متغیر می‌توان به صورت شکل‌های ۴-۹ از طریق نقطه‌یابی رسم کرد .

$f \text{ (Hz)}$	0	∞
$Z \text{ (}\Omega\text{)}$	∞	R
$I \text{ (A)}$	0	$\frac{V_e}{R}$



ب: منحنی تغییرات جریان در اثر فرکانس



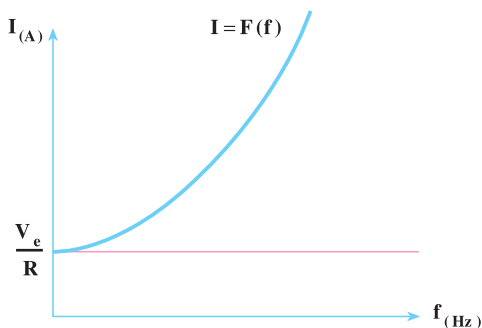
الف: منحنی تغییرات امپدانس در اثر فرکانس

شکل ۹-۴ - تأثیر فرکانس بر مقادیر I ، Z در R-C سری

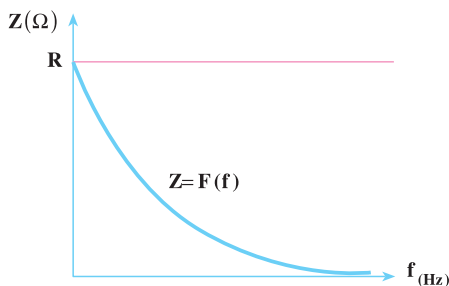
۲-۴-۴- تأثیر فرکانس در مدار R-C موازی: در یک مدار R - C موازی فرض

می‌کنیم فرکانس منبع تغذیه در دامنه‌ی ثابت تغییر کند و در این تغییرات مقدار عناصر R و C ثابت باشند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، خازن شاخه‌ی موازی مربوط به خود را در اثر شارژ در حالت دائمی باز می‌کند و جریان $I_c = 0$ می‌شود. در این حالت، جریان مدار برابر جریان I_R خواهد شد و امپدانس $Z = R$ می‌شود. اگر فرکانس $f = \infty$ شود، شاخه‌ی خازنی اتصال کوتاه می‌کند و جریان I_c بی‌نهایت می‌شود. در این حالت $Z = 0$ خواهد بود. منحنی تغییرات جریان و امپدانس در R - C موازی نسبت به تغییرات فرکانس مطابق شکل ۱۰-۴، از طریق نقطه‌یابی رسم می‌شود.

$f_{(Hz)}$	0	∞
$Z_{(\Omega)}$	R	0
$I_{(A)}$	$\frac{V_e}{R}$	∞



ب: منحنی تغییرات $I = F(f)$

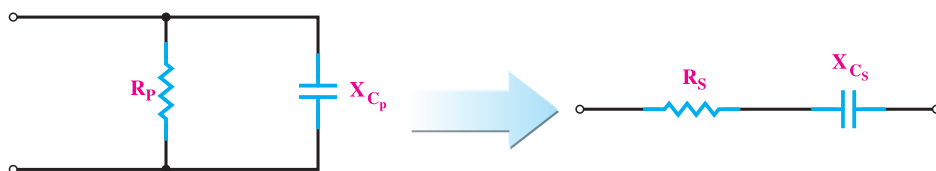


الف: منحنی تغییرات $Z = F(f)$

شکل ۱۰-۴ - تأثیر فرکانس بر مقادیر I و Z در R-C موازی

۵-۴ تبدیل مدار R-C سری به مدار R-C موازی و برعکس

مدار R-C موازی را در نظر بگیرید می‌خواهیم معادل سری آن را به دست آوریم. در مدار معادل باید Z_P و φ_P با Z_S و φ_S مدار قبل از تبدیل یکی باشد.



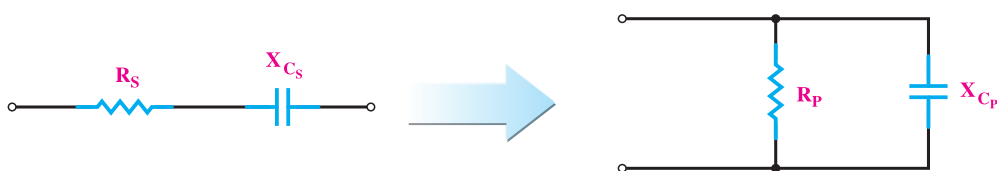
$$Z_P = \frac{R_P \cdot X_{C_P}}{\sqrt{R_P^2 + X_{C_P}^2}}$$

$$\cos \varphi_P = \frac{Z_P}{R_P}$$

$$R_S = \frac{Z_P^2}{R_P}$$

$$X_{C_S} = \frac{Z_P^2}{X_{C_P}}$$

در تبدیل سری به موازی خواهیم داشت :



$$Z_S = \sqrt{R_S^2 + X_{C_S}^2}$$

$$\cos \varphi_S = \frac{R_S}{Z_S}$$

$$R_P = \frac{Z_S^2}{R_S}$$

$$X_{C_P} = \frac{Z_S^2}{X_{C_S}}$$



۱- یک مقاومت $R = 10\Omega$ با یک خازن به راکتانس $X_C = 10\sqrt{3}\Omega$ به صورت سری به یک منبع ولتاژ با معادله $v = 100\sin 250^\circ t$ متصل است. مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان منبع.

ب: معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

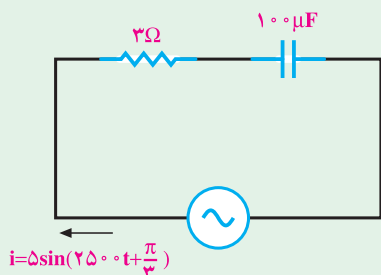
پ: محاسبه‌ی توان‌های مدار و رسم مثلث توان‌ها.

جواب:

$$i(t) = 5\sin(250^\circ t + 6^\circ)$$

$$v_C(t) = 50\sqrt{3}\sin(250^\circ t - 3^\circ)$$

$$v_R(t) = 50\sin(250^\circ t + 6^\circ)$$



۲- در مدار مقابل مطلوب است:

الف: معادله‌ی ولتاژ منبع.

ب: معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان.

پ: رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار.

۳- در یک مدار $R-C$ سری معادله‌ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $V = 100\sin(250^\circ t - \frac{\pi}{6})$

و $i = 2\sin(250^\circ t + \frac{\pi}{6})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه قدر است؟

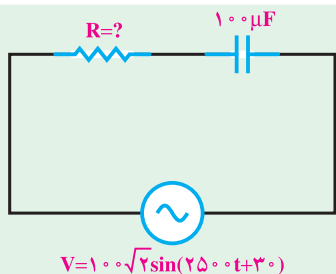
جواب: $R = 25\Omega$ و $C = 9/23\mu F$

۴- یک خازن با راکتانس $X_C = 5\Omega$ با یک مقاومت نامشخص به طور سری به هم متصل اند.

اگر جریان به اندازه‌ی $\frac{\pi}{3}$ رادیان از ولتاژ جلو باشد، مقدار R چند اهم است؟

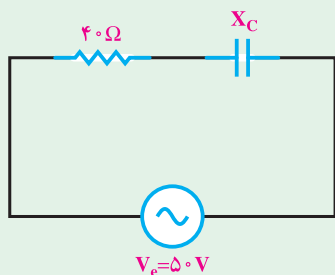
$$R = 2/88\Omega$$

جواب:

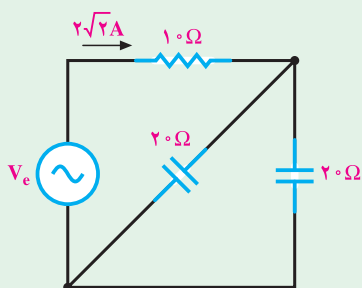


۵- در مدار شکل روبه‌رو اگر $Z = 5 \Omega$ باشد، اندازه‌ی R چند اهم است؟
 جواب: $R = 3 \Omega$

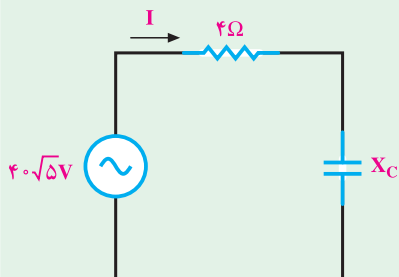
۶- خازنی به ظرفیت $100 \mu F$ با یک مقاومت 2Ω سری شده‌اند. در چه فرکانسی ضریب کیفیت مدار $\frac{5}{\pi}$ می‌شود؟
 جواب: $f = 50 \text{ Hz}$



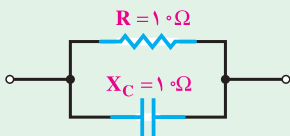
۷- در مدار شکل روبه‌رو، ولتاژ دو سر خازن $V_C = 30 \text{ V}$ است. ضریب توان و اندازه‌ی X_C چند اهم است؟
 جواب: $X_C = 30 \Omega$ و $\cos \phi = 0.8$



۸- در مدار روبه‌رو ولتاژ منبع چند ولت است؟
 جواب: $V_e = 40 \text{ V}$



۹- ضریب کیفیت مدار روبه‌رو $Q = 2$ است. جریان مدار چند آمپر است؟
 جواب: $I = 1 \text{ A}$



۱۰- مدار R-C موازی شکل روبه‌رو را به یک مدار R-C سری تبدیل کنید.

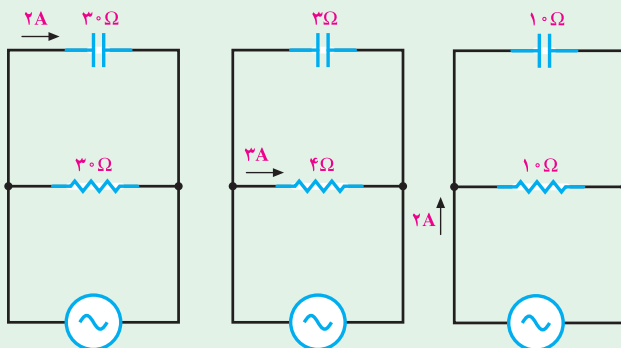
جواب: $R_S = 5\Omega$ و $X_{C_S} = 5\Omega$

۱۱- در هر یک از مدارهای زیر مطلوب است:

الف: معادله‌ی جریان و ولتاژ منبع. ($\theta_V = 0^\circ$)

ب: توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

پ: رسم دیاگرام برداری جریان‌ها و ولتاژ مدار.



۱۲- در یک مدار R-C موازی معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $v(t) = 200 \sin 100\pi t$ و

$i(t) = 10 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$ می‌باشد. اندازه‌ی R و C چه قدر است؟

جواب: $R = 20\sqrt{2}\Omega$ و $C = 3/53 \mu F$

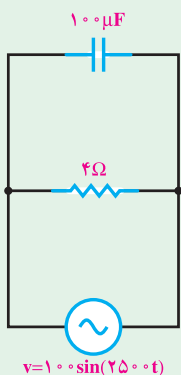
۱۳- در مدار شکل روبه‌رو مطلوب است:

الف: جریان هر شاخه و معادلات زمانی آن‌ها.

ب: در صورت دو برابر شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

پ: در صورت نصف شدن فرکانس، بند الف را محاسبه کنید.

ت: جواب‌های بند الف، ب و پ را مقایسه کنید.



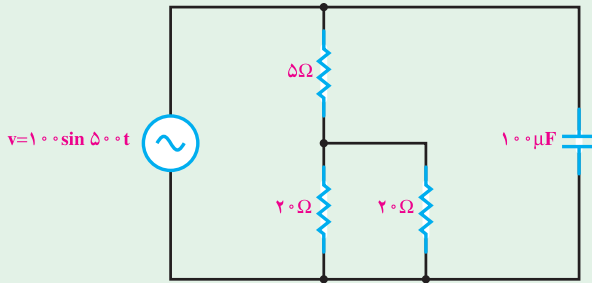
جواب الف: $I_{R(t)} = 25 \sin(250\pi t + 0^\circ)$

$I_{C(t)} = 25 \sin(250\pi t + 90^\circ)$

۱۴- در مدار شکل زیر مطلوب است :

الف : امپدانس کل مدار.

ب : ضریب قدرت شبکه.



$$Z = 12\Omega$$

جواب :

$$\cos \phi = 0.8$$

مدارهای C - L جریان متناوب

هدف های رفتاری

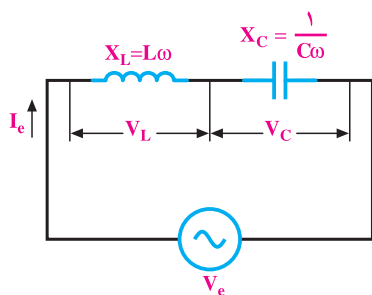
- در پایان این فصل، از هنرجو انتظار می رود :
- ۱- منحنی ها و دیاگرام برداری جریان، ولتاژ و مقاومت ظاهری در مدار L-C سری و موازی را رسم کند.
 - ۲- مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان- ولتاژ و توان ها را در مدارهای L-C سری و موازی محاسبه کند.
 - ۳- مفهوم رزنانس را شرح دهد و فرکانس رزنانس را در مدارهای L-C سری و موازی محاسبه کند.
 - ۴- منحنی تغییرات امپدانس Z و جریان I، مدارهای L-C سری و موازی را در تغییرات فرکانس رسم کند.
 - ۵- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای L-C سری و موازی را به دست آورد.

۱-۵- مقدمه

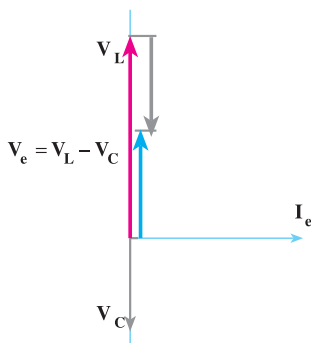
تولید امواج الکتریکی در نوسان سازها، تنظیم ایستگاه های رادیویی و تلویزیونی بر روی موج فرستنده ها، تصحیح ضریب توان شبکه های قدرت از جمله موارد کاربرد مدارهای L-C است. در بررسی مدار یک سلف و یک خازن آموختیم که این عناصر رفتار متقابل دارند؛ زیرا در سلف جریان از ولتاژ 90° عقب تر است؛ در صورتی که جریان در خازن از ولتاژ 90° جلوتر است. این امر باعث می شود رفتار خازن نسبت به رفتار سلف 180° الکتریکی اختلاف فاز پیدا کند و با هم رفتار متقابل

داشته باشند. از آنجا که هر دو عنصر در شبکه توان راکتیو مبادله می کنند، به دلیل اثر متقابل آن ها می توان توان راکتیو شبکه را کاهش داد و مقدار آن را به صفر رساند. مدارهای L-C در شبکه ها به صورت اتصال سری، موازی یا اتصال سری موازی به کار گرفته می شوند. در این فصل، اتصال سری و موازی مدارهای L-C را به طور جداگانه بررسی می کنیم.

۵-۲- مدار L-C سری



شکل ۵-۱- مدار L-C سری



شکل ۵-۲- دیاگرام برداری مدار L-C سری ($V_L > V_C$)

مدار الکتریکی L-C سری که از یک عنصر خالص خازنی و یک عنصر خالص سلفی تشکیل می شود، مطابق شکل ۵-۱ است. در این مدار، جریان هر دو عنصر یکسان است. اگر برای رسم دیاگرام برداری، جریان را مبنا قرار دهیم ولتاژ دو سر سلف از جریان 90° جلوتر و ولتاژ دو سر خازن از جریان 90° عقب تر خواهد بود. دیاگرام برداری ولتاژ با فرض $V_L > V_C$ مطابق شکل ۵-۲ رسم می شود.

۵-۲-۱- محاسبه امپدانس مدار L-C سری:

از شکل ۵-۱ می توان مقادیر ولتاژهای V_L و V_C را به دست آورد.

$$V_L = I_e \cdot X_L = I_e \cdot L\omega \quad (5-1)$$

$$V_C = I_e \cdot X_C = I_e \times \frac{1}{C\omega} \quad (5-2)$$

از شکل ۵-۲ دیاگرام برداری ولتاژها و شکل ۵-۱ مدار L-C سری می توان نوشت:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_L + \vec{V}_C, \quad V_e = I_e \cdot Z$$

$$V_e = V_L - V_C \quad (5-3)$$

با جایگزین کردن روابط ۵-۱ و ۵-۲ در رابطه‌ی ۵-۳ خواهیم داشت :

$$I_e \times Z = X_L \cdot I_e - X_C \cdot I_e$$

$$Z = X_L - X_C \quad (5-4)$$

در صورتی که $V_C > V_L$ باشد رابطه‌ی ۵-۳ و ۵-۴ به صورت زیر می‌شود :

$$V_e = V_C - V_L$$

$$Z = X_C - X_L$$

۵-۲-۲- محاسبه‌ی توان‌ها: همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در دیاگرام شکل ۵-۲ اختلاف

فاز جریان و ولتاژ همواره 90° خواهد بود؛ یعنی، اگر $X_L > X_C$ باشد $\varphi = 90^\circ$ و مدار پس فاز و اگر $X_L < X_C$ باشد، $\varphi = -90^\circ$ و مدار پیش فاز خواهد بود. پس ضریب توان مؤثر و غیر مؤثر به ترتیب $\cos \varphi = 0$ و $\sin \varphi = \pm 1$ است. وقتی ضریب توان مؤثر صفر شد، در مدار L-C هیچ‌گونه توان اکتیو مصرف نمی‌شود. بنابراین :

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = 0 \quad (5-5)$$

برای تعیین توان راکتیو می‌توان نوشت :

$$P_{dL} = I_e^2 X_L \quad \text{برای سلف}$$

$$P_{dC} = -I_e^2 X_C \quad \text{برای خازن}$$

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C$$

$$P_d = I_e^2 (X_L - X_C) \quad (5-6)$$

رابطه‌ی ۵-۶ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$P_d = \pm V_e I_e \sin \varphi = \pm V_e I_e \sin 90^\circ = \pm V_e I_e \quad \text{V.A.R} \quad (5-7)$$

👉 نتیجه: به ازای $X_L > X_C$ توان راکتیو با علامت + و به ازای $X_C > X_L$

توان راکتیو با علامت - مشخص می‌شود.

از آن‌جا که $P_s = V_e I_e$ است، بنابراین :

$$P_s = |P_d| = V_e \cdot I_e \quad (5-8)$$

۳-۲-۵ — رسم منحنی‌های مدارهای L-C سری: فرض می‌کنیم جریان متناوبی با

معادله‌ی $i = I_m \sin(\omega t)$ از مدار شکل ۵-۱ عبور می‌کند.

معادله‌ی زمانی ولتاژ دو سر سلف به صورت $v_L(t) = X_L \cdot I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ و ولتاژ دو سر

خازن به صورت $v_C = X_C \cdot I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ خواهد شد. ولتاژ منبع همواره از جمع جبری دو

ولتاژ لحظه‌ای v_L و v_C به دست می‌آید. بنابراین، ولتاژ کل برابر است با:

$$v(t) = X_L \cdot I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + X_C \cdot I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \quad (5-9)$$

با توجه به این که $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos \alpha$ و $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\cos \alpha$ است. رابطه‌ی ۵-۹ به

صورت زیر بیان می‌شود:

$$v = X_L I_m \cos \omega t - X_C I_m \cos \omega t$$

$$v = (X_L - X_C) I_m \cos \omega t$$

با توجه به قانون اهم $v_m = (X_L - X_C) I_m$ می‌باشد. اگر $X_L > X_C$ باشد رابطه‌ی ولتاژ ۵-۹ به صورت زیر در می‌آید:

$$v = +v_m \cos \omega t = V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (5-10)$$

و در صورتی که اگر $X_L < X_C$ باشد، رابطه‌ی ولتاژ ۵-۱۰ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$v = V_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

مثال ۱: یک مدار L - C سری با $L = 0.05 \text{ H}$ و خازن C مفروض است. اگر معادله‌ی

ولتاژ $v(t) = 100 \sin(500t - 90^\circ)$ و معادله‌ی جریان $i(t) = 2 \sin(500t)$ باشد، ظرفیت خازن C

چه قدر است؟

$$Z = \frac{V_m}{I_m} = \frac{100}{2} = 50 \Omega$$

راه حل:

$$\varphi = \theta_V - \theta_I = (-90^\circ) - 0^\circ = -90^\circ$$

چون جریان از ولتاژ پیش فاز است، مدار در مجموع خاصیت خازنی دارد و راکتانس X_C از راکتانس X_L بزرگ تر است.

$$X_L = L\omega = 0.05 \times 500 = 25\Omega$$

$$Z = X_C - X_L$$

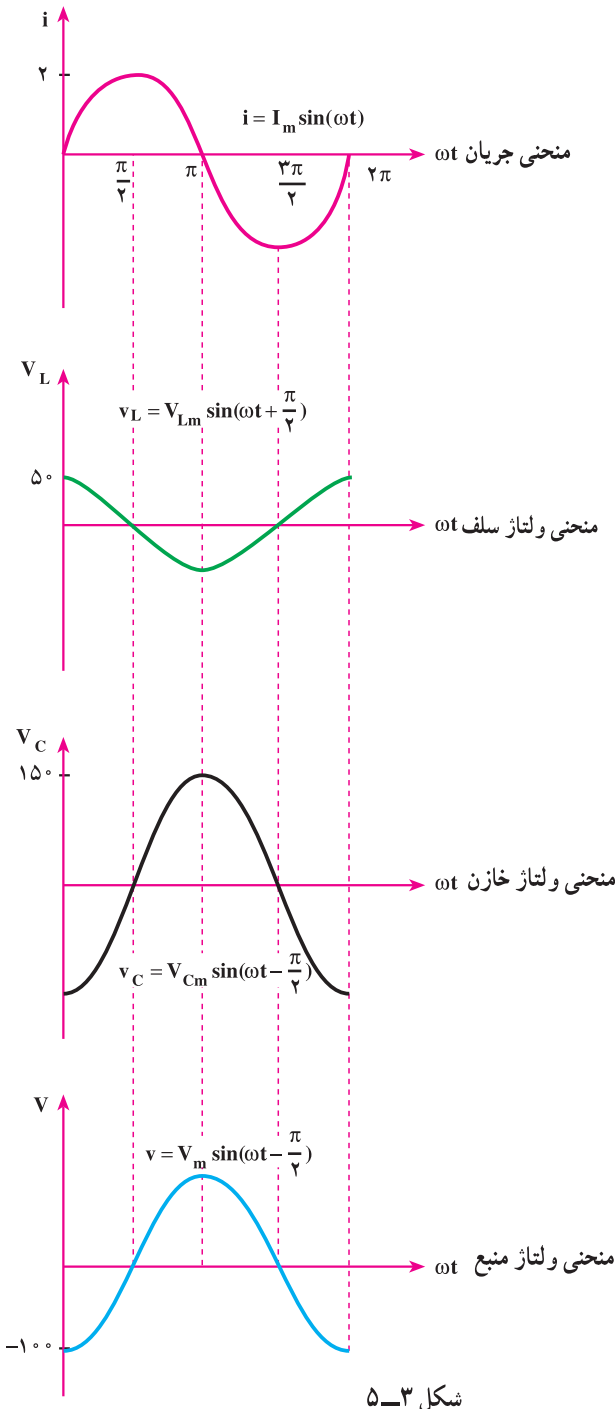
$$50 = X_C - 25 \Rightarrow X_C = 75\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega X_C}$$

$$C = \frac{1}{500 \times 75} = 2.66 \times 10^{-5} \text{ F}$$

$$C = 26.6 \mu\text{F}$$

در شکل ۵-۳ منحنی تغییرات ولتاژها و جریان رسم شده است.



شکل ۵-۳

۴-۲-۵- تشدید (رزنانس) در مدار L-C سری: در رابطه‌ی ۴-۵، امپدانس یک

مدار L-C سری را به صورت $Z = L\omega - \frac{1}{C\omega}$ محاسبه کردیم. چون $\omega = 2\pi f$ است،

بنابراین $Z = 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fc}$ نیز بیان می‌شود. مقدار امپدانس Z با تغییر فرکانس (f) شبکه و مقادیر

L و C تغییر می‌کند. از آن‌جا که ظرفیت خازن $C = \frac{\epsilon A}{d}$ و اندوکتانس یک سلف $L = \frac{\mu_r \mu_0 N^2 A}{l}$

است، با تغییر فاصله‌ی دو صفحه‌ی خازن، تغییر مقدار سطح مؤثر صفحات خازن یا تغییر ضریب

دی‌الکتریک می‌توان ظرفیت خازن را تغییر داد. در اندوکتانس یک سلف، تغییر دور و سطح مقطع

حلقه‌ها و طول مؤثر بوبین (سلف) و ضریب نفوذ مغناطیسی، مقدار L را تغییر می‌دهد. در هر

صورت، با تغییر کمیت‌های f و L و C می‌توان وضعیتی ایجاد کرد که $2\pi fL$ برابر $\frac{1}{2\pi fc}$ شود. در

این حالت، اندازه‌ی کمیت Z برابر صفر می‌شود و حداکثر جریان در مدار L-C سری جاری خواهد

شد. این جریان، با جریان اتصال کوتاه مدار L-C برابر است و سلف و خازن با هم مدار را به اتصال

کوتاه می‌کشانند. این حالت از وضعیت مدار L-C سری را که $Z = 0$ یا $L\omega = \frac{1}{C\omega}$ می‌شود،

حالت تشدید یا رزنانس گویند. در حالت تشدید خواهیم داشت:

$$Z = L\omega - \frac{1}{C\omega} = 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fc} = 0 \quad (5-11)$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2 C = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ rad/s} \quad (5-12)$$

اگر در مدار L-C سری L و C ثابت باشند، با تغییرات فرکانس f وضعیت تشدید ایجاد

می‌شود. به فرکانسی که وضعیت تشدید را ایجاد می‌کند، **فرکانس رزنانس** یا **فرکانس تشدید** می‌گویند

و آن را با f_r نشان می‌دهند. از رابطه‌ی ۱۲-۵ فرکانس تشدید به صورت روابط زیر محاسبه می‌شود:

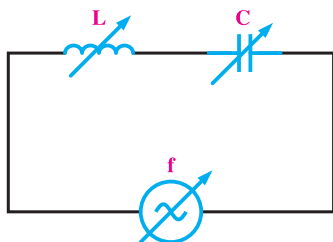
$$L\omega^2 C = 1, \quad \omega = 2\pi f_r$$

$$L(2\pi f_r)^2 C = 1 \Rightarrow (2\pi f_r)^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\pi f_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5-13)$$

در رابطه‌ی ۵-۱۳، C بر حسب فاراد و L بر حسب هانری و f_r بر حسب هرتز است.



شکل ۵-۴

مثال ۲: مدار L - C سری، مطابق شکل ۵-۴

مفروض است. همان طور که مشاهده می‌کنید، هر سه کمیت f و C و L در مدار قابل تغییر است. مطلوب است:

- ۱- مقدار اندوکتانس L در صورتی که در $f = 100\text{ Hz}$ تشدید ایجاد کند و ظرفیت خازن برابر با $C = 100\text{ }\mu\text{F}$ باشد.

۲- اندازه‌ی ظرفیت خازن C در فرکانس رزونانس $f = 100\text{ Hz}$ در صورتی که $L = 1\text{ mH}$ باشد.

۳- در صورتی که $L = 1\text{ mH}$ و $C = 100\text{ }\mu\text{F}$ باشد، فرکانس رزونانس چقدر است؟
راه‌حل:

$$X_C = X_L \Rightarrow 2\pi fL = \frac{1}{2\pi fc} \Rightarrow L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 c} \quad \text{—۱}$$

$$L = \frac{1}{4 \times \pi^2 \times 100^2 \times 100 \times 10^{-6}} = 25 / 35\text{ mH}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 \times 100^2 \times 10^{-3}} = 253 / 5\text{ }\mu\text{F} \quad \text{—۲}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10 \times 10^{-3} \times 100 \times 10^{-6}}} = 159 / 23\text{ Hz} \quad \text{—۳}$$

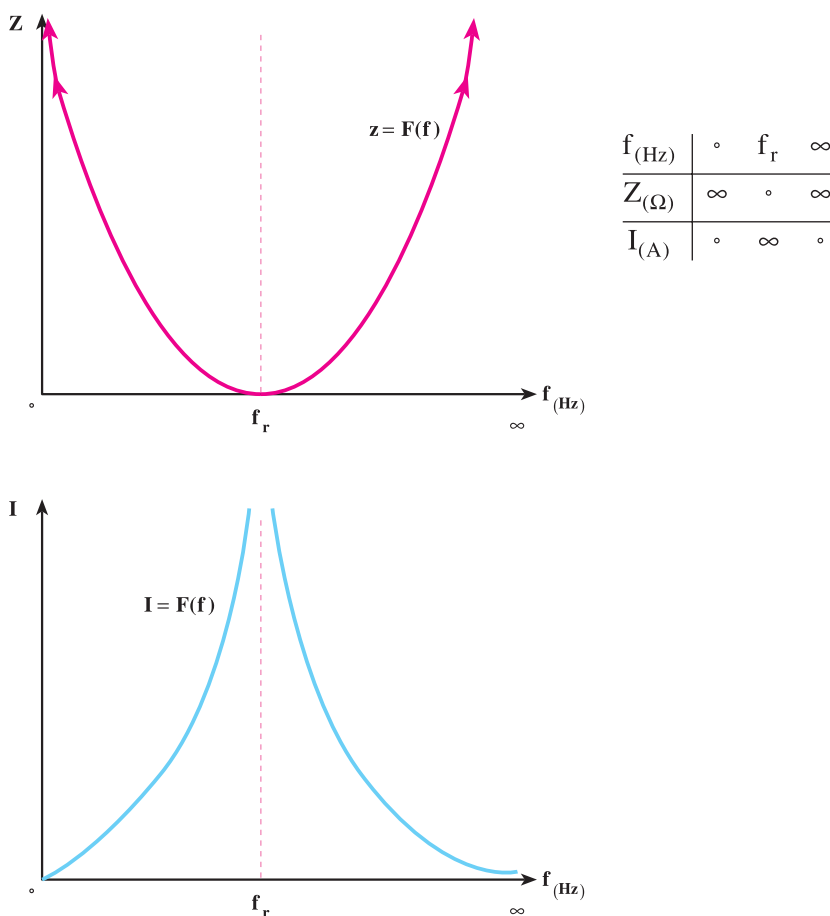
۵-۲-۵- تأثیر فرکانس در امپدانس و جریان مدار L - C سری: در مدار L - C ، با

توجه به رابطه‌ی $Z = 2\pi fL - \frac{1}{2\pi fc}$ اگر فرکانس $f = 0$ شود، امپدانس Z بی‌نهایت می‌شود؛ زیرا

مقدار $2\pi fL = 0$ و $\frac{1}{2\pi fc} = \infty$ خواهد شد. به عبارت دیگر، وقتی فرکانس برابر صفر است، یعنی

مدار از جریان DC تغذیه می‌کند و خازن در جریان DC در حالت پایدار نقش مدار باز را خواهد داشت. اگر امپدانس $Z = \infty$ شود، هیچ نوع جریانی از مدار عبور نمی‌کند و $I = 0$ خواهد شد.

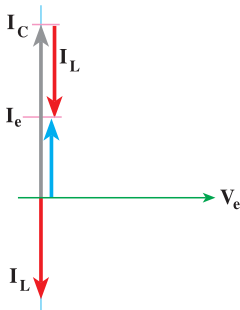
وقتی فرکانس برابر f_r فرکانس تشدید می‌شود، $Z = 0$ شده و جریان I به مقدار ∞ (جریان اتصال کوتاه) می‌رسد. اگر $f = \infty$ شود، تغییرات بار الکتریکی در صفحات خازن خیلی شدید می‌شود و خازن عملاً به اتصال کوتاه کشانده شده و $\frac{1}{2\pi fC} = 0$ خواهد شد. در عوض، $2\pi fL$ به مقدار خیلی زیاد $\rightarrow \infty$ میل کرده و مدار $L-C$ را عملاً باز می‌کند. در این حالت، امپدانس $L-C$ مجدداً بی‌نهایت می‌شود. چون $I = \frac{U}{Z}$ است، جریان صفر خواهد شد. نمودار تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در شکل ۵-۵ رسم شده است.



شکل ۵-۵ — منحنی‌های تغییرات $I = F(f)$ و $Z = F(f)$ در مدار $L-C$ سری

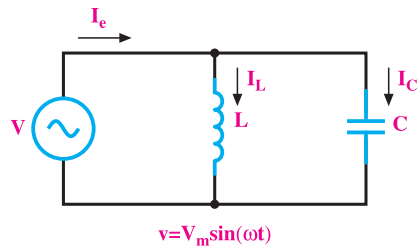
۳-۵- مدار L-C موازی

مدار الکتریکی L-C موازی در شکل ۵-۶ نشان داده شده است. در این مدار، ولتاژ دو سر هر دو عنصر C و L با هم برابرند. جریان در داخل مقاومت سلفی (I_L) از ولتاژ منبع به اندازه 90° عقب‌تر و جریان خازنی (I_C) از ولتاژ منبع 90° جلوتر است. جریان کل I_e از جمع برداری دو جریان \vec{I}_C و \vec{I}_L به دست می‌آید. چون دو جریان \vec{I}_C و \vec{I}_L دارای یک راستا هستند و 180° درجه اختلاف فاز دارند، می‌توان جریان I_e (جریان کل) را از رابطه‌ی $I_e = I_C - I_L$ یا $I_e = I_C - I_L$ به دست آورد. دیاگرام برداری جریان‌های مدار L-C موازی در مبنای ولتاژ در شکل ۵-۷ با فرض $X_L > X_C$ رسم شده است.



$$(X_L > X_C)$$

شکل ۵-۷



شکل ۵-۶

۱-۳-۵- محاسبه‌ی امپدانس مدار L-C موازی: از شکل‌های ۵-۶ و ۵-۷ برای

محاسبه‌ی امپدانس می‌توان نوشت:

$$I_L = \frac{V_e}{X_L} \quad , \quad I_C = \frac{V_e}{X_C} \quad , \quad Z = \frac{V_e}{I_e} \quad , \quad I_e = \frac{V_e}{Z}$$

$$I_e = I_C - I_L \Rightarrow \frac{V_e}{Z} = \frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}$$

با فرض $X_L > X_C$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \rightarrow \text{یا} \quad Z = \frac{X_L \cdot X_C}{X_L - X_C} \quad (5-14)$$

در صورتی که $X_C > X_L$ باشد، در رابطه‌ی ۵-۱۴ جای X_C و X_L در مخرج کسر با هم

عوض می‌شود و به صورت رابطه‌ی ۵-۱۵ نوشته می‌شود.

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \quad \text{یا} \quad Z = \frac{X_L \cdot X_C}{X_C - X_L} \quad (5-15)$$

۵-۳-۲ فرکانس تشدید در مدار L-C موازی:

باشد، $I_C = I_L$ اندازه‌ی جریان I_e برابر صفر می‌شود. خاصیت سلفی به وسیله‌ی خاصیت خازنی مدار کاملاً خنثی شده و حالت تشدید (رزنانس) برقرار می‌شود. در حالت تشدید می‌توان نوشت:

$$I_L = I_C$$

$$\frac{V_e}{X_L} = \frac{V_e}{X_C} \Rightarrow \frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_C} \Rightarrow X_L = X_C$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2 C = 1, \quad \omega = 2\pi f_r$$

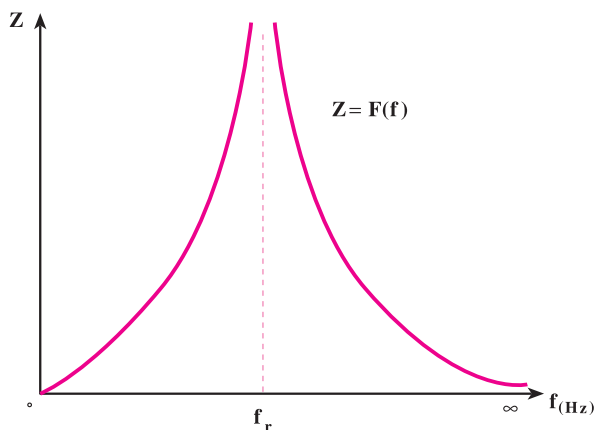
$$L(2\pi f_r)^2 C = 1 \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5-16)$$

۵-۳-۳ منحنی تغییرات امپدانس و جریان در فرکانس‌های متغیر: امپدانس مدار

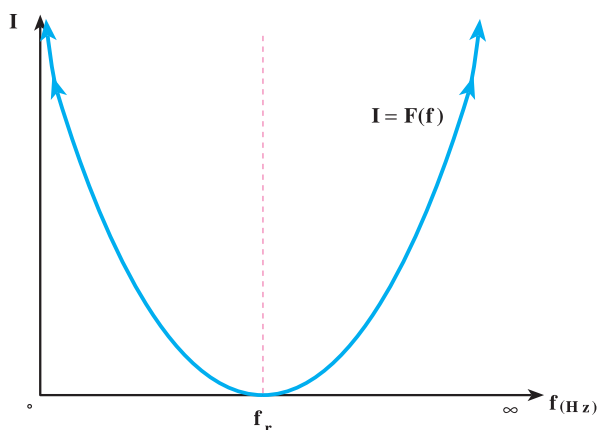
L-C با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{Z} = \frac{1}{2\pi fL} - \frac{1}{2\pi fC}$ وقتی فرکانس مدار صفر است (زمانی که از جریان

DC تغذیه می‌شود) برابر صفر خواهد شد؛ زیرا $X_L = 2\pi fL = 0$ است و مدار را به اتصال کوتاه می‌کشاند. در این حالت، از مدار جریان $I_{S,C}$ (جریان اتصال کوتاه) عبور خواهد کرد. در فرکانس $f = f_r$ (یعنی فرکانس تشدید) $X_L = X_C$ شده و $\frac{1}{Z} = 0$ می‌شود. به عبارت دیگر، امپدانس مدار

بی‌نهایت می‌شود و به عنوان مدار باز عمل می‌کند. در فرکانس‌های خیلی زیاد، زمانی که فرکانس به بی‌نهایت میل می‌کند، خازن به علت تغییرات شدید بار، اتصال کوتاه شده و مدار را به اتصال کوتاه می‌کشاند و $Z = 0$ می‌شود. مجدداً جریان مدار به جریان $I_{S,C}$ می‌رسد. نمودار تغییرات امپدانس و جریان در شکل ۵-۸ رسم شده است.



$f(\text{Hz})$	0	f_r	∞
$Z(\Omega)$	0	∞	0
$I(\text{A})$	∞	0	∞



شکل ۸-۵- منحنی‌های تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در مدار L-C موازی

👉 نتیجه: در حالت رزونانس دو سر مدار L-C سری اتصال کوتاه و دو سر مدار L-C موازی، مدار باز می‌شود.

مثال ۳: در یک مدار L-C موازی، ولتاژ و جریان مدار به صورت $v = 50\sqrt{2} \sin(3000t - 45^\circ)$ و $i = 2\sqrt{2} \sin(3000t + 45^\circ)$ است. اگر شدت جریان در شاخه‌ی C پنج برابر شدت جریان شاخه‌ی

L باشد، مطلوب است :

الف - مقادیر C و L.

ب - فرکانس تشدید.

راه حل:

الف: $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2A$ و $V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{50\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 50V$ و $I_C = 5I_L$

$I_C > I_L$ است و مدار پیش فاز می باشد جریان منبع برابر است با

به جای I_C معادل آن $5I_L$ را قرار می دهیم

$$I_e = 5I_L - I_L \Rightarrow I_L = \frac{I_e}{4} = \frac{2}{4} = 0.5A$$

$$I_C = 5I_L \Rightarrow I_C = 5 \times 0.5 = 2.5A$$

$$X_L = \frac{V_e}{I_L} = \frac{50}{0.5} = 100\Omega$$

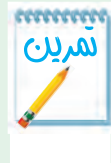
$$X_C = \frac{V_e}{I_C} = \frac{50}{2.5} = 20\Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{100}{3000} = 0.033H$$

$$C = \frac{1 \times 10^{-6}}{X_C \omega} = \frac{1 \times 10^{-6}}{20 \times 3000} = 16.6 \mu F$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.033 \times 16.6 \times 10^{-6}}} = 215.1Hz$$

ب:



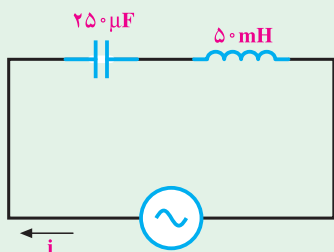
۱- در مدار شکل زیر اگر $i = 5 \sin 40^\circ \cdot t$ باشد، مطلوب است :

الف : معادله ولتاژ دو سر L و C ب : معادله ولتاژ منبع

پ : توان های مدار ت : فرکانس رزونانس

ث : رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

جواب :



$$v_{L(t)} = 100 \sin(40^\circ \cdot t + 90^\circ)$$

$$v_{C(t)} = 50 \sin(40^\circ \cdot t - 90^\circ)$$

$$v(t) = 50 \sin(40^\circ \cdot t + 90^\circ)$$

$$P_e = 0, P_d = P_s = 125, f_r = 45 \text{ Hz}$$

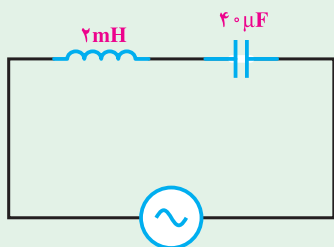
۲- در مدار شکل زیر اگر $v = 10\sqrt{2} \sin 250^\circ \cdot t$ باشد، مطلوب است :

الف : معادله جریان منبع ب : معادله ولتاژ دو سر L و C

پ : توان های مدار ت : فرکانس رزونانس

ث : رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

جواب :



$$i_{(t)} = 2\sqrt{2} \sin(250^\circ \cdot t + 90^\circ)$$

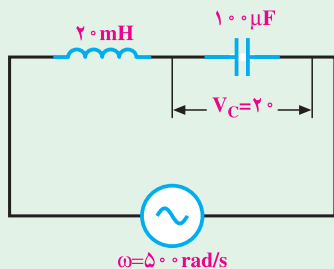
$$v_{L(t)} = 10\sqrt{2} \sin(250^\circ \cdot t + 180^\circ)$$

$$v_{C(t)} = 20\sqrt{2} \sin(250^\circ \cdot t + 0^\circ)$$

$$P_e = 0, |P_d| = P_s = 20, f_r = 563 \text{ Hz}$$

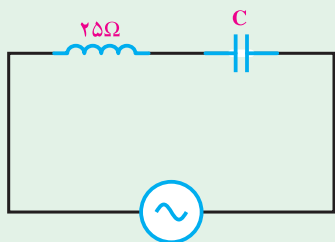
۳- در مدار شکل مقابل معادله ولتاژ و جریان منبع را به دست آورید. ($\theta_V = 0^\circ$ در نظر گرفته شود)

جواب :



$$v(t) = 10\sqrt{2} \sin(50^\circ \cdot t + 0^\circ)$$

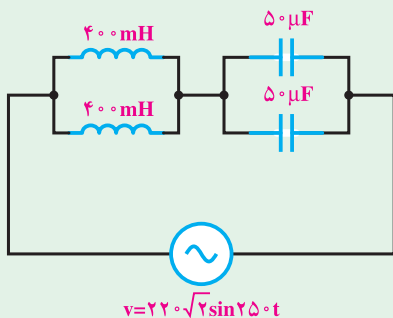
$$i_{(t)} = \sqrt{2} \sin(50^\circ \cdot t + 90^\circ)$$



۴- در مدار شکل مقابل اگر معادله ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $v = 100 \sin 50^\circ t$ و $i = 2 \sin(50^\circ t + \frac{\pi}{4})$ باشد، مقدار C را محاسبه کنید.

جواب :

$$C = 26/6 \mu F$$



۵- در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف : معادله‌ی جریان منبع

ب : معادله‌ی ولتاژ دو سر هر المان

جواب :

$$i_{(t)} = 22\sqrt{2} \sin(25^\circ t - 9^\circ)$$

$$v_{L(t)} = 1100\sqrt{2} \sin(25^\circ t + 0^\circ)$$

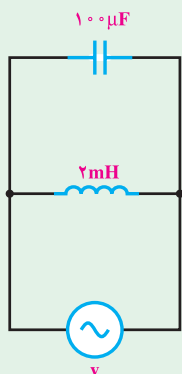
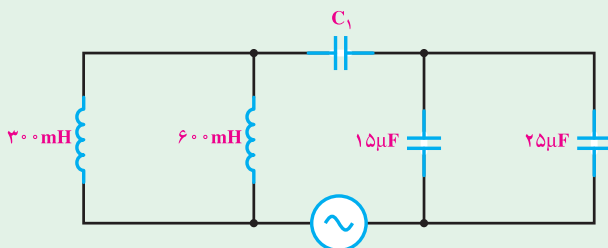
$$v_{C(t)} = 880\sqrt{2} \sin(25^\circ t - 18^\circ)$$

۶- در مدار شکل زیر با $\omega = 50^\circ \text{ rad/s}$ مدار در حالت تشدید است. ظرفیت C_1 چند

میکروفاراد است؟

جواب :

$$C_1 = 40 \mu f$$



۷- در مدار شکل زیر اگر $v = 100 \sin 250^\circ t$ باشد، مطلوب است :

الف : معادله‌ی جریان هر شاخه

ب : معادله‌ی جریان منبع

پ : توان‌های مدار

ت : فرکانس رزونانس

ج : رسم دیاگرام برداری جریان‌ها

جواب :

$$i_{C(t)} = 25 \sin(250^\circ t + 9^\circ)$$

$$i_{L(t)} = 20 \sin(250^\circ t - 9^\circ)$$

$$P_e = 0$$

$$P_d = -250 \text{ VAR} \quad P_s = 250 \text{ VA} \quad i = 5 \sin(250^\circ t + 9^\circ)$$

$$f_r = 356 \text{ Hz}$$

۸- در مدار شکل زیر اگر $i = 5 \sin 40^\circ t$ باشد، مطلوب است :

الف : معادله‌ی ولتاژ منبع

ب : جریان هر شاخه و معادله‌ی آن

پ : توان‌های مدار

ت : فرکانس رزونانس

جواب :

$$V(t) = 100 \sin(40^\circ t + 9^\circ)$$

$$i_{L(t)} = 10 \sin(40^\circ t + 0^\circ)$$

$$i_{C(t)} = 5 \sin(40^\circ t + 18^\circ)$$

$$P_e = 0$$

$$P_d = 250 \text{ VAR} \quad P_s = 250 \text{ V.A} \quad f_r = 9^\circ \text{ Hz}$$

۹- در مدار شکل مقابل اگر $i_c = 2\sqrt{2} \sin 250^\circ t$ باشد مطلوب است :

الف : معادله‌ی ولتاژ منبع

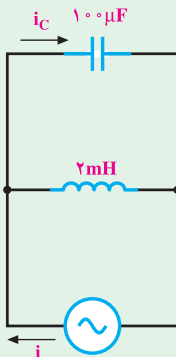
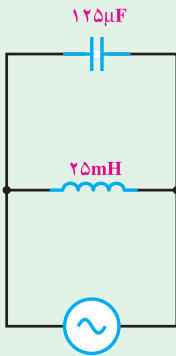
ب : معادله‌ی جریان منبع

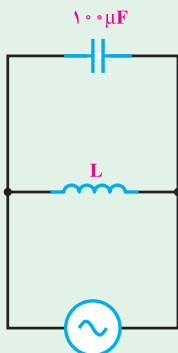
پ : رسم دیاگرام برداری مدار

جواب :

$$V(t) = 8\sqrt{2} \sin(250^\circ t - 9^\circ)$$

$$i(t) = 0 / 4\sqrt{2} \sin(250^\circ t + 0^\circ)$$





۱۰- مدار شکل مقابل به ازای $\omega = 4000 \text{ rad/s}$ به حالت

تشدید می‌رود. مقدار L چند میلی‌هانی است؟

جواب:

$$L = 625 \text{ mH}$$

۱۱- در یک مدار L - C موازی $I_C = 5I_L$ و معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب

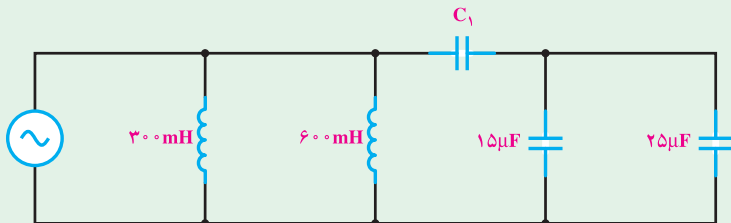
$$v = 100 \sin 250^\circ t \text{ و } i = 8 \sin(250^\circ t + \frac{\pi}{4}) \text{ است. اندازه‌ی } L \text{ و } C \text{ چه قدر است؟}$$

$$L = 2 \text{ mH}, C = 4 \mu\text{F}$$

۱۲- مدار شکل زیر به ازای $\omega = 500 \text{ rad/s}$ به حالت رزونانس می‌رود. ظرفیت C_1 را محاسبه

کنید.

$$\text{جواب: } C_1 = 4 \mu\text{F}$$



۱۳- مدار معادل یک مدار L - C موازی را در دو حالت زیر رسم کنید.

$$\text{الف: } X_L > X_C$$

$$\text{ب: } X_C > X_L$$

۱۴- دو عنصر $L = 1 \text{ mH}$ و $C = 10 \mu\text{F}$ مفروض‌اند. مطلوب است رسم منحنی تابع

تغییرات امپدانس و جریان این دو عنصر در محدوده‌ی فرکانس 5° Hz تا 5 kHz و ولتاژ

$$V_e = 100 \text{ V} \text{ در دو حالت سری و موازی.}$$

مدارهای R - L - C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری

در پایان این فصل، از هنرجو انتظار می‌رود:

- ۱- مدار R-L-C سری، موازی و مختلط را بررسی و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ آن‌ها را رسم کند و زوایای اختلاف فاز را از روی دیاگرام نشان دهد.
- ۲- روابط مربوط به محاسبه‌ی مقاومت ظاهری و جریان ولتاژ، ضریب توان و توان‌ها را در مدارهای R-L-C سری، موازی و مختلط بنویسد و با استفاده از فرمول‌های مذکور، مقادیر خواسته شده را محاسبه کند.
- ۳- تأثیر فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان‌ها، توان‌ها و ضریب توان با نوشتن فرمول‌های مربوط در مدارهای سری و موازی بررسی کند.
- ۴- فرکانس رزونانس را برای مدارهای R-L-C سری و موازی محاسبه کرده و موارد کاربرد فرکانس رزونانس را ذکر کند.
- ۵- پهنای باند و ضریب کیفیت رزونانس مدارهای R-L-C سری و موازی را به دست آورد.
- ۶- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R-L-C سری و موازی را به دست آورد.

۱-۶- مقدمه

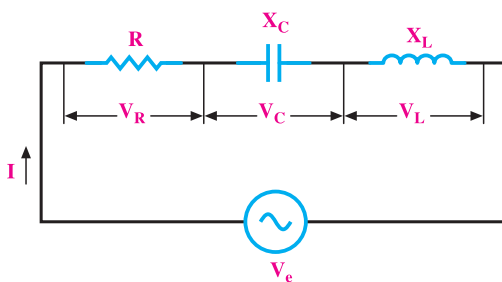
در یک شبکه‌ی الکتریکی، مصرف‌کننده‌های متنوعی تغذیه می‌شوند. این مصرف‌کننده‌ها با توجه به نوع کار در رده‌بندی مقاومت اهمی، سلفی و خازنی یا ترکیب سری یا موازی آن‌ها قرار می‌گیرند؛ مثلاً در یک واحد صنعتی، الکتروموتورهای پر قدرت، انرژی مکانیکی واحد صنعتی را

تأمین می‌کند. می‌دانیم یک الکتروموتور شامل یک یا چند بوبین و سیم‌پیچ است و با یک مدار R-L، مدل می‌شود. در سیستم‌های مخابراتی از قبیل رادیو و تلویزیون، فرستنده‌های رادیویی و تلویزیونی مدارهای مکالمه‌ی تلفن و مدارهای مکالمه‌ی سیستم در بازکن، ترکیب‌های متنوعی از R-L-C در اتصال سری و موازی وجود دارد. در این فصل، ابتدا به بررسی اتصال سری و موازی R-L-C می‌پردازیم. سپس ترکیب‌های مختلط این مدارها را بررسی خواهیم کرد.

۶-۲- مدارهای R-L-C سری

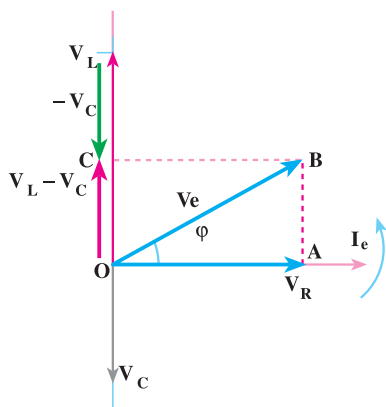
مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل ۶-۱ است. در این مدار سه عنصر R، L و C به‌طور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ از این مدار سری عبور کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله‌ی $v_R = I_m R (\sin \omega t + \theta_i)$ ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم‌فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله‌ی $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$ و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله‌ی $v_C = X_C I_m \sin(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$ پدید می‌آید. به‌طوری‌که در شکل ۶-۱ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم‌فاز نیستند و راستای بردار آنها، بر روی هم منطبق نیست. به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه‌ی ۶-۱ به‌دست می‌آید.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \quad (۶-۱)$$



شکل ۶-۱- مدار R-L-C سری

دیاگرام برداری ولتاژها و جریان، مطابق شکل ۶-۲ خواهد شد. از آن‌جا که جریان در عناصر R، L و C یکسان است، دیاگرام برداری R-L-C سری، بر مبنای جریان در شکل ۶-۲ رسم شده است. در رسم این دیاگرام $X_L > X_C$ فرض شده است و در مجموع مدار خاصیت R-L سری دارد. به‌طور کلی می‌توان نوشت:



شکل ۶-۲- دیاگرام برداری مدار R-L-C سری

۱- اگر $X_L > X_C$ باشد، مدار در مجموع دارای خاصیت اهمی و سلفی است و ولتاژ بر جریان، تقدم فاز دارد.

۲- اگر $X_L = X_C$ باشد، مدار کاملاً خاصیت اهمی دارد و ولتاژ و جریان هم فازند. (حالت تشدید)

۳- اگر $X_L < X_C$ باشد، مدار خاصیت اهمی خازنی خواهد داشت و ولتاژ از جریان عقب تر خواهد بود.

۴- با تغییر عناصر R، L و C می توان در مدار اختلاف فاز بین -90° تا $+90^\circ$ الکتریکی ایجاد کرد، یعنی $-90^\circ < \phi < +90^\circ$

۱-۶-۲- محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C سری: در مثلث OAB دیاگرام برداری

مدار R-L-C سری می توان نوشت :

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$

$$V_e^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \quad (۶-۲)$$

اگر در رابطه‌ی ۶-۲ مقادیر $V_C = I_e X_C$ و $V_L = I_e X_L$ ، $V_R = I_e R$ ، $V_e = I_e Z$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت :

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + (I_e X_L - I_e X_C)^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 (X_L - X_C)^2$$

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (6-3)$$

۶-۲-۲ محاسبه‌ی ضرایب توان‌ها: در مثلث OAB شکل ۶-۲ می‌توان نوشت:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L I - X_C I}{RI} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

بدین ترتیب، φ زاویه‌ی اختلاف فاز به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} \quad (6-4)$$

اگر $X_L > X_C$ باشد، $\varphi > 0$ و اگر $X_L < X_C$ باشد، $\varphi < 0$ خواهد شد.

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I \times R}{I \times Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (6-5)$$

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{|V_L - V_C|}{V} = \frac{|I \times X_L - I \times X_C|}{I \times Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \quad (6-6)$$

۶-۲-۳ مثلث توان‌ها: توان مصرفی در مقاومت اهمی، توان اکتیو و در سلف و خازن

از نوع راکتیو است.

$$P_e = I_e^2 R = V_e I_e \cos \varphi \quad (W) \quad (6-7)$$

$$P_{dL} = I_e^2 X_L \quad (\text{V.A.R}) \quad \text{سلفی}$$

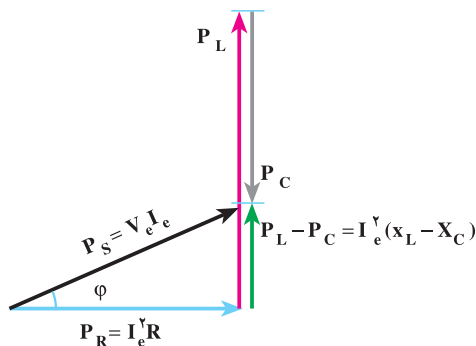
$$P_{dC} = -I_e^2 X_C \quad (\text{V.A.R}) \quad \text{خازنی}$$

توان راکتیو کل برابر است با:

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C = I_e^2 (X_L - X_C)$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = I_e^2 (X_L - X_C) \quad (\text{V.A.R}) \quad (6-8)$$

با توجه به توان مفید مقاومت و توان‌های راکتیو سلف و خازن مثلث توان‌ها، مطابق شکل ۶-۳ رسم می‌شود.



شکل ۶-۳— مثلث توان‌های مدار R-L-C سری

اگر جریان $i = I_m \sin \omega t$ ، یک مدار R-L-C سری را تغذیه کند، با توجه به روابط ولتاژهای دوسر مقاومت اهمی و سلفی و خازنی و رابطه‌ی زمانی توان‌ها می‌توان نوشت:

$$i = I_m \sin \omega t \quad \text{معادله‌ی زمانی جریان مدار}$$

$$V_m = I_m \times Z$$

ولتاژ دو سر مقاومت اهمی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$v_R = I_m R \sin \omega t$$

ولتاژ دو سر سلف برابر است با:

$$v_L = I_m X_L \sin(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2})$$

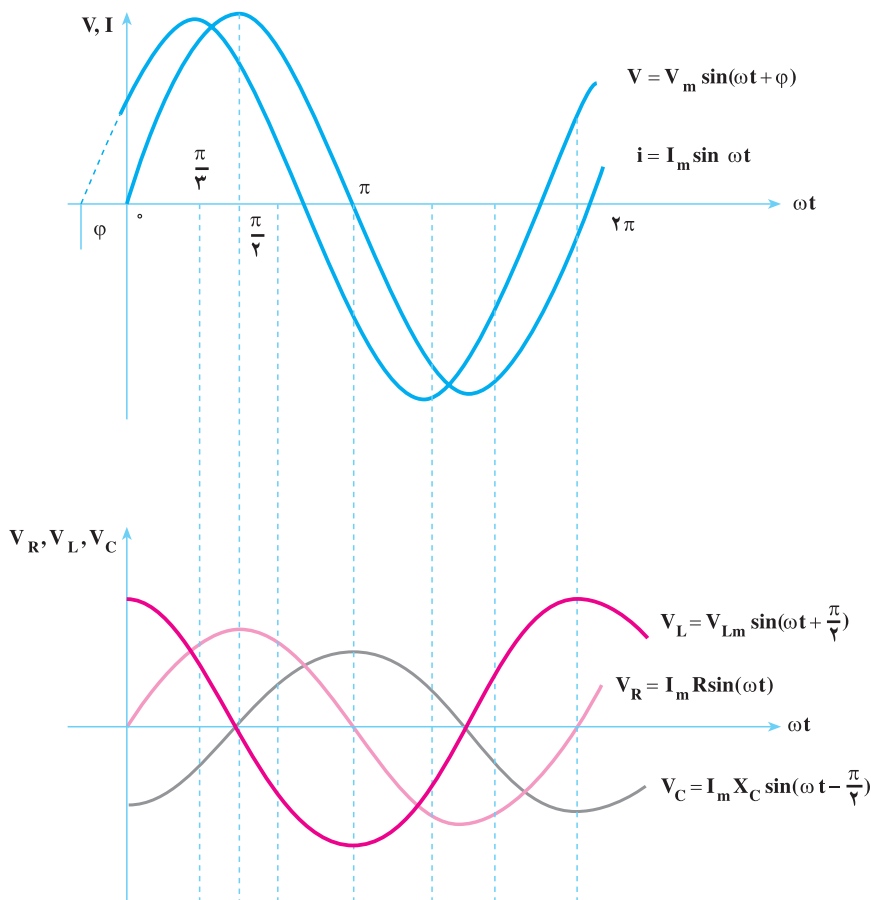
ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$$v_C = I_m X_C \sin(\omega t - \theta_i - \frac{\pi}{2})$$

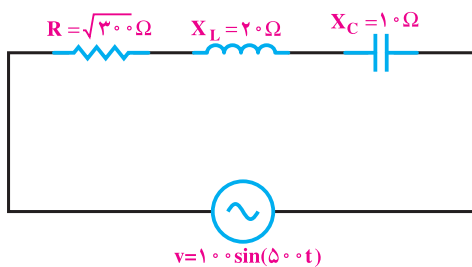
بدین ترتیب، ولتاژ کل مدار محاسبه می‌شود:

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$$

منحنی تغییرات توابع بالا در شکل ۶-۴ مشاهده می‌شود.



شکل ۴-۶- منحنی تغییرات توابع زمانی جریان کل، ولتاژ کل و ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، سلفی، خازنی مدار R-L-C سری (دامنه‌ها فرضی و با فرض $R > X_L > X_C$ رسم شده‌اند)



مثال ۱: در مدار شکل مقابل مطلوب

است:

الف - امپدانس مدار،

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(\sqrt{3} \angle 0^\circ)^2 + (2 \angle 0^\circ - 1 \angle 0^\circ)^2} = 2 \angle 0^\circ \Omega$$

ب- جریان منبع ولتاژ و معادله‌ی زمانی آن،

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{\sqrt{300}}{200} = \frac{10\sqrt{3}}{200} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{R}{Z}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ \rightarrow \varphi = \theta_v - \theta_i \Rightarrow 30^\circ = 0^\circ - \theta_i \Rightarrow \theta_i = -30^\circ$$

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{100}{200} = 0.5 \text{ A}, \quad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{0.5}{\sqrt{2}} = 0.353 \text{ A}$$

$$i = 0.5 \sin(50^\circ t - 30^\circ) \quad \text{می‌باشد؛ بنابراین، جریان پس فاز است.} \quad X_L > X_C$$

پ- ولتاژ دوسر R، L و C و معادلات زمانی آن‌ها.

$$V_{R_m} = R I_m = \sqrt{300} \times 0.5 = 0.5\sqrt{300} = 0.5\sqrt{3} \text{ V}$$

$$v_R = 0.5\sqrt{3} \sin(50^\circ t - 30^\circ)$$

هم فاز جریان

$$V_{L_m} = X_L \cdot I_m = 200 \times 0.5 = 100 \text{ V}$$

$$v_L = 100 \sin(50^\circ t + 60^\circ)$$

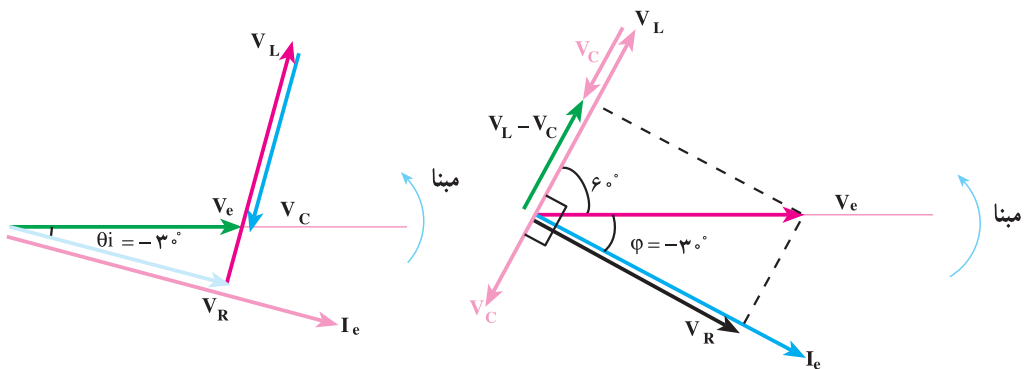
۹۰ درجه جلوتر از جریان

$$V_{C_m} = X_C \cdot I_m = 100 \times 0.5 = 50 \text{ V}$$

$$v_C = 50 \sin(50^\circ t - 120^\circ)$$

۹۰ درجه عقب‌تر از جریان

ت- رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان.



شکل ۵-۶- دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

ث- توان مصرفی و مثلث توان‌ها.

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{0.5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.5\sqrt{3} \text{ W}$$

چون $X_L > X_C$ زاویه φ مثبت شده است، P_d نیز مثبت می‌شود.

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = +125 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = V_e I_e \cos \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 250 \text{ V.A}$$

توان‌ها را به‌روش زیر نیز می‌توان محاسبه کرد. بدیهی است در هر دو حالت جواب‌ها یکی است.

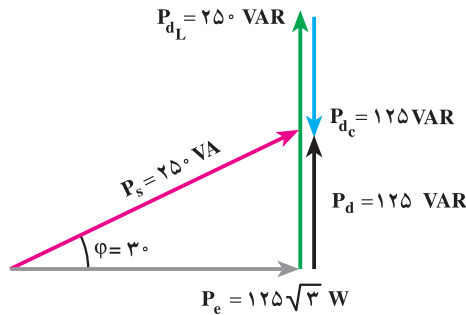
$$P_e = R \cdot I_e^2 = \sqrt{300} \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 10 \cdot \sqrt{3} \times \frac{25}{2} = 125\sqrt{3} \text{ W}$$

$$P_{dL} = X_L \cdot I_e^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = +250 \text{ V.A.R}$$

$$P_{dC} = -X_C \cdot I_e^2 = -1 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = -125 \text{ V.A.R}$$

$$\vec{P}_d = \vec{P}_{dL} + \vec{P}_{dC} = 250 - 125 = +125 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(125\sqrt{3})^2 + (125)^2} = 250 \text{ V.A}$$



شکل ۶-۶

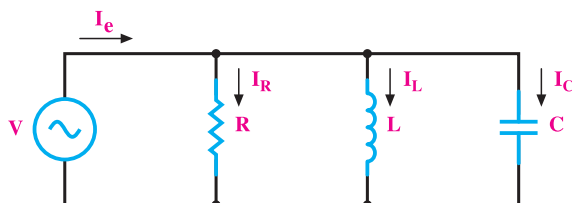
۳-۶ مدارهای R-L-C موازی

در مدارهای R-L-C موازی، ولتاژ عناصر با هم برابرند. برای جریان در هر عنصر، یک مسیر مستقل وجود دارد. مدار الکتریکی و مسیرهای مستقل جریان R-L-C موازی در شکل ۶-۷ نشان داده شده است. اگر یک ولتاژ سینوسی $v = V_m \sin \omega t$ مدار R-L-C موازی را تغذیه کند، جریان i_C با ولتاژ هم‌فاز، جریان i_L از ولتاژ 90° جلوتر و جریان i_R از ولتاژ 90° عقب‌تر است، به ترتیب

معادله‌ی زمانی $i_L = \frac{V_m}{X_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$ و $i_C = \frac{V_m}{X_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$ ، $i_R = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$

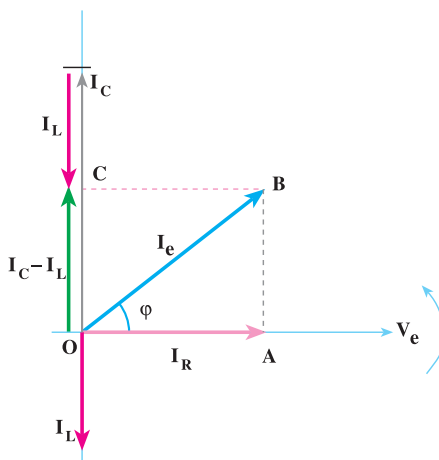
خواهند داشت. جریان کل مدار از جمع برداری جریان‌های \vec{I}_R و \vec{I}_C و \vec{I}_L به دست می‌آید.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad (6-9)$$



شکل ۶-۷ مدار R-L-C موازی

با توجه به مقادیر مؤثر جریان‌های مقاومت اهمی، سلف، خازن از طریق رسم دیاگرام برداری مطابق شکل ۶-۸، جریان کل مدار تعیین می‌شود. در رسم دیاگرام $X_C < X_L$ فرض شده است.



شکل ۶-۸ دیاگرام برداری مدار R-L-C موازی

۱-۳-۶- محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C موازی: از شکل ۶-۸، دیاگرام برداری

مدار R-L-C در مثلث قائم الزاویه‌ی OBA می‌توان نوشت:

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \quad (6-10)$$

$$\overline{OB} = I_e \text{ و } \overline{OA} = I_R \text{ و } \overline{AB} = I_C - I_L \quad (6-11)$$

با جایگزینی روابط ۶-۱۱ در رابطه ۶-۱۰ این رابطه به دست می آید :

$$I_e^r = I_R^r + (I_C - I_L)^r \quad (6-12)$$

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad \text{و} \quad I_R = \frac{V_e}{R} \quad \text{و} \quad I_C = \frac{V_e}{X_C} \quad \text{و} \quad I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

با جایگزینی این مقادیر در رابطه ۶-۱۲ خواهیم داشت :

$$\frac{V_e^r}{Z^r} = \frac{V_e^r}{R^r} + \left(\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L} \right)^r$$

$$\frac{1}{Z^r} = \frac{1}{R^r} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^r \quad (6-13)$$

۶-۳-۲- محاسبه‌ی اختلاف فاز، ضریب توان‌ها و توان‌های مدار R-L-C موازی:

از دیاگرام برداری شکل ۶-۸ می‌توان نوشت :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{|I_C - I_L|}{I_R} \quad (6-14)$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \tan \varphi = R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (6-15)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با :

$$\varphi = \tan^{-1} R \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (6-16)$$

برای ضریب توان می‌توان نوشت :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{I_R}{I} = \frac{\frac{V_e}{R}}{\frac{V_e}{Z}}$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R} \quad (6-17)$$

برای تعیین $\sin \varphi$ می‌توان نوشت :

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{I_C - I_L}{I} \quad (6-18)$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{\cancel{V_e} \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)}{\cancel{V_e} \frac{1}{Z}}$$

$$\sin \varphi = Z \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \quad (6-19)$$

توان مؤثر را می‌توان به وسیله‌ی روابط زیر محاسبه کرد:

$$P_e = I_R^2 R = \left(\frac{V_e}{R} \right)^2 \times R = \frac{V_e^2}{R} \quad (6-20)$$

اگر از رابطه‌ی ۶-۱۲، $I_e = \frac{V}{Z}$ را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$P_e = \frac{V_e^2}{R} = \frac{I_e^2 \times Z^2}{R} = \underbrace{I_e^2 \times Z}_{V_e} \times \frac{Z}{R}$$

بنابراین، توان مؤثر را در شکل عام رابطه‌ی ۶-۲۱ خواهیم داشت:

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad (6-21)$$

برای محاسبه‌ی توان راکتیو، ابتدا توان‌های سلف و خازن را حساب می‌کنیم و توان راکتیو را از آن‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$P_{dL} = I_L^2 X_L = \frac{V_e^2}{X_L^2} \times X_L = \frac{V_e^2}{X_L}$$

$$P_{dC} = -I_C^2 X_C = -\frac{V_e^2}{X_C^2} \times X_C = -\frac{V_e^2}{X_C}$$

توان راکتیو از جمع جبری توان‌های P_{dL} و P_{dC} به‌دست می‌آید.

$$P_d = P_{dL} + P_{dC}$$

$$P_d = \frac{V_e^2}{X_L} - \frac{V_e^2}{X_C} = V_e^2 \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = V_e \cdot V_e \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$$

به جای یکی از V_e ها مقدار $I_e Z = V_e$ را منظور می کنیم.

$$P_d = I_e Z \times V_e \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$$

با توجه به رابطه ی ۶-۱۹ می توان نوشت :

$$P_d = \pm I_e V_e \sin \phi \quad (۶-۲۲)$$

توان ظاهری از توان اکتیو و راکتیو به قرار رابطه ی ۶-۲۳ محاسبه می شود.

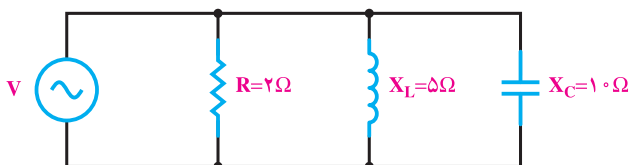
$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \quad (۶-۲۳)$$

مثال ۲: در شکل ۶-۹ مطلوب است :

الف - جریان هر شاخه.

ب - جریان کل و معادله ی زمانی آن.

پ - رسم مثلث توان ها.



$$V = 5\sqrt{2} \sin 30^\circ \omega t$$

شکل ۶-۹

راه حل:

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5V$$

الف -

$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{5}{2} = 2.5A$$

هم فاز با ولتاژ V

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} = \frac{5}{10} = 0.5A$$

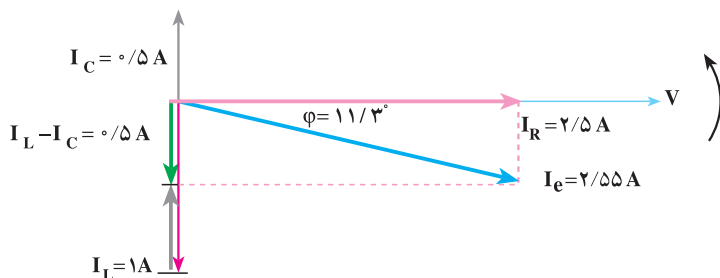
نسبت به ولتاژ 90° پیش فاز

$$I_L = \frac{V_e}{X_L} = \frac{5}{5} = 1A$$

نسبت به ولتاژ 90° پس فاز

ب - برای محاسبه ی جریان کل و معادله ی زمانی آن از دیاگرام برداری جریان ها در مبنای

ولتاژ استفاده می کنیم. بدین منظور، دیاگرام برداری را مطابق شکل ۶-۱۰ رسم می کنیم.



شکل ۱۰-۶

براساس دیاگرام برداری شکل ۱۰-۶، می‌توان محاسبه‌های زیر را انجام داد:

$$I_e^x = I_R^x + (I_L - I_C)^x$$

$$I_e^x = 2/5^x + (1 - 0/5)^x$$

$$I_e^x = 6/5 \Rightarrow I = 2/55 \text{ A}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{I_L - I_C}{I_R} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{0/5}{2/5} \right) = 11/3^\circ$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 2/55 \times \sqrt{2} = 3/6 \text{ A}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_i$$

$$11/3 = 0 - \theta_i$$

$$\theta_i = -11/3^\circ$$

$$i = 3/6 \sin(30^\circ t - 11/3^\circ)$$

پ- برای رسم مثلث توان‌ها، ابتدا توان تک‌تک عناصر را محاسبه می‌کنیم.

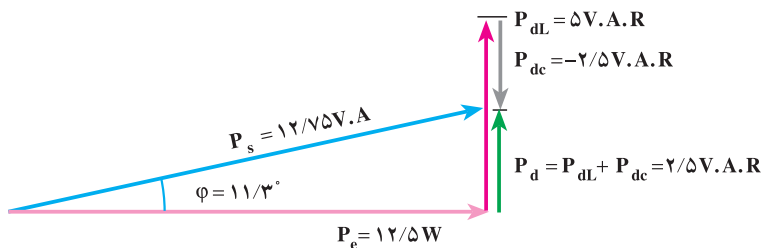
$$P_e = I_R^x \times R = (2/5)^x \times 2 = 12/5 \quad W$$

$$P_{dL} = I_L^x \times X_L = 1^x \times 5 = 5 \quad V.A.R$$

$$P_{dC} = -I_C^x \times X_C = -0/5^x \times 10 = -2/5 \quad V.A.R$$

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = 5 - 2/5 = 2/5 \quad V.A.R$$

$$P_S = \sqrt{12/5^x + 2/5^x} = 12/75 \quad V.A$$



شکل ۱۱-۶

۴-۶- مدارهای R-L-C مختلط (سری، موازی)

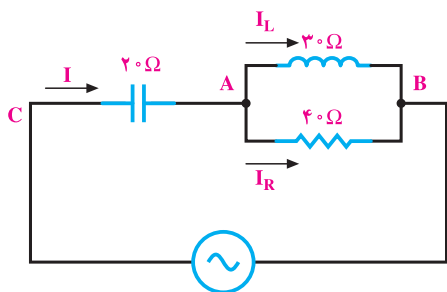
مدارهای R-L-C مختلط از چند مدار ساده‌ی R، R-L، R-C یا R-L-C با شاخه‌های موازی یا سری تشکیل می‌شوند. این مدارها پس از ساده کردن شبکه در نهایت به یک مدار R-L یا R-C ساده تبدیل می‌شوند. از آنجا که خواص این مدارها را قبلاً مطالعه کرده‌ایم، مدارهای R-L-C مختلط را با چند مثال دنبال می‌کنیم. در تحلیل مدارهای R-L-C مختلط، برای سهولت تحلیل، ولتاژ شاخه‌ی موازی را به عنوان ولتاژ مرجع (مبنای) در نظر می‌گیرند و سایر کمیت‌های الکتریکی مدار را بر اساس ولتاژ مبنای شاخه‌ی موازی محاسبه می‌کنند.

مثال ۳: در مدار الکتریکی شکل ۱۲-۶

$V_{AB} = 120$ ولت است.

مطلوب است:

الف - جریان هر شاخه و جریان کل.



شکل ۱۲-۶

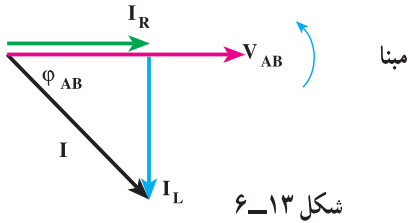
راه‌حل: با فرض اینکه $V_{AB} = 120$ مناسبت محاسبات را دنبال می‌کنیم.

$$I_R = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{120}{4} = 3 [A]$$

$$I_L = \frac{V_{AB}}{X_L} = \frac{120}{3} = 4 [A]$$

برای محاسبه‌ی جریان کل، دیاگرام برداری جریان‌ها را در مبنای V_{AB} رسم می‌کنیم و I_R

هم فاز V_{AB} می باشد و I_L به اندازه ی 90° درجه از V_{AB} عقب تر است.
از شکل ۶-۱۳ می توان نوشت :



شکل ۶-۱۳

این رابطه، همان رابطه ی ۳-۲۷ است.

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L$$

$$I^2 = I_R^2 + I_L^2$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 [A]$$

$$\varphi_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{I_L}{I_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^\circ$$

ب- ولتاژ منبع.

V_{AC} ولتاژ دو سر خازن است که محاسبه می شود.

$$V_{AC} = X_C \cdot I = 20 \times 5 = 100 [V]$$

برای محاسبه ی ولتاژ منبع باید جمع برداری زیر را انجام داد.

$$\vec{V}_{CB} = \vec{V}_{CA} + \vec{V}_{AB}$$

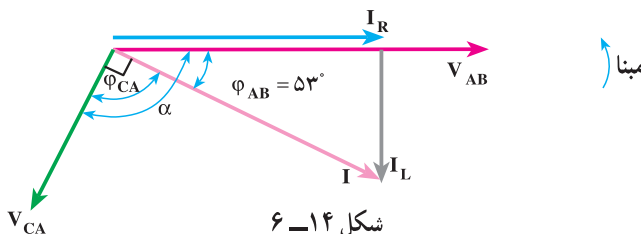
با استفاده از رابطه ی ۲-۵ محاسبه می شود.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{(V_{AB})^2 + (V_{CA})^2 + 2(V_{AB})(V_{CA})\cos\alpha}$$

که α زاویه ی بین V_{AB} با V_{CA} است و برای محاسبه ی آن باید V_{CA} را در شکل ۶-۱۳ رسم کرد.

V_{CA} ولتاژ دو سر خازن خالص می باشد که از جریان I به اندازه ی 90° درجه عقب تر است

و با رسم آن در شکل ۶-۱۳ و شکل ۶-۱۴ به دست می آید.



شکل ۶-۱۴

$$\alpha = \varphi_{AB} + \varphi_{CA}$$

با توجه به شکل ۱۴-۶ داریم :

$$\alpha = 53^\circ + 9^\circ = 62^\circ$$

با جاگذاری مقادیر در رابطه‌ی زیر V محاسبه می‌شود.

$$V = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{V_{AB}^2 + V_{CA}^2 + 2V_{AB} \cdot V_{CA} \cos \alpha}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{12^2 + 10^2 + 2(12)(10)(-0.8)} = 72/1 \text{ [V]}$$

پ - امپدانس کل مدار.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{72/1}{5} = 14/4 \Omega \text{ رابطه‌ی } 14/4 \Omega$$

است.

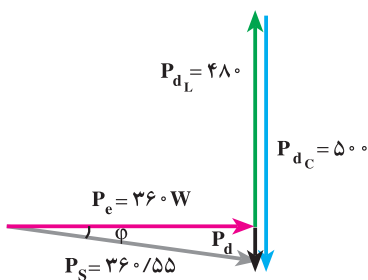
ت - مثلث توان‌ها.

$$P_e = R \cdot I_R^2 = 4 \cdot (3)^2 = 36 \text{ [W]}$$

$$P_{dL} = X_L \cdot I_L^2 = 3 \cdot (4)^2 = +48 \text{ [V.A.R]}$$

$$P_{dC} = -X_C \cdot I_C^2 = -X_C \cdot I^2 = -2 \cdot (5)^2 = -50 \text{ [V.A.R]}$$

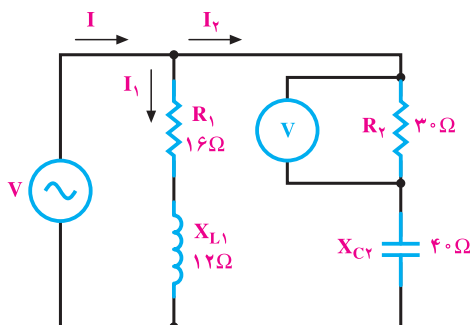
$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = 48 - 50 = -2 \text{ VAR}$$



شکل ۱۵-۶

با توجه به شکل ۱۵-۶ می‌توان نوشت :

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + (P_{dL} + P_{dC})^2} = \sqrt{36^2 + (48 - 50)^2} = 36/55 \text{ V.A}$$



شکل ۶-۱۶

مثال ۴: در مدار الکتریکی شکل

۶-۱۶ اگر مقدار قرائت شده از ولت متر در دو سر مقاومت ۳۰ اهمی ۶۰ ولت باشد، مطلوب است:

الف - جریان دو شاخه.

$$I_2 = \frac{V_R}{R} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\Omega$$

$$V = Z_2 \cdot I_2 = 50 \times 2 = 100V$$

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\Omega$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{100}{20} = 5A$$

ب - رسم دیاگرام برداری I_1 و I_2 .

ابتدا V را به عنوان مبنا اختیار می کنیم و با محاسبه ی اختلاف فاز I_1 و I_2 نسبت به V آن دو را رسم می کنیم (شکل ۶-۱۷).

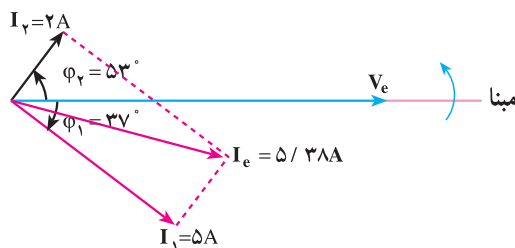
شاخه ی ۱ یک مدار R-L سری است و داریم: $\cos \phi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{16}{20} = 0.8$

$\phi_1 = \cos^{-1}(0.8) = 37^\circ$ «پس فاز» I_1

شاخه ی ۲ یک مدار R-C سری است و داریم: $\cos \phi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{30}{50} = 0.6$

$\phi_2 = \cos^{-1}(0.6) = -53^\circ$ «پیش فاز» I_2

I_1 به اندازه ی $\phi_1 = 37^\circ$ از V عقب تر و I_2 به اندازه ی $\phi_2 = 53^\circ$ از V جلوتر است.



شکل ۶-۱۷

پ- جریان کل I .
 $\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2$

با توجه به شکل ۶-۱۶ داریم:
 $\alpha = \varphi_1 + \varphi_2 = 37^\circ + 53^\circ = 90^\circ$
 α زاویه بین I_1 و I_2 است.

و با توجه به رابطه ۵-۲ مقدار I محاسبه می شود.

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos \alpha} = \sqrt{5^2 + 2^2 + 2(5)(2) \cos 90^\circ} = 5.38 \text{ A}$$

ت- امپدانس مدار.
 $Z = \frac{V}{I} = \frac{100}{5.38} = 18.5 \Omega$

ث- توان های مدار و رسم مثلث توان ها.

توان های اکتیو و راکتیو را برای هر شاخه محاسبه می کنیم.

$$P_{e_1} = V \cdot I_1 \cos \varphi_1 = 100 \times 5 \times 0.8 = 400 \text{ [W]}$$

P_{d_1} مثبت است؛ زیرا این شاخه پس فاز است.

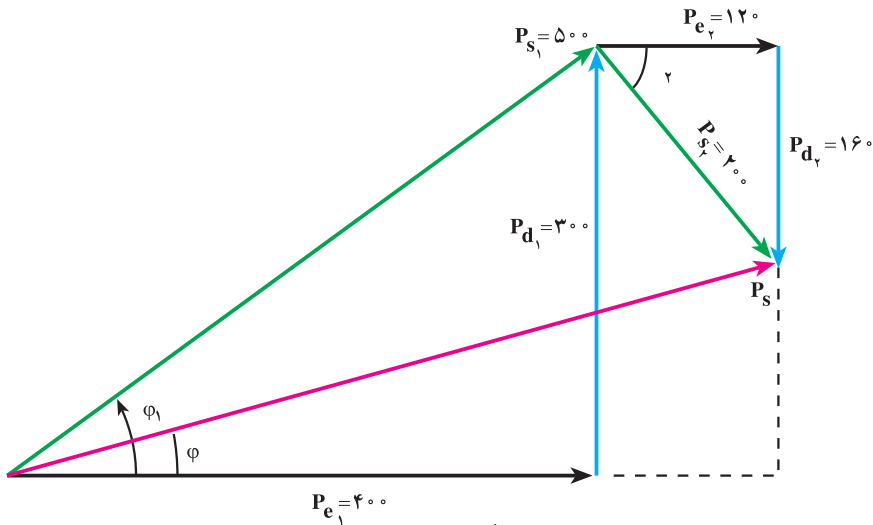
$$P_{d_1} = V \cdot I_1 \sin \varphi_1 = 100 \times 5 \times 0.6 = +300 \text{ [V.A.R]}$$

$$P_{e_2} = V \cdot I_2 \cos \varphi_2 = 100 \times 2 \times 0.6 = 120 \text{ [W]}$$

P_{d_2} منفی است؛ زیرا این شاخه پیش فاز است.

$$P_{d_2} = -V \cdot I_2 \sin \varphi_2 = -100 \times 2 \times (0.8) = -160 \text{ [V.A.R]}$$

مثلث توان ها مطابق شکل ۶-۱۸ رسم می شود.



شکل ۶-۱۸

توان ظاهری هر شاخه با توجه به مثلث توان هر شاخه در شکل ۶-۱۸ محاسبه می‌شود.

$$P_{S_1} = \sqrt{P_{e_1}^2 + P_{d_1}^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ [V.A]}$$

$$P_{S_r} = \sqrt{P_{e_r}^2 + P_{d_r}^2} = \sqrt{120^2 + (-160)^2} = 200 \text{ V.A}$$

برای محاسبه‌ی توان ظاهری کل باید به مثلث ABC توجه کرد و نوشت :

$$P_e = P_{e_1} + P_{e_r} = 400 + 120 = 520 \text{ [W]}$$

$$P_d = P_{d_1} - P_{d_r} = 300 - 160 = 140 \text{ [V.A.R]}$$

$$P_s^2 = P_e^2 + P_d^2$$

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{520^2 + 140^2} = 538/5 \text{ [V.A]}$$

ج- ضریب قدرت کل شبکه‌ی $\cos \phi$:

$$\cos \phi = \frac{P_e}{P_S} = \frac{520}{538/5} = 0/96$$

۶-۵- رزناس در مدارهای R-L-C سری

فرض می‌کنیم مقادیر R ، C و L در مدار R-L-C سری در طول تغییرات فرکانس همواره ثابت

بمانند. در فرکانس‌های کم، $X_C = \frac{1}{\omega C}$ ، راکتانس خیلی زیاد از خود نشان می‌دهد. زیرا در جریان

مستقیم، $f = 0$ است، در حالت پایدار راکتانس مدار آن قدر زیاد می‌شود که جریان مدار عملاً به صفر

می‌رسد. زمانی که فرکانس منبع تغذیه افزایش می‌یابد، راکتانس خازنی کاهش می‌یابد. در مقابل،

راکتانس سلفی با توجه به $X_L = \omega L$ افزایش می‌یابد. با توجه به رابطه‌ی ۶-۳، خازن و سلف در

امپدانس مدار R-L-C سری رفتار متقابل دارند. در روند افزایش فرکانس از صفر به مقدار ∞ ، زمانی

فرا می‌رسد که راکتانس خازنی و سلفی یک‌دیگر را خنثی می‌کنند. به عبارت دیگر، عبارت $X_L - X_C$

در رابطه‌ی ۶-۳ برابر صفر و ضریب توان مدار برابر یک است؛ چون $Z=R$ می‌شود. در این حالت،

در مدار R-L-C هیچ‌گونه توان راکتیو با منبع مبادله نمی‌شود. این حالت از مدار R-L-C را حالت

تشدید یا **رزناس** گویند. فرکانس رزناس با توجه به مطالب گفته شده به قرار زیر محاسبه می‌شود :

$$X_L - X_C = 0 \quad (6-24)$$

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

$$L\omega = \frac{1}{C\omega} \Rightarrow L\omega^2 C = 1 \quad (۶-۲۵)$$

$$\omega = 2\pi f_r$$

$$L(2\pi f_r)^2 C = 1$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (۶-۲۶)$$

رابطه فرکانس رزونانس نظیر مقدار محاسبه شده در مدارهای L-C است.

۱-۵-۶- رسم تابع تغییرات امپدانس و جریان مدار R-L-C سری: در فرکانس تشدید

با توجه به رابطه‌ی $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ ، امپدانس Z با مقاومت اهمی مدار مساوی می‌شود؛

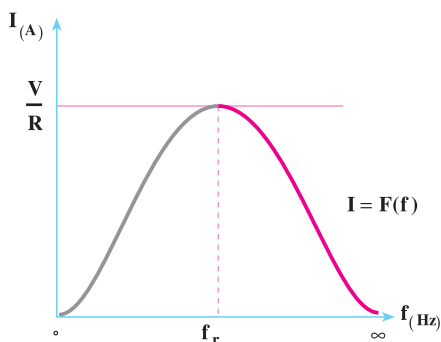
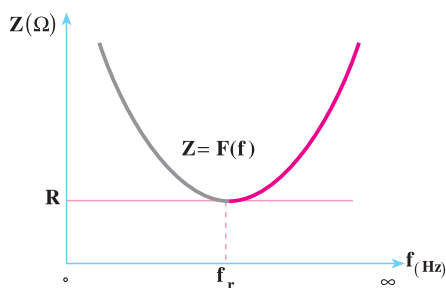
زیرا $X_L = X_C$ شده و امپدانس به حداقل مقدار، یعنی R تنزل می‌کند. چون $I_e = \frac{V_e}{Z}$ است، در

حالت تشدید، Z حداقل است. جریان I، حداکثر مقدار را خواهد داشت و اندازه‌ی جریان $I_e = \frac{V_e}{R}$

است. با افزایش فرکانس از موقعیت تشدید، امپدانس مدار R-L-C به علت رشد $X_L = 2\pi fL$ مجدداً افزایش می‌یابد و جریان رو به کاهش می‌گذارد. زمانی که $f \rightarrow \infty$ (فرکانس به بی‌نهایت میل می‌کند) امپدانس خیلی زیاد می‌شود؛ مجدداً جریان به صفر می‌رسد و مدار R-L-C باز می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که در فرکانس‌های خیلی زیاد، راکتانس خازنی نیز صفر می‌شود. از طرف دیگر، راکتانس سلفی یک محدوده‌ی فرکانسی دارد و در آن محدوده‌ی فرکانسی اثرات سلف ظاهر می‌شود. در فرکانس‌های بسیار زیاد، سلف خاصیت خود را از دست می‌دهد و کمیت‌های مدار با روابطی که تا به حال مطالعه کردیم، قابل محاسبه نخواهند بود. این خاصیت سلف در طراحی مدارهای الکترونیکی و مخابراتی محدودیت‌هایی ایجاد می‌کند و به همین دلیل، برای هر فرکانس دلخواه نمی‌توان مداری طراحی کرد.

در محدوده‌ی فرکانسی صفر تا حالت تشدید (f_r)، مدار R-L-C، خاصیت خازنی از خود نشان می‌دهد. این خاصیت در محدوده‌ی فرکانسی تشدید به بالا، به خاصیت سلفی تبدیل می‌شود. با توجه به مطالب گفته شده تابع تغییرات $I=F(f)$ و $Z=F(f)$ مطابق شکل‌های ۱۹-۶ رسم می‌شوند.



f	Z	I
0	∞	0
f _r	R	V/R
∞	∞	0

شکل ۱۹-۶- منحنی‌های تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در مدار R-L-C سری

۲-۵-۶- ضریب کیفیت مدار R-L-C سری در حالت رزونانس:

$$Q = \frac{\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده}}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}}$$

$$Q = \frac{\pi(W_{(L)} + W_{(C)})_{\max}}{I_e^2 \cdot R \cdot T} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2} I_L^2 L + \frac{1}{2} C V_C^2 \right)_{\max}}{I_e^2 \cdot R \cdot T} \quad (۶-۲۷)$$

با توجه به شکل ۴-۶ وقتی جریان ماکزیمم می‌شود، V_C صفر می‌شود. هم‌چنین وقتی V_C ماکزیمم می‌شود، جریان مدار یعنی I_{Lm} نیز صفر خواهد شد. بنابراین، در رابطه‌ی ۶-۲۷ یکی از

قسمت‌های $\frac{1}{\sqrt{2}} I_{Lm}^2 L$ و $\frac{1}{\sqrt{2}} C V_{Cm}^2$ در حالت ماکزیمم وجود دارد.

$$Q_C = \frac{\sqrt{2} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} I_{Lm}^2 L \right)}{I_e^2 \cdot R \cdot T} = \frac{\sqrt{2} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} C V_{Cm}^2 \right)}{I_e^2 \cdot R \cdot T}$$

$$Q_C = \frac{\sqrt{2} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} I_e^2 L \right)}{I_e^2 \times R \times \frac{\sqrt{2} \pi}{\omega}} = \frac{L \omega}{R} \quad (6-28)$$

$$Q = \frac{\sqrt{2} \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times C V_{cm}^2 \right)}{I_e^2 \times R \cdot T} = \frac{\sqrt{2} \pi \times \frac{1}{\sqrt{2}} C \times \frac{I_m^2}{C^2 \omega^2}}{I_e^2 \times R \times \frac{\sqrt{2} \pi}{\omega}}$$

$$Q = \frac{1}{RC\omega} = \frac{X_C}{R} \quad (6-29)$$

اگر ω را برای فرکانس تشدید به ω نشان دهیم، ضریب کیفیت مدار در فرکانس تشدید از رابطه‌ی ۶-۳۰ محاسبه می‌شود.

$$Q_s = \frac{L \omega_s}{R} = \frac{1}{C \omega_s R} \quad (6-30)$$

۳-۵-۶- پهنای باند (Band Width): پهنای باند به محدوده‌ای از فرکانس مدارهای R-L-C گفته می‌شود که در آن، اندازه‌ی جریان از $\frac{1}{\sqrt{2}}$ برابر مقدار ماکزیمم بیش‌تر باشد.

برای تعیین پهنای باند، منحنی تغییرات جریان را $I=F(f)$ با خط $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ قطع می‌دهیم. این خط منحنی $I=F(f)$ را در دو نقطه‌ی f_L و f_H قطع می‌کند. محدوده‌ی فرکانسی $f_H - f_L$ را **پهنای باند** می‌گویند.

$$B.W = f_H - f_L \quad (6-31)$$

f_H را **فرکانس قطع بالا** و f_L را **فرکانس قطع پایین** می‌گویند. از خصوصیات مهم f_H و f_L آن است که فرکانس تشدید f_r در میان f_L و f_H قرار دارد؛ به طوری که:

$$f_r = \frac{f_H + f_L}{2} \quad (6-32)$$

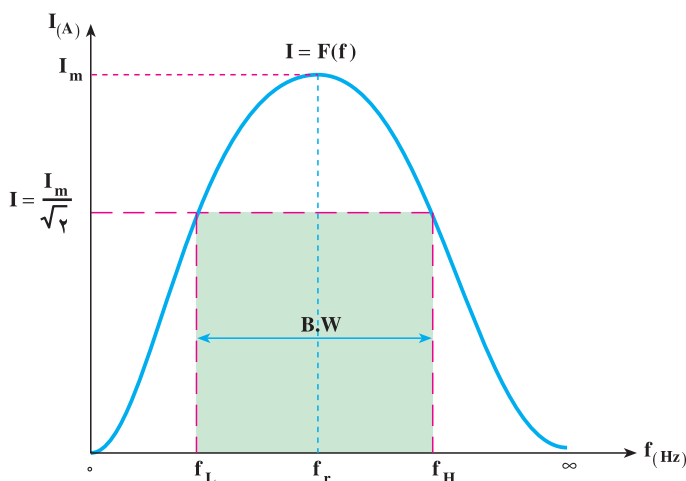
رابطه‌ی فوق برای $Q \geq 5$ صادق است ولی $f_r = \sqrt{f_L \cdot f_H}$ همواره صادق است. اگر توان ماکزیمم را به صورت $P_m = I_m^2 \cdot R$ در نظر بگیریم، مقدار توان در f_H و f_L به قرار زیر محاسبه خواهد شد. P_m توان مدار به ازای I_m (جریان در حالت تشدید) است.

$$P_{H,L} = I^2 \times R = \left(\frac{I_m}{\sqrt{2}} \right)^2 \times R = \frac{I_m^2 R}{2} = \frac{P_m}{2} \quad (6-33)$$

رابطه‌ی ۶-۳۳ بیان می‌کند که در فرکانس قطع بالا و پایین، توان مصرفی نصف توان در حالت تشدید است. به همین دلیل، فرکانس‌های f_H و f_L را **فرکانس‌های نیم توان** نیز می‌گویند. بین پهنای باند و فرکانس تشدید رابطه‌ی ۶-۳۴ برقرار است.

$$B.W = \frac{f_r}{Q_0} = \frac{R}{\pi L} \quad \text{برای } Q_0 > 5 \quad (6-34)$$

در شکل ۶-۲۰ مشاهده می‌کنید، مدار R-L-C سری برای فرکانس‌های بین f_L و f_H ، جریان مدار از مقدار $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ بیش‌تر است. به عبارت دیگر، تابع $I = F(f)$ در محدوده‌ی $f_H - f_L$ از مقدار بیش‌تری برخوردار است. بدین علت، به این نوع مدارها **فیلترهای میان‌گذر** می‌گویند که در مدارهای مخابراتی و الکترونیکی کاربرد فراوانی دارد.



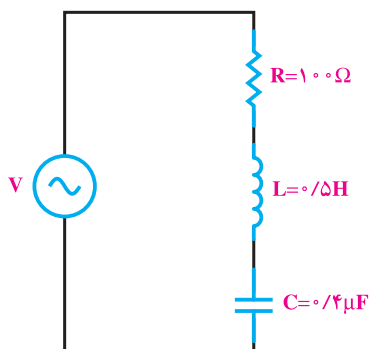
شکل ۶-۲۰ — پهنای باند مدار R-L-C سری

مثال ۵: در مدار شکل ۶-۲۱ مطلوب است :

الف - فرکانس رزونانس.

ب - پهنای باند.

پ - فرکانس‌های نیم توان.



شکل ۶-۲۱

راه حل:

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0.5 \times 0.4 \times 10^{-6}}}$$

الف -

$$f_r = 356 \text{ Hz}$$

$$B.W = \frac{f_r}{Q_o}$$

ب -

$$Q_o = \frac{L\omega_o}{R} = \frac{2\pi f_r L}{R} = \frac{2 \times 3.14 \times 356 \times 0.5}{100} = 11.18$$

$$B.W = \frac{356}{11.18} = 31.8 \text{ Hz}$$

پ -

$$f_H = f_r + \frac{B.W}{2} = 356 + \frac{31.8}{2} = 372 \text{ Hz}$$

$$f_L = f_r - \frac{B.W}{2} = 356 - \frac{31.8}{2} = 340.1 \text{ Hz}$$

توجه

در مدار R.L.C سری پهنای باند به صورت $B.W = \frac{R}{2\pi L}$ درمی آید.

۶-۶- رزناس در مدارهای R-L-C موازی

اگر عناصر R ، C و L در مدار R-L-C موازی ثابت باشند، با تغییر فرکانس مدار، امپدانس و جریان مدار تغییر می‌کند. اگر فرکانس مدار صفر باشد، جریان I جریان اتصال کوتاه خواهد بود؛ زیرا $X_L = 2\pi fL$ برابر صفر می‌شود. در مدار موازی R-L-C اگر هر کدام از عناصر R ، X_L و X_C صفر شوند، از مدار جریان اتصال کوتاه (∞) عبور خواهد کرد. وقتی فرکانس زیاد می‌شود.

$X_L = 2\pi fL$ افزایش و $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ کاهش می‌یابد. در فرکانس f_r (فرکانس تشدید) $X_L = X_C$

می‌شود. در این حالت، با توجه به رابطه‌ی $\frac{1}{Z^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)^2$ ، مقدار $Z = R$ و جریان

مدار $I_e = \frac{V_e}{R}$ می‌شود. این مقدار جریان، حداقل جریانی است که در مدار برقرار می‌شود. در حالت تشدید مدار R-L-C موازی (L و C)، دو شاخه‌ی باز شده محسوب می‌شوند. در فرکانس‌های زیاد با این که $X_L = 2\pi fL$ زیاد می‌شود ولی $X_C = \frac{1}{2\pi fC}$ به اتصال کوتاه می‌رود. به گونه‌ای که در

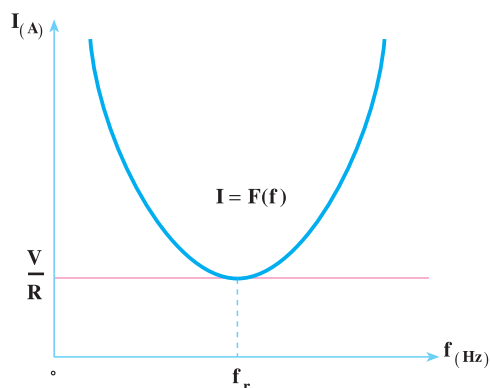
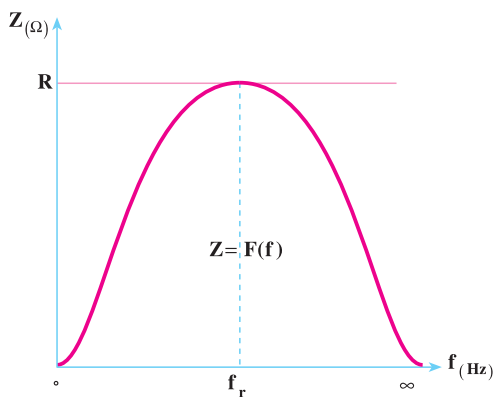
فرکانس $f \rightarrow \infty$ ، $X_C = 0$ ، مدار مجدداً اتصال کوتاه می‌شود و جریان اتصال (∞) از مدار عبور خواهد کرد. چون امپدانس مدار در تغییر فرکانس تغییر می‌کند، کمیت‌های وابسته به آن — یعنی، I ، P_e ، P_d ، $\cos \phi$ و $\sin \phi$ نیز تغییر می‌کنند.

در فرکانس تشدید می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} X_L &= X_C \\ 2\pi f_r L &= \frac{1}{2\pi f_r C} \\ (2\pi f_r)^2 &= \frac{1}{LC} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \end{aligned} \quad (۶-۳۵)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۶-۲۶ و ۶-۳۵ نتیجه می‌گیریم که فرکانس تشدید در حالت R-L-C سری و موازی یکسان هستند.

تابع تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در شکل‌های ۶-۲۲ رسم شده‌اند.



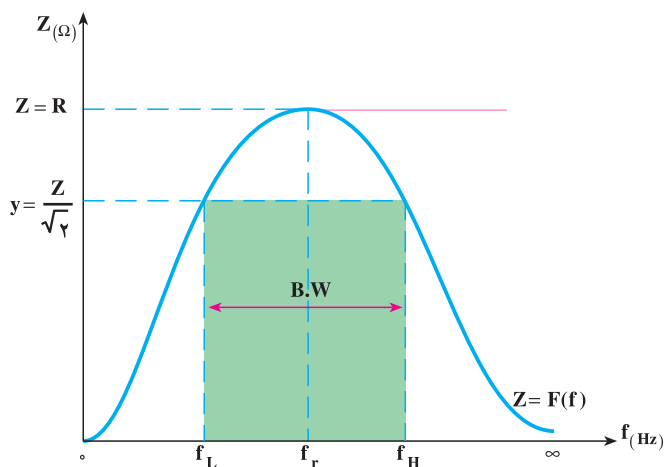
$f_{(Hz)}$	\circ	f_r	∞
$Z_{(\Omega)}$	\circ	R	$\frac{V}{R}$
$I_{(A)}$	\circ	$\frac{V}{R}$	∞

شکل ۶-۲۲- منحنی‌های تغییرات $Z = F(f)$ و $I = F(f)$ در مدار R-L-C سری

۱-۶-۶- پهنای باند و ضریب کیفیت مدار R-L-C موازی: برای تعیین پهنای باند،

منحنی $Z = F(f)$ را با خط $y = \frac{Z}{\sqrt{2}}$ شکل ۶-۲۳ قطع می‌دهیم. با بررسی شکل ۶-۲۰ و ۶-۲۳

می‌توان نتیجه گرفت که مدار R-L-C سری برای فرکانس‌های محدوده‌ی پهنای باند، امپدانس ورودی کم ولی مدار R-L-C موازی در این محدوده‌ی فرکانسی، امپدانس ورودی زیادی نشان می‌دهد. از این لحاظ مدار R-L-C موازی به عنوان فیلترهای میان‌گذر مورد استفاده قرار می‌گیرد.



شکل ۶-۲۳ - پهنای باند مدار R-L-C موازی

برای محاسبه‌ی پهنای باند می‌توان نوشت :

$$B.W = f_H - f_L$$

با توجه به رابطه‌ی ضریب کیفیت (Q) و تحلیلی مشابه مدارهای R-L-C سری (قسمت ۲-۵-۶) می‌توان رابطه‌ی ۶-۳۶ را نوشت.

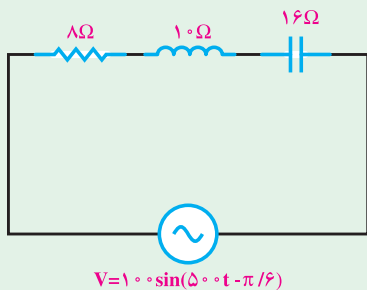
$$Q = R.C.\omega \quad \text{یا} \quad Q = \frac{R}{L\omega} \quad (۶-۳۶)$$

اگر ω را برای فرکانس تشدید به ω_0 نشان دهید ضریب کیفیت مدار در فرکانس تشدید از رابطه‌ی ۶-۳۷ محاسبه می‌شود.

$$Q_0 = R.C.\omega_0 = \frac{R}{X_C} \quad (۶-۳۷)$$

پهنای باند در فرکانس رزونانس از رابطه‌ی ۶-۳۸ به‌دست می‌آید.

$$B.W = \frac{f_r}{Q_0} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi R.C} \quad (۶-۳۸)$$



۱- در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف - امپدانس مدار.

ب - جریان منبع و معادله‌ی زمانی آن.

پ - ولتاژ دوسر هر المان.

ت - رسم دیاگرام برداری جریان و ولتاژها.

جواب :

$$Z = 10\Omega$$

$$I_e = 5\sqrt{2} \text{ A}$$

$$i_{(t)} = 10 \sin(500t + 7^\circ)$$

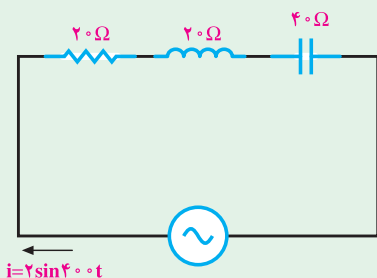
$$V_R = 40\sqrt{2}, V_L = 50\sqrt{2}, V_C = 80\sqrt{2}$$

۲- در مدار شکل مقابل مطلوب است :

الف - امپدانس مدار.

ب - معادله‌ی ولتاژ منبع.

پ - محاسبه‌ی توان‌ها و رسم مثلث توان‌ها.



$$Z = 20\sqrt{2}, V_{(t)} = 40\sqrt{2} \sin(400t - 45^\circ)$$

جواب :

$$P_e = 40 \text{ W}, P_d = 40 \text{ VAR}, P_s = 40\sqrt{2} \text{ VA}$$

۳- در یک مدار R-L-C سری $i = 20\sqrt{2} \sin 2000t$ و $v = 100\sqrt{2} \sin(2000t + 53^\circ)$ و

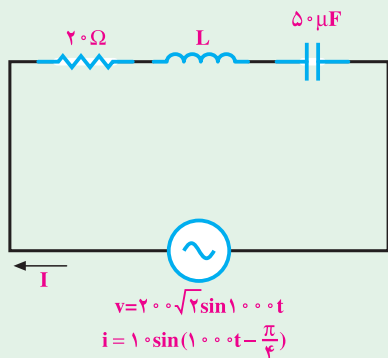
$v_L = 180\sqrt{2} \sin(2000t + \frac{\pi}{4})$ است. مطلوب است اندازه‌ی R، L و C.

جواب :

$$R = 3\Omega$$

$$L = 4 / 5 \text{ mH}$$

$$C = 10 \mu\text{f}$$



۴- در مدار شکل مقابل مطلوب است :
الف - اندازه ی L .

ب - اختلاف پتانسیل دوسر هر المان.

جواب : $L = 0.4 \text{ H}$

$$V_R = 100\sqrt{2} \Omega$$

$$V_L = 200\sqrt{2} \Omega$$

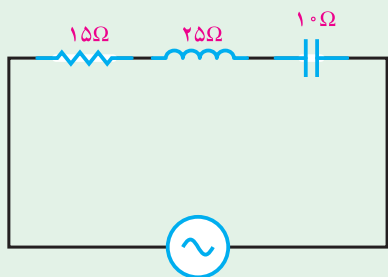
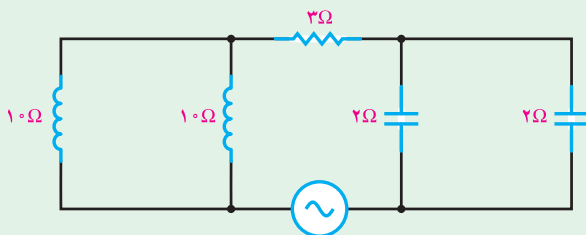
$$V_C = 100\sqrt{2} \Omega$$

۵- یک مدار R-L-C سری با $L = 0.1 \text{ H}$ و معادله ی ولتاژ و جریان منبع به ترتیب $v = 100\sqrt{2} \sin(1000t + \frac{\pi}{3})$ و $i = 1 \sin(1000t + 105^\circ)$ است. اندازه ی R و C چه قدر است؟

جواب : $R = 10 \Omega$, $C = 50 \mu\text{F}$

۶- در مدار شکل زیر معادله ی ولتاژ منبع $v = 50\sqrt{2} \sin 400t$ است. مطلوب است معادله ی زمانی جریان منبع.

جواب : $i(t) = 10\sqrt{2} \sin(400t - 53^\circ)$

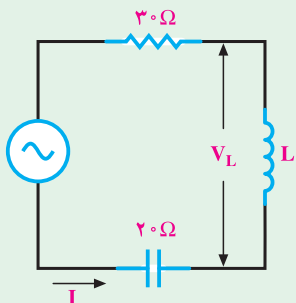


۷- در مدار مقابل $V_R = 45$ ولت است.

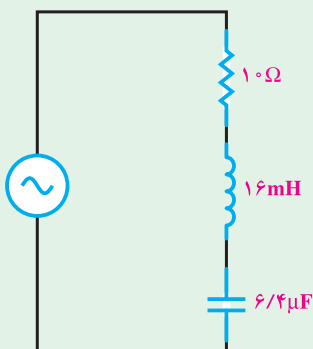
معادله ی ولتاژ و جریان منبع را به دست آورید.

جواب : $v(t) = 9 \sin \omega t$

$$i(t) = 3\sqrt{2} \sin(\omega t - 45^\circ)$$



۸- در مدار مقابل $V_L = 600V$ و $I = 10A$ است.
ولتاژ منبع چند ولت است؟
جواب: $V = 500V$



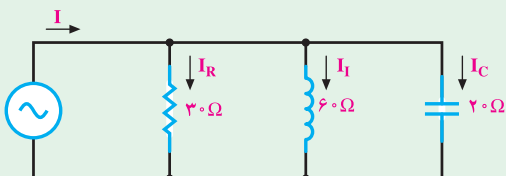
۹- فرکانس رزونانس و نیم توان بالای مدار مقابل را
به دست آورید.

$$f_r = 498 \text{ Hz}$$

$$f_L = 448 \text{ Hz}$$

$$f_H = 548 \text{ Hz}$$

۱۰- در مدار شکل زیر اگر $v = 12 \sin 400t$ باشد مطلوب است :



الف - جریان شاخه ها و معادلات
آن ها.

ب - جریان منبع و معادله ی آن.

پ - امپدانس مدار.

ت - رسم دیاگرام برداری جریان ها و ولتاژ.

جواب :

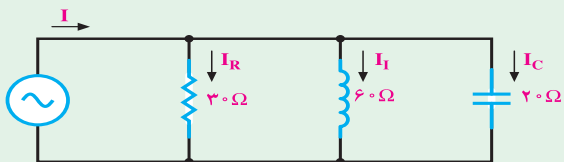
$$i_R = 4 \sin 400t$$

$$i_L = 2 \sin(400t - 90^\circ)$$

$$i_C = 6 \sin(400t + 90^\circ)$$

$$i = 4\sqrt{2} \sin(400t + 45^\circ)$$

$$Z = 15\sqrt{2} \Omega$$



۱۱- در مدار شکل مقابل $i_R = 6 \sin 1000t$ است. مطلوب است:

الف - ولتاژ منبع و معادله‌ی آن.

ب - جریان منبع و معادله‌ی آن.

پ - محاسبه توان‌های مدار و رسم مثلث توان.

ت - ضریب قدرت کل شبکه.

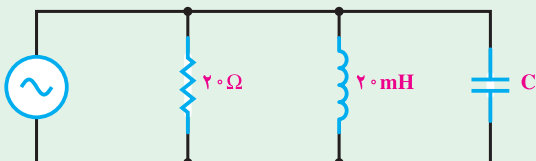
جواب:

$$v(t) = 180 \sin 1000t \quad P_e = 540 \text{ W} \quad \cos \phi = 0.7$$

$$i(t) = 6\sqrt{2} \sin(1000t + 45^\circ) \quad P_d = 540 \text{ VAR} \quad P_s = 540\sqrt{2} \text{ VA}$$

۱۲- در مدار شکل زیر $v = 200 \sin 500t$ و $i = 10\sqrt{2} \sin(500t + \theta_i)$ است. مطلوب است اندازه‌ی C برحسب میکرو فاراد و θ_i برحسب رادیان. ($X_C > X_L \Rightarrow \phi > 0$)

جواب:

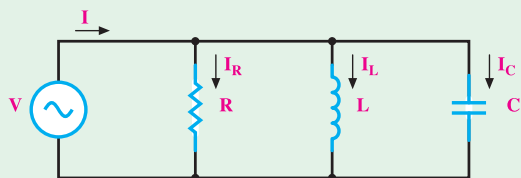


$$C = 100 \mu\text{F}$$

$$\theta_i = -\frac{\pi}{4} \text{ Rad}$$

۱۳- در مدار زیر $v = 100 \sin 2500t$ ، $i = 5 \sin(2500t + \frac{\pi}{4})$ و $i_C = 10 \sin(2500t + \frac{\pi}{4})$ می‌باشد. مطلوب است:

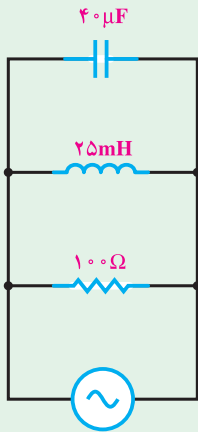
الف - اندازه‌ی R، L و C.



جواب:

$$R = 20\sqrt{2} \Omega, \quad C = 40 \mu\text{F}, \quad L = 6/19 \text{ mH}$$

۱۴- در مدار موازی R-L-C روبرو مطلوب است :



الف - فرکانس رزونانس.

ب - ضریب کیفیت.

پ - پهنای باند.

ت - فرکانس‌های نیم‌توان.

جواب :

$$f_r = 16^\circ \text{Hz}$$

$$Q_o = 4$$

$$BW = 4^\circ \text{Hz}$$

$$f_L = 14^\circ \text{Hz}$$

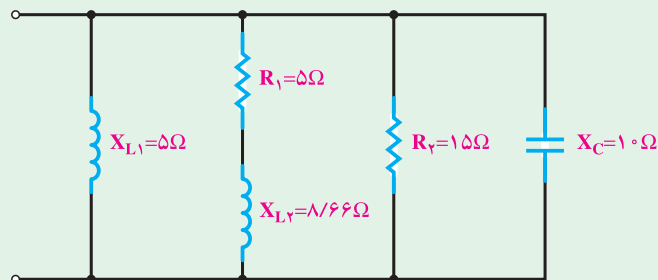
$$f_H = 18^\circ \text{Hz}$$

۱۵- یک مدار R-L-C موازی را به یک مدار سری در حالت زیر تبدیل کنید.

الف - $X_L > X_C$

ب - $X_C > X_L$

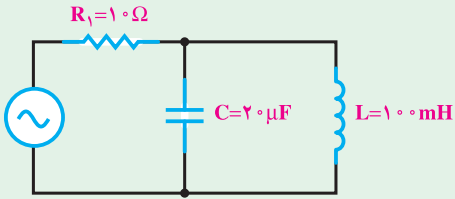
۱۶- امپدانس و ضریب توان مدار شکل زیر را با استفاده از تبدیل عناصر به‌دست آورید.



۱۷- فرکانس تشدید شکل زیر را به دست آورید.

جواب:

$$f_r = 112 / 6 \text{ Hz}$$



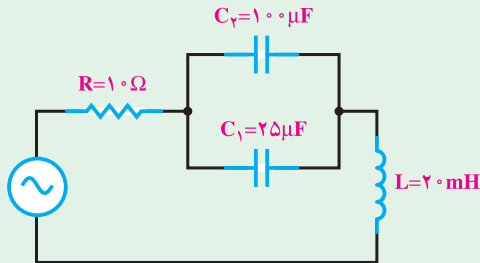
۱۸- در مدارات شکل های زیر مطلوب است:

الف - فرکانس تشدید.

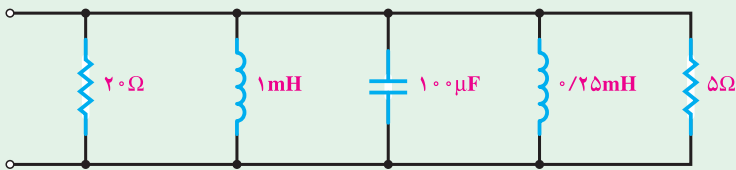
ب - ضریب کیفیت در حالت رزونانس.

پ - پهنای باند.

ت - فرکانس های نیم توان.



(الف)



(ب)

جریان‌های سه فازه

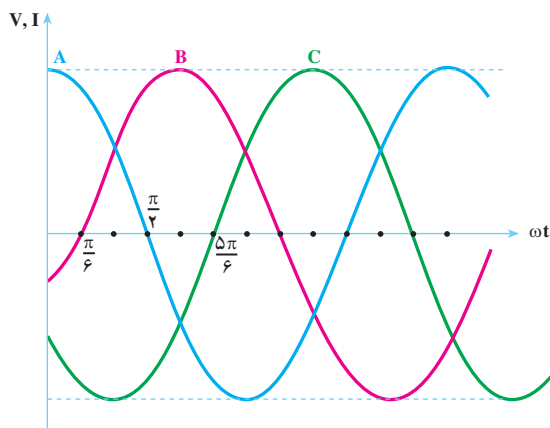
هدف‌های رفتاری

- در پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :
- ۱- جریان‌های سه فاز را تعریف و مشخصات آن‌ها را با رسم دیاگرام بیان کند.
 - ۲- مفاهیم ولتاژهای خطی و فازي و جریان‌های خطی و فازي را در اتصال ستاره و مثلث بیان کند.
 - ۳- جریان‌ها و ولتاژها را در مصرف‌کننده‌های سه فاز متعادل با اتصال ستاره و مثلث محاسبه کند.
 - ۴- توان‌های مؤثر و غیر مؤثر و ظاهری و هم‌چنین ضریب توان را در بارهای متعادل در اتصالات ستاره و مثلث متعادل محاسبه کند.
 - ۵- اثر قطع یک فاز و تعویض جای دو فاز را بر روی مصرف‌کننده تشریح کند.
 - ۶- اثر قطع نول در بارهای سه فاز نامتعادل سه سیمه با اتصال ستاره را شرح دهد.

۱-۷- مقدمه

جریان یا ولتاژ سه‌فاز از امواج سینوسی تشکیل می‌شوند که به‌طور هم‌زمان تولید می‌شوند و نسبت به هم 120° الکتریکی اختلاف فاز زمانی دارند. در شکل ۱-۷-الف منحنی جریان یا ولتاژ سه‌فاز را مشاهده می‌کنید. در این شکل موج A به اندازه 120° از موج B و موج B به اندازه 120° از موج C جلوتر است.

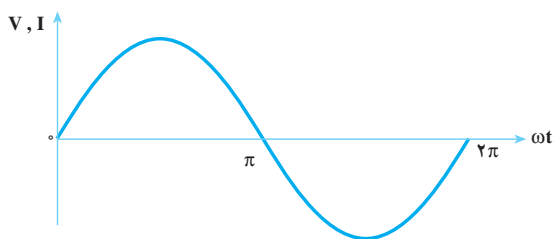
ساختمان ساده‌ی مولدهای جریان متناوب سه فاز موجب شده است که انرژی الکتریکی سه‌فاز، راحت‌تر و ارزان‌تر تولید شود. جریان متناوب سه‌فاز، علاوه بر سادگی تولید و ارزان بودن و برخورداری از کلیه‌ی خواص جریان یک فاز، مزایای دیگری نیز دارد.



الف: جریان یا ولتاژ متناوب سه فاز

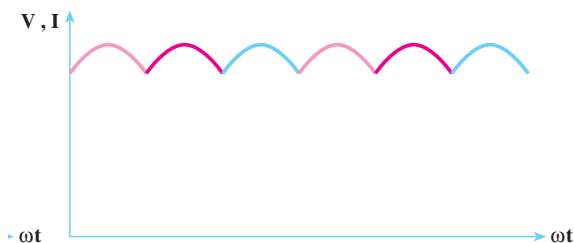
مزایای جریان سه فاز نسبت به جریان یک فاز را می توان به صورت زیر دسته بندی کرد :

۱- توان الکتریکی در مصرف کننده های سه فاز هیچ وقت صفر نمی شود ؛ زیرا با توجه به شکل ۷-۱، وقتی در یکی از فازها دامنه ی جریان یا ولتاژ صفر می شود، مصرف کننده از دو فاز دیگر انرژی می گیرد . بدین علت، مصرف کننده های سه فاز نسبت به مصرف کننده های یک فاز ضریب بهره یا راندمان بالایی دارند.



ب: جریان یا ولتاژ متناوب یک فاز

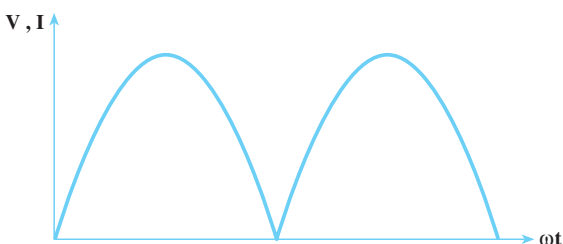
شکل ۷-۱



موج یکسو شده ی تمام موج سه فاز

۲- ضریب موج یکسو شده ی سه فاز نسبت به موج یکسو شده ی یک فاز، بسیار کم تر است . به عبارت دیگر، جریان سه فاز نسبت به جریان یک فاز پس از یکسو سازی، موج صاف تری ایجاد می کند. در شکل های ۷-۲ دو جریان یکسو شده ی سه فاز و یک فاز تمام موج نشان داده شده است.

۳- جریان متناوب سه فاز در مصرف کننده های سه فاز مانند موتورهای



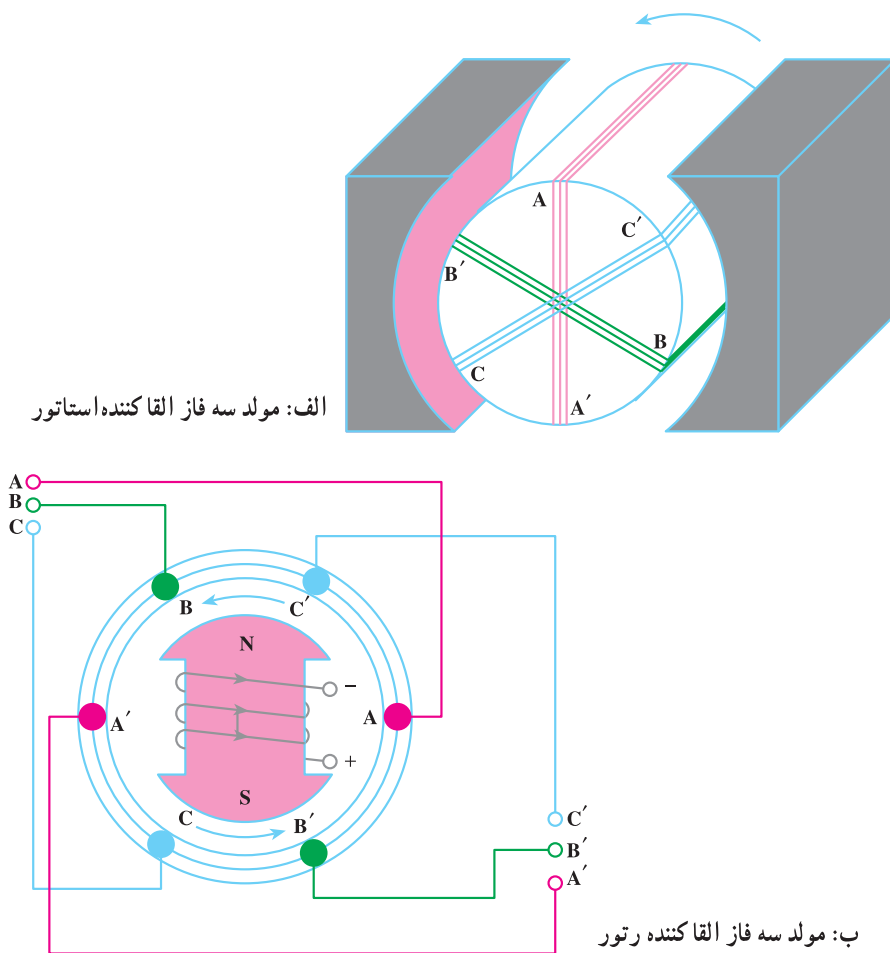
موج یکسو شده ی تمام موج یک فاز

شکل ۷-۲

الکتریکی سه فاز، حوزه‌ی دوار مغناطیسی ایجاد می‌کند. این حوزه‌ی دوار، قسمت متحرک را به دنبال خود می‌کشد. در صورتی که در جریان متناوب یک فاز حوزه‌ی دوار تشکیل نمی‌شود و این موتورها مشکل راه‌اندازی خواهند داشت و برای راه‌اندازی نسبت به موتورهای سه فاز به اجزایی اضافی نیاز دارند که قیمت تمام شده‌ی موتورهای یک فاز را نسبت به موتورهای سه فاز بالا می‌برد.

۷-۲- تولید جریان متناوب سه فاز

شکل‌های ۷-۳، دو نمونه مولد سه فاز جریان متناوب را به طور شماتیک نشان می‌دهند.



شکل ۷-۳

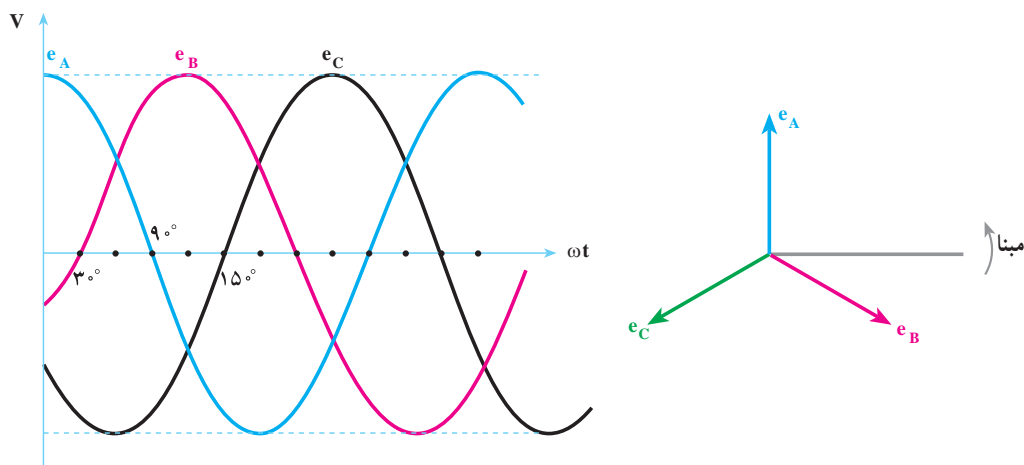
در هر دو شکل ۷-۳، وقتی رتور در جهت مثلثاتی (عکس عقربه‌های ساعت) به گردش درمی‌آید، خطوط قوای مغناطیسی، در هر یک از سیم‌پیچ‌های AA' ، BB' و CC' یک نیروی محرکه‌ی سینوسی القا می‌کند. با توجه به موقعیت مکانی سیم‌پیچ‌ها، ولتاژ القایی در سیم‌پیچ نسبت به ولتاژ القایی در سیم‌پیچ AA' به اندازه‌ی 120° الکتریکی پس فاز است. هم‌چنین ولتاژ القایی در سیم‌پیچ CC' به اندازه‌ی 240° الکتریکی نسبت به ولتاژ سیم‌پیچ AA' پس فاز است. معادلات زمانی نیروهای محرکه‌ی القایی در سیم‌پیچ‌ها به قرار زیر است.

$$e_A = E_m \sin(\omega t + 90^\circ) \quad (7-1)$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t - 30^\circ) \quad (7-2)$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + 210^\circ) = E_m \sin(\omega t - 150^\circ) \quad (7-3)$$

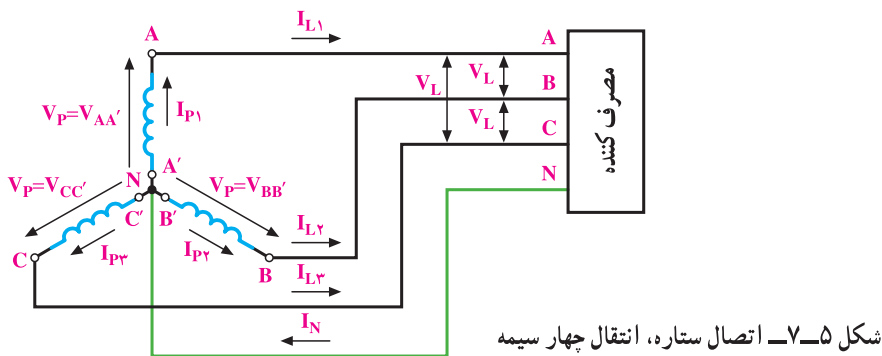
دیاگرام برداری و منحنی تغییرات نیروهای محرکه‌ی الکتریکی القا شده در سیم‌پیچ‌ها به صورت شکل ۷-۴ رسم می‌شوند. همان‌طور که در شکل‌های ۷-۳ مشاهده می‌کنید، در مولدهای سه فاز، سه گروه سیم‌پیچ AA' ، BB' و CC' وجود دارد که در داخل ماشین 120° درجه نسبت به یک‌دیگر



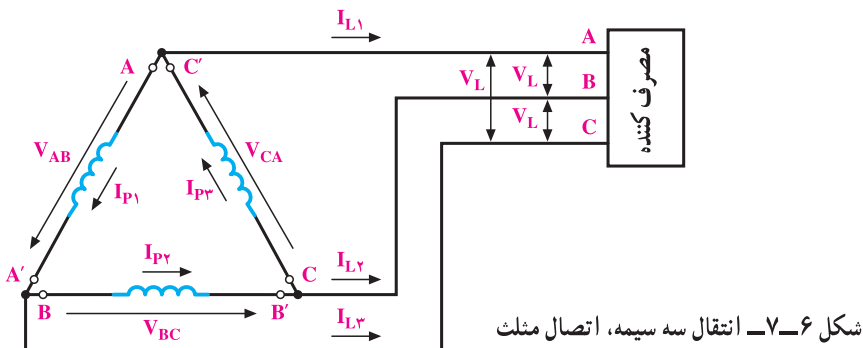
شکل ۷-۴- منحنی تغییرات نیروهای محرکه‌ی القایی در سیم‌پیچ‌ها و دیاگرام برای آن‌ها

اختلاف فاز مکانی دارند. انرژی الکتریکی تولید شده در این سیم‌پیچ‌ها با دو روش اتصال سیم‌پیچ به شبکه‌ی مصرف انتقال می‌یابد. به عبارت دیگر، به دو روش می‌توان انرژی تولیدی را از مولد به مصرف‌کننده انتقال داد. در روش اول سه سیم انتهایی $A'B'C'$ با هم یکی شده و با یک سیم به بیرون مولد هدایت می‌شوند. در تولید صنعتی برق در نیروگاه‌ها، با زمین کردن این سیم، اختلاف

بتانسيل آن را با زمين يکي مي کنند و آن را سيم نول مي نامند و با MP يا N نشان مي دهند. سيم N همراه با سه سيم A، B و C مطابق شکل ۵-۷ انرژی را از مولد به مصرف کننده انتقال مي دهد. سيم هاي A، B و C را به ترتيب R، S و T يا Y، R يا B و L_1 ، L_2 و L_3 نیز نام گذاري مي کنند و به آنها سيم هاي فاز A، فاز B و فاز C مي گويند. اين سيستم انتقال را انتقال چهار سيمه و نوع اتصال سيم پيچ هاي مولد را **اتصال ستاره** گويند و آن را با نماد (سمبل) Y يا λ (لاندا) نشان مي دهند. اگر در انتقال سيم نول حذف شود، انتقال را انتقال ستاره ي سه سيمه گويند.



در روش دوم انتقال انرژی، انتهای سيم پيچ AA' يعني A' را به ابتدای سيم پيچ BB' يعني B، انتهای سيم پيچ BB' يعني B' را به ابتدای سيم پيچ CC' يعني C و انتهای سيم پيچ CC' يعني C' را به ابتدای سيم پيچ AA' يعني A وصل مي کنند و انرژی توليدي مولد را با سه سيم A، B و C يا S، T و Y، به مصرف کننده ها مطابق شکل ۶-۷ انتقال مي دهند. اين روش انتقال را **انتقال سه سيمه** و نوع اتصال سيم پيچ هاي مولد را **اتصال مثلث** مي گويند و با نماد Δ (دلتا) نشان مي دهند.



۷-۲-۱- ولتاژ و جریان فازی:

تعریف ولتاژ فازی: ولتاژ دو سر هر یک از سیم‌پیچ‌های AA' ، BB' و CC' را **ولتاژ فازی** گویند و آن را با V_P نشان می‌دهند.

در مولدهای سه فاز به علت این که همه‌ی مشخصات سیم‌پیچ‌ها یکسان است، ولتاژ مؤثر سیم‌پیچ‌ها برابرند.

تعریف جریان فازی: جریان عبوری از داخل هر سیم‌پیچ را **جریان فازی** گویند و آن را با I_P نشان می‌دهند.

۷-۲-۲- ولتاژ و جریان خطی:

تعریف ولتاژ خطی: ولتاژ بین خطوط A با B (V_{AB}) یا B با C (V_{BC}) یا C با A (V_{CA}) را **ولتاژ خطی** گویند و آن را با V_L نشان می‌دهند. در واقع ولتاژ خطی، اختلاف پتانسیل بین دو فاز مختلف است.

تعریف جریان خطی: جریانی را که در خطوط انتقال S ، R و T جاری می‌شود، **جریان خطی** می‌گویند و آن را با I_L نشان می‌دهند.

جریان خطی و فازی و ولتاژهای خطی و فازی شکل ۷-۵ به قرار زیرند:

$$V_{AA'} = V_P = V_{AN} \quad \text{ولتاژ فازی}$$

$$V_{BB'} = V_P = V_{BN} \quad \text{ولتاژ فازی}$$

$$V_{CC'} = V_P = V_{CN} \quad \text{ولتاژ فازی}$$

$$I_{P1}, I_{P2}, I_{P3} = I_P \quad \text{جریان‌های فازی}$$

$$V_{AB} = V_L \quad \text{ولتاژ خطی}$$

$$V_{BC} = V_L \quad \text{ولتاژ خطی}$$

$$V_{CA} = V_L \quad \text{ولتاژ خطی}$$

جریان‌های خطی و فازی و ولتاژهای خطی و فازی شکل ۷-۶ به ترتیب زیر هستند:

$$V_{AB} = V_P = V_L \quad \text{ولتاژ خطی} = \text{ولتاژ فازی}$$

$$V_{BC} = V_P = V_L \quad \text{ولتاژ خطی} = \text{ولتاژ فازی}$$

$$V_{CA} = V_P = V_L \quad \text{ولتاژ خطی} = \text{ولتاژ فازی}$$

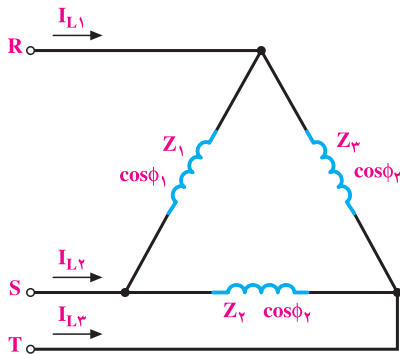
$$I_{AA'} = I_{P1} = \text{جریان فازی} \quad I_{L1} = \text{جریان خطی}$$

جریان خطی $I_{L\gamma} = I_{BB'}$ جریان فازی $I_{P\gamma} = I_{CC'}$

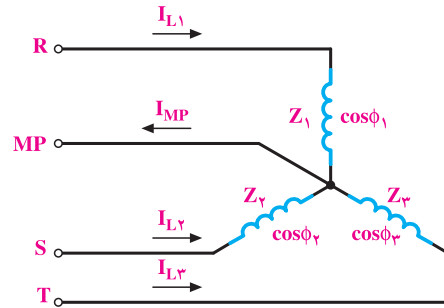
جریان خطی $I_{L\gamma} = I_{BB'}$ جریان فازی $I_{P\gamma} = I_{CC'}$

۷-۲-۳ بار متعادل و بار نامتعادل: سه امپدانس Z_1 ، Z_2 و Z_3 را با اتصال ستاره یا

اتصال مثلث مطابق شکل ۷-۷ به شبکه‌ی سه فاز وصل می‌کنیم. اگر همه‌ی مشخصه‌های امپدانس‌های Z_1 ، Z_2 و Z_3 از قبیل دامنه، زاویه‌ی فاز، پس فاز و پیش فاز بودن با هم برابر باشند، آن وقت بار شبکه‌ی سه فاز را **بار متعادل** می‌گویند. اگر یکی از مشخصه‌ها - مثلاً دامنه یا زاویه یا پس فاز یا پیش فاز بودن - در هر کدام از امپدانس‌ها تفاوت داشته باشد، بار شبکه‌ی سه فاز را **بار نامتعادل** می‌گویند.



ب: اتصال مثلث بار سه فاز به شبکه‌ی سه فاز

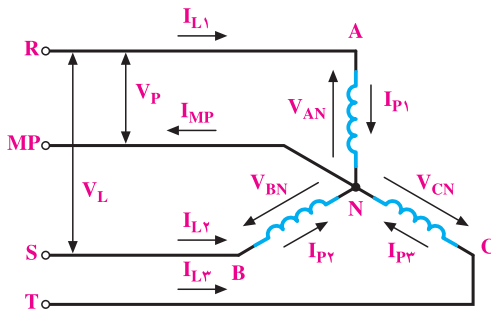


الف: اتصال ستاره‌ی بار سه فاز به شبکه‌ی سه فاز

شکل ۷-۷

۷-۳-۳ اتصال ستاره

بارهای سه فاز را می‌توان با اتصال ستاره مطابق شکل ۷-۷-الف به شبکه‌ی سه فاز اتصال داد و آن را تغذیه کرد. این بارها ممکن است متعادل یا نامتعادل باشند.



شکل ۷-۸

۷-۳-۱ اتصال ستاره و بار

متعادل: سه امپدانس مساوی Z با زاویه‌ی فاز φ که تمام مشخصات آن‌ها با هم برابر است، مطابق شکل ۷-۸ به شبکه‌ی سه فاز اتصال دارد. چون بارها متعادل اند، جریان‌های دریافتی آن‌ها از

شبکه نیز با هم برابر خواهد بود. بنابراین $I_{P1} = I_{P2} = I_{P3} = I_P$ است. به طوری که در شکل ۷-۸ مشاهده می‌کنید، جریان‌های خطوط همان جریان‌های فازهاست. پس در اتصال ستاره می‌توان نوشت:

$$I_L = I_P \quad (7-4)$$

در اتصال ستاره در بار متعادل اندازه‌ی جریان فازی یا خطی از رابطه‌ی ۷-۵ به دست می‌آید.

$$I_L = I_P = \frac{V_P}{Z}, \quad V_P = V_{AN} = V_{BN} = V_{CN} \quad (7-5)$$

و با استفاده از دیاگرام برداری ولتاژها می‌توان رابطه‌ی ۷-۶ را نتیجه گرفت.

$$V_L = \sqrt{3} V_P \quad (7-6)$$

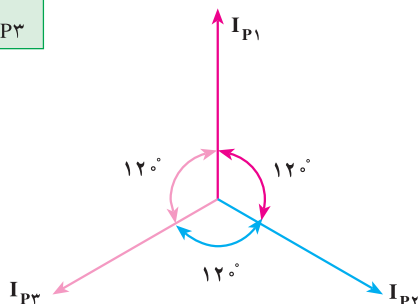
👉 نتیجه: در اتصال ستاره، بار متعادل جریان خطی با جریان فازی برابر و ولتاژ خطی $\sqrt{3}$ برابر ولتاژ فازی است.

$$\lambda \rightarrow \begin{cases} I_P = I_L \\ V_L = \sqrt{3} V_P \end{cases}$$

۷-۳-۲ محاسبه‌ی جریان نول در بار متعادل اتصال ستاره: در شکل ۷-۸ با استفاده

از قانون کیرشهف در گره N می‌توان نوشت:

$$\vec{I}_N = \vec{I}_{MP} = \vec{I}_{P1} + \vec{I}_{P2} + \vec{I}_{P3}$$



شکل ۷-۹

جریان‌های \vec{I}_{P1} ، \vec{I}_{P2} و \vec{I}_{P3} ، به علت متعادل بودن بار از نظر دامنه، یکسان‌اند ولی 120° درجه‌ی الکتریکی اختلاف فاز دارند. برای محاسبه‌ی \vec{I}_N دی‌گرام برداری جریان‌های \vec{I}_{P1} ،

\vec{I}_{P2} و \vec{I}_{P3} را مطابق شکل ۷-۹ رسم می‌کنیم. در فصل دوم اثبات کردیم که برآیند سه بردار مساوی که با هم زاویه‌ی 120° درجه می‌سازند، صفر است. پس، از سیم MP در بار متعادل، جریانی عبور نمی‌کند و می‌توان این سیم را در بار متعادل حذف کرد. در موتورهای الکتریکی به علت مساوی بودن سیم‌پیچ‌های فازها، از سیم MP در اتصال موتور به شبکه استفاده نمی‌شود؛ زیرا در نقطه‌ی N صفر مصنوعی به وجود می‌آید.

۳-۷-۳- محاسبه‌ی توان اتصال ستاره‌ی با بار متعادل: توان مصرفی در هر فاز، در مقاومت اهمی مصرف و توان غیر مفید در راکتانس القایی یا خازنی آن فاز وجود دارد. به دلیل متعادل بودن بار، توان مصرفی و غیر مصرفی در هر فاز برابر است. از جمع توان مصرفی فازها، توان مصرفی کل سه فاز به دست می‌آید. از جمع توان‌های غیر مفید (راکتیو) فازها، توان راکتیو کل سه فاز معلوم می‌شود.

$$\begin{cases} P_{e1} = I_{P1} V_{P1} \cos \varphi_1 = I_{P1}^2 R_1 & (7-7) \\ P_{e2} = I_{P2} V_{P2} \cos \varphi_2 = I_{P2}^2 R_2 & (7-8) \\ P_{e3} = I_{P3} V_{P3} \cos \varphi_3 = I_{P3}^2 R_3 & (7-9) \end{cases}$$

$$P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3} = 3 V_P I_P \cos \varphi \quad (7-10)$$

از روابط ۷-۴ و ۷-۶ مقادیر $I_L = I_P$ و $V_L = \sqrt{3} V_P$ را در رابطه‌ی ۷-۱۰ جایگزین می‌کنیم.

$$P_e = 3 \times \frac{V_L}{\sqrt{3}} \times I_L \cos \varphi$$

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \quad W \quad (7-11)$$

$$\begin{cases} P_{d1} = I_{P1} V_{P1} \sin \varphi_1 = I_{P1}^2 X_1 & (7-12) \\ P_{d2} = I_{P2} V_{P2} \sin \varphi_2 = I_{P2}^2 X_2 & (7-13) \\ P_{d3} = I_{P3} V_{P3} \sin \varphi_3 = I_{P3}^2 X_3 & (7-14) \end{cases}$$

$$P_d = P_{d1} + P_{d2} + P_{d3} = 3 V_P I_P \sin \varphi \quad (7-15)$$

در رابطه‌ی ۷-۱۵ و $V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$ را جایگزین می‌کنیم و خواهیم داشت :

$$P_d = 3I_L \times \frac{V_L}{\sqrt{3}} \sin \phi = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi \quad V.A.R \quad (7-16)$$

از روابط ۷-۱۱ و ۷-۱۶ می‌توان نوشت :

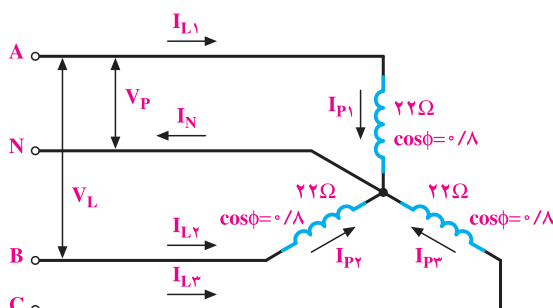
$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(\sqrt{3} V_L I_L \cos \phi)^2 + (\sqrt{3} V_L I_L \sin \phi)^2}$$

بدین ترتیب، توان ظاهری برابر خواهد بود با :

$$P_s = \sqrt{3} V_L I_L \quad V.A \quad (7-22)$$

مثال ۱: یک بار متعادل سه‌فاز با اتصال ستاره به شبکه‌ی سه‌فاز با ولتاژ 380° ولت مطابق

شکل ۷-۱ متصل است. مطلوب است : $(V_L = 380V)$



شکل ۷-۱

الف - جریان هر فاز و هر خط.

از رابطه‌ی ۷-۶ داریم :

$$V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{380}{\sqrt{3}} \approx 220V$$

بار متعادل است؛ پس داریم :

$$I_{L1} = I_{L2} = I_{L3} = I_L$$

$$I_{P1} = I_{P2} = I_{P3} = I_P$$

از رابطه‌ی ۷-۵ می‌توان نوشت :

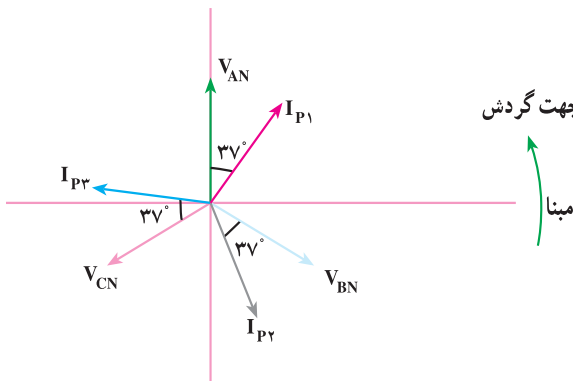
$$I_P = \frac{V_P}{Z} = \frac{22^\circ}{22} = 1^\circ A$$

چون اتصال ستاره است :

$$I_P = I_L$$

$$I_L = 1^\circ A$$

ب - دیاگرام برداری ولتاژها و جریان‌های فازي.



شکل ۷-۱۱

از آنجایی که ولتاژهای V_{AN} ،

V_{BN} و V_{CN} با هم برابرند، اندازه‌ی

بردارهای V_{AN} ، V_{BN} و V_{CN}

مساوی رسم می‌شوند. از طرفی چون

اختلاف فاز بین جریان هر فاز با ولتاژ

مربوطه یکسان است (بار متعادل)،

اندازه‌ی بردار جریان‌های فازي I_{P1} ،

I_{P2} و I_{P3} نیز مساوی رسم می‌شوند

(شکل ۷-۱۱).

$$\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \cos^{-1}(\cos \phi) = 37^\circ$$

یعنی I_{P1} نسبت به V_{AN} ، I_{P2} نسبت به V_{BN} و I_{P3} نسبت به V_{CN} به اندازه‌ی 37° پس

فاز است.

پ - توان‌های مصرفی.

بار متعادل است و از رابطه‌ی ۷-۱۱ داریم :

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cdot \cos \phi$$

$$P_e = \sqrt{3} \times 380 \times 10 \times 0.8 = 5259.2 \text{ [W]}$$

از رابطه‌ی ۷-۱۶ داریم :

$$P_d = \sqrt{3} V_L I_L \sin \phi$$

$$P_d = \sqrt{3} \times 380 \times 10 \times 0.6 = 3994.4 \text{ [V.A.R]}$$

و از رابطه‌ی ۷-۱۷ داریم :

$$P_S = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \times 380 \times 10 = 6574 \text{ [V.A]}$$

۷-۳-۴- اتصال ستاره و بار نامتعادل: بار نامتعادل را در اتصال ستاره با فرض این‌که

سیم نول دایر است، مطالعه می‌کنیم. وجود سیم نول باعث می‌شود بارهای موجود در هر فاز از ولتاژ

$$\text{فازی } V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \text{ تغذیه کند.}$$

سؤال: اگر سیم نول در سیستم سه فازه‌ی اتصال ستاره قطع شود، آیا ولتاژ دو سر بارها برابر ولتاژ فازی خواهد بود؟ چرا؟

در اتصال ستاره‌ی بارهای نامتعادل، چون جریان بارها مساوی نیست، در سیم نول جریان الکتریکی برقرار می‌شود و بردار جریان آن از جمع برداری جریان‌های فازها به دست می‌آید. برای تعیین جریان سیم نول با توجه به ولتاژهای فازی و اختلاف هر فاز، جریان‌های هر فاز رسم می‌شود. براینده بردار جریان فازها، جریان سیم نول را معین می‌کند. برای محاسبه‌ی توان‌های اکتیو، راکتیو و ظاهری مدار سه فاز، ابتدا توان اکتیو و راکتیو هر فاز را به دست می‌آوریم. توان اکتیو (مؤثر) مدار سه فاز از جمع توان‌های اکتیو هر سه فاز به دست می‌آید. توان راکتیو از جمع جبری توان‌های غیر مؤثر هر فاز محاسبه می‌شود.

$$P_{e1} = I_{P1} V_{P1} \cos \phi_1 = I_{P1}^* R_1$$

$$P_{e2} = I_{P2} V_{P2} \cos \phi_2 = I_{P2}^* R_2$$

$$P_{e3} = I_{P3} V_{P3} \cos \phi_3 = I_{P3}^* R_3$$

$$P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3}$$

توان مؤثر کل سه فاز

$$P_e = I_{P1} V_{P1} \cos \phi_1 + I_{P2} V_{P2} \cos \phi_2 + I_{P3} V_{P3} \cos \phi_3 \quad (7-18)$$

بدین ترتیب، توان غیر مؤثر را به قرار زیر به دست می‌آوریم:

$$P_d = \pm P_{d1} \pm P_{d2} \pm P_{d3}$$

$$P_d = \pm I_{P1} V_{P1} \sin \phi_1 \pm I_{P2} V_{P2} \sin \phi_2 \pm I_{P3} V_{P3} \sin \phi_3 \quad (7-19)$$

در رابطه‌ی ۷-۱۹، علامت منفی برای خاصیت خازنی و علامت مثبت برای خاصیت سلفی مدار هر فاز منظور می‌شود. با معلوم بودن توان مؤثر و غیر مؤثر کل مدار سه فاز، توان ظاهری مطابق رابطه‌ی ۷-۲۰ محاسبه می‌شود.

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} \quad (7-20)$$

در بار نامتعادل، ضریب توان شبکه‌ی سه فاز به علت تفاوت ضرایب توان‌های هر فاز، مفهومی مثل بار متعادل نخواهد داشت. بدین علت در بار نامتعادل ضریب توان تعریف نمی‌شود.^۱

۱- از طرح مثال و تمرین برای بحث اتصال ستاره نامتعادل خودداری شود.

۷-۴- اتصال مثلث

اتصال مثلث سه فاز را زمانی که بار متعادل است، بررسی می‌کنیم.

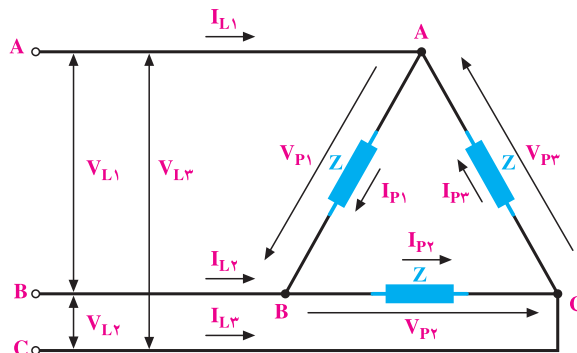
۷-۴-۱- محاسبه‌ی جریان و ولتاژ خطی در اتصال مثلث با بار متعادل: سه بار

متعادل به امپدانس Z و زاویه‌ی فاز هر کدام ϕ مطابق شکل ۷-۱۲ با اتصال مثلث در نظر می‌گیریم. ولتاژهای فاز V_{P1} ، V_{P2} و V_{P3} با ولتاژهای خطی V_{L1} ، V_{L2} و V_{L3} یکی هستند. بنابراین، در اتصال مثلث، ولتاژ بین خطوط با ولتاژ دو سر مصرف‌کننده‌ها در هر فاز یکی است. پس:

$$V_L = V_P \quad (7-21)$$

چون بار متعادل است، پس، جریان‌های فاز I_L با هم برابرند.

$$|\vec{I}_{P1}| = |\vec{I}_{P2}| = |\vec{I}_{P3}| = I_P \quad \text{و} \quad |\vec{I}_{L1}| = |\vec{I}_{L2}| = |\vec{I}_{L3}| = I_L$$



شکل ۷-۱۲

در گره‌های A، B و C با استفاده از قانون جریان‌های کیرشهف می‌توان

نوشت:

$$\vec{I}_{L1} = \vec{I}_{P1} - \vec{I}_{P3} \quad (7-22)$$

$$\vec{I}_{L2} = \vec{I}_{P2} - \vec{I}_{P1} \quad (7-23)$$

$$\vec{I}_{L3} = \vec{I}_{P3} - \vec{I}_{P2} \quad (7-24)$$


چون $|\vec{I}_{L2}| = |\vec{I}_{L1}| = |\vec{I}_{L3}| = I_L$ است، با استفاده از دیگرام برداری جریان‌ها می‌توان

رابطه‌ی ۷-۲۵ را برای به‌دست‌آوردن I_L استفاده کرد.

$$I_L = \sqrt{3} I_P$$

(۷-۲۵)

از روابط ۷-۲۱ و ۷-۲۵ می‌توان نتیجه گرفت:

 نتیجه: در اتصال مثلث در بار متعادل، جریان خطی، $\sqrt{3}$ برابر جریان فازي و ولتاژ خطی برابر ولتاژ فازي است.

۷-۴-۲- محاسبه‌ی توان‌ها در اتصال مثلث با بار متعادل: در بار متعادل، توان مؤثر

و غیر مؤثر تمام فازها با هم برابرند. به طوری که توان مؤثر کل را می‌توان سه برابر توان مؤثر هر فاز در نظر گرفت. هم‌چنین توان غیر مؤثر کل، سه برابر توان غیر مؤثر هر فاز است.

$$P_{e1} = P_{e2} = P_{e3} \Rightarrow P_e = P_{e1} + P_{e2} + P_{e3}$$

$$\text{توان مؤثر یکفاز } P_{e1} = I_{P1}^2 R_1 = I_P^2 R = V_P I_P \cos \varphi$$

$$\text{توان غیر مؤثر یکفاز } P_{d1} = I_{P1}^2 X = I_P^2 X = V_P I_P \sin \varphi$$

$$\text{توان مؤثر کل } P_e = 3P_{e1} = 3I_P^2 R = 3V_P I_P \cos \varphi \quad (7-26)$$

$$\text{توان غیر مؤثر کل } P_d = 3P_{d1} = 3I_P^2 X = 3V_P I_P \sin \varphi \quad (7-27)$$

اگر مقادیر محاسبه شده در روابط ۷-۲۱ و ۷-۲۵ را در روابط ۷-۲۶ و ۷-۲۷ منظور کنیم، خواهیم داشت:

$$\Delta \begin{cases} V_L = V_P \\ I_L = \sqrt{3} I_P \Rightarrow I_P = \frac{I_L}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$P_e = 3V_P I_P \cos \varphi$$

$$P_e = 3V_L \times \frac{I_L}{\sqrt{3}} \cos \varphi$$

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi \quad [W] \quad (7-28)$$

$$P_d = \sqrt{3} I_P V_P \sin \phi$$

$$P_d = \sqrt{3} \times \frac{I_L}{\sqrt{3}} \times V_L \sin \phi$$

$$P_d = \sqrt{3} I_L V_L \sin \phi \quad [V.A.R] \quad (7-29)$$

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{3} V_L I_L \quad [V.A] \quad (7-30)$$

با مقایسه‌ی روابط ۷-۱۱، ۷-۱۶، ۷-۱۷، ۷-۲۸، و ۷-۳۰ مشاهده می‌شود که ظاهراً در اتصال مثلث و اتصال ستاره توان‌ها یکی هستند. در صورتی که اگر در بار یکسان فازها، یک بار اتصال بارها ستاره و یک بار با اتصال مثلث به یک شبکه‌ی معین اتصال داده شود، توان در اتصال مثلث برابر توان در اتصال ستاره خواهد بود.

$$\Rightarrow \text{اتصال ستاره } \lambda \left\{ \begin{array}{l} I_P = \frac{V_P}{Z} = I_L \\ V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} \Rightarrow P_{e\lambda} = \sqrt{3} V_L \times I_L \cos \phi = \sqrt{3} I_P \times \sqrt{3} V_P \times \frac{R}{Z} \\ \cos \phi = \frac{R}{Z} \\ P_{e\lambda} = \sqrt{3} \frac{V_P^2 R}{Z} \end{array} \right. \quad (7-31)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_L = \sqrt{3} I_P = \sqrt{3} \frac{V_L}{Z} \\ V_L = V_P \Rightarrow P_{e\Delta} = \sqrt{3} V_L I_L \cos \phi = \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \frac{V_L}{Z} \times V_L \times \frac{R}{Z} \\ \cos \phi = \frac{R}{Z} \\ P_{e\Delta} = \sqrt{3} \frac{V_L^2 R}{Z} \end{array} \right. \quad (7-32)$$

از تقسیم رابطه‌ی ۷-۳۲ به رابطه‌ی ۷-۳۱ می‌توان نوشت :

$$\frac{P_{e\Delta}}{P_{e\lambda}} = \frac{\frac{3V_L^2 R}{Z^2}}{\frac{3V_P^2 \times R}{Z^2}} = \frac{V_L^2}{V_P^2} = \frac{(\sqrt{3}V_P)^2}{V_P^2} = 3$$

$$P_{e\Delta} = 3P_{e\lambda}$$

(۷-۳۳)

👉 نتیجه: اگر بتوانیم یک موتور سه فاز را به صورت ستاره و مثلث به شبکه وصل کنیم. موتور در حالت مثلث با توان نامی و در حالت ستاره با $\frac{1}{3}$ توان نامی کار می‌کند و از شبکه $\frac{1}{3}$ جریان نامی را دریافت می‌کند. وجود این شرایط، زمینه‌ی مساعدی را برای راه‌اندازی موتورهای سه فاز آسنکرون فراهم می‌کند.

مثال ۳: سه امپدانس (مطابق شکل ۷-۱۳) به شبکه‌ی سه سیمه با ولتاژ خطی 100° ولت

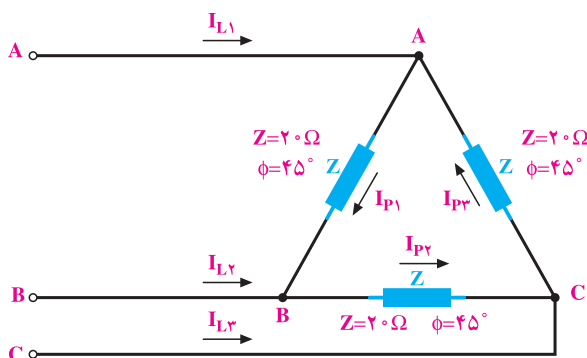
به صورت مثلث اتصال دارند. مطلوب است :

۱- جریان فازی و خطی.

۲- توان مصرفی، غیر مفید و ظاهری.

۳- اگر سه امپدانس به صورت ستاره وصل شوند، چه توانی مصرف می‌کنند؟ اندازه‌ی این

توان چه نسبتی از حالت مثلث است؟



شکل ۷-۱۳

راه حل:

۱- می توان نوشت :

$$\Delta \{ V_P = V_L = 100, \text{ بار متعادل } |I_{P1}| = |I_{P2}| = |I_{P3}| \text{ و}$$

$$|I_{L1}| = |I_{L2}| = |I_{L3}| = I_L$$

$$I_{P1} = \frac{V_{P1}}{Z_1} = \frac{100}{20} = 5A$$

برای به دست آوردن جریان خطی می توان از رابطه ی ۲۵-۷ استفاده کرد.

$$|I_{L1}| = |I_{L2}| = |I_{L3}| = I_L = \sqrt{3} I_P = \sqrt{3} \times 5 = 8.66 [A]$$

$$V_L = 100, \quad \varphi = 45^\circ, \quad I_L = 5\sqrt{3} \quad \text{—۲}$$

$$P_e = \sqrt{3} V_L I_L \cos \varphi$$

$$P_e = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \cos 45^\circ$$

$$P_e = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1060.6 [W]$$

$$P_d = \sqrt{3} V_L I_L \sin \varphi = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} \times \sin 45^\circ$$

$$P_d = 1060.6 [V.A.R]$$

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{3} V_L I_L = \sqrt{3} \times 100 \times 5\sqrt{3} = 1500 [V.A]$$

$$P_{e\lambda} = \sqrt{3} I_L V_L \cos \varphi \quad \text{—۳}$$

$$V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}} = \frac{100}{\sqrt{3}} [V]$$

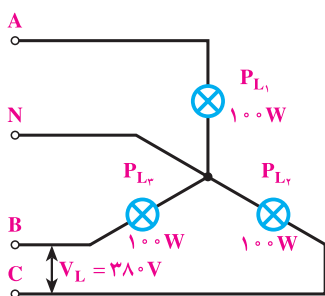
$$I_L = I_P = \frac{V_P}{Z} = \frac{100/\sqrt{3}}{20} = \frac{5}{\sqrt{3}} [A]$$

$$P_{e\lambda} = \sqrt{3} \times \frac{5}{\sqrt{3}} \times 100 \times \cos 45^\circ = 353.55 [W]$$

$$P_{e\lambda} / P_{e\Delta} = \frac{353.55}{1060.6} = \frac{1}{3}$$

۷-۵- اثر قطع یک فاز از خطوط انتقال بر مصرف کننده‌ها

۷-۵-۱- اتصال ستاره: فرض می‌کنیم سه لامپ ۱۰۰ وات (مطابق شکل ۷-۱۴) به یک



شکل ۷-۱۴

شبکه‌ی سه فازه‌ی چهار سیمه با اتصال ستاره وصل باشند. اگر فاز A قطع شود یا مصرف کننده‌ی P_{L1} از مدار خارج گردد، در صورتی که سیم نول وصل شده باشد، دو مصرف کننده‌ی دیگر- یعنی لامپ‌های P_{L2}, P_{L3} - با توان نامی به کار خود ادامه می‌دهند. در نتیجه، توان سیستم سه فاز $P_{L2} + P_{L3} = 200 \text{ W}$ خواهد بود؛ یعنی، مدار سه فازه با $\frac{2}{3}$ قدرت نامی به کار خود ادامه می‌دهد.

اگر سیم نول و فاز A قطع شود، دو بار P_{L2} و P_{L3} با هم سری می‌شوند و تحت ولتاژ خطی V_{BC} قرار می‌گیرند. چنانچه اثر حرارت را در مقاومت‌های مصرف کننده‌ها نادیده بگیریم، می‌توانیم بگوییم مقاومت در این وضعیت دو برابر شده است ولی ولتاژ $V_L = \sqrt{3} V_P$ برابر می‌شود. بنابراین، تغییر ولتاژ از تغییر مقاومت‌ها در مدار V_{BC} کم‌تر است. در نتیجه، جریان کاهش می‌یابد و به دنبال آن، نور و توان لامپ کم‌تر می‌شود. در این حالت، توان مدار برابر است با:

$$P_e = \frac{V_L^2}{2R} = \frac{3V_P^2}{2R} = \frac{3}{2} \times \frac{V_P^2}{R}$$

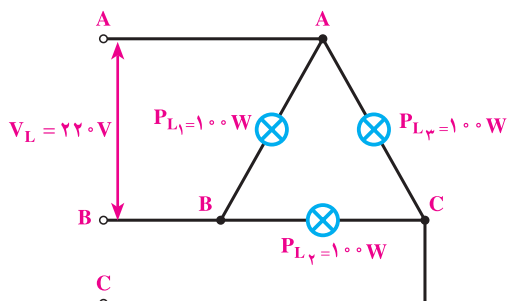
$$P_{L1} = P_{L2} = P_{L3} = \frac{V_P^2}{R} = 100 \text{ [W]}$$

$$P_e = \frac{3}{2} \times 100 = 150 \text{ [W]}$$

توان مدار به نصف کاهش می‌یابد. در موتورهای سه فاز وقتی یک فاز قطع می‌شود، موتور دو فاز کار می‌کند و توان آن به نصف توان نامی می‌رسد. علاوه بر کاهش توان، حوزة دوار در سطح استاتور از شکل سه فاز خارج می‌شود. در صورتی که موتور زیر بار باشد، امکان غلبه‌ی بار بر قدرت موتور زیاد است. در نتیجه، موتور زیر بار می‌خواهد. اگر سیستم حفاظتی موتور عمل نکند، سوختن موتور حتمی است.

۷-۵-۲ اتصال مثلث: فرض می‌کنیم سه لامپ ۱۰۰ واتی به شبکه‌ی سه فازه‌ی سه سیمه

(مطابق شکل ۷-۱۵) با اتصال مثلث به هم وصل باشند. اگر سه فاز سالم باشد و فقط یکی از مصرف‌کننده‌ها



شکل ۷-۱۵

— مثلاً P_{L_1} — از شبکه خارج شود، دو لامپ

باقی‌مانده — یعنی P_{L_2} و P_{L_3} — با توان‌نامی به

کار خود ادامه خواهند داد و در کیفیت نور

آن‌ها تغییری به وجود نمی‌آید و مدار سه فاز با

$\frac{2}{3}$ توان نامی کار خواهد کرد. اگر مصرف‌کننده‌ها

سالم باشند و فقط یکی از فازها — مثلاً A — قطع

شود، لامپ L_2 چون ولتاژ نامی را از دو فاز B

و C دریافت می‌کند، با نور طبیعی و توان نامی خود به کار ادامه می‌دهد. دو لامپ P_{L_1} و P_{L_3} سری شده

و از ولتاژ خطی بین B و C تغذیه می‌کنند. در نتیجه، این دو مصرف‌کننده به اندازه‌ی نصف ولتاژ نامی از

شبکه تغذیه می‌شوند. اگر اثرات حرارتی در مصرف‌کننده‌های P_{L_1} و P_{L_3} صرف‌نظر کنیم، خواهیم

داشت:

$$P_e = \frac{V_L^2}{2R} + P_{L_2}$$

(۷-۳۴)

$$P_{L_1} = P_{L_2} = P_{L_3} = \frac{V_L^2}{R} = 100$$

$$P = 50 + 100 = 150 [W]$$

توان مدار سه فازه برابر نصف توان نامی قبل از قطع یک فاز می‌شود. اگر مصرف‌کننده‌های

P_{L_1} ، P_{L_2} و P_{L_3} سیم‌پیچ‌های یک الکتروموتور باشند، به هنگام بارداری مورد تهدید قرار می‌گیرند

و احتمال از بین رفتن و سوختن سیم‌پیچ‌ها زیاد است.

۷-۶ اثر تعویض دو فاز بر کمیت‌های الکتریکی مصرف‌کننده‌ها

تعویض دو فاز در شبکه‌های سه فازه، وقتی مصرف‌کننده‌ها متعادل‌اند، هیچ اثر نامطلوبی

در مقادیر جریان‌های فازی، خطی، توان‌های مفید، غیرمفید و ضریب توان ندارد. فقط در موتورهای

یا مصرف‌کننده‌هایی که گردش مکانیکی دارند، جهت گردش عوض می‌شود. در بارهای نامتعادل

تعویض جای دو فاز در کمیت‌های الکتریکی آثاری بر جای می‌گذارد و سبب تغییر جریان فازها می‌شود. بنابراین، باید به این نکته توجه داشت و از جابه‌جایی ناخواسته در فازها خودداری کرد.

۷-۷- اثر قطع سیم نول در بار نامتعادل سه فاز اتصال ستاره

در اتصال ستاره‌ای بارهای نامتعادل، وجود سیم نول موجب برقراری ولتاژ فازی $V_P = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$

در هر فاز می‌شود. در صورت قطع سیم نول، ولتاژهای دو سربارها در هر فاز برابر $\frac{V_L}{\sqrt{3}}$ نخواهد شد. به بعضی از فازها، ولتاژ کم‌تر و به بعضی دیگر ولتاژ بیش‌تری اعمال می‌شود. این پدیده مصرف‌کننده‌های نامتعادل را تهدید می‌کند. در حالت یاد شده، مرکز بارها از پتانسیل صفر خارج می‌شود و به عبارت دیگر، نسبت به زمین اختلاف پتانسیل پیدا می‌کند. این تغییر پتانسیل مرکز بارها را **تغییر مکان نقطه‌ی صفر** می‌گویند.



۱- سه بار مساوی به امپدانس‌های $Z = 44\Omega$ و $\cos\phi = \frac{\sqrt{3}}{4}$ پس فاز با اتصال ستاره،

به شبکه‌ی چهار سیمه وصل هستند. ولتاژ خطی $V_L = 380$ ولت است. مطلوب است:

۱- جریان هر خط و هر فاز.

۲- جریان سیم نول.

۳- توان مصرفی و غیرمفید و ظاهری.

۴- رسم دیاگرام جریان‌ها و ولتاژهای فازی و خطی.

جواب: (۱) $I_L = I_P = 5A$

(۲) $I_N = 0$

(۳) $P_S = 32877.4 \text{ W}$, $P_e = 2850 \text{ W}$, $P_d = 1643.5 \text{ V.A.R}$

۲- الکتروموتور سه فازی با مقاومت اهمی هر فاز $R = 8\Omega$ و ضریب اندوکتانس هر فاز

$L = 2 \text{ mH}$ مفروض است. این الکتروموتور در اتصال ستاره و مثلث در شبکه سه فاز با فرکانس

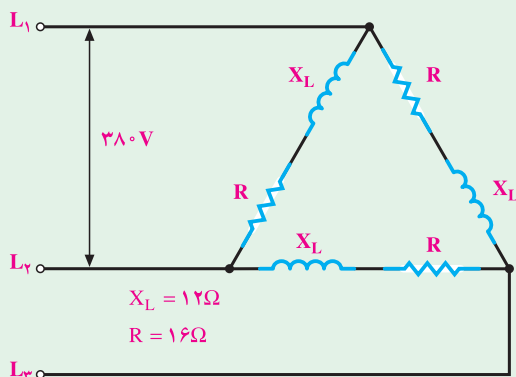
۵۰Hz و ولتاژ خطی $V_L = 380$ ولت چه توانی از شبکه دریافت می کند ($\pi = 3$)؟

$$P_{\Delta} = 34/6 \text{ KW}, P_{\lambda} = 11/5 \text{ KW}$$

جواب:

۳- در شکل ۷-۱۶ یک مصرف کننده سه فاز متعادل از شبکه سه فاز تغذیه می کند.

مطلوب است:



شکل ۷-۱۶

الف - جریان هر فاز و هر خط.

ب - توان مصرفی.

$$P_e = 17328 \text{ W}$$

$$I_P = 19 \text{ A} \text{ و } I_L = 32/9 \text{ A}$$

۴- در مدار الکتریکی سه فاز سه فاز شکل ۷-۱۷ سه امپدانس Z با ضریب قدرت ۰/۸ پس فاز

به صورت مثلث اتصال دارند. مطلوب است محاسبه ی:

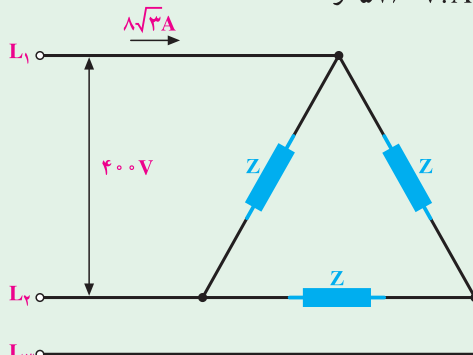
الف - مقدار امپدانس Z.

ب - توان های مصرفی، راکتیو و ظاهری.

جواب:

$$\text{الف} - 50 \Omega$$

$$\text{ب} - 7680 \text{ W}, 5760 \text{ V.A.R} \text{ و } 9600 \text{ VA}$$



شکل ۷-۱۷

منابع و مأخذ

1) Electric circuitts zied joseph a edminister schaums outline series
copyright 1983 by mcgraw - hillbook co.

2) Engineering circuit analysis fourth edition william.h.hayt,jr .jacke.
kemmerly 1986 mcgraw hillbook. co.

۳- استیونس جی بوز- ن ؛ (۱۳۶۳). مبادی علم شبکه‌ها، (محمود نحوی- مهدی احسان،
مترجم)، امیرکبیر

۴- فلوید، توماس. ال ؛ (۱۳۶۷). اصول و مبانی مدارهای الکتریکی، (مهرداد عابدی، مترجم)

