

بردار

هدف های رفتاری

- در پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود:
- ۱- بردار را تعریف کند و هم‌سنگ یک بردار را به دست آورد.
 - ۲- جمع و تفاضل بردارها را به روش هندسی معین کند.
 - ۳- برابری چندین بردار را به روش تحلیلی محاسبه کند.
 - ۴- جمع، تفاضل و ضرب داخلی دو بردار را تعریف کرده و اندازه‌ی ضرب داخلی آن‌ها را معین کند.
 - ۵- امواج متناوب سینوسی را به صورت برداری نمایش دهد.
 - ۶- مفهوم توان الکتریکی را شرح دهد.
 - ۷- توان ظاهری، حقیقی، غیر مؤثر و ضریب توان را تعریف کند.
 - ۸- توان ظاهری، حقیقی، غیر حقیقی و ضریب توان را از معادلات زمانی ولتاژ و جریان به دست آورد.
 - ۹- مثلث توان‌ها را رسم کند و از روی آن ضریب توان کل، توان اکتیو و راکتیو کل شبکه را تعیین کند.

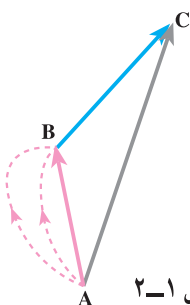
۱-۲- مقدمه

رفتار مقاومت‌های اهمی، سلفی و خازنی خالص را در جریان متناوب در دروس گذشته مطالعه کردیم و آموختیم که جریان و ولتاژ در مقاومت اهمی هم‌فاز هستند. در سلف، خالص جریان از ولتاژ دوسر سلف 90° درجه عقب‌تر و در خازن خالص جریان از ولتاژ دوسر خازن 90° درجه جلوتر است اما سلف و خازن خالص تصویری بیش نیستند و در مدارهای حقیقی نمی‌توان یک سلف یا خازن خالص پیدا

کرد. می‌دانیم یک سیم پیچ یا مقاومت سلفی از مقدار معینی هادی الکتریکی تشکیل می‌شود. هر هادی الکتریکی به طول l با توجه به رابطه‌ی $R = \rho \frac{l}{A}$ دارای مقاومت اهمی است. هم‌چنین یک خازن شارژ شده، پس از مدتی تخلیه می‌شود؛ بنابراین، خازن باید یک مقاومت اهمی داشته باشد تا از طریق آن بارهای الکتریکی تخلیه شوند. این مقاومت را **مقاومت نشتی خازن** می‌گویند. در تحلیل مدارهای الکتریکی برای کسب نتایج مطلوب، سلف و خازن حقیقی را به شکل‌های $R-L$ یا $R-C$ مدل می‌کنند. این مدل ممکن است به صورت $R-L$ یا $R-C$ سری یا موازی در نظر گرفته شود. از طرف دیگر، ممکن است مدارهای الکتریکی از ترکیب عناصر سلفی، خازنی و اهمی تشکیل شوند. بنابراین، مطالعه‌ی مدارهای C و L ، R در اتصال‌های سری و موازی ضرورت دارد. از آن‌جا که رفتار عناصر R ، L و C در جریان متناوب یکسان نیست، در یک مدار شامل R ، L و C ، برای تعیین ولتاژ قسمتی از مدار یا تعیین جریان آن، نمی‌توان از روش‌های جمع جبری ولتاژها یا جریان‌ها استفاده کرد. بدین جهت، برای تحلیل مدارهای $R-L-C$ از بردارها و عملیات برداری استفاده می‌شود. از این رو قبل از مطالعه‌ی مدارهای $R-L-C$ لازم است کمیت‌های برداری و عملیات بر روی آن‌ها را به دقت مطالعه کنیم.

۲-۲- تعریف بردار و کمیت برداری

مفهوم بعضی از کمیت‌های فیزیکی با بیان مقدار کمیت کاملاً روشن است؛ مثلاً وقتی می‌گوییم ۲۰ کیلو سیب یا به مدت ۲۰ دقیقه یا ۲۰ متر پارچه، همه مفهوم سخن ما را به طور روشن درمی‌یابند. چنین کمیت‌هایی را که با بیان اندازه کاملاً معرفی می‌شوند، **کمیت‌های عددی** یا **اسکالر** می‌گویند. اگر رهگذری که با محل زندگی شما آشنایی کافی ندارد، از شما نشانه‌ی محلی را سؤال کند، او را چنین راهنمایی می‌کنید: «۲۰۰ متر مستقیم بروید، سپس به سمت چپ بپیچید و ۵۰۰ متر جلو بروید». اگر رهگذر بدون توجه به جهت‌های گفته شده فقط ۷۰۰ متر حرکت کند، آیا به محل مورد نظر خواهد رسید؟ جواب منفی است؛ زیرا فقط طی اندازه‌ی کمیت برای رسیدن به محل نشانی کافی



شکل ۲-۱

نیست. باید جهت‌های گفته شده نیز رعایت شود. به چنین کمیت‌هایی که با بیان اندازه‌ی کمیت کامل نیستند و باید جهت آن‌ها مشخص شود، **کمیت برداری** می‌گویند. برای این که با کمیت‌های برداری و مشخصه‌های یک بردار بیش‌تر آشنا شویم، فرض می‌کنیم یک ذره مطابق شکل ۲-۱، موضع خود را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تغییر دهد. روشن است این جا به جایی، در مسیرهای بی‌شماری امکان‌پذیر است.

از نظر ما جا به جایی مؤثر، طول پاره خط \overline{AB} است. چون نقطه‌ی شروع جا به جایی A و نقطه‌ی انتهایی، B است و حرکت از نقطه‌ی A به سوی نقطه‌ی B صورت گرفته است. جا به جایی ذره در مسیر AB دارای ابتدا، انتها و مقدار (\overline{AB}) است. جهت جا به جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B با پیکان نشان داده شده است. ذره‌ی متحرک در ادامه‌ی جا به جایی خود، از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C تغییر مکان می‌دهد. روشن است که جا به جایی مؤثر طول پاره خط \overline{BC} است. در طول جا به جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C ذره جا به جایی مؤثر \overline{AC} را خواهد داشت؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

$$(جا\ به\ جایی\ مسیر\ AC) = (جا\ به\ جایی\ مسیر\ BC) + (جا\ به\ جایی\ مسیر\ AB)$$

از طرف دیگر، در مثلث ABC مجموع دو ضلع AB و BC از اندازه‌ی ضلع سوم – یعنی AC – بزرگ‌تر است.

$$\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$$

مقایسه در جمع جبری و جا به جایی نشان می‌دهد که جمع جا به جایی با جمع جبری تفاوت دارد. به طور کلی، یک کمیت برداری را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

کمیت‌های برداری کمیت‌هایی هستند که رفتار آن‌ها مانند رفتار جا به جایی است؛ دارای بزرگی^۱، جهت، ابتدا، انتها و راستا هستند و با قواعد معینی با هم جمع می‌شوند.

جا به جایی مسیر AB را به صورت \vec{AB} نشان می‌دهند و آن را بردار AB می‌گویند. در این نمایش، A ابتدای بردار، B انتها و طول پاره خط \overline{AB} ، اندازه‌ی آن و جهت این بردار از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B است. اگر در شکل ۱-۲ جا به جایی در مسیر BC را به صورت \vec{BC} نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

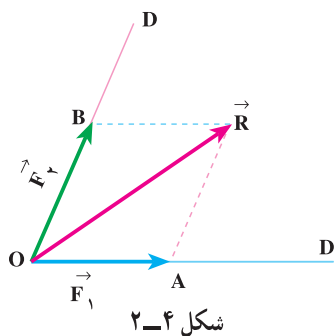
$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC} \quad (۱-۲)$$

۳-۲- هم‌سنگ (هم‌ارز) یک بردار

بردار \vec{AB} واقع بر راستای D را در نظر می‌گیریم. اگر از نقطه‌ی دلخواه مانند M، بردار \vec{MN} را چنان رسم کنیم که راستای آن با راستای \vec{AB} موازی بوده و اندازه‌ی آن برابر اندازه‌ی \vec{AB}

۱- بزرگی بردار را قدر مطلق، دامنه یا شدت بردار نیز می‌گویند.

۲-۵- تجزیه‌ی یک بردار به دو راستای معین



شکل ۲-۴

بردار \vec{R} و دو راستای D و D' را مطابق شکل ۲-۴

در نظر می‌گیریم. اگر بخواهیم بردار \vec{R} را در راستای D و D' تجزیه کنیم، کافی است از انتهای آن دو خط به موازات راستاهای

D' و D رسم کنیم. این خطوط راستای D را در نقطه‌ی B و راستای D' را در نقطه‌ی A قطع می‌کنند. بردار $\vec{F}_1 = \vec{OA}$

را مؤلفه‌ی \vec{R} در راستای D' و بردار $\vec{F}_2 = \vec{OB}$ را مؤلفه‌ی

بردار \vec{R} در راستای D گویند. بدین ترتیب، بردار \vec{R} به دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 در راستاهای D و D' تجزیه می‌شود.

۲-۶- حاصل جمع بردارها

حاصل جمع بردارها را با روش هندسی (ترسیمی) یا روش تحلیلی (محاسبه‌ای) تعیین می‌کنند.

۲-۶-۱- روش هندسی: دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 را مطابق شکل ۲-۵ در نظر می‌گیریم. هر دو

بردار از نقطه‌ی O شروع می‌شوند و جهت مثبت آن‌ها با هم زاویه‌ی α می‌سازد.

برای تعیین برآیند دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 در روش هندسی، از انتهای هر یک به موازات دیگری

خطی رسم می‌کنیم تا در نقطه‌ی C همدیگر را قطع کنند و یک متوازی‌الاضلاع به دست آید. بردار

برآیند \vec{R} ، قطر متوازی‌الاضلاعی خواهد بود که بدین ترتیب ساخته می‌شود. ابتدای آن نقطه‌ی O

(نقطه‌ی شروع هر دو بردار) و انتهایش نقطه‌ی

C است. با توجه به شکل ۲-۵ می‌توان

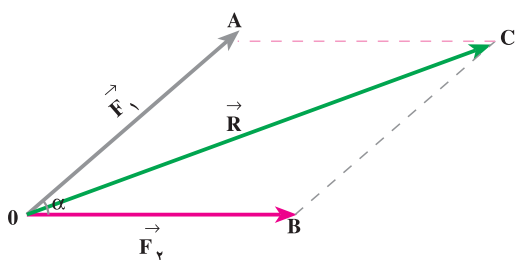
نوشت:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (2-4)$$

اندازه‌ی بردار $|\vec{R}| = \overline{OC}$ است و از

رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha} \quad (2-5)$$



شکل ۲-۵

۲-۶-۲ روش تحلیلی: برای به دست آوردن حاصل جمع چند بردار به روش تحلیلی

در صفحه محورهای مختصات، هم‌سنگ بردارها را مطابق شکل ۲-۶ رسم می‌کنیم. این بردارها با محور x زاویه‌هایی می‌سازند. پس از تعیین این زاویه‌ها، هر یک از بردارها را روی محورهای افقی و عمودی تصویر می‌کنیم. سپس، جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور x به دست می‌آوریم و آن را با $\sum F_x$ نشان می‌دهیم. جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور y به دست می‌آوریم و آن را با $\sum F_y$ نشان می‌دهیم. بردار برآیند از جمع دو بردار $\sum \vec{F}_x$ و $\sum \vec{F}_y$ به دست می‌آید و اندازه و جهت آن براساس روابط زیر تعیین می‌شود:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} \quad (2-6)$$

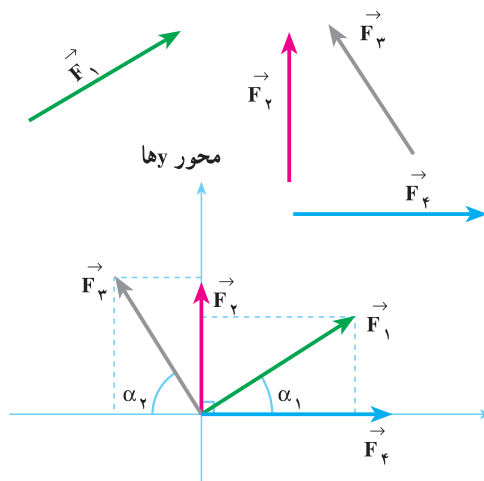
$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sum F_y}{\sum F_x} \quad (2-7)$$

φ زاویه‌ای است که بردار برآیند با محور x می‌سازد. برای شکل ۲-۶ بردار برآیند را

می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\sum F_x = +|\vec{F}_1| \cos \alpha_1 + |\vec{F}_2| \cos 90^\circ + |\vec{F}_3| \cos 0^\circ - |\vec{F}_4| \cos \alpha_4 \quad (2-8)$$

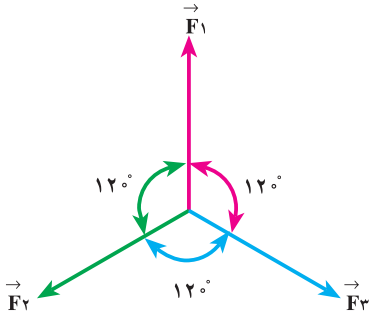
$$\sum F_y = +|\vec{F}_4| \sin(0^\circ) + |\vec{F}_1| \sin \alpha_1 + |\vec{F}_2| \sin 90^\circ + |\vec{F}_3| \sin \alpha_3 \quad (2-9)$$



شکل ۲-۶

مثال ۱: سه بردار با دامنه‌ی یکسان ۲۲°

ولتی، مطابق شکل ۲-۷ با هم زاویه‌ی ۱۲° می‌سازند. با روش تحلیلی، برآیند این سه بردار را به دست آورید.



شکل ۲-۷

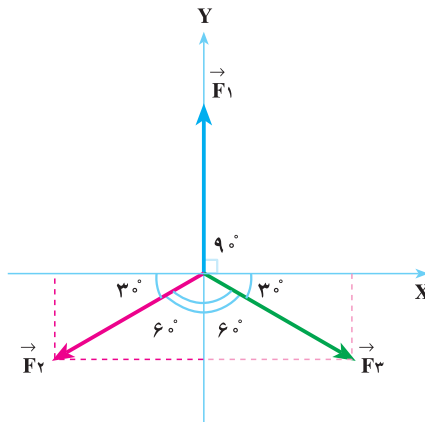
راه حل:

برای سه بردار، محورهای مختصات را چنان عبور می‌دهیم که بردار \vec{F}_1 بر محور Y ها، مطابق شکل ۲-۸ منطبق شود. در این حالت، محور X ها با بردار \vec{F}_1 زاویه‌ی 90° و با بردارهای \vec{F}_2 و \vec{F}_3 زاویه‌ی 30° درجه تشکیل خواهد داد.

جمع جبری تصاویر بر روی محور X ها برابر است با:

$$\sum F_x = |\vec{F}_1| \cos 90^\circ + |\vec{F}_3| \cos 30^\circ - |\vec{F}_2| \cos 30^\circ$$

$$\sum F_x = 22 \times (0) + 22 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 22 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$



شکل ۲-۸

جمع جبری تصاویر بردارها بر روی محور y ها برابر است با :

$$\sum F_y = |\vec{F}_1| \sin 90^\circ - |\vec{F}_2| \sin 30^\circ - |\vec{F}_3| \sin 30^\circ$$

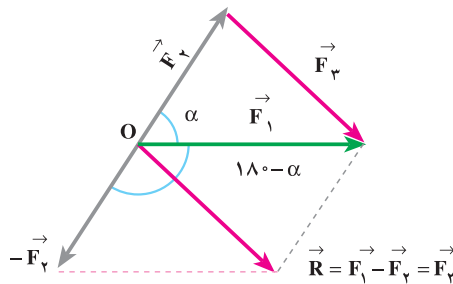
$$\sum F_y = 220 \times (1) - 220 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 220 \times \left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

بردار برابند برابر است با :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2} = \sqrt{0^2 + 0^2} = 0$$

۲-۷- تفاضل دو بردار

در شکل ۲-۹ بردار \vec{F}_1 ، برابند دو بردار \vec{F}_2 و \vec{F}_3 است.



شکل ۲-۹

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 \quad (2-10)$$

اگر در رابطه‌ی ۲-۱۰ بردار \vec{F}_2 را به طرف دوم تساوی انتقال دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 \quad (2-11)$$

رابطه‌ی ۲-۱۱ بیان می‌کند که بردار \vec{F}_3 تفاضل دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 است. برای تعیین تفاضل

دو بردار، از ابتدای بردار \vec{F}_1 ، منفی بردار \vec{F}_2 را رسم می‌کنیم. برابند دو بردار \vec{F}_1 و $-\vec{F}_2$ ، بردار

تفاضل (\vec{R}) خواهد بود. این بردار هم‌سنگ بردار \vec{F}_3 تفاضل دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 است. بردار

$-\vec{F}_2$ با \vec{F}_1 زاویه‌ی $180 - \alpha$ را می‌سازد بر اساس رابطه‌ی ۲-۵ می‌توان نوشت :

$$|\vec{R}| = |\vec{F}_3| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos(180 - \alpha)} \quad (2-12)$$

اگر در رابطه‌ی ۲-۱۲ به جای $\cos(180^\circ - \alpha)$ مقدار $-\cos\alpha$ را جایگزین کنیم، دامنه‌ی تفاضل دو بردار به قرار زیر محاسبه می‌شود:

$$|\vec{F}_3| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha} \quad (2-13)$$

در رابطه‌ی (۲-۱۳) α زاویه‌ی بین دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 است.

مثال ۲: دو نیروی $\vec{F}_1 = 8\text{N}$ و $\vec{F}_2 = 6\text{N}$ با هم زاویه‌ی 6° می‌سازند. مجموع و تفاضل

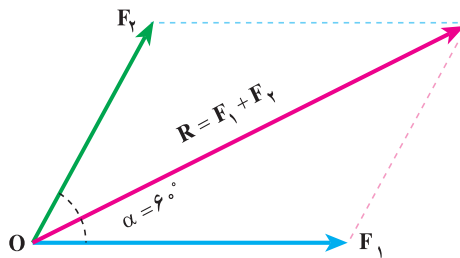
این دو بردار را به روش هندسی به دست آورید.

راه حل:

برایند دو نیروی \vec{F}_1 و \vec{F}_2 به روش هندسی مطابق شکل ۲-۱۰ به دست می‌آید.

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(8^2) + (6)^2 + 2(8)(6)\cos 6^\circ} = 12.16 \text{ نیوتن}$$



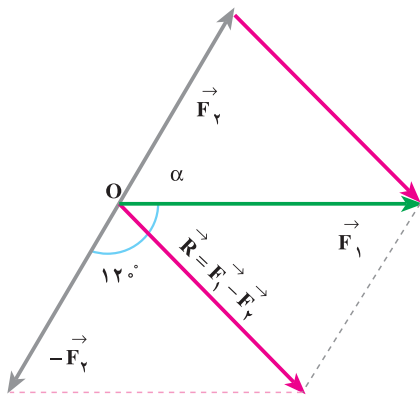
شکل ۲-۱۰- برایند مجموع \vec{F}_1 و \vec{F}_2

برای تعیین تفاضل $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ ، مطابق شکل ۲-۱۱، ابتدا منفی \vec{F}_2 را به دست می‌آوریم. با

تعیین برایند \vec{F}_1 و $-\vec{F}_2$ ، تفاضل دو بردار $(\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$ حاصل می‌شود.

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos 120^\circ}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(8)^2 + (6)^2 + 2(8)(6)\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{52}$$



$$|\vec{R}| = |\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = 7/21 \text{ نیوتن}$$

یا

$$|\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha}$$

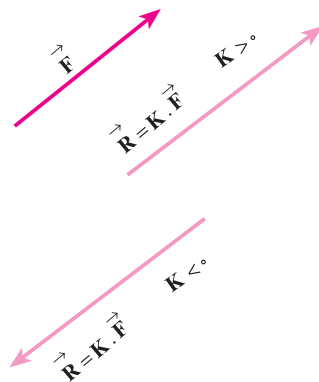
شکل ۱۱-۲- تفاضل دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 از روش هندسی

۲-۸- ضرب بردارها

در ضرب بردارها، ضرب یک بردار در یک کمیت عددی (اسکالر) و ضرب نقطه‌ای (داخلی) را بررسی می‌کنیم.

۲-۸-۱- ضرب یک بردار در یک کمیت عددی: ضرب کمیت عددی مانند K در یک

برداری مانند \vec{F} مطابق شکل ۱۲-۲، برداری را نتیجه می‌دهد که قدر مطلق آن K برابر قدر مطلق \vec{F} است. اگر $K > 0$ باشد، بردار حاصل ضرب هم جهت با بردار \vec{F} خواهد بود و اگر $K < 0$ باشد، جهت بردار حاصل ضرب با جهت \vec{F} ، 180° درجه اختلاف خواهد داشت.

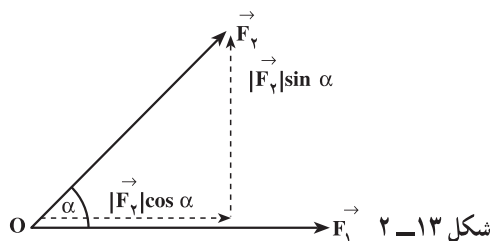


شکل ۱۲-۲

۲-۸-۲ ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار: دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 را که با هم زاویه‌ی α

می‌سازند، مطابق شکل ۲-۱۳ در نظر می‌گیریم، بردار \vec{F}_2 را به دو مؤلفه‌ی $\vec{F}_2 \cos \alpha$ و $\vec{F}_2 \sin \alpha$ که بر یک‌دیگر عمودند، تجزیه می‌کنیم. بنا به تعریف، حاصل ضرب داخلی دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 که به صورت $A = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ نشان داده می‌شود، یک کمیت عددی است. اندازه‌ی این کمیت عددی از رابطه‌ی $A = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos \alpha$ محاسبه می‌شود.

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = \vec{F}_2 \cdot \vec{F}_1 = |\vec{F}_2| |\vec{F}_1| \cos \alpha = |\vec{F}_2| |\vec{F}_1| \cos \alpha \quad (2-14)$$



کمیت‌های الکتریکی مانند توان و انرژی، کمیت‌های اسکالر یا عددی هستند. کمیت توان از حاصل ضرب عددی بردار ولتاژ (\vec{V}) و بردار جریان (\vec{I}) به دست می‌آید.

$$P = \vec{V} \cdot \vec{I} = |\vec{V}| |\vec{I}| \cos \varphi \quad (2-15)$$

در رابطه‌ی ۲-۱۵، φ زاویه‌ی بین دو بردار \vec{V} و \vec{I} است و آن را **اختلاف فاز ولتاژ و جریان** می‌نامند.

در این کتاب با توجه به جهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ را همیشه به صورت $\theta_v - \theta_i = \varphi$ (زاویه‌ی ولتاژ منهای زاویه‌ی جریان) منظور خواهیم کرد. اگر φ مثبت باشد، یعنی در جهت مثلثاتی از \vec{I} به \vec{V} برسیم - جریان را پس فاز و اگر φ منفی باشد، یعنی در خلاف جهت مثلثاتی از \vec{I} به \vec{V} برسیم - جریان را پیش فاز می‌نامند.

از آن جا که انرژی (کار) از حاصل ضرب توان در زمان به دست می‌آید ($W = P \cdot t$) و چون هر دو

کمیت توان و زمان کمیت اسکالر هستند، حاصل ضرب آن‌ها یعنی انرژی نیز کمیت اسکالر است.
مثال ۳: بردارهای $\vec{F}_1 = 1^\circ$ واحد و $\vec{F}_2 = 6^\circ$ واحد با هم زاویه‌ی 6° درجه می‌سازند.

حاصل ضرب داخلی $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ را معین کنید.

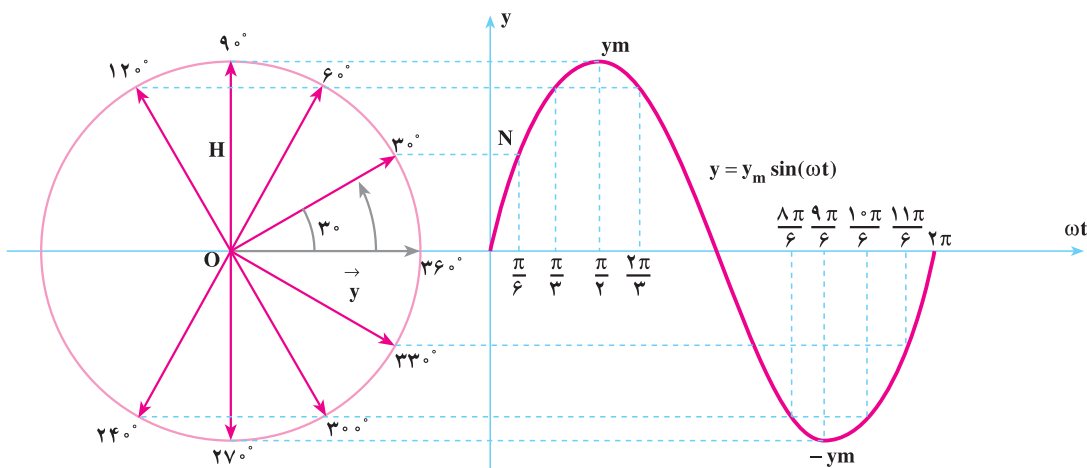
راه حل:

$$A = \vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = |\vec{F}_1| |\vec{F}_2| \cos 6^\circ$$

$$A = 1^\circ \times 6^\circ \times \left(\frac{1}{2}\right) = 3^\circ \text{ واحد}$$

۹-۲- نمایش برداری امواج متناوب سینوسی

موج سینوسی $y = y_m \sin(\omega t)$ را مطابق شکل ۱۴-۲ در نظر می‌گیریم. در هر لحظه می‌توان دامنه‌ی این موج را از تصویر بردار چرخان \vec{y} بر روی محور سینوس‌ها در دایره‌ی مثلثاتی معین کرد. بردار چرخان \vec{y} با سرعت زاویه‌ای ω در جهت مثلثاتی دوران می‌کند.

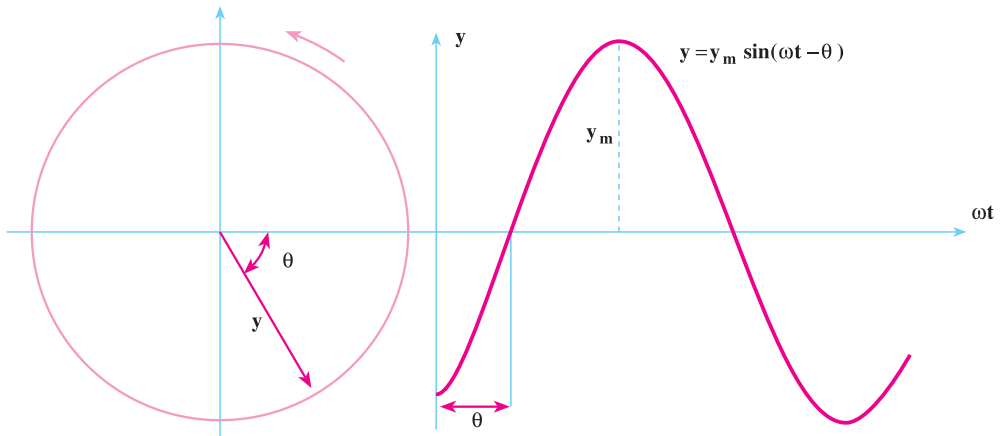


شکل ۱۴-۲

دامنه‌ی موج در $\omega t = \frac{\pi}{6}$ ، با نقطه‌ی N در روی منحنی سینوسی نشان داده شده است. این

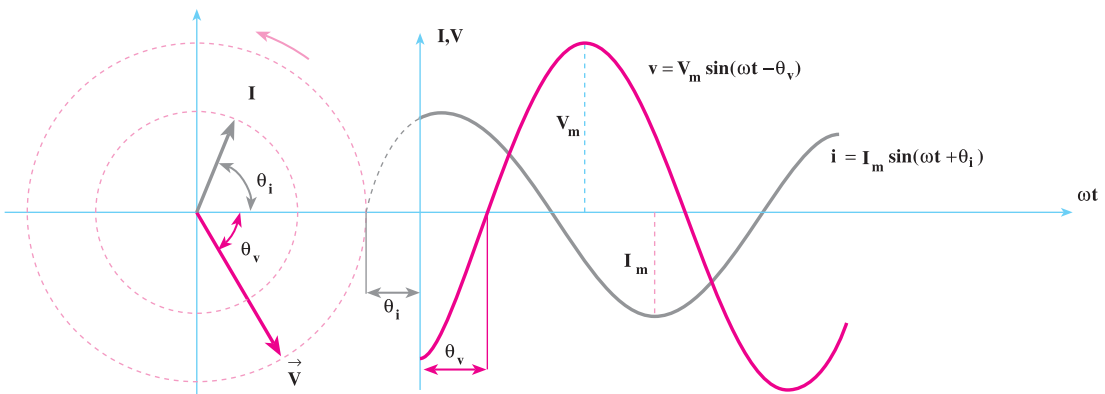
دامنه برابر پاره خط OH است. پاره خط OH تصویر بردار \vec{y} در موقعیت ON است که نسبت به موقعیت صفر، 30° در جهت مثلثاتی دوران کرده است.

امواج سینوسی، ممکن است از مبدأ مختصات شروع نشوند. مثلاً موج شکل ۲-۱۵، θ درجه عقب‌تر از مبدأ مختصات شروع می‌شود و به اصطلاح θ درجه پس فاز است. بردار این موج نسبت به محور Xها (ωt) ، θ درجه پس فاز رسم می‌شود.



شکل ۲-۱۵

در شکل ۲-۱۶ دو موج $v = V_m \sin(\omega t - \theta_v)$ و $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، بردار \vec{V} متناسب با دامنه‌ی V_m به اندازه‌ی $-\theta_v$ عقب‌تر از محور Xها (ωt) رسم شده است. بردار \vec{I} متناسب با دامنه‌ی I_m ، به اندازه‌ی $+\theta_i$ جلوتر رسم می‌شود. روشن است اختلاف فاز دو بردار \vec{I} و \vec{V} ، $\varphi = -\theta_v - \theta_i = -(\theta_v + \theta_i)$ خواهد بود. علامت φ منفی است، زیرا جریان پیش‌فاز است.



شکل ۲-۱۶

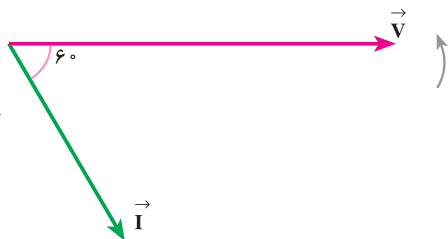
برای نشان دادن جریان و ولتاژ سینوسی به صورت برداری، در شکل‌های ۱۴-۲ تا ۱۶-۲، اندازه‌ی بردارها برابر دامنه‌ی ماکزیمم موج جریان و ولتاژ رسم شده است. از آن‌جا که در محاسبه‌ها معمولاً مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان به کار می‌رود، می‌توان اندازه‌ی این بردارها را برابر با مقدار دامنه‌ی مؤثر امواج رسم کرد.

مثال ۴: معادله‌ی زمانی دو کمیت جریان و ولتاژ به صورت $i = 20\sqrt{2} \sin(50\pi t - 60^\circ)$ و $v = 200\sqrt{2} \sin(50\pi t)$ است. پس از رسم بردارهای فاز \vec{V} و \vec{I} ، حاصل ضرب عددی $P = \vec{V} \cdot \vec{I}$ را معین کنید.

راه حل: در رسم بردارهای فاز، لازم است دامنه‌ی مؤثر و زاویه‌ی فاز بردارها تعیین گردد و در محورهای مختصات با توجه به پس فاز یا پیش فاز بودن آن‌ها رسم شود. بردار جریان دارای مقدار مؤثر $|\vec{I}| = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ و بردار ولتاژ دارای مقدار مؤثر $|\vec{V}| = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ است. زاویه‌ی فاز بردار جریان $\theta_i = -60^\circ$ و زاویه‌ی فاز ولتاژ $\theta_v = 0^\circ$ است. بنابراین، اختلاف فاز بین بردار جریان و ولتاژ برابر $\phi = \theta_v - \theta_i = 0^\circ - (-60^\circ) = 60^\circ$ خواهد بود و مقدار آن $\phi = 60^\circ$ درجه محاسبه می‌شود.

$$P = \vec{V} \cdot \vec{I} = |V||I|\cos\phi$$

$$P = \frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cos 60^\circ = 2000 \text{ W}$$



۱۰-۲- توان الکتریکی

انرژی الکتریکی تولیدی یا مصرفی در یک ثانیه را **توان الکتریکی** می‌گویند. اگر آهنگ جذب یا تولید انرژی الکتریکی یک دستگاه ثابت باشد، توان دستگاه، مقدار کار انجام یافته در واحد زمان است و از رابطه‌ی $P = \frac{W}{t}$ تعیین می‌شود. واحد کار، ژول و واحد زمان، ثانیه است. یک ژول بر ثانیه را وات (واحد توان) می‌گویند. هر هزار وات یک کیلووات (KW) و هر یک میلیون وات یک مگاوات (MW) نامیده می‌شود.

$$1 \text{ KW} = 1000 \text{ W} \quad (\text{یک کیلو وات})$$

$$1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W} \quad (\text{یک مگا وات})$$

در جریان متناوب (AC) توان الکتریکی در چندین مفهوم بررسی می‌شود. این مفاهیم عبارت‌اند از:

توان ظاهری^۱، توان مؤثر^۲، توان غیر مؤثر^۳.

۱-۱-۲- توان مؤثر: مقدار P_e را **توان مؤثر** یا توان مفید می‌گویند. در مدارهای الکتریکی این توان، کار مؤثر را انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی‌های دیگر توسط توان الکتریکی قابل توجه است. ضمناً در مقاومت‌های اهمی، این توان به صورت انرژی حرارتی ظاهر می‌شود و از رابطه‌ی $۱۶-۲$ به دست می‌آید. در این رابطه $\cos \varphi$ را **ضریب توان** می‌گویند. هر چه ضریب توان به یک نزدیک‌تر شود، اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ (φ) به صفر نزدیک می‌شود و توان مؤثر افزایش می‌یابد. در سیستم SI واحد توان مؤثر «وات» [W] است.

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad [W] \quad (۲-۱۶)$$

۲-۱-۲- توان غیر مؤثر: در عناصر غیر فعال نظیر مقاومت‌های سلفی و خازنی، توان غیر مؤثری ظاهر می‌شود که نمی‌توان آن را به کار مفید تبدیل کرد. این توان به شکل موج سینوسی بین مصرف‌کننده و شبکه رفت و برگشت می‌کند و کاری انجام نمی‌دهد. در شبکه‌های الکتریکی به هنگام بهره‌گیری از خواص سلفی و خازنی در ایجاد میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی، توان غیر مؤثر به طور ناخواسته در شبکه ظاهر می‌شود. این امر موجب می‌شود که مولدها نتوانند در جریان نامی توان مفید کامل به شبکه تحویل دهند. در سیستم SI واحد توان غیر مؤثر «وار» [VAR] است. توان غیر مؤثر با رابطه‌ی $۱۷-۲$ بیان می‌شود:

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi \quad [VAR] \quad (۲-۱۷)$$

چون در خازن‌ها جریان پیش‌فاز است، $\varphi = \theta_v - \theta_i$ منفی می‌شود و توان P_d را با علامت منفی خواهیم داشت. از آن‌جا که در مقاومت‌های سلفی $\varphi = \theta_v - \theta_i > 0^\circ$ است، توان غیر مؤثر با علامت مثبت خواهد شد.

واحد توان غیر مؤثر در سیستم SI، ولت آمپر راکتیو است و با نماد V.A.R نشان داده می‌شود. هزار ولت آمپر راکتیو را کیلو ولت آمپر راکتیو می‌گویند و با علامت اختصاری KVA.R

۱- توان ظاهری را با علامت اختصاری P_s یا S نشان می‌دهند.

۲- توان مؤثر را توان اکتیو، واته و مفید نیز می‌گویند و آن را با علامت اختصاری P_e ، P_a ، P_w و P نشان می‌دهند.

۳- توان غیر مؤثر را توان راکتیو، دواته، غیر مفید نیز می‌گویند و آن را با علامت اختصاری P_d و P_r و Q نشان می‌دهند.

نشان می‌دهند. یک مگا ولت آمپر راکتیو (MVA.R) برابر یک میلیون ولت آمپر راکتیو است.
۳-۱-۲- توان ظاهری: حاصل ضرب ولتاژ و جریان مؤثر را **توان ظاهری** می‌گویند و آن را با علامت اختصاری P_s یا S نشان می‌دهند. در سیستم SI، واحد توان ظاهری ولت آمپر (V.A) است. هزار برابر V.A را کیلو ولت آمپر می‌گویند و با علامت اختصاری K.V.A نشان می‌دهند. یک میلیون برابر V.A را مگا ولت آمپر می‌نامند و علامت اختصاری مشخصه‌ی آن M.V.A است. توان ظاهری از رابطه‌ی ۲-۱۸ به دست می‌آید.

$$P_s = V_e I_e \quad [V.A] \quad (2-18)$$

۴-۱-۲- ارتباط توان مفید و غیر مفید با توان ظاهری: بر اساس روابط ۲-۱۶ و ۲-۱۷ می‌توان نوشت:

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad [W]$$

اگر روابط ۲-۱۶ و ۲-۱۷ را مجذور کنیم، خواهیم داشت:

$$P_e^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi \quad (2-19)$$

$$P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi \quad (2-20)$$

توجه داشته باشید اگر مقدار P_d منفی هم باشد، P_d^2 همیشه مثبت است. دو رابطه‌ی ۲-۱۹ و ۲-۲۰ را جمع می‌کنیم. با توجه به این که $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ است، خواهیم داشت:

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2 \varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2 \varphi$$

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$$

بنابراین:

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 = (V_e I_e)^2$$

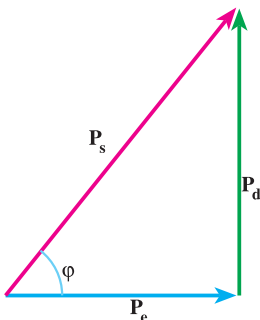
با توجه به رابطه‌ی ۲-۱۸، $V_e I_e$ توان ظاهری است؛ بنابراین:

$$P_e^2 + P_d^2 = P_s^2$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} \quad (2-21)$$

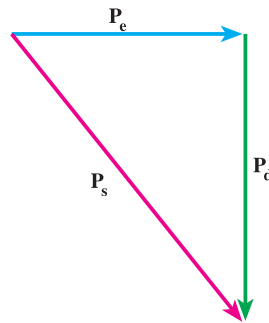
۵-۱۰-۲- مثلث توان‌ها: با توجه به رابطه‌ی ۲۱-۲، می‌توان گفت P_s توان ظاهری و تر

مثلث قائم الزاویه‌ای است که دو ضلع قائم آن توان‌های مؤثر و غیر مؤثر هستند. در رسم مثلث توان‌ها، توان مؤثر P_e را در راستای محور x ‌ها رسم می‌کنند. از آن‌جا که در مقاومت خازنی و مقاومت سلفی، جریان‌ها از ولتاژ به ترتیب 90° درجه پیش فاز و 90° درجه پس فاز است، اختلاف فاز φ در مقاومت خازنی منفی و مقاومت سلفی مثبت خواهد بود. به همین علت، توان راکتیو مربوط به مقاومت سلفی مثبت و بالای محور y ‌ها و توان راکتیو مربوط به خازن منفی پایین محور y ‌ها رسم می‌شوند. توان‌های راکتیو در مقاومت سلفی و خازنی به علت آن‌که 180° درجه با هم اختلاف فاز دارند، جهت خلاف یک‌دیگر بر شبکه تأثیر خواهند گذاشت. اگر شبکه از چندین شاخه تشکیل شده باشد، می‌توانیم، توان شاخه‌ها را به دنبال هم رسم کنیم و توان مؤثر و غیر مؤثر کل شبکه را به دست آوریم و آن‌گاه توان ظاهری را معلوم کنیم.



ب: مثلث توان‌ها با توان راکتیو مثبت (سلفی)

(پس فاز $\varphi > 0^\circ$)



الف: مثلث توان‌ها با توان راکتیو منفی (خازنی)

(پیش فاز $\varphi < 0^\circ$)

شکل ۱۷-۲- مثلث توان‌ها

در مثلث توان‌ها می‌توان نوشت:

$$P_e = P_s \cos \varphi \quad , \quad P_d = P_s \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{P_d}{P_e} \quad \Rightarrow \quad P_d = P_e \tan \varphi$$

مثال ۵: در یک مدار الکتریکی معادله‌ی ولتاژ $v = 20 \sin(\omega t + 8^\circ)$ و معادله‌ی جریان

$i = 5 \sin(\omega t + 2^\circ)$ است. توان‌های حقیقی، غیر مؤثر و ظاهری مدار را به دست آورید و مثلث

توان‌ها را رسم کنید.

راه حل:

$$V_m = 200 \cdot V \Rightarrow V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{200}{\sqrt{2}} = 100 \cdot \sqrt{2} V$$

$$I_m = 5 A \Rightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2/5 \sqrt{2} A$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i$$

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ از تفاوت زاویه فازهای بردار ولتاژ و جریان به دست می‌آید.

$$\varphi = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$$

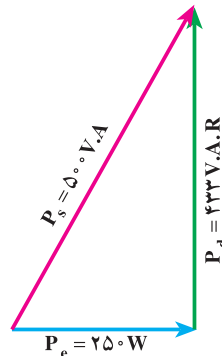
$$P_e = V_e I_e \cos \varphi = 100 \cdot \sqrt{2} \times 2/5 \sqrt{2} \cos 60^\circ = 250 W$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = 100 \cdot \sqrt{2} \times 2/5 \sqrt{2} \sin 60^\circ = 433 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2}$$

$$P_s = \sqrt{250^2 + 433^2} = 500 \text{ V.A}$$

شکل ۱۸-۲- مثلث توان‌ها



مثال ۶: یک شبکه‌ی الکتریکی دارای مصرف‌کننده‌هایی با مشخصات زیر است:

۱- مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۱ $P_s = 300 \text{ V.A}$, $\varphi = 30^\circ$

۲- مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۲ $P_e = 200 \text{ W}$, $\varphi = -60^\circ$

۳- مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۳ $P_d = 400 \text{ V.A.R}$, $P_s = 500 \text{ V.A}$

مثلث توان‌های مصرف‌کننده‌ها را به دنبال هم رسم کنید و توان مؤثر، راکتیو و ظاهری شبکه را

به دست آورید.

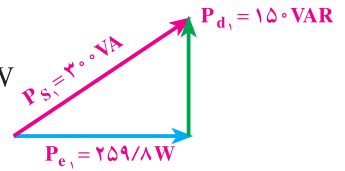
راه حل:

برای مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۱ داریم:

$$P_{s_1} = 300 \cdot V.A \quad , \quad \varphi_1 = 30^\circ$$

$$P_{e_1} = P_{s_1} \cos \varphi_1 = 300 \cdot \cos 30^\circ = 150 \cdot \sqrt{3} = 259.8 \text{ W}$$

$$P_{d_1} = P_{s_1} \sin \varphi_1 = 300 \cdot \sin 30^\circ = 150 \text{ V.A.R}$$

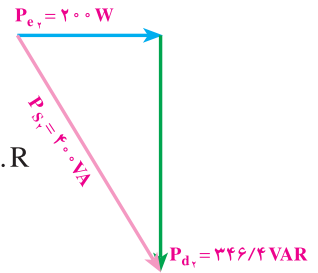


برای مصرف کننده‌ی شماره‌ی ۲ داریم:

$$P_{e_2} = 200 \text{ W} \quad , \quad \varphi_2 = -60^\circ$$

$$P_{s_2} = \frac{P_{e_2}}{\cos \varphi_2} = \frac{200}{\cos(-60^\circ)} = 400 \text{ V.A}$$

$$P_{d_2} = P_{e_2} \tan \varphi_2 = 200 \cdot \tan(-60^\circ) = -200 \cdot \sqrt{3} = -346.4 \text{ V.A.R}$$



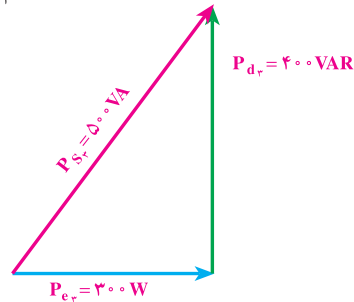
برای مصرف کننده‌ی شماره‌ی ۳ داریم:

$$P_{d_3} = 400 \text{ V.A.R} \quad , \quad P_{s_3} = 500 \text{ V.A}$$

$$P_{s_3}^2 = P_{e_3}^2 + P_{d_3}^2$$

$$500^2 = P_{e_3}^2 + 400^2 \Rightarrow P_{e_3}^2 = 90000$$

$$P_{e_3} = 300 \text{ W}$$



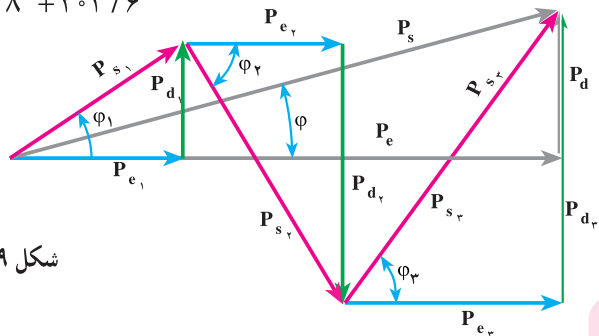
با توجه به شکل ۱۹-۲ می‌توان نوشت:

$$P_e = P_{e_1} + P_{e_2} + P_{e_3} = 259.8 + 200 + 300 = 759.8 \text{ W}$$

$$P_d = P_{d_1} + P_{d_2} + P_{d_3} = 150 - 346.4 + 400 = 203.6 \text{ V.A}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{759.8^2 + 203.6^2}$$

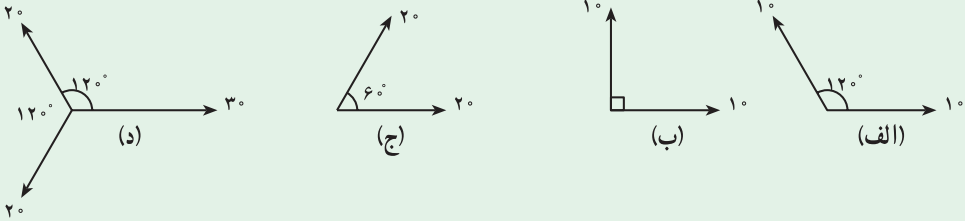
$$P_s = 786.6 \text{ V.A}$$



شکل ۱۹-۲



۱- برآیند بردارهای اشکال زیر را به دو روش تحلیلی و هندسی به دست آورید.



جواب: الف - ۱۰ - ب - ۱۴/۱ - ج - ۳۴/۶ - د - ۱۰

۲- دو بردار $\vec{F}_1 = 10$ و $\vec{F}_2 = 20$ مفروض است. اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\alpha = 60^\circ$ باشد، مطلوب است:

الف - $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ ب - $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ پ - $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2$ ت - $\vec{F}_1 \cdot 2\vec{F}_2$
 جواب: الف - ۲۶/۴ ب - ۱۷/۳ پ - ۱۰۰ ت - ۲۰۰

۳- برآیند دو بردار $\vec{F}_1 = 3$ و $\vec{F}_2 = 4$ برابر $\vec{R} = 5$ می‌باشد زاویه‌ی بین این دو بردار چند درجه است؟

جواب: $\alpha = 90^\circ$

۴- در یک مدار الکتریکی معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $V = 200 \sin 100t$ و $i = 10 \sin(100t - 53^\circ)$ مطلوب است الف - رسم دیاگرام برداری ب - محاسبه‌ی توان‌های حقیقی، غیر حقیقی و ظاهری مدار.

جواب: 1000 VA ، $+800 \text{ VAR}$ ، 600 W

۵- در یک مدار الکتریکی، معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $V = 50\sqrt{2} \sin 250t$ و $i = 10\sqrt{2} \sin(250t + 30^\circ)$ مطلوب است:

الف - رسم دیاگرام برداری

ب - محاسبه‌ی توان‌های حقیقی، غیر مؤثر و ظاهری مدار.

جواب: 500 VA ، -250 VAR ، 433 W

۶- توان مؤثر و غیر مؤثر یک مصرف کننده با توان ظاهری 100VA و ضریب توان 0.8 پس فاز را به دست آورید.

جواب: 80W و 60VAR +

۷- در یک شبکه ی الکتریکی دو مصرف کننده با مشخصات زیر وجود دارند:

بار شماره ی یک: پس فاز 0.8 ، $\cos \phi = 0.8$ ، $P_{e1} = 5\text{KW}$

بار شماره ی دو: پیش فاز $2\sqrt{3}\text{KW}$ ، $P_{e2} = 2\sqrt{3}\text{KW}$ ، $P_{d2} = 2\text{K.V.A.R}$

مطلوب است:

الف- رسم مثلث توان ها به دنبال همدیگر

ب- محاسبه ی ضریب قدرت کل شبکه

جواب: $\cos \phi = 0.97$

۸- یک شبکه ی الکتریکی با دو بار به مشخصات زیر مفروض است. ضریب قدرت شبکه با در

نظر گرفتن دو بار با هم چه قدر است؟

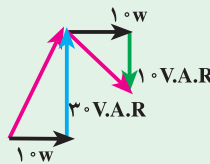
بار شماره ی یک: $P_{S1} = 100\sqrt{2}\text{V.A}$ ، $P_{e1} = 100\text{W}$ پس فاز.

بار شماره ی دو: $P_{S2} = 40\sqrt{2}\text{V.A}$ ، $P_{d2} = 40\text{V.A.R}$ پیش فاز.

جواب: $\cos \phi = 0.91$

۹- دیاگرام توان یک مدار الکتریکی جریان متناوب مطابق شکل زیر است. ضریب توان کل

شبکه چه قدر است؟



جواب: $\cos \phi = 0.7$