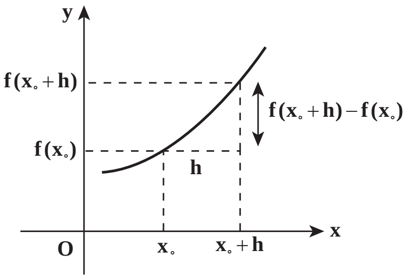
فصل ۳

مشتق توابع

یادآوری و تکمیل



سال گذشته با مفهوم مشتق توابع آشنا شده‌اید.

برای یک تابع مانند f با تغییر مقدارهای متغیر x مقادیر f(x) نیز تغییراتی می‌کنند. مشتق یک تابع، چگونگی تغییر مقدار تابع را نسبت به مقدار متغیر نشان می‌دهد.

در یک نقطه $x_\circ$ از دامنه f اگر به اندازه h واحد از $x_\circ$ دور شویم، مقدار تابع از $f(x_\circ)$ به $f(x_\circ+h)$ تغییر می‌کند.

میزان تغییرات f برابر $f(x_\circ+h)-f(x_\circ)$ و میزان تغییرات x به اندازه h است.

کسر $\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$ نسبت این تغییرات را حساب می‌کند و حد آن در $h=\circ$ (در صورت وجود) مشتق f در $x_\circ$ نامیده‌ایم و با $f'(x_\circ)$ نشان داده‌ایم.

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه دلخواه $x_\circ\in(\circ,\infty)$ حساب کنید.

حل :

$$f'(x_\circ)=\lim_{h\to\circ}\frac{\sqrt{x_\circ+h}-\sqrt{x_\circ}}{h}=\lim_{h\to\circ}\frac{(\sqrt{x_\circ+h}-\sqrt{x_\circ})(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}{h(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}$$

$$=\lim_{h\to\circ}\frac{(x_\circ+h)-x_\circ}{h(\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ})}=\lim_{h\to\circ}\frac{۱}{\sqrt{x_\circ+h}+\sqrt{x_\circ}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x_\circ}}$$

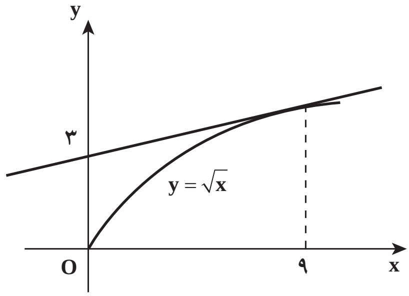
سال گذشته دیدیم که $f'(x_\circ)$ نشان‌دهنده ضریب زاویه (شیب) خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ است. بنابراین معادله خط مماس بر نمودار f در نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ عبارت است از :

$$y-f(x_\circ)=f'(x_\circ)(x-x_\circ)$$

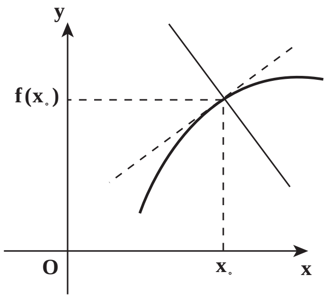
مثال : معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را در نقطه $(۹,۳)$ بنویسید.

حل : داریم $f'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۶}$ پس معادله خط مماس عبارت است از :

$$y-۳=\frac{۱}{۶}(x-۹)$$



اگر خطی نمودار تابعی مانند f را به گونه‌ای قطع کند که بر خط مماس بر نمودار f در آن نقطه عمود شود، گوییم خط بر نمودار تابع در آن نقطه عمود است.



اگر این نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ باشد، ضریب زاویه خط مماس $f'(x_\circ)$ است، پس ضریب زاویه خط عمود، در حالت $f'(x_\circ)\neq ۰$ برابر $-\frac{۱}{f'(x_\circ)}$ است. پس معادله خط عمود بر نمودار تابع f در نقطه $(x_\circ,f(x_\circ))$ عبارت است از :

$$y-f(x_\circ)=-\frac{۱}{f'(x_\circ)}(x-x_\circ)$$

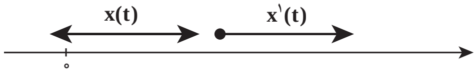
در حالتی که $f'(x_\circ)=۰$ ، خط مماس بر نمودار f افقی است و عمود بر آن موازی محور yها است و معادله آن $x=x_\circ$ خواهد بود.

مثال : معادله خط عمود بر نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در نقطه $(۲,\frac{۱}{۲})$ بنویسید.

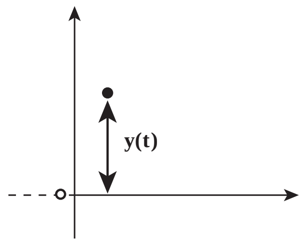
حل : داریم $y'=\frac{-۱}{x^۲}$ ، پس $y'(۲)=\frac{-۱}{۴}$ و ضریب زاویه خط عمود ۴ خواهد بود.

$$y-۲=۴(x-\frac{۱}{۲})$$

سال گذشته دیدیم که اگر متحرکی روی محور xها در حال حرکت باشد و در هر لحظه t در مکان x(t) قرار داشته باشد، مشتق x(t) در هر لحظه نسبت تغییرات مکان به تغییرات زمان را می‌سنجد که در فیزیک آن را سرعت متحرک می‌نامند. پس سرعت این متحرک در لحظه $t_\circ$ برابر است با $x'(t_\circ)$.



مثال : سیبی را در لحظه $t=۰$ از زمین رو به بالا پرتاب می‌کنیم. معادله حرکت آن به صورت $y(t)=-۵t^{۲}+۳۰t$ است، که y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. این حرکت چند ثانیه طول می‌کشد و سرعت حرکت سیب در لحظه آخر چقدر است؟



حل : داریم $y(۰)=۰$ و $y(۶)=۰$، یعنی سیب در لحظات $t=۰$ و $t=۶$ در سطح زمین است در لحظه $t=۰$ از سطح زمین رو به بالا حرکت کرده است و در لحظه $t=۶$ مجدداً به زمین برگشته است. سرعت حرکت سیب در لحظه آخر $y'(۶)$ است.

$$y'(t)=-۱۰t+۳۰ \Rightarrow y'(۶)=-۶۰+۳۰=-۳۰$$

یعنی سیب با سرعت سی متر بر ثانیه به زمین برخورد می‌کند.

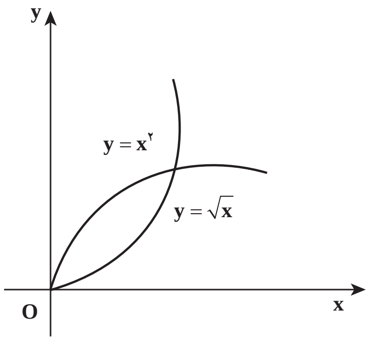
در مثال بالا دیدیم که مقدار مشتق منفی شده است، منفی شدن مقدار مشتق چه معنایی دارد؟

در مثال قبل اگر سرعت حرکت سیب را در لحظه $t=۰$ حساب کنیم داریم $y'(۰)=۳۰$ و در این لحظه مقدار مشتق مثبت است، اما در لحظه آخر مقدار مشتق منفی است. تفاوت این دو لحظه در آن است که در لحظه $t=۰$ سیب رو به بالا حرکت می‌کند و مقدارهای $y(t)$ در حال افزایش هستند، اما در لحظه $t=۶$، سیب رو به پایین حرکت می‌کند و مقدارهای $y(t)$ رو به کاهش هستند. علامت مشتق نشان‌دهنده آن است که تابع در اطراف آن نقطه در حال افزایش است یا کاهش.

اگر تابع f در یک بازه حول $x_۰$ صعودی باشد، کسر $\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$ نامنفی است و حد آن نیز نامنفی خواهد بود، یعنی $f'(x_۰)\geq ۰$. اما اگر تابع f در یک بازه حول $x_۰$ نزولی باشد این کسر نامثبت است و حد آن نیز نامثبت خواهد بود، یعنی $f'(x_۰)\leq ۰$.

بنابراین علامت مشتق تابع نشانگر وضعیت تابع از لحاظ صعودی بودن یا نزولی‌بودن است.

اندازه مشتق نیز نشان می‌دهد شدت صعود یا نزول تابع چقدر است. برای مثال توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲$ هر دو روی بازه $(۰,\infty)$ صعودی هستند و مشتق آن‌ها مثبت است.



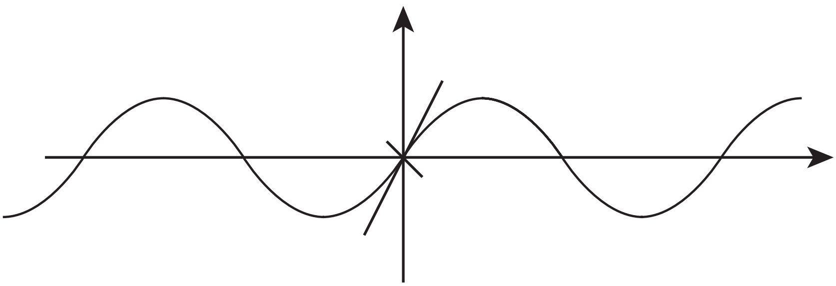
اما سرعت صعود $f(x)$ مدام در حال کاهش است ولی سرعت صعود $g(x)$ مدام در حال افزایش است. این مطلب در مشتق آن‌ها دیده می‌شود، داریم $f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$ و $g'(x)=۲x$.

با افزایش x، مقدار $f'(x)$ در حال کاهش ولی مقدار $g'(x)$ در حال افزایش است.

بنابراین اندازه مشتق نشان می‌دهد که مقادیر تابع با چه سرعتی در حال صعود یا نزول هستند.

مثال : سرعت صعود تابع $y=\sin x$ در چه نقطه‌ای از همه بیشتر است؟

حل : باید ببینیم بیشترین مقدار y' در کجاست. داریم $y'=\cos x$ و این تابع در $x=۰$ مقدار ۱ را دارد که بیشترین مقدار $\cos x$ است. پس در $x=۰$، تابع $y=\sin x$ بیشترین سرعت افزایش را دارد. البته در نقاط به صورت $x=۲k\pi$ نیز همین وضعیت برقرار است.



تمرین

۱ــ متحرّکی روی یک خط افقی حرکت می‌کند که قانون حرکت آن $s=\frac{۱}{۳}t^۳-۳t^۲+۸t+۱۰$

است، در چه بازه زمانی متحرّک در جهت مثبت خطّ، حرکت می‌کند؟ در کدام بازه زمانی متحرّک در جهت منفی خطّ حرکت می‌کند؟ در کدام لحظه‌ها متحرّک تغییر جهت می‌دهد؟

۲ــ توپی را با سرعت اوّلیه ۷۸/۴ متر در ثانیه به‌طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، مطلوب است محاسبهٔ

الف) سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه

ب) سرعت لحظه‌ای در پایان ۴ ثانیه

ج) مدت زمان لازم برای رسیدن توپ به بالاترین نقطه

د) ارتفاعی که توپ بالا خواهد رفت

هـ) مدتی که طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد.

و) سرعت لحظه‌ای توپ وقتی که به زمین می‌رسد.

۳ــ منحنی به معادله $y=x^۲$ مفروض است. نقطه‌ای واقع بر این منحنی به دست آورید که خط قائم بر منحنی در آن نقطه از نقطه $A(۳۵,۲۲)$ بگذرد.

۴ــ دو منحنی به معادلات $y=x^۲+\frac{۱}{۲}a^۲$ و $y=\frac{۱}{۲}x^۲+ax$ مفروضند که در آن a یک عدد ثابت است. ثابت کنید که این دو منحنی در نقطه $A(a,\frac{۳}{۲}a^۲)$ دارای خط مماس مشترک می‌باشند. اصطلاحاً می‌گویند این دو منحنی در نقطه $A(a,\frac{۳}{۲}a^۲)$ بر هم مماس هستند.

مشتق‌های یک‌طرفه : در محاسبه مشتق یک تابع f در نقطه $x_۰$ باید حد زیر را حساب کنیم.

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$$

اگر در محاسبه این حد، ابتدا حدهای چپ و راست را حساب کنیم، حدهای به‌دست‌آمده را مشتق‌های چپ و راست f در $x_۰$ می‌نامند. مشتق‌های چپ و راست f در $x_۰$ را به شکل زیر نشان می‌دهند.

$$f'_+(x_۰)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$$

$$f'_-(x_۰)=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(x_۰+h)-f(x_۰)}{h}$$

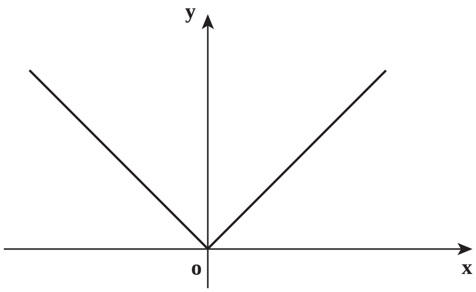
در محاسبه مشتق‌های چپ و راست ممکن است به حالاتی برخورد کنیم که مشتق‌های چپ و راست مساوی نباشند که در این حالت گوییم تابع مشتق‌پذیر نیست. در این حالت وضعیت نمودار تابع در سمت راست و چپ نقطه متفاوت است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|x|$ را در $x=0$ حساب کنید.

حل :

$$f'_{+}(0)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{h}{h}=1$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{-h}{h}=-1$$



نمودار این تابع نیز نشان می‌دهد که در نقطه $x=0$ در سمت چپ، نمودار تابع به‌صورت خط $y=-x$ است و مماس بر آن دارای ضریب زاویه ۱− است ولی درسمت راست صفر نمودار تابع به‌صورت $y=x$ است و ضریب زاویه خط مماس ۱+ است.

مثال : مشتق‌های چپ و راست تابع $f(x)=|\sin x|$ را در $x=0$ بررسی کنید.

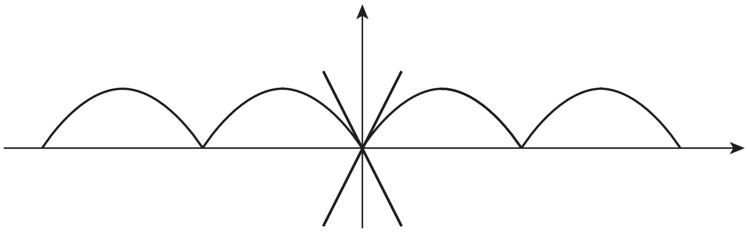
حل : برای xهای مثبت در بازه $[0,\frac{\pi}{2})$ مقدار $\sin x$ نامنفی است و روی این بازه $f(x)=\sin x$ پس مشتق راست f در صفر همان مشتق راست $\sin x$ در صفر است. البته $\sin x$ در صفر مشتق‌پذیر است و مشتق راست آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_{+}(0)=\cos 0=1$$

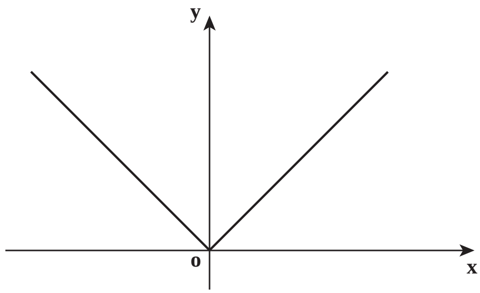
برای xهای منفی در بازه $(-\frac{\pi}{2},0]$ ، مقادیر $\sin x$ منفی است و تابع $f(x)$ روی این بازه به‌صورت $f(x)=-\sin x$ است. پس مشتق چپ f در صفر همان مشتق چپ $-\sin x$ در صفر است. اما $-\sin x$ تابعی مشتق‌پذیر است و مشتق چپ آن همان مشتق آن است. پس

$$f'_{-}(0)=-\cos 0=-1$$

پس تابع $f(x)=|\sin x|$ در صفر مشتق‌پذیر نیست و نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که مماس بر نمودار در سمت چپ و راست تابع با هم فرق دارند.



مشتق‌پذیری یک تابع خاصیتی قویتر از پیوستگی است. تابعی که در یک نقطه مشتق‌پذیر است، حتماً در آن نقطه پیوسته است. اما یک تابع می‌تواند در یک نقطه پیوسته باشد اما در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. مثلاً تابع $y=|x|$ در $x=0$ پیوسته است. اما در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.



فرض کنید تابع f در اطراف نقطه x_0 تعریف شده باشد و در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، برای اثبات آن که f در x_0 پیوسته است باید ثابت کنیم $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ ، این شرط معادل با آن است که $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ (چرا؟)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times(x-x_0)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\times\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\\ &= f'(x_0)\times 0=0\end{aligned}$$

قضایای مشتق توابع

برای محاسبه مشتق توابع باید حد یک کسر را حساب کنیم و اگر تابع پیچیده باشد، محاسبه حد آن کسر مشکل خواهد شد. قضایایی در محاسبه مشتق توابع وجود دارد که کار محاسبه مشتق را آسانتر می‌کند. مثلاً سال گذشته دیدیم که برای دو تابع f و g که در اطراف نقطه‌ای مانند x_0 تعریف

شده‌اند و در نقطه $x_\circ$ مشتق‌پذیرند، تابع f+g نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$(f+g)'(x_\circ)=f'(x_\circ)+g'(x_\circ)$$

درستی این قضیه به سادگی با محاسبه به‌دست می‌آید :

$$\begin{aligned}(f+g)'(x_\circ)&=\lim_{h\to\circ}\frac{(f+g)(x_\circ+h)-(f+g)(x_\circ)}{h}\\&=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)+g(x_\circ+h)-f(x_\circ)-g(x_\circ)}{h}\\&=\lim_{h\to\circ}\frac{(f(x_\circ+h)-f(x_\circ)+(g(x_\circ+h)-g(x_\circ))}{h}\\&=\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}+\lim_{h\to\circ}\frac{g(x_\circ+h)-g(x_\circ)}{h}=f'(x_\circ)+g'(x_\circ)\end{aligned}$$

برای توابع $f-g$, $f.g$, $\frac{f}{g}(g(x_\circ)\neq\circ)$ نیز مشتق‌پذیری در $x_\circ$ برقرار است و داریم :

$$(f-g)'(x_\circ)=f'(x_\circ)-g'(x_\circ)$$

$$(f.g)'(x_\circ)=f'(x_\circ)g(x_\circ)+f(x_\circ)g'(x_\circ)$$

$$(\frac{f}{g})'(x_\circ)=\frac{f'(x_\circ)g(x_\circ)-f(x_\circ)g'(x_\circ)}{g(x_\circ)۲}$$

همچنین سال گذشته دیدیم برای ترکیب دو تابع f و g داریم :

$$f(g(x))'=f'(g(x))g'(x)$$

اگر u(x) تابع مشتق‌پذیری باشد، مشتقات زیر برقرارند.

$$(u(x)^n)'=nu(x)^{n-۱}u'(x)$$

$$(\sqrt{u(x)})'=\frac{u'(x)}{۲\sqrt{u(x)}}\qquad(\circ<u(x))$$

$$(\sin(u(x)))'=\cos u(x).u'(x)$$

$$(\frac{۱}{u(x)})'=\frac{-u'(x)}{u(x)^۲}$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ را حساب کنید.

حل : اگر قرار دهیم $g(x)=x^۲+۱$ و $h(x)=\sqrt{x}$ داریم $f(x)=h(g(x))$. پس

$$f'(x)=h'(g(x)).g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{g(x)}}.g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sin^4 x$ را حساب کنید.

حل : اگر قرار دهیم $g(x)=\sin x$, $h(x)=x^4$ داریم $f(x)=h(g(x))$. پس

$$f'(x)=h'(g(x)).g'(x)=4(g(x))^3.g'(x)=4\sin^3 x\cos x$$

مثال : مشتق تابع $f(x)=\sin x^4$ را حساب کنید.

حل : اگر توابع g و h مانند مثال پیش باشند داریم $f(x)=g(h(x))$. پس

$$f'(x)=g'(h(x)).h'(x)=\cos h(x).h'(x)=\cos x^4.4x^3$$

مسائل

۱ــ مشتق تابع $y=x^3$ را از طریق تعریف در نقطه دلخواه $x=a$ حساب کنید.

۲ــ معادله خط مماس بر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ را در نقطه به طول $x=1$ را بنویسید. معادله خط عمود بر نمودار این تابع را درنقطه به طول $x=-1$ بنویسید.

۳ــ آیا می‌توان خطی از نقطه $(3,0)$ گذراند که بر سهمی $y=x^2$ عمود شود؟ چند خط با این ویژگی وجود دارد؟

۴ــ ماشینی با سرعت ثابت در حال حرکت است و ناگهان ترمز می‌کند تا بایستد. معادله حرکت این ماشین روی محوری که بر خیابان منطبق است به صورت $x(t)=-\frac{t^2}{2}+30t$ است. t زمان برحسب ثانیه است که از لحظه شروع ترمز اندازه‌گیری شده است و $x(t)$ برحسب متر است.

الف) ماشین پس از طی چند متر می‌ایستد؟

ب) ماشین پس از ترمزکردن چند ثانیه طول می‌کشد که بایستد؟

ج) سرعت ماشین در لحظه ترمزکردن چقدر بوده است؟

د) پس از چند ثانیه سرعت ماشین به ۲ متر بر ثانیه می‌رسد؟

۵ــ منحنی نمودار تابع $y=\sin x$ با چه زاویه‌هایی محور xها را قطع می‌کند؟ (زاویه خط مماس بر نمودار تابع با محور xها)

۶ــ ثابت کنید خط‌های $y=2$ و $y=-2$ بر نمودار تابع $y=x+\frac{1}{x}$ مماس هستند.

۷ــ تابع $y=x^3-x^2-x$ را در نظر بگیرید.

الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) این تابع در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند و با چه زاویه‌ای محور xها را قطع می‌کند؟

ج) بیشترین سرعت نزول تابع در چه نقطه‌ای رخ می‌دهد و مقدار سرعت نزول در این نقطه چقدر است؟

د) در چه نقاطی سرعت صعود تابع ۷ است؟

۸ــ برای هر عدد ثابت c و تابع مشتق‌پذیر f. با استفاده از تعریف مشتق ثابت کنید :

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$

۹ــ برای سه تابع مشتق‌پذیر h,g,f ثابت کنید :

$$(f+g+h)'(x) = f'(x)+g'(x)+h'(x)$$

$$(f.g.h)'(x) = f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$$

۱۰ــ با استفاده از مشتق حاصل‌ضرب توابع، مشتق توابع $y=x^۲$ و $y=x^۳$ را حساب کنید. برای مشتق تابع $y=x^n$ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را برای $y=x^۴$ و $y=x^۵$ ثابت کنید.

۱۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=\sin(۱+x^۲)$ ب) $y=\sin^۲(x+۱)$

ج) $y=\sqrt{\dfrac{\sin x}{۱+\cos x}}$ د) $y=\sin(\sin x)$

۱۲ــ فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases} -۳x+۵ & \text{اگر } x\le ۲ \\ x^۲-۲x-۱ & \text{اگر } x>۲ \end{cases}$ مطلوب است محاسبهٔ $f'_-(۲)$ و $f'_+(۲)$، آیا این تابع در $x=۲$ مشتق‌پذیر است؟

۱۳ــ فرض می‌کنیم $f(x)=\begin{cases} ۲x+۵ & \text{اگر } x\le ۳ \\ ۳x+۲ & \text{اگر } x>۳ \end{cases}$ مطلوب است محاسبهٔ $f'_-(۳)$ و $f'_+(۳)$، آیا این تابع در $x=۳$ مشتق‌پذیر است؟

۱۴ــ تابع $y=\begin{cases} ax^۲+bx+۱, & x\ge ۲ \\ x^۳, & x<۲ \end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در نقطه $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد اعداد ثابت a و b را به‌دست آورید.

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

در فصل قبل با عدد نپر آشنا شدیم. عدد نپر را که با e نشان دادیم حد دنباله $(۱+\frac{۱}{n})^n$ می‌باشد.

$$\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n = e$$

این عدد خصوصیت‌های قابل توجهی دارد که باعث می‌شود در ریاضیات به آن توجه شود.

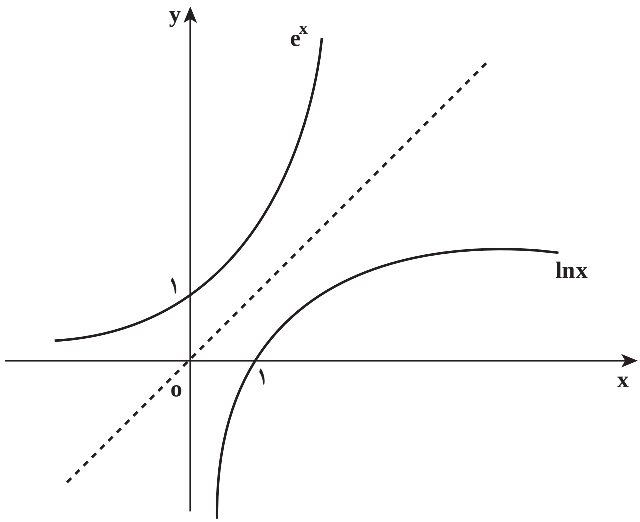
در حدگیری بالا اگر به جای عدد طبیعی n، متغیر حقیقی x ($x\in(۰,\infty)$) نیز به‌کار برده شود، تساوی همچنان برقرار است، یعنی $\lim_{x\to\infty}(۱+\frac{۱}{x})^x = e$. با درنظرگیری $x=\frac{۱}{t}$ شرط بزرگ‌شدن x، معادل آن است که t به صفر نزدیک شود، پس :

$$\lim_{t\to ۰}(۱+t)^{\frac{۱}{t}} = e$$

لگاریتم بر پایه عدد نپر را با ln نشان می‌دهند و آن را لگاریتم طبیعی می‌نامند.

$$\ln a=b \Leftrightarrow e^b=a$$

توابع نمایی و لگاریتمی همگی توابعی پیوسته‌اند. از آن‌جا که e>۱، توابع e^x (با دامنه R) و lnx(با دامنه. $(۰,\infty)$) صعودی و پیوسته می‌باشند.



از آنجا که lnx تابعی پیوسته است از $\lim\limits_{x\to ۰}(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=e$ می‌توان نتیجه گرفت

$$\lim_{x\to ۰}\ln(۱+x)^{\frac{۱}{x}}=\ln e=۱$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\ln(۱+x)}{x}=۱$$

تساوی بالا نشان می‌دهد تابع lnx در x=۱ مشتق‌پذیر است و مشتق آن در x=۱ برابر ۱ است. زیرا

$$\ln'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+h)-\ln ۱}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+h)}{h}=۱$$

در سایر نقاط $x\in(۰,\infty)$ نیز تابع lnx مشتق‌پذیر است و $(\ln x)'=\frac{۱}{x}$ زیرا

$$(\ln x)'=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+\frac{h}{x})}{h}\times\frac{x}{x}=\lim_{h\to ۰}\frac{\ln(۱+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\times\frac{۱}{x}$$

$$=\lim_{k\to ۰}\frac{\ln(۱+k)}{k}\times\frac{۱}{x}=\frac{۱}{x}\qquad (k=\frac{h}{x})$$

از آن‌جا که e^x وارون تابع lnx است مشتق آن به شکل زیر به‌دست می‌آید.

$$\ln(e^x)=x\Rightarrow \ln'(e^x).(e^x)'=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{e^x}.(e^x)'=۱\Rightarrow(e^x)'=e^x$$

بنابراین e^x تابعی است که مشتق آن با خودش مساوی است. این از ویژگی‌های برجسته عدد نپر است و برای سایر اعداد این ویژگی برقرار نیست.

حال، برای عدد مثبت دلخواه a می‌توانیم مشتق تابع نمایی $y=a^x$ را حساب کنیم. ابتدا مشاهده می‌کنیم lny=xlna، بنابراین

$$y=e^{\ln y}= e^{x\ln a}$$

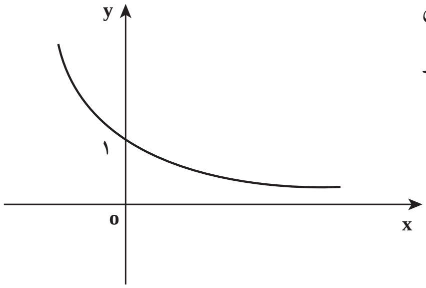
با استفاده از قاعده مشتق تابع مرکب،اگر قرار دهیم $u(x)=x\ln a$ داریم

$$y=e^{u(x)}\Rightarrow y'=e^{u(x)}.u'(x)=y.\ln a=a^x.\ln a$$

بنابراین

$$(a^x)'=a^x.\ln a$$

دیده می‌شود که فقط به ازای $a=e$ مشتق a^x برابر خودش می‌شود.



اگر $۰<a<۱$، مشتق a^x منفی است و این تابع نزولی است که قبلاً مشاهده کرده بودیم. در این حالت نمودار تابع $y=a^x$ به شکل مقابل است.

مثال : تابع $\ln|x|$ روی $IR-\{۰\}$ قابل تعریف است. این تابع مشتق‌پذیر است و

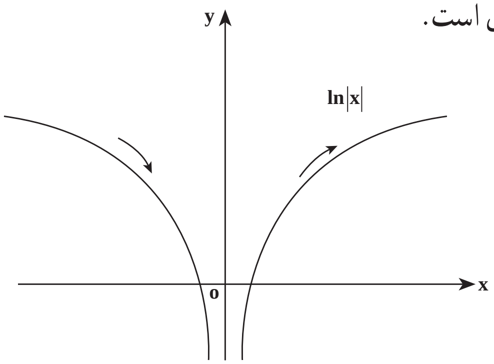
$$(\ln|x|)'=\frac{۱}{x}$$

برای مقادیر مثبت x درستی تساوی را دیده‌ایم و برای مقادیر منفی x داریم

$$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\ln'(-x)\times(-x)'$$

$$=\frac{۱}{-x}\times(-۱)=\frac{۱}{x}$$

مشتق این تابع در xهای منفی، منفی است و تابع در اعداد منفی نزولی است و مشتق این تابع در xهای مثبت، مثبت و تابع در اعداد مثبت صعودی است.



اگر $u(x)$ تابع مشتق پذیری باشد که همواره ناصفر است می‌توانیم تابع $\ln|u(x)|$ را تشکیل دهیم که تابعی مشتق‌پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

همچنین اگر $u(x)$ تابع مشتق‌پذیر دلخواهی باشد، می‌توانیم تابع $e^{u(x)}$ را تشکیل دهیم که تابعی مشتق‌پذیر است. طبق قاعده مشتق تابع مرکب داریم

$$(e^{u(x)})'=e^{u(x)}.u'(x)$$

یکی از جاهایی که توابع نمایی رخ می‌دهند در رشد یا زوال کمیت‌ها است. برای مثال افزایش جمعیت انسان‌ها به‌گونه‌ای است که هر ساله با ضریب ثابتی از جمعیت سال قبل به جمعیت اضافه می‌شود. این ضریب را نرخ رشد جمعیت می‌نامند. اگر این ضریب را با k نشان دهیم و جمعیت در سال nام را با y_n نشان دهیم، داریم

$$y_{n+۱}=y_n+ky_n$$

اگر n را به صورت یک متغیر پیوسته از زمان در نظر بگیریم و به جای سال بعد یک لحظه جلوتر به اندازه h واحد را درنظر بگیریم می‌توانیم بنویسیم

$$y(x+h) \approx y(x)+h(ky(x))$$

یعنی

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} \approx ky(x)$$

این رابطه نشان می‌دهد که در حد وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، داریم

$$y'(x)=ky(x)$$

یعنی مشتق y مضربی از خود y است. این ویژگی فقط در توابع نمایی برقرار است و باید داشته باشیم $y(x)=Ae^{Bx}$. از آن‌جا که $y'(x)=Ae^{Bx}\times B$ باید $B=k$ ، A نیز $y(۰)$ است و میزان جمعیت در لحظه ابتدایی است، پس

$$y(x)=Ae^{kx}$$

اگر k مثبت باشد این تابع صعودی است ولی k می‌تواند منفی هم باشد که نشان‌دهنده زوال یا کاهش y است. در مواردی مانند فروپاشی هسته‌های رادیواکتیو، میزان رادیواکتیو بودن مواد در حال کاهش است و مقدار k منفی خواهد بود.

مسائل

۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y=e^{۲x}+e^{-x}+۲$ ب) $y = xe^{x^{۲}-۱}$

ج) $y=\ln(۱+\cos^{۲}x)$ د) $y=\sin x e^{\cos x}$

۲ــ تابع $y=xe^{x}$ را در نظر بگیرید که روی IR تعریف شده است.

الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) نمودار این تابع در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

ج) زاویه برخورد نمودار تابع با محور xها چقدر است؟

د) نمودار این تابع چه شکلی می‌تواند باشد؟

۳ــ توابع زیر در چه نقاطی تعریف شده‌اند و مشتق آن‌ها در این نقاط چیست؟

الف) $\ln(\sin x)$ ب) $\ln|\cos x|$

ج) $\ln(x^{۲}-x)$ د) $\ln(|\ln x|)$

۴ــ هر ماده رادیواکتیو نیمه عمری دارد که با T نشان می‌دهیم. اگر $f(t)$ مقدار ماده رادیواکتیو در زمان t باشد، نیمه عمر T به معنای آن است که پس از گذشت T واحد زمانی مقدار ماده رادیواکتیو نصف می‌شود، یعنی برای هر t داریم

$$f(t+T)=\frac{۱}{۲}f(t)$$

تابع $f(t)$ به‌صورت $f(t)=Ae^{kt}$ است که A مقدار ماده رادیواکتیو در لحظه ابتدایی $t=۰$ است. مقدار k را بر حسب T تعیین کنید.

۵ــ برای یک عدد حقیقی b تابع $y(x)=x^{b}$ را در نظر بگیرید و با نوشتن آن به‌صورت $y(x)=e^{b\ln x}$ ثابت کنید.

$$(x^{b})'=bx^{b-۱}$$

مشتق ضمنی : اگر معادله‌ای بر حسب دو متغیر x و y داشته باشیم، ممکن است بتوان از آن معادله y را برحسب x حل کرد و یک تابع برحسب x به‌دست آورد.

مثال : در معادله $۲x-۳y=۱$ می‌توانیم y را برحسب x حل کنیم که نتیجه می‌شود

$$y=\frac{۱}{۳}(۱-۲x)$$

در اینجا گوییم معادله $2x+3y=1$ به‌طور ضمنی تابع $y=\frac{1}{3}(1-2x)$ را تعریف کرده است.

مثال : در معادله $2x^2+3y^2=1$ می‌توانیم y را برحسب xحل کنیم، ولی فقط یک جواب به دست نمی‌آید و حداقل دو جواب به شکل زیر قابل محاسبه است.

$$y=\pm\sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$$

هر کدام از این جواب‌ها توابعی هستند که به‌طور ضمنی توسط معادله $2x^2+3y^2=1$ تعریف شده‌اند.

توابعی که به‌طور ضمنی توسط یک معادله تعریف می‌شوند، را توابع ضمنی می‌نامند. گاهی اوقات محاسبه صریح تابع ضمنی امکان‌ناپذیر است،اگر چه می‌دانیم چنین تابعی وجود دارد. اگر معادله تعریف کننده تابع ضمنی نسبت به متغیرهای x و y مشتق‌پذیری داشته باشد، تابع ضمنی نیز مشتق‌پذیر می‌شود و می‌توانیم مشتق آن را به‌طور ضمنی حساب کنیم.

مثال : فرض $y(x)$ تابعی باشد که به‌طور ضمنی توسط معادله $2x^2+3y^2=1$ تعریف شده است، یعنی $2x^2+3y(x)^2=1$ طرفین توابع مشتق‌پذیری از x هستند و طرف دوم تابع ثابت است. با مشتق‌گیری از طرفین نتیجه می‌شود.

$$4x+6y(x)y'(x)=0$$

$$\Rightarrow y'(x)=-\frac{2x}{3y(x)}$$

در این مثال خاص می‌دانیم $y(x)=\sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$ یا $y(x)=-\sqrt{\frac{1}{3}(1-2x^2)}$

اگر مشتق y را مستقیماً نیز حساب کنیم می‌بینیم تساوی $y'(x)=-\frac{2x}{3y(x)}$ برقرار است.

در این مثال دیده می‌شود که برای محاسبه $y'(x)$ تقسیم بر $y(x)$ پیش می‌آید و لازم است $y(x)$ ناصفر باشد بنابراین مشتق‌پذیری تابع ضمنی این مثال فقط در جاهایی است که $y(x)$ ناصفر باشد. فرمول صریح $y(x)$ نیز نشان می‌دهد که این تابع در xهایی که $y(x)$ صفر است مشتق‌پذیری ندارد.

مثال : در معادله $x^2+xy+y^2=3$ ، $x=1$ و $y=1$ یک جواب آن است و این معادله تعریف کننده یک تابع ضمنی $y(x)$ است به‌گونه‌ای که $y(1)=1$. مشتق این تابع را در $x=1$ بیابید.

حل : داریم $x^{۲}+xy(x)+y(x)^{۲}=۳$، با مشتق‌گیری نسبت به x داریم

$$۲x+y(x)+xy'(x)+۲y(x)y'(x)=۰$$

$$\Rightarrow y'(x)=-\frac{۲x+y(x)}{x+۲y(x)}$$

$$\Rightarrow y'(۱)=-\frac{۲\times۱+y(۱)}{۱+۲y(۱)}=-\frac{۲+۱}{۱+۲}=-۱$$

مثال : معادله $xsiny+x+y=۰$ دارای یک جواب $x=\pi$ و $y=-\pi$ است. و این معادله یک تابع ضمنی $y=f(x)$ تعریف می‌کند که $f(\pi)=-\pi$. $f'(\pi)$ را حساب کنید.

حل : داریم $xsinf(x)+x+f(x)=۰$ با مشتق‌گیری داریم

$$sinf(x)+xcosf(x).f'(x)+۱+f'(x)=۰$$

$$\Rightarrow f'(x)=-\frac{۱+\sin f(x)}{x\cos f(x)+۱}$$

$$\Rightarrow f'(\pi)=-\frac{۱+\sin f(\pi)}{\pi\cos f(\pi)+۱}=\frac{۱+\sin(-\pi)}{\pi\cos(-\pi)+۱}$$

$$=\frac{۱}{۱-\pi}$$

مسائل

۱ــ نشان دهید که نقطه $A(1,1)$ روی نمودار معادله $x^4+y^4+x^2y^2-3=0$ قرار دارد. اگر $y(x)$ تابعی باشد که توسط این معادله تعریف شده است و $y(1)=1$، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه A بنویسید.

۲ــ در تمرین‌های زیر با استفاده از مشتق‌گیری ضمنی مشتق y نسبت به x را محاسبه کنید.

الف) $x\sin y+y\cos x=1$

ب) $y=\cos(x-y)$

ج) $x^2y^2=x^2+y^2$

۳ــ معادله خطّ مماس بر منحنی به معادلهٔ $x^4+y^4+x^2y^2-3=0$ در نقطهٔ $A(1,1)$ را به‌دست آورید.

۴ــ معادله خطّ مماس بر منحنی به معادلهٔ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$ در نقطهٔ $A(4,4)$ را به‌دست آورید.

۵ــ در چه نقطه‌ای از منحنی به معادلهٔ $x+\sqrt{xy}+y=1$ خطّ مماس بر منحنی موازی با محور xها است؟

۶ــ اگر $8y^2-2xy^3=-16$ آهنگ تغییر لحظه‌ای y نسبت به x در نقطهٔ $A(3,2)$ را به‌دست آورید.