

با تشکیل جدول تغییرات تابع نشان دهید که وقتی x که به سمت $+\infty$ برود، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ می‌رود.

مثال ۲: تابع همانی $f(x)=x$ را در نظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ متناظر با x های از لحاظ قدر مطلق بزرگ مثبت و منفی محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	$-\infty$	$\leftarrow \dots -100000 -10000 -1000 -100 \circ 100 1000 10000 \dots \rightarrow$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\leftarrow \dots -100000 -10000 -1000 -100 \circ 100 1000 10000 \dots \rightarrow$	$+\infty$

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $-\infty$ می‌رود، $f(x)$ نیز به سمت $-\infty$ می‌رود و هنگامی که x به سمت $+\infty$ می‌رود، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x) = \pm\infty$$

به‌طور خلاصه می‌توان نوشت:

مثال ۳: تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ متناظر با مقادیر از لحاظ قدر مطلق بزرگ x را محاسبه کرده و در جدولی می‌نویسیم:

x	$-\infty$	$\leftarrow \dots -100000 -10000 -1000 -100 \circ 100 1000 10000 \dots \rightarrow$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\leftarrow \dots 10^{10}+1 10^8+1 10^6+1 10^4+1 10^2+1 10^0+1 \dots \rightarrow$	$+\infty$

این جدول نشان می‌دهد که:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 1) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x^2 + 1) = +\infty$$

به‌صورت خلاصه:

نکته ۱: دیدیم که $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (x) = \pm\infty$. با توجه به حد توان n ام یک تابع، حد تابع $f(x) = x^n$ (عدد صحیح مثبت) در $+\infty$ و $-\infty$ به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

اگر $n = 2k$ آن‌گاه،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$$

اگر $n = 2k + 1$ آن گاه،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$$

یعنی حد تابع $f(x) = x^n$ در $\pm\infty$ حالتی که n عددی زوج باشد برابر $+\infty$ است، و هنگامی که n عددی فرد باشد، $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$. در این حالت به طور خلاصه می نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^n = \pm\infty$$

مثال ۱: حد $f(x) = x^2$ در $\pm\infty$ برابر است با $+\infty$

مثال ۲: حد $f(x) = x^3$ در $\pm\infty$ برابر است با $\pm\infty$ یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

نکته ۲: اگر $a \neq 0$ عددی حقیقی باشد حد $f(x) = ax^n$ (n عدد صحیح مثبت) را در $\pm\infty$

با توجه به علامت a می توانیم به دست آوریم.

مثال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = 2(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^2) = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 = 2(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = -2(-\infty) = +\infty$$

قضایای حد مجموع و حاصلضرب و تقسیم توابع برای حدهای در $\pm\infty$ که مقدار حد اعداد

باشند، نیز برقرار است. اما این قضایا را نباید در مورد توابعی که حد $\pm\infty$ دارند به کار برد. زیرا توابع

با حدهای $\pm\infty$ ، اصولاً جزو توابعی که دارای حد باشند محسوب نمی شوند.

حد چند جمله ای ها در $\pm\infty$: چند جمله ای $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ را در نظر می گیریم.

می خواهیم حد آن را در $\pm\infty$ محاسبه کنیم. برای این کار $f(x)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 5x^2 + 4x - 1 = 2x^3 \left(1 + \frac{5x^2}{2x^3} + \frac{4x}{2x^3} - \frac{1}{2x^3}\right) \\ &= 2x^3 \left(1 + \frac{5}{2x} + \frac{4}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right) \end{aligned}$$

پس:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 + 5x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^3 \left(1 + \frac{5}{2x} + \frac{4}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3) \times \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{5}{2x} + \frac{4}{2x^2} - \frac{1}{2x^3}\right)$$

حد مجموع جمله‌های داخل پراتز دوم در $\pm\infty$ برابر با ۱ است پس :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3 + 5x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3) \times 1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^3) = \pm\infty$$

به‌طور کلی حد هر چند جمله‌ای به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1$ (n عدد صحیح

مثبت) در $\pm\infty$ ، مساوی حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (ax^n + bx^{n-1} + \dots + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^n$$

مثال ۱: حد چند جمله‌ای $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ در $\pm\infty$ برابر است با حد $(2x^2)$ در $\pm\infty$ ،

یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^2 + 3x - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x^2) = +\infty$$

مثال ۲: حد تابع $f(x) = -3x^2 + 4x + 5$ در $\pm\infty$ برابر است با حد $(-3x^2)$ در $\pm\infty$ ، یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3x^2 + 4x + 5) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-3x^2) = -\infty$$

مثال ۳: حد تابع $f(x) = 3x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1$ در $\pm\infty$ برابر است با حد $(3x^5)$

در $\pm\infty$ ، پس داریم :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^5 - 2x^4 + x^3 + 2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (3x^5) = \pm\infty$$

مثال ۴: حد تابع $f(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ در $\pm\infty$ چنین است :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x^3 + 5x^2 + 4x - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x^3) = \pm\infty$$

حد تابع $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + 1}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + 1}$ در $\pm\infty$ (m و n اعداد صحیح

مثبت): چون حد هر چند جمله‌ای در $\pm\infty$ ، برابر حد جمله بزرگ‌ترین درجه آن می‌باشد، پس می‌توان

نوشت :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m + bx^{m-1} + \dots + 1}{a'x^n + b'x^{n-1} + \dots + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^m}{a'x^n} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a'} x^{m-n} \right)$$

بنابراین یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید :

حالت اول $m > n$

$$m > n \Rightarrow m - n > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a'} x^{m-n} \right) = \pm\infty$$

یعنی: وقتی درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر بیش تر است، حد کسر در $\pm\infty$ ، برابر ∞

است و علامت آن بستگی به علامت $\frac{a}{a'}$ و زوج یا فرد بودن $m-n$ دارد.

مثال: با به کار بردن روش بالا حد کسرهای زیر را به دست می آوریم.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۲x^۳ + x^۲ - x + ۱}{۵x^۲ - x + ۶} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۲x^۳}{۵x^۲} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{۲}{۵}x\right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{۲}{۵}x\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{۲}{۵}x\right) = -\infty \quad \text{زیرا}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-۲x^۲ + x - ۱}{۴x + ۳} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-۲x^۲}{۴x}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{۱}{۲}x\right) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{۱}{۲}x\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{۱}{۲}x\right) = +\infty \quad \text{زیرا}$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۴x^۳ + ۲x - ۱}{۲x + ۵} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{۴x^۳}{۲x}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (۲x^۲) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (۲x^۲) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (۲x^۲) = +\infty \quad \text{زیرا}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۳x^۴ - ۲x^۲ + ۵}{-۲x^۲ + x - ۱} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{۳x^۴}{-۲x^۲}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{۳}{۲}x^۲\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{۳}{۲}x^۲\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{۳}{۲}x^۲\right) = -\infty \quad \text{زیرا}$$

حالت دوم $m=n$

$$m = n \Rightarrow m - n = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a'}x^{m-n}\right) = \frac{a}{a'}$$

یعنی وقتی درجه صورت و درجه مخرج کسر برابرند، حد کسر در $\pm\infty$ برابر است با:

ضریب بزرگ ترین درجه صورت

ضریب بزرگ ترین درجه مخرج

مثال:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{۶x - ۱}{۲x + ۳} = \frac{۶}{۲} = ۳$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-۲x^۲ + x - ۱}{x^۲ + ۷x + ۲} = \frac{-۲}{۱} = -۲$$

$$۳) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n^3 + 6n - 2}{2n^3 - 6n + 4} = \frac{5}{2}$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^n - x^2 + 5}{-2x^n + 3x - 4} = \frac{6}{-2} = -3$$

حالت سوم $m < n$

$$m < n \Rightarrow m - n < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a'} x^{m-n} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{a' x^{n-m}} \right) = 0$$

یعنی وقتی درجه صورت کسر از درجه مخرج کسر کم تر است، حد کسر در $\pm\infty$ مساوی صفر

است.

مثال:

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x + 4} = 0$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x + 5}{3x^2 + x + 2} = 0$$

$$۳) \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{2n^2 + n - 1}{n^3 + n^2 - 5} = 0$$

نکته: در برخی حالت ها که تابع $f(x)$ کسری است، اما صورت کسر، یا مخرج آن، یا هیچ کدام چند جمله ای نیستند، باز هم می توان با فاکتورگیری از جمله هایی از صورت و مخرج که دارای بزرگ ترین درجه هستند، حد تابع را به دست آورد. به مثال های زیر توجه کنید.

$$۱) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 2}{2x^2 + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{2 + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 + \sqrt{0 + 0}} = \frac{1}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + \sqrt{x+1}}{6x + \sqrt{4x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-3 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(6 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^2}} \right)} = \frac{-3 + \sqrt{0 + 0}}{6 + \sqrt{4 - 0}} = \frac{-3 + 0}{6 + 2} = \frac{-3}{8}$$

تمرین

حد هریک از تابع‌های زیر را در $\pm\infty$ ، تعیین کنید. در دو تمرین آخر فقط حد در ∞ را به دست

آورید.

$$۱) y = \frac{-1}{3}x + 4$$

$$۲) y = \frac{2}{V}x + 1$$

$$۳) y = 3x^2 - x + 2$$

$$۴) y = -2x^2 - x + 3$$

$$۵) y = x^3 + 2x^2 - 1$$

$$۶) y = -x^3 + 3x - 2$$

$$۷) y = -(2x-1)^3$$

$$۸) y = 3x^4 + 5x^2 - 1$$

$$۹) y = -x^4 + x^2 + 2$$

$$۱۰) y = x^5 - 3x^3 + x - 1$$

$$۱۱) y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$۱۲) y = \frac{-3x+2}{x}$$

$$۱۳) y = \frac{-x^2+2}{3x^2+5x+1}$$

$$۱۴) y = \frac{4x^3-x^2+1}{-2x^3+x-2}$$

$$۱۵) y = \frac{12x^n - x^2 + 1}{6x^n + x^3 + 2} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 3)$$

$$۱۶) y = \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^3 + 7x - 2}$$

$$۱۷) y = \frac{x-5}{2x^2+x-1}$$

$$۱۸) y = \frac{3x^n - 7x + 2}{2x^{n+1} + 6x^n - 1} \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

$$۱۹) y = \frac{2x+1}{3}$$

$$۲۰) y = \frac{6x^2+x-2}{3x-5}$$

$$۲۱) y = \frac{-3x^2+6x-1}{2x-7}$$

$$۲۲) y = \frac{2x^3+x-2}{x+3}$$

$$۲۳) y = \frac{3x^4+x^2-1}{-x^2+5}$$

$$۲۴) y = \frac{-3x^2+\sqrt{x+2}}{x^2+5x-1}$$

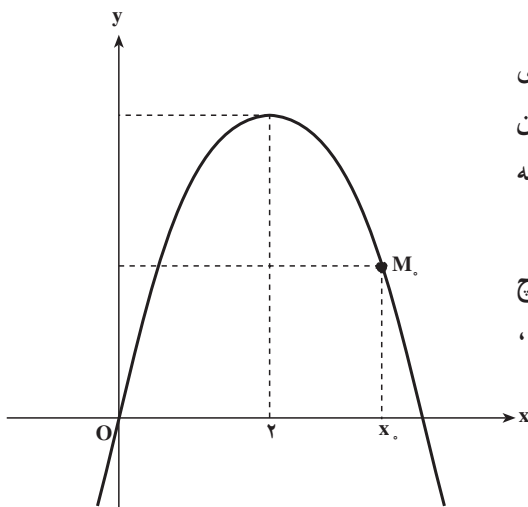
$$۲۵) y = \frac{2x+1}{x^2+\sqrt{x+2}}$$

پیوستگی

پیوستگی در یک نقطه: تابع $f(x) = -x^2 + 4x$ و نمودار آن را که یک سهمی است در نظر

می‌گیریم. این تابع برای همه اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f = \mathbb{R}$. بنابراین برای هر

$x_0 \in \mathbb{R}$ نقطه $M_0(x_0, f(x_0))$ نقطه‌ای از سهمی است. اما همان‌طوری که می‌دانیم سهمی در هیچ



نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر سهمی یک منحنی یک تکه یا پیوسته است. به این علت تابع $f(x) = -x^2 + 4x$ را نیز پیوسته می‌گویند.

به طور کلی اگر نمودار تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنه تعریفش بریدگی نداشته باشد، تابع f را پیوسته می‌نامند.

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً در $x = 1$ ، به دست می‌آوریم. داریم:

$$f(1) = -(1)^2 + 4(1) = -1 + 4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (-x^2 + 4x) = -1 + 4 = 3$$

به طوری که دیده می‌شود، در این مثال که f تابعی پیوسته است، مقدار تابع و حد آن در نقطه $x = 1$ با یکدیگر برابرند، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 3$$

این ویژگی در هر نقطه دیگر نیز برقرار است. یعنی به طور کلی برای هر عدد حقیقی دلخواه x_0 داریم:

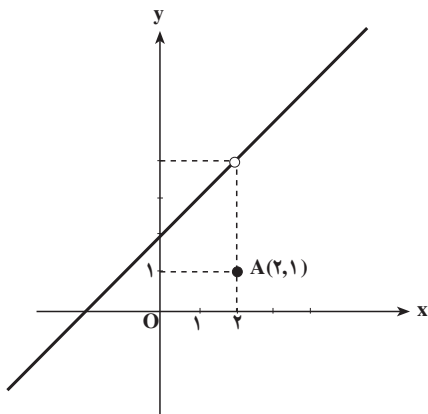
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (-x^2 + 4x) = -x_0^2 + 4x_0.$$

اینک به عنوان مثالی دیگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. دامنه تعریف این تابع مجموعه اعداد حقیقی، یعنی $D_f = \mathbb{R}$ است. برای هر $x \neq 2$ داریم $x - 2 \neq 0$ و می‌توان نوشت:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , x \neq 2 \\ 1 & , x = 2 \end{cases}$$

پس:

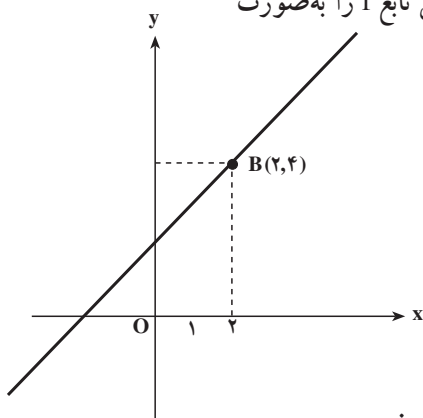


نمودار این تابع را رسم می‌کنیم. این نمودار اجتماع نقطه $A(2, 1)$ و یک خط است که تنها در نقطه $x=2$ بریدگی دارد (مطابق شکل). زیرا نقطه $A(2, 1)$ روی این خط نیست و نقطه $B(2, 4)$ نیز به نمودار تابع تعلق ندارد. بدین جهت گفته می‌شود که این تابع در $x=2$ پیوسته نیست (این تابع در سایر نقاط پیوسته می‌باشد).
اما در نقطه $x=2$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4 \neq f(2) = 1$$

یعنی حد تابع در $x=2$ با مقدار تابع در $x=2$ برابر نیست.

اگر در تابع بالا، $f(2)$ را مساوی ۴ بگیریم، یعنی تابع f را به صورت



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$$

تعریف کنیم نقطه $B(2, 4)$ روی نمودار تابع قرار می‌گیرد و در نتیجه نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی نخواهد داشت و در این صورت تابع در همه نقاط تعریفش پیوسته است.

از آنچه که گذشت به تعریف زیر رهنمون می‌شویم:

تعریف: تابع f که در بازه I تعریف شده است در نقطه x_0 از دامنه آن را پیوسته گویند، هرگاه:

۱- تابع در $x = x_0$ حد داشته باشد.

۲- حد تابع در $x = x_0$ با مقدار تابع در x_0 برابر باشد یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

بنابراین هرگاه تابعی که روی یک بازه تعریف شده است و در یک نقطه از دامنه آن، دست کم

یکی از دو شرط بالا را نداشته باشد در آن نقطه ناپیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x \geq -1 \\ x^2 + 1, & x < -1 \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را

در نقطه $x = -1$ بررسی کنیم.

این تابع در $x = -1$ تعریف شده است و داریم :

$$f(-1) = -(-1)^2 + 2(-1) = -3$$

اما تابع $f(x)$ در $x = -1$ دارای حد نیست زیرا :

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 2x) = -(-1)^2 + 2(-1) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -3 \neq 2 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

یعنی

در نتیجه این تابع در $x = -1$ پیوسته نیست.

مثال ۲: تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ داده شده است. می‌خواهیم پیوستگی این تابع را در نقطه $x = 2$ بررسی کنیم.

این تابع در $x = 2$ تعریف شده است زیرا $f(2) = 3$ است، و در $x = 2$ تابع دارای حد است و مقدار این حد برابر است با :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + 1) = 9$$

به‌طوری که دیده می‌شود مقدار تابع در $x = 2$ یعنی $f(2) = 3$ با حد تابع در این نقطه برابر نیست ($3 \neq 9$). بنابراین تابع بالا در نقطه $x = 2$ پیوسته نیست.

مثال ۳: می‌خواهیم پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x - 1, & x \geq -2 \\ -4x + 1, & x < -2 \end{cases}$ را در نقطه $x = -2$ بررسی کنیم.

$$1- \text{تابع در } x = -2 \text{ تعریف شده است و داریم } f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) - 1 = 9$$

$$2- \text{در } x = -2 \text{ تابع دارای حد است چون :}$$

$$\text{حد راست} = l_1 = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 3x - 1) = (-2)^2 - 3(-2) - 1 = 9$$

$$\text{حد چپ} = l_2 = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (-4x + 1) = -4(-2) + 1 = 9$$

$$\Rightarrow l_1 = l_2 = 9 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 9$$

۳- حد تابع در $x = -2$ با مقدار تابع در $x = -2$ برابر است.

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 9$$

بنابراین تابع بالا در نقطه $x = -2$ پیوسته می‌باشد.

مثال ۴: پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ که دامنه آن $[-1, 1]$ است را در نقاط ۱ و -۱ بررسی می‌کنیم. ۱ و -۱ در دامنه تعریف تابع هستند و داریم $f(1) = f(-1) = 0$. حد تابع در این نقاط نیز همان حد چپ یا راست در این نقاط است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{1-x^2} = 0$$

بنابراین حد این تابع در این نقاط با مقدار تابع در این نقاط برابر است و تابع در این نقاط پیوسته است. البته این تابع در سایر نقاط دامنه خود نیز پیوسته است.

مثال ۵: تابع $f(x) = \begin{cases} ax+3, & x \neq 1 \quad (a \neq 0) \\ 5, & x = 1 \end{cases}$ مفروض است. مقدار a را طوری تعیین کنید که این تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد. تابع در $x=1$ تعریف شده است و

$$f(1) = 5$$

همچنین در $x=1$ تابع دارای حد است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (ax+3) = a+3$$

حال برای آن که تابع در $x=1$ پیوسته باشد باید داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow a+3=5 \Rightarrow a=2$$

مثال ۶: تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2+2, & x > -1 \quad (a \neq 0) \\ 3, & x = -1 \\ -3x+b, & x < -1 \end{cases}$ داده شده است. a و b را چنان بیابید

که تابع در $x=-1$ پیوسته باشد.

داریم:

$$f(-1) = 3$$

$$\text{حد راست} = l_1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (ax^2+2) = a(-1)^2+2 = a+2$$

$$\text{حد چپ} = l_2 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-3x+b) = -3(-1)+b = 3+b$$

برای این که تابع دارای حد باشد باید $l_1 = l_2$ یعنی:

$$a+2 = 3+b \Rightarrow a-b=1 \quad (1)$$