

۱۹. به کمک تمرین قبل $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{60^\circ}$ را محاسبه کنید.

۲.۴ دترمینان‌ها

در سال دوم دیده‌ایم که می‌توانیم به یک ماتریس 2×2 مانند $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک عدد وابسته

کنیم که به آن دترمینان ماتریس A می‌گفتند و با $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ نمایش می‌دادند و به صورت

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

تعریف می‌شد. اکنون در این بخش می‌خواهیم مفهوم دترمینان را برای ماتریس 3×3 تعریف کنیم. در زیر تعاریفی می‌آوریم و به کمک آنها این مفهوم را شرح می‌دهیم.

تعریف. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت i - امین کهاد

ماتریس A را که با M_{ij} نمایش می‌دهیم ماتریسی 2×2 تعریف می‌کنیم که از حذف سطر i ام و ستون j ام ماتریس A به دست می‌آید.

مثال ۱. برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ ، داریم $M_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ و

$$M_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

تعریف. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت i - امین همسازه

ماتریس A را که با A_{ij} نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|,$$

که در آن $|M_{ij}|$ دترمینان ماتریس 2×2 ی M_{ij} است.

مثال ۲. برای ماتریس مثال قبل، داریم:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} |M_{13}| = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -6,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} |M_{32}| = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -10.$$

قضیه ۱. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ماتریسی دلخواه باشد. در این صورت اعداد

$$(1) \quad a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$(2) \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$(3) \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$(4) \quad a_{11}A_{21} + a_{21}A_{11} + a_{31}A_{31}$$

$$(5) \quad a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$(6) \quad a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

همگی با هم مساوی هستند.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{انبات. برابری دو عدد ظاهر شده در ۱ و ۲ را برای ماتریس}$$

بررسی می کنیم.

$$1 = \text{عدد ظاهر شده در ۱} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\
&\quad a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{21}[-(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})] + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{12}a_{31}) + \\
&\quad a_{23}[-(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})] \\
&= a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \\
&\quad a_{23}(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\
&= 2 \text{ عدد ظاهر شده در } 2.
\end{aligned}$$

درستی این که تمامی اعداد ظاهر شده در قضیه با هم برابرند، محاسباتی مشابه محاسبات بالا

دارد. ■

تعریف. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ماتریسی دلخواه باشد. دترمینان A را که

با $|A|$ یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ نمایش می‌دهیم، یکی از ۶ عدد مساوی معرفی شده در قضیه ۱ تعریف

می‌کنیم.

تذکر. اگر $|A|$ را از عدد معرفی شده در ۱ محاسبه کنیم، می‌گوییم $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر اول حساب کرده‌ایم. اگر مثلاً از عدد معرفی شده در ۶ محاسبه کنیم می‌گوییم $|A|$ را با بسط دادن نسبت به ستون سوم حساب کرده‌ایم و الی آخر.

مثال ۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر

دوم پیدا می‌کنیم :

$$\begin{aligned} |A| &= 4A_{11} + 2A_{22} + 3A_{33} \\ &= 4(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -4(16) + 2(14) - 3(11) = -69. \end{aligned}$$

اگر $|A|$ را با بسط دادن نسبت به ستون سوم محاسبه می‌کردیم نیز، نتیجه بالا به دست می‌آمد :

$$\begin{aligned} |A| &= 2A_{13} + 3A_{23} + 4A_{33} \\ &= 2(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 4(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2(10) - 3(11) + 4(-14) = -69. \end{aligned}$$

مثال ۴. می‌خواهیم $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ را محاسبه کنیم. در اینجا به خاطر وجود دو صفر در سطر

اول، به صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به سطر اول محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

مثال ۵. می‌خواهیم $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ را محاسبه کنیم. در اینجا نیز به خاطر وجود دو صفر

در ستون اول، به صرفه است که مقدار دترمینان را با بسط نسبت به ستون اول محاسبه کنیم :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} b & c \\ 0 & f \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} b & c \\ d & e \end{vmatrix} = adf.$$

تذکره. از مثال قبل درمی‌یابیم که برای ماتریس‌های 3×3 که بالا مثلثی هستند، دترمینان برابر

است با حاصلضرب درآیه‌های روی قطر اصلی آن ماتریس. دترمینان ماتریس‌های 3×3 که پایین مثلثی و یا قطری هستند نیز چنین می‌باشد.

قضیه ۲. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ و $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ دو ماتریس دلخواه باشند. در این صورت $|AB| = |A||B|$.

اثبات. بررسی درستی این قضیه به کمک محاسبه، سرراست ولی طاقت‌فرسا می‌باشد که آن را به صورت یک تمرین رها می‌کنیم. ■

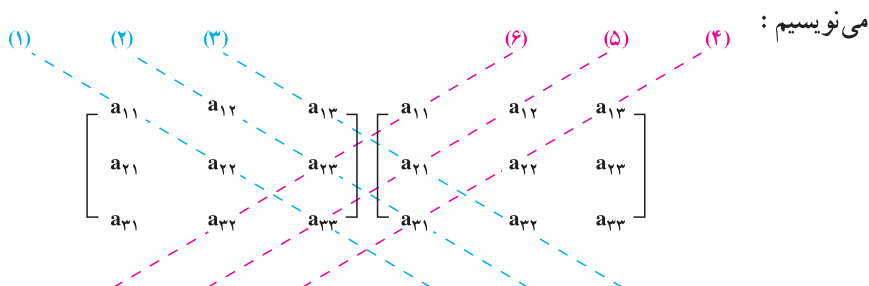
نتیجه. فرض کنیم $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ ماتریسی دلخواه باشد و n یک عدد طبیعی. در این صورت $|A^n| = |A|^n$.

اثبات. بنابر قضیه ۲، $|A^2| = |AA| = |A||A| = |A|^2$ ، $|A^3| = |A^2A| = |A^2||A| = |A|^2|A| = |A|^3$ و لذا به کمک استقرا به سادگی به دست می‌آید $|A^n| = |A|^n$. ■

دستور ساروس برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3

در زیر روشی را جهت محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 که منسوب به ساروس است ارائه

می‌کنیم. ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. این ماتریس را ۲ بار کنار هم



به خطوط ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ و درآیه‌های روی آنها توجه کنید. درآیه‌های روی خط ۱ را در هم ضرب می‌کنیم. این کار را برای درآیه‌های روی خط ۲ و خط ۳ نیز انجام می‌دهیم و سپس سه عدد به دست آمده را با هم جمع می‌کنیم. گیریم حاصلجمع این سه عدد p باشد. اکنون همین عمل را برای خطوط ۴، ۵ و ۶ تکرار می‌کنیم. اگر q عددی باشد که در این مرحله به وجود می‌آید، آنگاه به راحتی دیده می‌شود که $p - q$ با ۶ عدد مساوی معرفی شده در قضیه ۱ برابر است و لذا $|A| = p - q$. این روش محاسبه دترمینان ماتریس‌های 3×3 به روش ساروس معروف است. آنچه در بالا گفتیم را در فرمول زیر خلاصه می‌کنیم:

$$|A| = \underbrace{(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})}_p - \underbrace{(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})}_q.$$

حاصلضرب	حاصلضرب	حاصلضرب	حاصلضرب	حاصلضرب	حاصلضرب
درآیه‌های روی	درآیه‌های روی	درآیه‌های روی	درآیه‌های روی	درآیه‌های روی	درآیه‌های روی
خط ۱	خط ۲	خط ۳	خط ۴	خط ۵	خط ۶

مثال ۶. ماتریس معرفی شده در مثال ۳ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم به روش ساروس مقدار دترمینان آن را محاسبه کنیم:

$$|A| = (24 - 15 + 16) - (-4 + 80 + 18) = 25 - 94 = -69.$$

ویژگی‌های دترمینان ماتریس‌های 3×3

در زیر بعضی از ویژگی‌های مهم دترمینان ماتریس‌های 3×3 را بیان خواهیم کرد. کلیه این ویژگی‌ها را در مورد سطرها مطرح و سپس ثابت می‌کنیم. این ویژگی‌ها در مورد ستون‌ها نیز برقرار است و اثبات در حالت ستونی مشابه اثبات در حالت سطری است.

ویژگی ۱ دترمینان. اگر کلیه درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی 3×3 مانند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

را در عدد حقیقی λ ضرب کنیم و یک ماتریس جدید به دست آوریم،

آنگاه دترمینان ماتریس جدید، λ برابر دترمینان ماتریس A است.

برای بررسی درستی ویژگی ۱، گیریم B ماتریس 3×3 جدید به دست آمده از ضرب یک سطر ماتریس A (مثلاً سطر i ام آن) در عدد ثابت λ باشد. با بسط دترمینان B نسبت به سطر i ام به دست می آوریم

$$\begin{aligned} |B| &= \lambda a_{i1} B_{i1} + \lambda a_{i2} B_{i2} + \lambda a_{i3} B_{i3} \\ &= \lambda (a_{i1} B_{i1} + a_{i2} B_{i2} + a_{i3} B_{i3}). \end{aligned}$$

اما چون سطرهای A و B ، بجز احتمالاً سطر i ام، یکسان هستند، لذا به وضوح $A_{i1} = B_{i1}$ ، $A_{i2} = B_{i2}$ و $A_{i3} = B_{i3}$ در نتیجه

$$\begin{aligned} |B| &= \lambda (a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + a_{i3} A_{i3}) \\ &= \lambda |A|, \end{aligned}$$

که درستی این ویژگی را نتیجه می دهد.

مثال ۷. بنابر ویژگی ۱ می توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

نتیجه. برای ماتریس 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ و عدد ثابت λ ،

$$|\lambda A| = \lambda^3 |A|.$$

اشارات. کافی است سه بار از ویژگی ۱ استفاده کنیم:

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda^3 |A|. \quad \blacksquare$$

ویژگی ۲ دترمینان. اگر کلیه درآیه‌های یک سطر (ستون) ماتریسی 3×3 مانند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ برابر صفر باشند، آنگاه } |A| = 0.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۲، گیریم کلیه درآیه‌های یک سطر ماتریس A (مثلاً سطر i ام آن) برابر صفر باشد. با بسط دترمینان A نسبت به سطر i ام به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} \\ &= 0 \cdot A_{i1} + 0 \cdot A_{i2} + 0 \cdot A_{i3} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{مثال ۸. بنابر ویژگی ۲ می‌توانیم بنویسیم } \begin{vmatrix} 88 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

ویژگی ۳ دترمینان. اگر در ماتریسی 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ جای دو

سطر (دو ستون) را عوض کنیم تا ماتریس جدیدی به دست آوریم، آنگاه دترمینان ماتریس جدید، قرینه دترمینان ماتریس A است.

برای بررسی درستی ویژگی ۳، ابتدا فرض می‌کنیم جای دو سطر متوالی مثلاً سطر اول و دوم را عوض کرده‌ایم:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

حال دترمینان A را با بسط نسبت به سطر اول و دترمینان B را با بسط نسبت به سطر دوم پیدا می‌کنیم

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

$$|B| = a_{11}B_{11} + a_{12}B_{12} + a_{13}B_{13}.$$

ولی برای $j=1,2,3$ داریم $A_{1j} = (-1)^{1+j}|M_{1j}|$ که در آن M_{1j} ماتریس حاصل از حذف

سطر اول و ستون j ام ماتریس A است و $B_{1j} = (-1)^{2+j}|\overline{M}_{1j}|$ که در آن \overline{M}_{1j} ماتریس حاصل از

حذف سطر دوم و ستون j ام ماتریس B است. اما توجه می‌کنیم که $\overline{M}_{1j} = M_{1j}$ و لذا

$$B_{1j} = (-1)^{2+j}|\overline{M}_{1j}| = -(-1)^{1+j}|M_{1j}| = -A_{1j}.$$

پس

$$|B| = a_{11}(-A_{11}) + a_{12}(-A_{12}) + a_{13}(-A_{13})$$

$$= -(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13})$$

$$= -|A|.$$

تعویض سطر دوم و سوم نیز وضعیتی مشابه دارد. ولی اگر بخواهیم سطر اول و سوم را جابه‌جا

کنیم ابتدا سطر اول و دوم را جابه‌جا کرده، سپس سطر دوم و سوم و بالاخره سطر اول و دوم را

جابه‌جا می‌کنیم که مجدداً مقدار دترمینان در $-1 = (-1)(-1)(-1)$ ضرب می‌شود و لذا در هر حال

دترمینان ماتریس جدید، قرینه دترمینان ماتریس A است.

$$\text{مثال ۹. بنابر ویژگی ۳ داریم} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ویژگی ۴ دترمینان. اگر ماتریسی } 3 \times 3 \text{ مانند}$$

(دو ستون) یکسان باشد، آنگاه $|A| = 0$.

برای بررسی درستی ویژگی ۴، گیریم سطر i_1 ام و i_2 ام ماتریس A یکسان باشند. اگر جای سطر

i_1 ام و سطر i_2 ام را با هم تعویض کنیم، آنگاه به خاطر یکسان بودن این دو سطر ماتریس حاصل همان

A است. پس بنابر ویژگی ۳، $|A| = -|A|$ ، یا $2|A| = 0$ ، یا $|A| = 0$.

$$\text{مثال } ۱۰. \text{ بنابر ویژگی } ۴ \text{ داریم } \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۵ \\ ۶ & ۷ & ۱ \\ ۲ & ۳ & ۵ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۱ & ۷ \\ ۸ & ۳ & ۸ \\ ۹ & ۴ & ۹ \end{vmatrix} = ۰$$

$$\text{ویژگی } ۵ \text{ دترمینان. اگر در ماتریسی } ۳ \times ۳ \text{ مانند } A = \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

یک سطر (ستون) مضربی از یک سطر (ستون) دیگر باشد، آنگاه $|A| = ۰$.

برای بررسی درستی ویژگی ۵، گیریم سطر $i_۱$ ام ماتریس A ، λ برابر سطر $i_۲$ ام آن باشد. بنابر ویژگی ۱ می‌توانیم بنویسیم $|A| = \lambda |B|$ که در آن B ماتریسی است که سطر $i_۱$ ام و سطر $i_۲$ ام آن یکسان است. اما ویژگی ۴ نتیجه می‌دهد که $|B| = ۰$ و لذا $|A| = \lambda \times ۰ = ۰$.

$$\text{مثال } ۱۱. \text{ بنابر ویژگی } ۵ \text{ داریم } \begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۶ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۴ & ۱۴ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۷ & ۱۴ & ۱ \\ ۷ & ۱۴ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۱ \end{vmatrix} = ۰$$

ویژگی ۶ دترمینان. فرض کنیم A یک ماتریس ۳×۳ بوده که سطر i ام آن به صورت

$$b_{i1} + c_{i1} \quad b_{i2} + c_{i2} \quad b_{i3} + c_{i3}$$

باشد. اگر B و C را ماتریس‌های ۳×۳ بگیریم که سطرهاى آن، بجز احتمالاً سطر i ام، با سطرهاى A یکی است و سطر i ام B

$$b_{i1} \quad b_{i2} \quad b_{i3}$$

و سطر i ام C

$$c_{i1} \quad c_{i2} \quad c_{i3}$$

است، آنگاه

$$|A| = |B| + |C|.$$

برای بررسی درستی ویژگی ۶، $|A|$ را با بسط دادن نسبت به سطر i ام محاسبه می‌کنیم:

$$|A| = (b_{i1} + c_{i1})A_{i1} + (b_{i2} + c_{i2})A_{i2} + (b_{i3} + c_{i3})A_{i3} \\ = (b_{i1}A_{i1} + b_{i2}A_{i2} + b_{i3}A_{i3}) + (c_{i1}A_{i1} + c_{i2}A_{i2} + c_{i3}A_{i3}).$$

اما چون سطرهای A ، B و C ، بجز احتمالاً سطر i ام، همگی یکسان هستند، لذا به وضوح

$$A_{i3} = B_{i3} = C_{i3} \text{ و } A_{i2} = B_{i2} = C_{i2}, A_{i1} = B_{i1} = C_{i1}$$

$$|A| = (b_{i1}B_{i1} + b_{i2}B_{i2} + b_{i3}B_{i3}) + (c_{i1}C_{i1} + c_{i2}C_{i2} + c_{i3}C_{i3}) \\ = |B| + |C|.$$

تذکره. مشابه ویژگی ۶ برای ستون‌ها نیز برقرار است.

مثال ۱۲. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4+1 & 1+2 & 2+1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix},$$

همچنین

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5+1 \\ 5 & 3 & 1+2 \\ 4 & 2 & 4+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

ویژگی ۷ درمیانان. اگر در ماتریسی 3×3 مانند $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ حاصلضرب

درآیه‌های یک سطر (ستون) در یک عدد ثابت را به سطر (ستون) دیگر بیافزاییم تا ماتریس جدید حاصل شود، آنگاه درمیانان ماتریس جدید برابر است با درمیانان ماتریس A .

برای بررسی درستی ویژگی ۷، گیریم سطر i ام ماتریس A

$$a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3}$$

و سطر i_2 ام آن

$$a_{i_2,1} \quad a_{i_2,2} \quad a_{i_2,3}$$

باشد. ماتریس B یک ماتریس 3×3 است که تمام سطرهایش، بجز احتمالاً سطر i_2 ام آن، با سطرهای A یکسان است و سطر i_2 ام آن به صورت زیر است:

$$a_{i_2,1} + \lambda a_{i_1,1} \quad a_{i_2,2} + \lambda a_{i_1,2} \quad a_{i_2,3} + \lambda a_{i_1,3}$$

اگر ثابت کنیم $|B| = |A|$ ، درواقع ویژگی ۷ را ثابت کرده ایم.

اکنون C و D را ماتریس‌هایی 3×3 می‌گیریم که تمام سطرهایشان، بجز احتمالاً سطر i_2 ام،

با سطرهای B و در نتیجه با سطرهای A یکسان است. سطر i_2 ام C را

$$a_{i_2,1} \quad a_{i_2,2} \quad a_{i_2,3}$$

می‌گیریم و سطر i_2 ام D را

$$\lambda a_{i_1,1} \quad \lambda a_{i_1,2} \quad \lambda a_{i_1,3}$$

فرض می‌کنیم. بنابر ویژگی ۶ می‌توانیم بنویسیم $|B| = |C| + |D|$.

اما دقت می‌کنیم که تمام سطرهای C با A یکی است، حتی سطر i_2 ام آن. لذا C همان A

است، پس $|C| = |A|$. از طرفی سطر i_2 ام D ، λ برابر سطر i_1 ام آن است. پس بنابر ویژگی ۵،

$$|D| = 0 \quad \text{و} \quad |B| = |A| + 0 = |A|$$

مثال ۱۳. بنابر ویژگی ۷ داریم

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+6 & 2+8 & 5+12 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 10 & 17 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 1+2 & 0 \end{vmatrix}.$$

مثال ۱۴. در مثال‌های ۳ و ۶ به دو روش دترمینان $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ را محاسبه کردیم: روش

بسط‌دادن و روش ساروس. اکنون می‌خواهیم به کمک ویژگی ۷ مقدار این دترمینان را محاسبه کنیم.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 - \frac{4}{3}(3) & 2 - \frac{4}{3}(5) & 3 - \frac{4}{3}(2) \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 + \frac{1}{3}(3) & 2 + \frac{1}{3}(5) & 4 + \frac{1}{3}(2) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 5 - \frac{11}{14}(2) & 2 \\ 0 & -\frac{14}{3} - \frac{11}{14}(\frac{1}{3}) & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{11}{3} - \frac{11}{14}(\frac{14}{3}) & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & \frac{48}{14} & 2 \\ 0 & \frac{-207}{42} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$$

$$= 3(\frac{-207}{42})(\frac{14}{3}) = -69.$$

ویژگی ۸ دترمینان. برای هر ماتریس 3×3 مانند

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad |A^t| = |A|$$

برای بررسی درستی ویژگی ۸ توجه می‌کنیم که اگر

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ آنگاه}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ و لذا از بسط دترمینان } A^t \text{ نسبت به سطر اول به دست می‌آوریم}$$

$$\begin{aligned} |A^t| &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= |A|. \end{aligned}$$

مثال ۱۵. بنابر ویژگی ۸ داریم

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$



۱. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}$ مقدار $|A|$ را با بسط دادن نسبت به هریک از سطرها

و ستون‌ها پیدا کنید. همچنین $|A|$ را به کمک روش ساروس محاسبه کنید.
۲. به کمک بسط دادن یا روش ساروس مقدار دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \end{vmatrix}$ ،

$$\text{ب) } \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\text{ج) } \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

۳. قضیهٔ ۲ را ثابت کنید.

۴. بدون بسط دادن و روش ساروس و تنها به کمک ویژگی‌های دترمینان، مقدار هریک از دترمینان‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\text{ب) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{الف) } \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\text{د) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{ج) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{و) } \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$\text{ه) } \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

۵. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها ثابت کنید

$$\text{الف) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(z-y)$$

$$\text{ب) } \begin{vmatrix} 1+x & y & z \\ x & 1+y & z \\ x & y & 1+z \end{vmatrix} = 1+x+y+z$$

$$ج) \begin{vmatrix} 1 & 2x & yz \\ 1 & y & 2xz \\ 1 & z & 2xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2x & 4x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$$

$$د) \begin{vmatrix} 1 & 1+x & x^2(y+z) \\ 1 & 1+y & y^2(x+z) \\ 1 & 1+z & z^2(x+y) \end{vmatrix} = 0$$

$$ه) \begin{vmatrix} yz & x^2 & x^2 \\ y^2 & xz & y^2 \\ z^2 & z^2 & xy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} yz & xy & xz \\ xy & xz & yz \\ xz & yz & xy \end{vmatrix}$$

$$و) \begin{vmatrix} x+y+2z & x & y \\ z & 2x+y+z & y \\ z & x & x+2y+z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3$$

۶. با در نظر گرفتن $A = \begin{bmatrix} y & z & 0 \\ x & 0 & z \\ 0 & x & y \end{bmatrix}$ و محاسبه AA^t ، مقدار دترمینان زیر را محاسبه کنید

$$\begin{vmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{vmatrix}$$

۷. فرض کنید بتوان یک ماتریس 3×3 مانند A را به صورت حاصلضرب یک ماتریس 3×2 در یک ماتریس 2×3 نوشت. ثابت کنید $|A| = 0$.

۸. فرض کنید λ و μ دو عدد حقیقی باشند. به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها، مقدار دترمینان ماتریس $A = [\lambda i + \mu j]_{3 \times 3}$ را محاسبه کنید.

۹. فرض کنید $a = (a_1, a_2, a_3)$ ، $b = (b_1, b_2, b_3)$ و $c = (c_1, c_2, c_3)$ بردارهایی از \mathbb{R}^3

باشند. ثابت کنید $a.(b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ و به کمک ویژگی‌های دترمینان‌ها نتیجه بگیرید که

$a.(b \times c) = b.(c \times a) = c.(a \times b)$. با توجه به این تمرین چه ارتباطی بین هندسه، هندسه تحلیلی و جبر خطی در جلد کتاب مشاهده می‌کنید.

۱۰. اگر $A = (a_1, a_2)$ ، $B = (b_1, b_2)$ و $C = (c_1, c_2)$ رؤوس یک مثلث از صفحه \mathbb{R}^2 باشند، ثابت کنید مساحت مثلث ABC برابر است با قدر مطلق مقدار زیر

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

۱۱. نشان دهید $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$ معادله خطی است که از نقاط (a, b) و (c, d) در \mathbb{R}^2

می‌گذرد.

۱۲. فرض کنید A و B دو ماتریس 3×3 باشند که A متقارن است. ثابت کنید $|A + B| = |A + B^t|$.

۱۳. فرض کنید A یک ماتریس پاد متقارن 3×3 باشد. ثابت کنید $|A| = 0$.

۱۴. مربع واحد، مربعی است با رؤوس به مختصات $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. شکل هندسی F

را مربع واحد در نظر می‌گیریم. اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ که دترمینانی مخالف صفر دارد، روی F اثر کند چه شکلی در صفحه پدید می‌آورد؟ مساحت شکل جدید را محاسبه کنید.