تعریف ۳: فرض کنیم D دامنه تابع f زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $a\in D$، تابع $f: D\to\mathbb{R}$ در نقطهٔ a پیوسته است، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط D مانند $\{a_n\}$ که به a همگراست، دنبالهٔ $\{f(a_n)\}$ به $f(a)$ همگرا باشد.

محتوی این تعریف این است که پیوستگی تابع در یک نقطه هم ارز این است که با دقیق‌تر کردن ورودی، می‌توان به خروجی‌های دلخواه دقیق دست یافت.

به کمک تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه براساس همگرایی دنباله‌ها می‌توان پیوستگی مجموع، حاصل‌ضرب و خارج قسمت دو تابع پیوسته را نتیجه گرفت.

قضیه ۱ : فرض کنیم بازه D اشتراک دامنه تابع‌های f و g باشد و f و g هر دو در نقطه a پیوسته باشند و c عددی ثابت باشد آنگاه تابع‌های زیر نیز در a پیوسته‌اند.

الف) $f+g$ ب) $f-g$ پ) cf ت) $f.g$ ث) $\frac{f}{g}$ به شرطی که $g(a)\neq 0$

برهان: همهٔ حکم‌ها به سادگی از حکم‌های مشابه برای محاسبه حد مجموع و حاصل‌ضرب و خارج قسمت در قضیه (۱) نتیجه می‌شوند.

برای نمونه قسمت (ث) را ثابت می‌کنیم.

به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از نقاط D که همگرا به a است داریم :

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{n\to+\infty} g(x_n)=g(a)$$

بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{f(a)}{g(a)}\,،\; g(a)\neq 0$$

پس طبق تعریف (۳) تابع $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a پیوسته است.

نکته: عکس این قضیه همواره درست نیست.

مثال: تابع‌های $f(x)=\begin{cases}1 & \text{گویا، } x\\ 0 & \text{گنگ، } x\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}0 & \text{گویا، } x\\ 1 & \text{گنگ، } x\end{cases}$ در $x=0$ حد ندارند و بنابراین در $x=0$ پیوسته نیستند. امّا برای هر $x\in R$، $(f.g)(x)=0$

و این تابع ثابت در هر نقطه‌اش، حد آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است، پس در تمام نقاط ازجمله $x=۰$ پیوسته است.

فعالیت

دو تابع مثال بزنید که هر دو در نقطهٔ a ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در a پیوسته باشد.

تابع‌هایی مانند تابع چند جمله‌ای و یا تابع کسری گویا، در هر نقطه از دامنه، حد تابع با مقدار تابع در آن نقطه برابر است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر

قضیه ۲ :

الف) هر چند جمله‌ای همه‌جا پیوسته است یعنی روی $\mathbb{R}=(-\infty , +\infty)$ پیوسته است.

ب) هر تابع گویا در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

برهان:

الف) هر چند جمله‌ای تابعی است به شکل

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \ldots + a_۱ x + a_۰$$

که در آن $a_۰$ و $a_۱$ و ... و $a_{n-۱}$ و a_n عددهایی ثابت‌اند

می‌دانیم

$$\lim_{x \to c} a_۰ = a_۰$$

$$\lim_{x \to c} x^m = c^m \quad ، m=۱,۲,۳, \ldots , n$$

این تساوی به‌معنی آن‌است که تابع $f(x)= x^m$ تابعی است پیوسته در نتیجه بنابر قسمت (پ) قضیه (۱) $g(x)=ax^m$ نیز تابعی است پیوسته. چون $P(x)$ مجموع تابع‌هایی پیوسته نظیر $g(x)=ax^m$ و تابعی ثابت است بنابر قسمت الف قضیه (۱) نتیجه می‌شود تابع چند جمله‌ای در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

ب) هر تابع گویا تابعی است به شکل $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌اند و دامنه f مجموعه $D=\{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq ۰\}$ است.

از طرفی بنابر قسمت الف قضیه (۲)، $P(x)$ و $Q(x)$ در همه‌جا پیوسته‌اند در نتیجه طبق قسمت (ث) قضیه (۱) تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

مثال: تابع $f(x)=\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

حل: دامنهٔ f، مجموعهٔ $D=IR-\{-1, +1\}$، بنابراین طبق قضیه (۱) تابع f به‌جز در نقاطی که مخرج آن صفر می‌شود، همه‌جا پیوسته است در نتیجه تابع روی بازه‌های زیر پیوسته است.

$(-\infty,-1)$ و $(-1,1)$ و $(1,+\infty)$

تمرین در کلاس

تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x+1}+\frac{2}{x-3}$ روی چه بازه‌هایی پیوسته است؟

۲ـ۱۲ـ پیوستگی توابع مثلثاتی

در حدهای مثلثاتی ثابت شده است که

$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$

بنابراین طبق تعریف پیوستگی تابع در نقطهٔ a تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در هر نقطهٔ a

پیوسته‌اند در نتیجه تابع $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ بجز در نقاطی که $\cos x=0$ پیوسته است و تابع $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ بجز در نقاطی که $\sin x=0$ پیوسته است.

توضیح: در نقاطی که $\cos x=0$ که $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in z)$

و در نقاطی که $\sin x=0$ که $x=k\pi$ $(k\in z)$

مثال: فرض کنید $f(x)=\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$، $f(0)$ را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=0$ پیوسته باشد.

حل:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)}$$

وقتی x به صفر میل می‌کند داریم $(1-\cos x)\neq 0$ پس

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(1+\cos x)=1+1=2$$

با انتخاب $f(0)=2$ تابع f در صفر پیوسته می‌شود.

تمرین در کلاس

تابع $f(x)=\dfrac{\tan x}{۱+\sin x}$ در چه نقاطی پیوسته است؟

به این ترتیب با اتکا به قضیه (۱) می‌توان با عملیات جبری از تابع‌های پیوسته داده شده، تابع‌های پیوسته جدیدی ساخت و علاوه بر این، روش دیگر، برای تولید تابع‌های پیوسته، ترکیب تابع‌های پیوسته است.

این کار بنابر قضیه زیر میسر است.

قضیه ۳: اگر تابع f در b پیوسته باشد و $\lim_{x\to a} g(x)=b$ ، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)$$

به عبارت دیگر $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))$

در حقیقت قضیه (۳) بیانگر آن است که وقتی x به a نزدیک شود، g(x) به b نزدیک می‌شود و چون f در b پیوسته است، وقتی g(x) به b میل می‌کند آن وقت $\lim_{x\to a} f(g(x))=f(b)$

همچنین در این قضیه می‌توان نماد حد را به درون نماد تابع بُرد، به شرطی که تابع پیوسته باشد و حد وجود داشته باشد.

به عبارت دیگر در این قضیه تعویض و جابه‌جا کردن نماد «f» با نماد «lim» مجاز است.

مثال: می‌دانیم تابع f(x)=|x| همه‌جا پیوسته است. و $\lim_{x\to a} g(x)=b$ بنابراین طبق قضیه (۳) داریم:

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(b)=|b|$$

از قضیه (۳) نتیجه می‌گیریم که ترکیب دو تابع پیوسته، خود تابعی پیوسته است.

و به بیان دقیق‌تر، اگر تابع g در نقطه a و تابع f در g(a) پیوسته باشد، آنگاه تابع fog در نقطه a پیوسته است.

مثال: نشان دهید تابع $y=\sqrt[۳]{\dfrac{x-۲}{x^۲+x+۱}}$ همه‌جا پیوسته است.

حل: مخرج کسر زیر رادیکال همواره مخالف صفر است $(\Delta=۱-۴<۰)$ بنابراین تابع گویای $g(x)=\frac{x-۲}{x^۲+x+۱}$ همه‌جا پیوسته است.

از طرفی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ همواره پیوسته است $(\lim\limits_{x\to a} f(x)=\sqrt[۳]{a})$

پس ترکیب دو تابع پیوسته f و g یعنی تابع $f(g(x))=\sqrt[۳]{\frac{x-۲}{x^۲+x+۱}}$ همه‌جا پیوسته است.

همان‌طور که در مقدمه پیوستگی تابع، گفته شد، تابع‌هایی وجود دارد که در یک یا چند نقطه از دامنه‌شان پیوسته‌اند ولی اطلاق کلمهٔ پیوسته به آنها دور از ذهن به نظر می‌رسد.

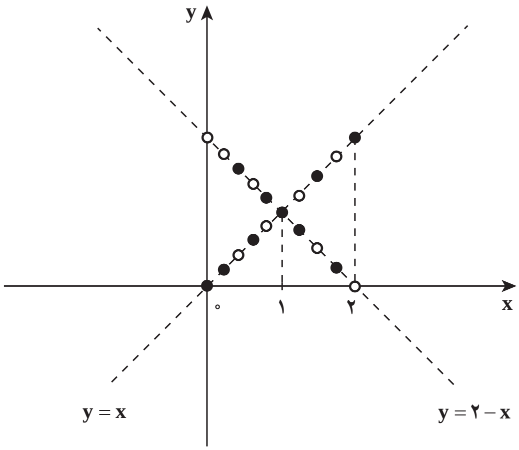
مثال: تابع $f: \mathbb{R}\to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{x گویا،} \\ ۲-x & \text{x گنگ،} \end{cases}$$

نقاطی از تابع f را تعیین کنید که تابع در آن نقاط پیوسته باشد.

حل: می‌دانید که در هر بازهٔ باز از اعداد حقیقی هم اعداد گویا وجود دارد و هم اعداد گنگ، بنابراین نقاط تابع f یا روی خط y=x (وقتی که x گویا باشد) و یا روی خط y=۲−x (وقتی که x اصم باشد) قرار دارند.

با مشاهده نمودار به صورت نقطه‌چین تابع در شکل ۲ــ۲۳ هر چقدر به نقطهٔ (۱و۱) نزدیک‌تر شویم



شکل ۲ــ۲۳

نقطه‌چین‌ها به هم متراکم‌تر خواهند شد و به نظر می‌رسد که تابع در $x=1$ حد دارد و برای اثبات درستی حدس خود، از تعریف حد به شرح زیر استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه از اعداد حقیقی باشد به‌طوری که $a_n \to 1$ $(a_n \neq 1)$، کافی است ثابت کنیم $\lim_{n\to\infty} |f(a_n)-1|=0$ یا $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=1$ در نتیجه $\lim_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$ و تابع f در نقطهٔ $x=1$ پیوسته است.

و اما به ازای مقادیری از جملات دنباله $\{a_n\}$ که گویا باشند داریم $|f(a_n)-1|=|a_n-1|$.

و به ازای مقادیری از جملات دنباله $\{a_n\}$ که گنگ باشند داریم

$$|f(a_n)-1|=|2-a_n-1|=|1-a_n|=|a_n-1|$$

و چون $\{a_n\}$ همگرا به عدد ۱ است یا $|a_n-1| \longrightarrow 0$ نتیجه می‌گیریم

$$\lim_{n\to\infty} |f(a_n)-1| = \lim_{n\to\infty} |a_n-1| = 0$$

بنابراین دنباله $\{f(a_n)\}$ به $f(1)=1$ همگراست.

تمرین در کلاس

ثابت کنید تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{گویا، } x \\ 0 & \text{گنگ، } x \end{cases}$ در نقطهٔ $x=0$ پیوسته است.

مسائل

۱ــ نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱} & ,x>۱\\ x^{۲} & ,x\le ۱\end{cases}$$

۲ــ تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x} & ,x\neq ۰\\ a & ,x=۰\end{cases}$ داده شده است. مقدار a را چنان انتخاب کنید

که تابع در x=۰ پیوسته باشد.

۳ــ به ازای چه مقدار a، تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & ,x\neq ۰\\ a & ,x=۰\end{cases}$ در x=۰ پیوسته است.

۴ــ عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع f در نقطهٔ x=۰ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}a+[x] & ,x<۰\\ b & ,x=۰\\ \frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}} & ,x>۰\end{cases}$$

۵ــ تابع $f(x)=[\frac{x}{۲}]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۶ــ نقاط پیوستگی تابع $f(x)=[\sin x]$ را در بازهٔ $[-۲\pi,۲\pi]$ مشخص کنید.

۷ــ اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، ثابت کنید تابع |f| نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

۸ــ دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در آن نقطه پیوسته باشد.

۹ــ دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی ضرب آنها در آن نقطه پیوسته باشد.

۱۰ــ با برهان خلف، ثابت کنید :

اگر تابع f در نقطهٔ a پیوسته و تابع g در نقطهٔ a ناپیوسته باشد آنگاه f+g در a ناپیوسته است.

۱۱ــ با استفاده از قضایای حد و پیوستگی ثابت کنید تابع $f(x) = [x] \sin\pi x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۲ــ تابع $f(x)=[x^{۲}]$ روی بازه $[۲,۲+k)$ پیوسته است، بزرگ‌ترین مقدار k را بیابید.

۱۳ــ تابع $f(x)=\begin{cases} ۴ & ,x^{۲}=|x| \\ x+۲ & ,x^{۲}\neq|x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱۴ــ تابع $f(x)=\dfrac{۴-\sqrt{x+۳}}{\sqrt[۳]{x+۱}-۱}$ در چند نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟

۱۵ــ نمودار تابع $f(x)=[x]-x+\sin(\frac{\pi}{۲}[x])$ را در بازهٔ $[۲,۵]$ رسم کرده و مشخص کنید، تابع در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است.

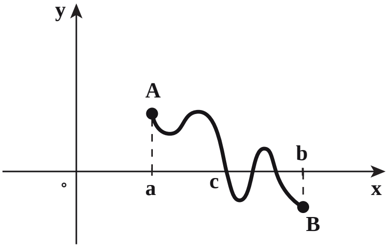
۱۶ــ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & ,x^{۲}\geq ۲|x| \\ ۲|x| & ,x^{۲}<۲|x| \end{cases}$ را روی $\mathbb{R}$ بررسی کنید.

۱۷ــ عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع $f(x)=(x^{۲}-bx+a)\mathrm{sgn}(x^{۲}+x-۲)$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد. (sgn تابع علامت است)

۲ـ۱۳ـ ویژگی‌های مهمّ تابع‌های پیوسته

بیشتر ویژگی‌های تابع‌های پیوسته ناشی از این خصوصیت شهودی آنها است که نمودار تابع پیوسته بر یک بازه به صورتی ملموس دارای اتصال و یکپارچگی است.

اکنون فرض کنید تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد. و مقدار آن در a مثبت و مقدار آن در b منفی باشد، باید حداقل، در یک نقطه از این بازه مانند c مقدار صفر را اختیار کند.



شکل ۲ــ۲۴

چون تابع f بر بازه $[a,b]$ پیوسته است، (هموار و یکپارچه است) ناچار است در گذر از نقطه $A(a,f(a))$ بالای محور x به نقطه $B(b,f(b))$ پایین محور x حداقل در یک‌جا، محور x را قطع کند. (شکل ۲ــ۲۴ را ببینید)

طبق این ویژگی «اتصال و یکپارچگی» تابع، قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه۴ : (قضیه بولزانو) اگر تابع f در بازه بستهٔ $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b) < ۰$ آنگاه حداقل، یک عدد مانند c در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد که $f(c) = ۰$

مثال: با استفاده از قضیه بولزانو ثابت کنید معادله $x^۴+x-۳=۰$ ریشه‌ای در بازه $(۱,۲)$ دارد.

حل : تابع $f(x)=x^۴+x-۳$ را درنظر می‌گیریم، می‌دانیم که تابع چند جمله f که در هر نقطه از $\mathbb{R}$ یا بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است پس در بازه $[۱,۲]$ نیز پیوسته است از طرفی $f(۱)\ f(۲)<۰$ (چرا؟) بنابراین طبق قضیه بولزانو دست کم یک عدد c در بازه باز $(۱,۲)$ وجود دارد که $f(c)=۰$ یعنی c ریشه معادله $x^۴+x-۳=۰$ است.

تمرین در کلاس

نشان دهید معادله $x-\cos x=۰$، ریشه‌ای در بازه $(۰,۱)$ دارد.

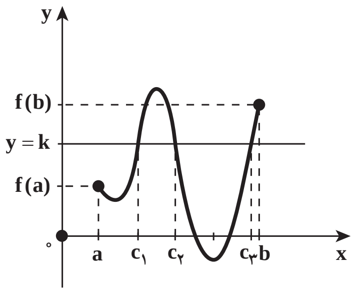
مثال: اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$، $(f(a)<f(b))$ و $g(x)=f(x)-k$. نشان دهید، وجود دارد $c\in(a,b)$ که $g(c)=۰$

حل : طبق فرض داریم $g(a)=f(a)-k<۰$ و $g(b)=f(b)-k>۰$ و تابع g در بازه $[a,b]$ پیوسته است. (چرا؟) پس بنابر قضیه بولزانو وجود دارد $c\in(a,b)$ که $g(c)=۰$ و یا $f(c)=k$ ایده مثال فوق قضیهٔ مقدار میانی است که در زیر بیان می‌شود.

قضیه۵ : (قضیهٔ مقدار میانی) : فرض کنیم f روی بازهٔ بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ باشد، در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه $[a,b]$ وجود دارد که $f(c)=k$.

قضیه مقدار میانی می‌گوید که برای تابع پیوسته f، اگر x همهٔ مقادیر بین a و b را بگیرد، $f(x)$ باید همهٔ مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را بگیرد. به عنوان مثال ساده‌ای از این قضیه، قد افراد را درنظر بگیریم. فرض کنید قد پسر بچه‌ای در ۱۳ سالگی ۱۵۰ سانتی‌متر و در ۱۴ سالگی ۱۶۵ سانتی‌متر باشد پس به‌ازای هر قد h سانتی‌متر بین ۱۵۰ سانتی‌متر و ۱۶۵ سانتی‌متر باید زمانی چون t باشد که قدش درست h سانتی‌متر بوده است. این امر معقول به نظر می‌رسد زیرا می‌دانیم رشد افراد پیوسته است و قد نمی‌تواند جهشی ناگهانی داشته باشد قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک عدد c در بازهٔ بسته $[a,b]$

را تضمین می‌کند، البته ممکن است بیش از یک عدد مـانند c که $f(c)=k$ وجود داشته باشد (شکل ۲ـ۲۵ را ببینید)



شکل ۲ـ۲۵

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی : شکل بالا نشان می‌دهد خط افقی $y=k$ بین خط‌های $y=f(a)$ و $y=f(b)$ می‌باشد. چون نمودار f بدون بریدگی و مانند یک ریسمان به هم پیوستگی و یکپارچگی دارد، برای رفتن از نقطهٔ $(a,f(a))$ به نقطهٔ $(b,f(b))$ باید خط $y=k$ را قطع کند و در شکل بالا خط $y=k$ نمودار f را در سه نقطه $c_۱$، $c_۲$ و $c_۳$ قطع کرده است.

مثال : نشان دهید که خط $y=۲$ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^۲(x-۳)^۲+x$ را قطع می‌کند.

حل : چون تابع چند جمله‌ای f در بازه $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است پس f در بازه $[۱,۳]$ نیز پیوسته است. از طرفی $f(۱)=۱$ و $f(۳)=۳$

بنابراین طبق قضیه مقدار میانی خط $y=۲$ که بین خطوط $y=۱$ و $y=۳$ قرار دارد نمودار f را قطع می‌کند.

تمرین در کلاس

آیا تابع $f(x)=\frac{x^۳}{۴}+\sin \pi x+۴$ در بازه $[-۲,۲]$ مقدار ۵ را می‌تواند داشته باشد؟

۲ـ۱۴ـ پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته

فرض کنیم $f: D\to \mathbb{R}$ تابع باشد و $B=\{f(x): x\in D\}$ مجموعه مقادیر f باشد (D دامنهٔ f)

اگر f یک به یک باشد، به ازای هر عضو B مانند y یک و فقط یک x در D وجود دارد که $f(x)=y$

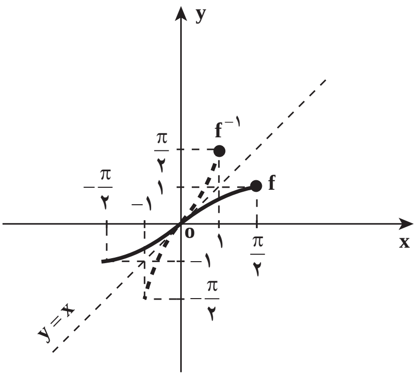
به این ترتیب، تابعی مانند $f^{-۱}: B\to \mathbb{R}$ تعریف می‌شود که $f^{-۱}(y)=x$، تابع $f^{-۱}$ را وارون f

می‌نامیم و دو حکم زیر درست‌اند.

الف) به ازای هر $x\in D$، $f^{-1}(f(x))=x$

ب) به ازای هر $y\in B$، $f(f^{-1}(y))=y$

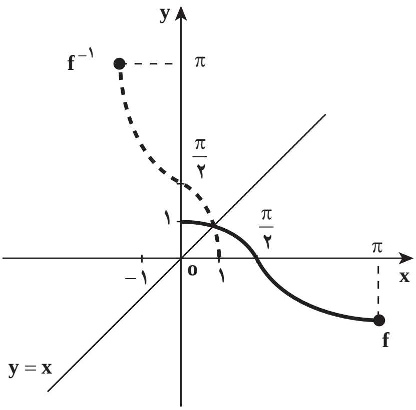
همان‌طور که در حسابان آموزش داده شده است، به‌خاطر اینکه f^{-1} نقش x و y نسبت به f را عوض می‌کند، نمودار f^{-1} قرینه نمودار f نسبت به خط $y=x$ است (شکل ۲ــ۲۶ را ببینید).



شکل ۲ــ۲۶ــ نمودار f و نمودار f^{-1} نسبت به $y=x$ قرینه‌اند

در این شکل نمودارهای $f(x)=\sin x$ و $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند. تابع f دربازه $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ یک به یک و صعودی است همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-۱,۱]$ یک به یک و صعودی می‌باشد و در شکل ۲ــ۲۷ نمودارهای $f(x)=\cos x$ و $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند، دیده می‌شوند.

تابع f در بازه $[۰,\pi]$ یک به یک و نزولی است. همچنین تابع f^{-1} در بازه $[-۱,۱]$ یک به یک و نزولی می‌باشد.



شکل ۲ــ۲۷ــ نمودار f و نمودار f^{-1} (نقطه‌چین) نسبت به $y=x$ قرینه‌اند

تمرین در کلاس

نمودار و دامنهٔ تابع وارون، توابع زیر را در صفحهٔ مختصات رسم کنید.

الف) $f(x)=\tan x$ ، $-\frac{\pi}{۲}<x<\frac{\pi}{۲}$ ب) $g(x)=\cot x$ ، $۰<x<\pi$

در مثال‌های بالا مشاهده می‌شود وقتی تابع f یک به یک و پیوسته است، تابع وارون آن نیز یک به یک و پیوسته است و این خود ایده‌ای است برای بیان قضیه زیر که کاربرد مهمّی از قضیه مقدار میانی است.

قضیه ۶: فرض کنیم f تابعی یک به یک و پیوسته باشد که دامنه آن بازه بسته D است. اگر f^{-1} با دامنه B، تابع وارون f باشد، آنگاه تابع f^{-1} در هر نقطه از B پیوسته است.

مثال: می‌دانیم وارون تابع $f(x)=x^3$، تابع $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ است. چون تابع f تابعی است یک به یک پیوسته، پس تابع $y=\sqrt[3]{x}$ نیز یک به یک و پیوسته است.

همچنین تابع $f(x)=\sin x$ با دامنه $D=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ یک به یک و پیوسته است. پس طبق قضیه (۶) تابع $f^{-1}(x)=\sin^{-1}(x)$ با دامنه $B=[-1,1]$ یک به یک و پیوسته است.

مسائل

۱ــ فرض کنید $f(x)=\begin{cases} x-1 & ,1<x<2 \\ 2x-4 & ,3<x<4 \end{cases}$، تابع f^{-1} در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

۲ــ نشان دهید که معادله $x^3-x-1=0$ در بازه $[1,2]$ جواب دارد.

۳ــ نشان دهید معادله $x^5+x^4+2x^3-x+2=0$ در بازه $[-2,0]$ دارای جواب است.

۴ــ ثابت کنید معادلهٔ $\sin x-x^2+x+1=0$ حداقل دو ریشه در بازه $[-\pi,\pi]$ دارد.

۵ــ ثابت کنید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ فرد باشد، آنگاه معادله $P(x)=0$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی است.

۲ــ۱۵ــ حدهای نامتناهی (حد بی‌نهایت)

می‌دانید در عبارت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \quad (1)$

L عددی است حقیقی و چنین حدهایی را اصطلاحاً حدود متناهی نیز می‌نامند.

اکنون عبارت (۱) را برای وقتی $+\infty$ یا $-\infty$ جایگزین L می‌شوند، تعریف می‌کنیم. این تعریف‌ها به لحاظ منطقی همان تعریف قبلی حد هستند، با این تفاوت که نشانه نزدیکی $f(x)$ها به $+\infty$، بزرگ شدن دلخواه آنها است و نیز نشانه نزدیکی $f(x)$ها به $-\infty$، کوچک‌تر شدن دلخواه آنها است و در حقیقت نمادگذاری سودمندی برای توصیف رفتار توابعی است که مقادیرشان به دلخواه بزرگ یا کوچک می‌شوند.

هرگاه رفتار تابع $f(x)=\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ را در نزدیکی یک بررسی نماییم (شکل ۲ــ۲۸)، به این نتیجه می‌رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، $(x-۱)^۲$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک خواهد شد و مقدار $\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ بدون هیچ محدودیتی افزایش می‌یابد و یا $f(x)=\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ را می‌توان از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کرد (f(x)به $+\infty$ میل می کند) به شرطی که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک کنیم. به عنوان مثال اگر بخواهیم $\frac{۱}{(x-۱)^۲}$ بزرگ‌تر از ۱۰۰۰۰۰۰ باشد داریم : $\frac{۱}{(x-۱)^۲}>۱۰۰۰۰۰۰$ و یا $(x-۱)^۲<\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$

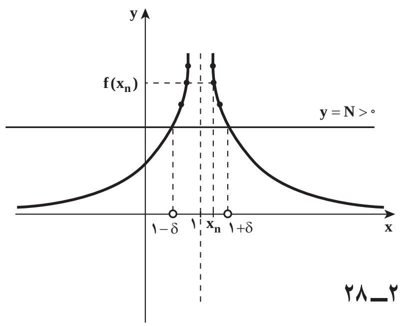
و یا

$$|x-۱|<\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

$$۱-\frac{۱}{۱۰۰۰}<x<۱+\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

یعنی اگر $\frac{۱}{۱۰۰۰}>|x-۱|>۰$ آنگاه : $(x-۱)^۲<\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$

و یا $\frac{۱}{(x-۱)^۲}>۱۰۰۰۰۰۰$



شکل ۲ــ۲۸

یعنی اگر بخواهیم f(x) بزرگ‌تر از عدد ۱۰۰۰۰۰۰ باشد کافی است x در همسایگی محذوف ۱ و به‌شعاع $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ قرار گیرد.

بنابراین در یک همسایگی محذوف۱، f(x) می‌تواند از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود. در این وضعیت گفته می‌شود، وقتی x به ۱ میل کند، f(x) به $+\infty$ میل می کند و از نمادگذاری $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ استفاده می کنیم.

برای درک بهتر، مطلب بالا را روی نمودار تابع توضیح می‌دهیم. (در مثال بالا N=۱۰۰۰۰۰۰ و $\delta=\frac{۱}{۱۰۰۰}$)

برای هر خط افقی y=N>۰ یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع δ>۰ ایجاد می‌شود که به

ازای هر $x_n \in D_f$ که در این همسایگی صدق کند، $f(x_n)>N$ است (x_n مقدار جمله nام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست).

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد نامتناهی (حد بی‌نهایت) می‌پردازیم.

تعریف ۱: فرض کنیم تابع D زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ و $f: D\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد، در این صورت، گوییم حد تابع f در a، $+\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n\neq a$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=+\infty$

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید : $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۱}{x^۲}=+\infty$

حل: به ازای هر دنباله $\{x_n\}$، $(x_n\neq ۰)$ همگرا به صفر، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ است (چرا؟)

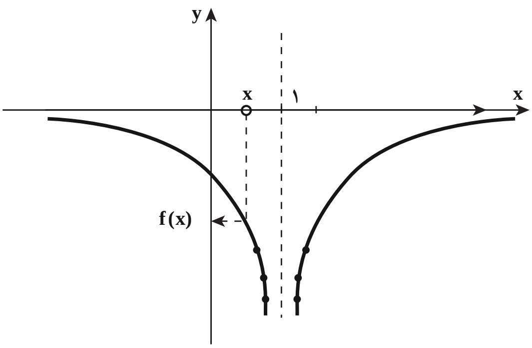
اگر رفتار تابع $f(x)=\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$ را در نزدیکی ۱ بررسی نماییم (شکل ۲ـ۲۹) به این نتیجه می‌رسیم که وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک می‌شود، مقدار $\frac{-۱}{(x-۱)^۲}$ بدون هیچ محدودیتی و با مقادیر منفی کاهش می‌یابد.

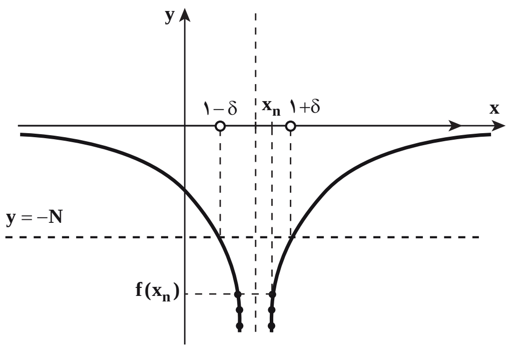
و یا f(x) را می‌توان از هر عدد منفی کوچک‌تر کرد (f(x) به $-\infty$ میل می‌کند) به شرطی که x به اندازه کافی به ۱ نزدیک شود.

این وضعیت تابع را در مجاورت x=۱، روی نمودار تابع توضیح می‌دهیم. فرض کنید N یک عدد مثبت دلخواه است با رسم هر خط افقی y=−N در شکل روبه‌رو یک همسایگی محذوف ۱ و به شعاع $\delta>۰$ ایجاد می‌شود که برای هر $x_n \in D_f$ که در این همسایگی صدق کند، $f(x_n)<-N$

(x_n مقدار جملهٔ nام دنباله $\{x_n\}$ است که به ۱ همگراست)

اکنون به صورت رسمی به تعریف حدنامتناهی (حد منهای بی‌نهایت) می‌پردازیم.





شکل ۲ـ۲۹

تعریف ۲: فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی)، دامنه تابع f باشد.

گوییم حد تابع f در a، $-\infty$ است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ اگر به ازای هر دنباله از نقاط دامنهٔ f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a است و $x_n \neq a$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$

مثال: به کمک تعریف (۲) ثابت کنید

$$\lim_{x\to ۲} \frac{-۱}{(x-۲)^۲} = -\infty$$

حل: برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که همگرا به ۲ است و $x_n \neq ۲$ داریم

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{-۱}{(x_n-۲)^۲} = -\infty$$

زیرا وقتی دنباله $\{x_n\}$ به ۲ همگرا باشد، دنباله $\{(x_n-۲)^۲\}$ با مقادیر مثبت به صفر همگراست بنابراین دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ واگراست.

عبارت‌های

۱ـ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ ‌ ‌ ‌ ۲ـ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

۳ـ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ ‌ ‌ ‌ ۴ـ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$

مشابه تعریف‌های ۱ و ۲، قابل تعریف هستند. به عنوان مثال عبارت (۲) به معنی آن‌است که : اگر به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ همگرا به a که $x_n > a$، $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = -\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

تمرین در کلاس

عبارت‌های ۱ و ۳ و ۴ را مشابه تعریف ۱ و ۲ تعریف کنید.

۲ـ۱۶ـ حد توابع کسری و مجانب قائم

با توجه به تعریف و مثال‌های حدهای مثبت بی‌نهایت و منفی بی‌نهایت مشخص می‌شود که در یک تابع کسری وقتی x به a میل کند و حد مخرج کسر صفر و حد صورت کسر عددی مخالف صفر باشد، حد تابع کسری $+\infty$ یا $-\infty$ است و این خود یک ایده‌ای است برای مطرح کردن قضیه مهّم صفحه بعد

قضیه ۱ : فرض کنید : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

الف) اگر $L>0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

ب) اگر $L>0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

پ) اگر $L<0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a منفی باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

ت) اگر $L<0$ و $g(x)$ در یک همسایگی محذوف a مثبت باشد آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

توضیح اینکه این قضیه برای حدود یک طرفه (چپ یا راست) نیز برقرار است.

برای اینکه به کاربرد قضیه (۱) در محاسبه حدود نامتناهی بیشتر آشنا شویم به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال : حدهای نامتناهی زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+1}{x^2+3x-4}$

حل :

الف) وقتی $x\to 0$، حد صورت کسر یک و حد مخرج کسر صفر است و مخرج کسر یعنی x^2 در یک همسایگی محذوف صفر مثبت است بنابراین طبق قسمت الف قضیه (۱) داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}}{x^2}=+\infty$$

ب) وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از ۱ به ۱ میل کند، حد صورت کسر ۳ است و حد مخرج کسر یعنی $(x-1)(x+4)$ صفر است و مخرج کسر به ازای $x<1$، مثلاً در بازه باز $(1-\delta,1)$ منفی است بنابراین طبق قسمت ب قضیه (۱) داریم :

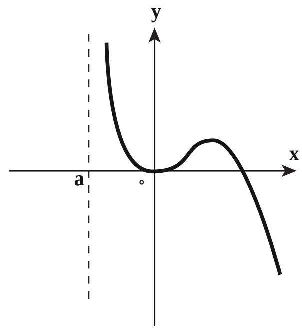
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+x+1}{x^2+3x-4}=-\infty$$

تمرین در کلاس

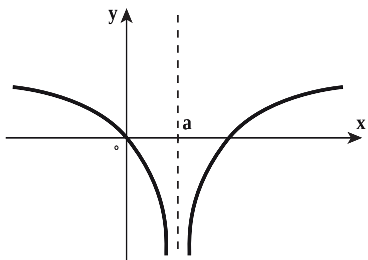
حدهای زیر را حدس زده و با استفاده از قضیه (۱) جواب حد را پیدا کنید.

۱ـ $\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\dfrac{x+۱}{x+۲}$ ۲ـ $\lim\limits_{x\to ۱^-}\dfrac{[x]-۱}{x^۲-۱}$ ۳ـ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\tan x$ ۴ـ $\lim\limits_{x\to ۰^+}\cot x$

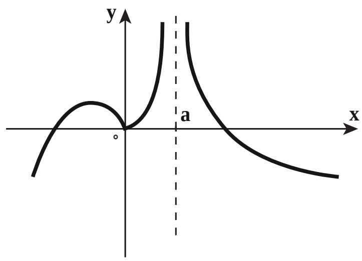
مجانب قائم تابع : به توصیف عبارت‌های $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ در شکل ۲ـ۳۰ توجه می‌کنیم.



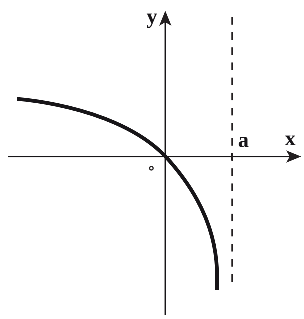
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$



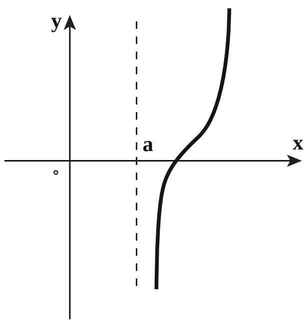
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$



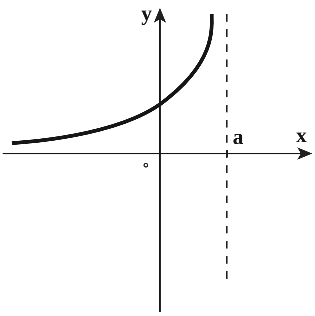
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$

شکل ۲ـ۳۰

در نمودارهای شکل ۲ــ۳۰ دیده می‌شود که تابع f در x=a تعریف نشده است و وقتی x از هر دو طرف و یا از طرف راست و یا از طرف چپ به a میل کند، f(x) بی‌کران افزایش یا کاهش می‌یابد و این خود ایده‌ای است برای مطرح کردن مجانب قائم تابع که در رسم نمودارها بسیار مفید است.

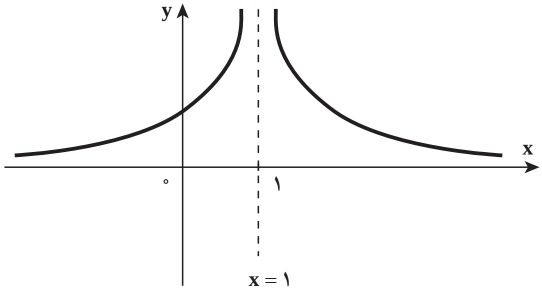
تعریف ۳: خط x=a را مجانب قائم نمودار تابع f می‌نامند، هرگاه حداقل یکی از حکم‌های زیر درست باشد.

۱ــ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ ۲ــ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ ۳ــ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$

۴ــ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ ۵ــ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$ ۶ــ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

مثلاً خط x=a مجانب قائم هر یک از شش حالت نشان داده شده در شکل ۲ــ۳۰ است.

مثال: خط x=۱ مجانب قائم تابع $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ است زیرا $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$



تمرین در کلاس

۱ــ مجانب‌های تابع $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

۲ــ مجانب‌های قائم تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{x+1}{x^2-1}$ ب) $g(x)=\tan x$ ، $-\pi\le x\le\pi$

۲ـ۱۷ـ حد در بی‌نهایت و مجانب افقی

تاکنون برای بررسی رفتار تابع f در نزدیکی نقطه مانند x=a، از «حد» استفاده کرده‌ایم و در آنجا x را به سمت a میل می‌دادیم

امّا هرگاه تابع f در بازه‌هایی مانند $(c,+\infty)$ و یا $(-\infty,c)$ تعریف شده باشد، علاقه‌مندیم که بدانیم، اگر x به دلخواه بزرگ (مثبت) و یا کوچک (منفی) می‌شود، و به بیان دیگر وقتی x به سمت $+\infty$ و یا به سمت $-\infty$ میل می‌کند، چه بر سر $f(x)$ می‌آید.

دانستن رفتار انتهایی تابع برای رسم نمودار آن بسیار مفید است.

تعریف ۴: فرض کنید f تابعی باشد که در بازه‌ای مانند $(c,+\infty)$ تعریف شده و L عددی حقیقی باشد. می‌گوییم حد تابع f وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند برابر L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$، واگرا به $+\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ به L همگرا باشد.

تمرین در کلاس

تعریف مشابه برای حد در منفی بی‌نهایت را فرمول‌بندی کنید.

مثال: ثابت کنید، اگر r یک عدد گویای مثبت باشد آنگاه :

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$ ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$

حل:

الف) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $+\infty$ است داریم : $f(x_n)=\frac{۱}{(x_n)^r}$

دنباله $\{f(x_n)\}$ همگرا به صفر است (چرا؟) پس $\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$

ب) برای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ که واگرا به $-\infty$ است داریم : $f(x_n)=\frac{۱}{(x_n)^r}$

و $\lim_{n\to+\infty} f(x_n)=۰$ (چرا؟) بنابر این $\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^r}=۰$

تذکر : قوانینی که در مورد $\lim_{x\to a} f(x)$ ثابت کردیم در مورد حد در بی‌نهایت نیز برقرارند

مثلاً اگر $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_۱$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L_۲$ آنگاه :

۱ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)\pm g(x))=L_۱\pm L_۲$

۲ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=L_۱L_۲$

۳ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} cf(x)=cL_۱$، c یک عدد ثابت

۴ـ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_۱}{L_۲}$، $(L_۲\neq ۰)$

۵ـ $\lim\limits_{x\to+\infty} c=c$

این قوانین برای وقتی‌که x به $-\infty$ میل کند نیز برقرارند.

بدیهی است که نتایج قضیه‌های ۱ و ۲ و ۳ بخش دوّم با تغییرات جزئی در مورد حد در بی‌نهایت نیز برقرارند. (چرا؟)

مثال: مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x^۲+۵x+۱}{۳x^۲-x}$ را حساب کنید.

حل: وقتی x بزرگ می‌شود، بدیهی است که صورت و مخرج کسر هر دو بزرگ می‌شوند، درنتیجه معلوم نیست چه بر سر مقادیر این کسر می‌آید بنابراین از معلومات جبری‌مان کمک می‌گیریم و تابع کسری را به شکل دیگری می‌نویسیم.

ابتدا صورت و مخرج را بر بزرگ‌ترین توانی از x که در مخرج وجود دارد تقسیم می‌کنیم، (چون مقدارهای بزرگ x برای محاسبه این حد به کار می‌روند پس می‌توان فرض کرد $x\neq ۰$) در این کسر بزرگ‌ترین توان x در مخرج ۲ است، در نتیجه :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲+۵x+۱}{۳x^۲-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{۲x^۲+۵x+۱}{x^۲}}{\dfrac{۳x^۲-x}{x^۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲+\dfrac{۵}{x}+\dfrac{۱}{x^۲}}{۳-\dfrac{۱}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۲+\dfrac{۵}{x}+\dfrac{۱}{x^۲})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳-\dfrac{۱}{x})}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}۲+۵\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x^۲}}{\lim\limits_{x\to+\infty}۳-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱}{x}}$$

$$=\frac{۲+۰+۰}{۳-۰}=\frac{۲}{۳}$$

مثال: $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}+x}-x)$ را حساب کنید.

حل: وقتی x بزرگ است، $\sqrt{x^{۲}+x}$ و x هر دو بزرگ‌اند و بسیار دشوار است که بدانیم چه بر سر تفاضل آنها می‌آید، لذا ابتدا از جبرمقدماتی استفاده می‌کنیم و تابع را به شکل دیگری می‌نویسیم. برای این کار صورت و مخرج را (می‌توانیم فرض کنیم که مخرج تابع ۱ است) در مزدوج صورت یعنی $(\sqrt{x^{۲}+x}+x)\neq ۰$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^{۲}+x}-x}{۱}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^{۲}+x}-x)(\sqrt{x^{۲}+x}+x)}{۱\times(\sqrt{x^{۲}+x}+x)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+x}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+x}\qquad(|x|=x, x>۰)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x}}+۱}$$

$$=\frac{۱}{\sqrt{۱+۰}+۱}=\frac{۱}{۲}$$

تمرین در کلاس

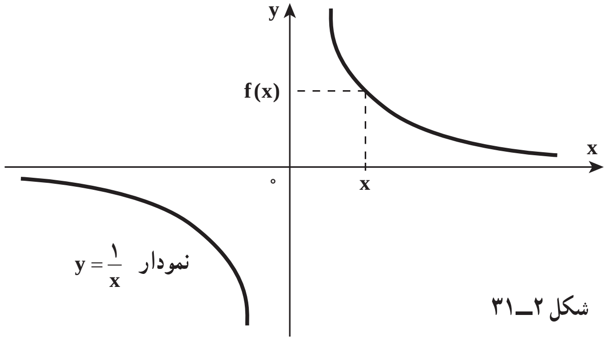
۱ــ مطلوبست محاسبه :

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x^{۳}+x+۱}{x^{۳}-x+۲}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{۳x^{۲}+۱}}{۲x-۳}$ پ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos\frac{۱}{x}$

۲ــ اگر به ازای هر $x>۱۰$، $\frac{۲x^{۲}+۳x}{x^{۲}}<f(x)<\frac{۲x-۱}{x}$ آنگاه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ را پیدا کنید.

مجانب افقی

نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ به شکل ۲ــ۳۱ است. در نمودار تابع f، وقتی x با مقادیر مثبت بی‌کران افزایش و یا با مقادیر منفی بی‌کران کاهش یابد، f(x) به ترتیب با مقادیر مثبت یا منفی به صفر نزدیک می‌شود و به عبارت دیگر نمودار تابع در بی‌نهایت دور مثبت یا منفی به خط افقی y=۰ بسیار نزدیک می‌شود و این توصیف، خود ایده‌ای است برای تعریف مجانب افقی.

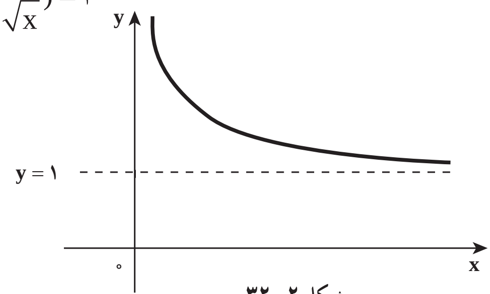


شکل ۲ــ۳۱

تعریف ۵: خط y=L را مجانب افقی نمودار تابع f می‌نامند به شرطی که $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$ یا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

مثال: خط y=۱ مجانب افقی تابع $f(x)=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}$ است که در شکل ۲ــ۳۲ نشان داده شده است، زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}\left(۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}\right)=۱$$



شکل ۲ــ۳۲

پرسش : خط مجانب قائم تابع $y=۱+\frac{۱}{\sqrt{x}}$ را به‌دست آورید.

تمرین در کلاس

مجانب‌های افقی تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱ـ $y=\frac{۲x+۱}{x-۲}$ ۲ـ $y=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ ۳ـ $y=\frac{\sin x}{x}$

۲ـ۱۸ـ حد بی‌نهایت در بی‌نهایت و مجانب مایل

در تابع $f(x)=x^{۳}$ وقتی x بزرگ می‌شود، $x^{۳}$ هم بزرگ می‌شود، مثلاً،

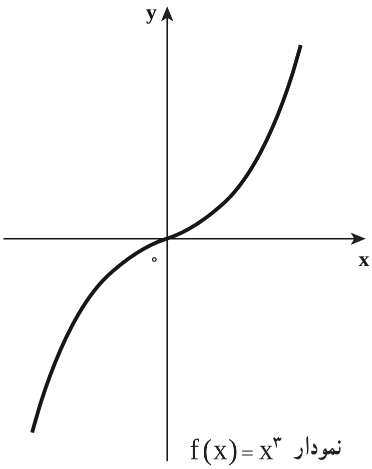
x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰
$x^{۳}$	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰

در واقع می‌توانیم با بزرگ گرفتن x به اندازه کافی، $x^{۳}$ را به هر اندازه دلخواه بزرگ کنیم و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

و به‌طور مشابه، وقتی x کوچک منفی می‌شود، $x^{۳}$ هم کوچک منفی می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to-\infty} x^{۳}=-\infty$$

درستی این حکم‌های حدی را می‌توان به‌صورت شهودی از روی نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ حدس زد.



نمودار $f(x)=x^{۳}$

اکنون به صورت رسمی به تعریف حد بی‌نهایت در بی‌نهایت می‌پردازیم.

تعریف ۶: می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ واگرا به $+\infty$، دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $+\infty$ باشد.

تمرین در کلاس

با توجه به تعریف ۶، نمادهای $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

مثال: به کمک تعریف ثابت کنید: $\lim\limits_{x\to-\infty} cx^۲=-\infty$ ، (c عدد ثابت منفی)

حل: به ازای هر دنباله دلخواه $\{x_n\}$ از دامنه تابع $f(x)=cx^۲$ که واگرا به $-\infty$ است داریم

$$f(x_n)=cx_n^۲$$

می‌دانید که دنباله $\{f(x_n)\}$ واگرا به $-\infty$ است ($c<۰$ و دنباله $\{x_n^۲\}$ واگرا به $+\infty$ است)

بنابراین $\lim\limits_{x\to-\infty} cx^۲=-\infty$

مثال: $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲+۱}-x)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^۲+۱}-x)=\lim_{x\to-\infty}(|x|\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}-x)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} -x(\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}+۱)=+\infty$$

تذکر مهم : همواره نمی‌توان از قاعده‌های حدگیری برای حدهای نامتناهی استفاده کرد. زیرا $+\infty$ و یا $-\infty$ عدد نیستند.

مثلاً نوشتن اینکه $\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳-x=\lim\limits_{x\to+\infty} x^۳-\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty-\infty$

غلط است ($+\infty-\infty$ را نمی‌توان تعریف کرد) با این وجود، می‌توان نوشت

$$\lim_{x\to+\infty} x^۳-x=\lim_{x\to+\infty} x(x^۲-۱)=+\infty$$

زیرا x و $x^۲-۱$ هر دو به دلخواه بزرگ می‌شوند در نتیجه حاصل‌ضرب آنها نیز بزرگ می‌شود

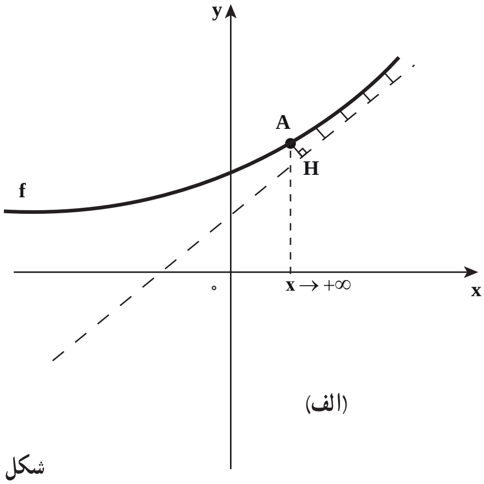
و یا نوشتن اینکه :

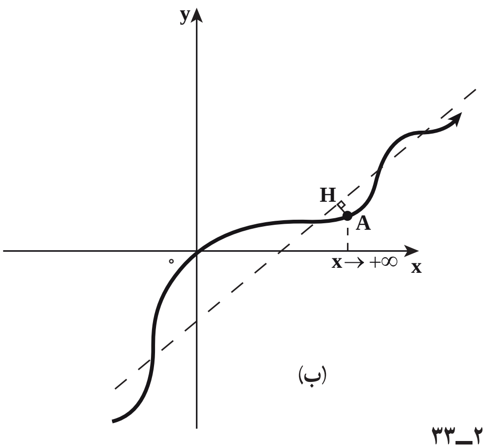
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۱}{x-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(۲x+۱)}{\lim\limits_{x\to-\infty}(x-۱)}=\frac{-\infty}{-\infty}$$

غلط است ($\frac{\infty}{\infty}$ را نمی‌توان تعریف کرد) و برای محاسبه این حد می‌نویسیم (صورت و مخرج کسر بر $x<۰$ تقسیم شده است)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x+۱}{x-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲+\frac{۱}{x}}{۱-\frac{۱}{x}}=\frac{۲}{۱}$$

مجانب مایل : خط L به معادله $y=mx+b$ $(m\neq ۰)$ و تابع $y=f(x)$ را درنظر می‌گیریم. چنانچه فاصلهٔ نقطه متغیر $A(x,f(x))$ تا خط مستقیم L؛ وقتی $x\to+\infty$ یا $x\to-\infty$ به صفر نزدیک شود (قسمت‌های الف و ب در شکل ۲ــ۳۲ را ببینید) آنگاه خط L مجانب مایل نمودار f نامیده می‌شود.





شکل ۲ــ۳۳

تبصره : به بیان نادقیق اگر نمودار تابع f در دور دست‌ها ($+\infty$ یا $-\infty$) به خط نامتناهی L به دلخواه نزدیک شود، خط L یک مجانب f خواهد بود.

تعریف : خط $m\neq ۰$، $y=mx+b$ مجانب مایل نمودار تابع f است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+b)]=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(mx+b)]=۰$

مثال: مجانب مایل تابع $f(x)=\frac{x^3-3x^2+1}{x^2+x-1}$ را (در صورت وجود) به‌دست آورید.

حل: چون درجه صورت یعنی ۳ بزرگ‌تر از درجه مخرج کسر است ابتدا عبارت صورت را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+1 & x^2+x-1 \\ \mp \cancel{x^3} \mp x^2 \pm x & \overline{x-4} \\ \hline -4x^2+x+1 & \\ \pm \cancel{4x^2} \pm 4x \mp 4 & \\ \hline 5x-3 & \end{array}$$

در نتیجه $f(x)=x-4+\frac{5x-3}{x^2+x-1}$

چون $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x-3}{x^2+x-1}=0$ (چرا؟) پس $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-4)]=0$ (همین نتیجه برای حالت $x\to-\infty$ نیز درست است)

بنابراین خط $y=x-4$ مجانب مایل تابع f می‌باشد.

پرسش: با توجه به راه حل مثال بالا، آیا می‌توان نتیجه گرفت یک تابع کسری گویا با چه شرایطی مجانب مایل دارد؟ و سپس راه حلی کوتاه برای محاسبه مجانب مایل تابع کسری گویا بیان کنید.

مسأله: فرض کنید خط $y=mx+b$ مجانب مایل تابع $y=f(x)$ است. مقادیر m و b را حساب کنید.

فعالیت

۱ــ فاصله نقطه متغیر $A(x,f(x))$ تا خط $y-mx-b=0$ [1] را به‌دست آورید.

۲ــ اگر $h(x)$ فاصله نقطه $A(x,f(x))$ تا خط $y-mx-b=0$ باشد. مقادیر m و b را چنان تعیین کنید که

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty}h(x)=0$$

پس از انجام فعالیت بالا نتیجه می‌گیریم که اگر خط $y=mx+b$ مجانب مایل تابع $y=f(x)$ باشد آنگاه:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \text{یا} \quad m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] \quad \text{یا} \quad b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-mx]$$

۱ــ فاصله نقطه $M(x_1,y_1)$ از خط $ax+by+c=0$ برابر است با $d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

مثال: معادله مجانب مایل تابع $f(x)=۲x+\sqrt{x^۲+۳}$ را وقتی $x\to+\infty$ به‌دست آورید.

حل: بنابر دستورالعمل‌های بالا داریم

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x+\sqrt{x^۲+۳}}{x}=\lim_{x\to+\infty}(۲+\sqrt{۱+\frac{۳}{x^۲}})=۳$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(۲x+\sqrt{x^۲+۳}-۳x)$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^۲+۳}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^۲}+۳-\cancel{x^۲}}{\sqrt{x^۲+۳}+x}=۰$$

بنابراین خط $y=۳x$ مجانب مایل تابع است.

تمرین در کلاس

در مثال بالا معادله مجانب مایل را وقتی $x\to-\infty$ ، به‌دست آورید.

مسائل مجانب‌ها :

الف) معادله مجانب‌های مایل و افقی تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱ـ $y=\frac{x^۲}{\sqrt{x^۲-۱}}$

۲ـ $y=x-\sqrt{x^۲+۲x}$

۳ـ $y=\frac{x^۳+x+۱}{x^۲+۳}$

۴ـ $y=x+\sqrt{۴x^۲+x+۱}$

ب) اندازه زاویه بین دو خط مجانب مایل تابع $y=\sqrt{x^۲+۴x}$ را حساب کنید.

مسائل

۱ــ حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{[x]-2}{x-2}$ پ) $\lim\limits_{x\to \pi^+}\cot x$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{3\pi}{2}^-}\tan x$ ث) $\lim\limits_{x\to -4^-}\frac{x-2}{x^2-2x-8}$ ج) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{\cot x}$ ح) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})$

۲ــ در نظریهٔ نسبیت جرم ذره‌ای با سرعت V برابر است با $m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ که در آن m_0 جرم سکون ذره است و c سرعت نور وقتی که $V\to c^-$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۳ــ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x-3}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x^2+5x-1}{2x^2-1}$

پ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{x^2+3x-1}$ ت) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x-\sqrt{x^2+2x})$

ث) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-3x})$ ج) $\lim\limits_{x\to +\infty}[\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3}]$

چ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x\tan^{-1}x}{2-x}$ ح) $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt[3]{8x^3+2x^2}-2x)$

خ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2+3}}$ د) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$

۴ــ حدود زیر را پیدا کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x^3-x+1}{x^2+x-1}$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$

۵ــ ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$ و سپس $\lim\limits_{x\to 0^+}(\frac{1}{x}+[x])$ را پیدا کنید.