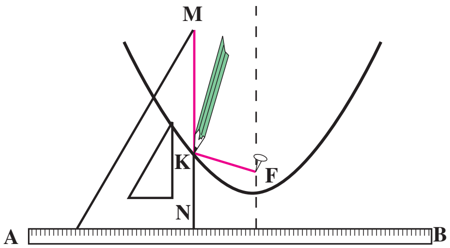
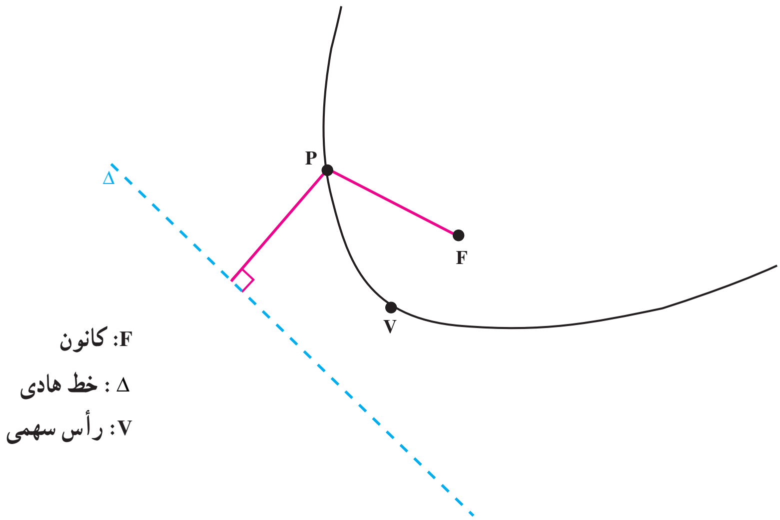
خط ثابتِ Δ در آن صفحه و یک نقطهٔ ثابتِ F خارج از Δ و در آن صفحه به یک فاصله باشند. نقطهٔ ثابت F را **کانون** و خط ثابت Δ را **خط هادی** سهمی می‌نامیم.

برای رسم سهمی خط‌کشی مانند AB به‌عنوان هادی درنظر گرفته و یک تکه نخ به اندازهٔ طول یک ضلع MN از یک گونیا را نیز انتخاب می‌کنیم. یک سر نخ را در نقطهٔ M ثابت می‌کنیم و سر دیگر را در نقطهٔ F، یعنی کانون سهمی. مداد را مطابق شکل در یک نقطهٔ K قرار داده به‌طوری‌که تکه‌نخ بین نقاط F، K و M محکم قرار گرفته باشد. با لغزاندن گونیا در امتداد AB نوک مداد یک سهمی رسم می‌کند.

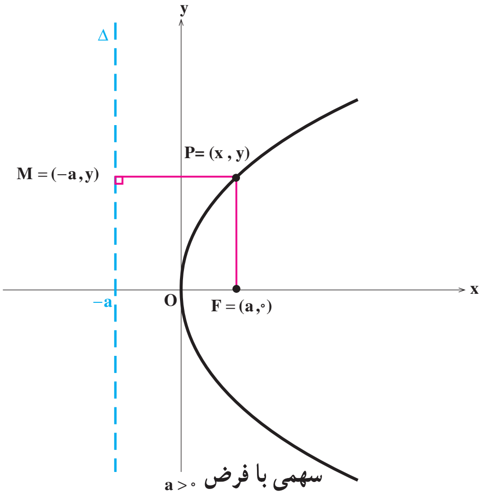


شکل ۱

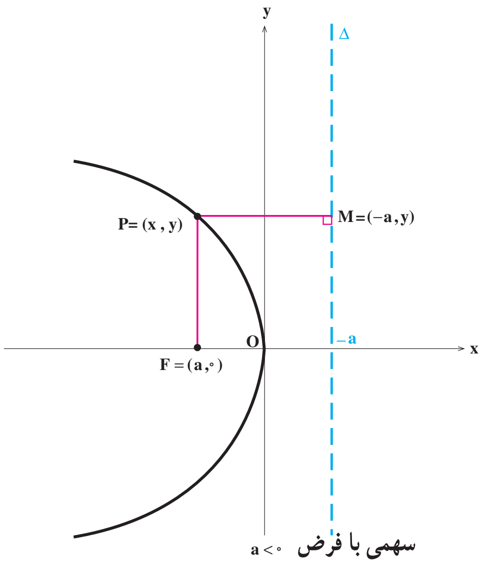


شکل ۲

حال معادلهٔ سهمی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می‌کنیم. کانون سهمی را نقطهٔ F به مختصات $(a,0)$ می‌گیریم و رأس سهمی را در مبدأ مختصات فرض می‌کنیم. لذا خط هادی آن خط $x=-a$ خواهد بود. بسته به این‌که $a>0$ یا $a<0$ دهانهٔ سهمی به ترتیب به سمت راست و یا به سمت چپ باز می‌شود (به شکل‌های ۳ و ۴ نگاه کنید).



شکل ۳



شکل ۴

حال در هر دو حالت نقطهٔ $P=(x,y)$ روی سهمی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$|PM|=|PF|$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x+a)^{۲}+(y-y)^{۲}}=\sqrt{(x-a)^{۲}+(y-\circ)^{۲}}\ ,$$

اگر و فقط اگر

$$(x+a)^۲ = (x-a)^۲ + y^۲ ,$$

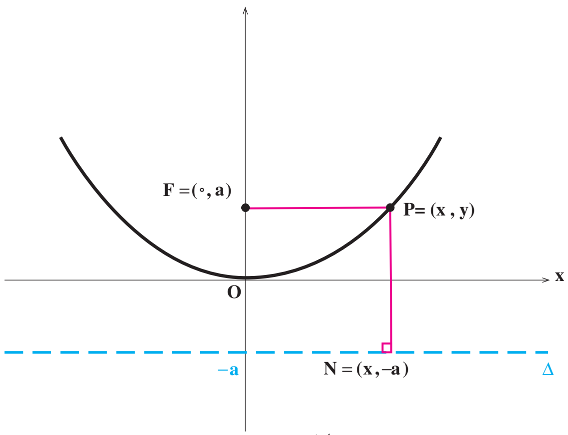
اگر و فقط اگر

$$x^۲ + ۲ax + a^۲ = x^۲ - ۲ax + a^۲ + y^۲,$$

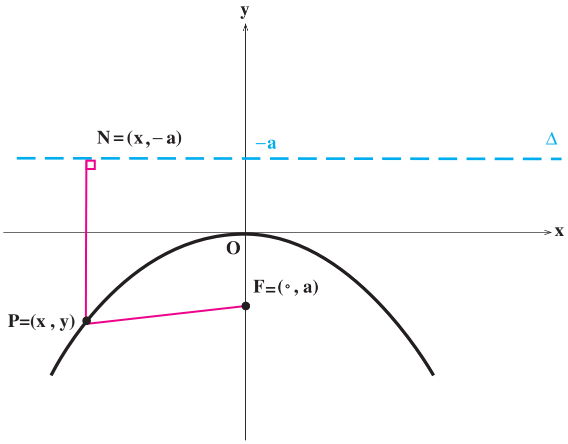
اگر و فقط اگر

$$y^۲ = ۴ax .$$

بدین ترتیب رابطهٔ اخیر معادلهٔ سهمی است. ممکن است کانون سهمی را روی محور yها بگیریم. یعنی کانون را نقطهٔ F به مختصات $(۰,a)$ بگیریم. اگر رأس سهمی در مبدأ مختصات باشد، خط هادی آن خط $y=-a$ خواهد بود و بازهم بسته به این‌که $a>۰$ یا $a<۰$ حالتهای زیر را داریم.



شکل ۵ سهمی با فرض $a>۰$



شکل ۶ سهمی با فرض $a<۰$

در این حالت نیز با محاسباتی مشابه قبل به دست می‌آوریم

$$x^{2} = 4ay\,.$$

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه را که در این بخش مطرح شد می‌آوریم.

معادلهٔ استاندارد سهمی

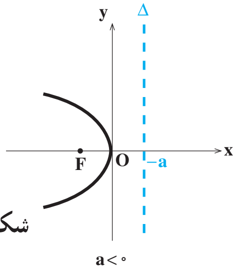
۱) $y^{2} = 4ax$.

رأس : $(0,0)$.

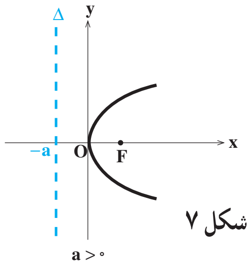
کانون : $F = (a,0)$.

خط هادی : $x = -a$.

محور تقارن : محور xها.



شکل ۸



شکل ۷

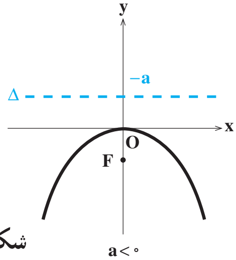
۲) $x^{2} = 4ay$.

رأس : $(0,0)$.

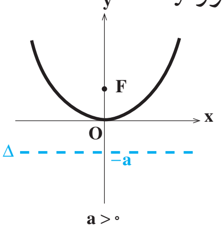
کانون : $F = (0,a)$.

خط هادی : $y = -a$.

محور تقارن : محور yها.



شکل ۱۰



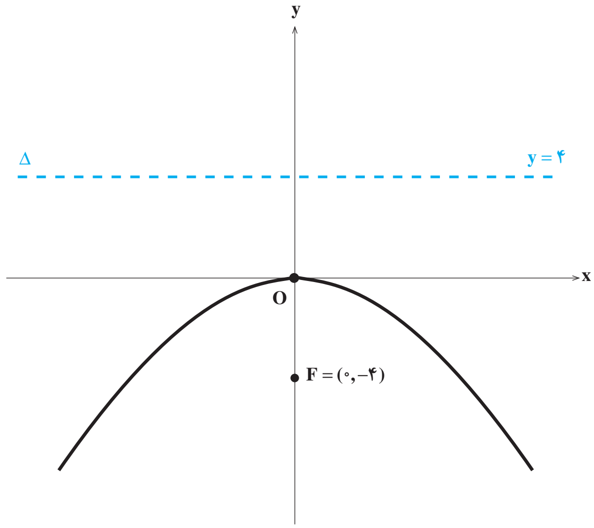
شکل ۹

مثال ۱. می‌خواهیم سهمی $x^۲ = -۱۶y$ را رسم کنیم و کانون و خط هادی آن را مشخص کنیم. توجه می‌کنیم که معادلهٔ فوق معادلهٔ یک سهمی است که کانون آن روی محور yها قرار دارد. از طرفی

$$۴a = -۱۶ ,$$

$$a = -۴ .$$

پس $F = (۰, -۴)$ کانون این سهمی و خط به معادلهٔ $y = -(-۴) = ۴$ خط هادی آن است.



شکل ۱۱

مثال ۲. می‌خواهیم معادلهٔ یک سهمی را که مبدأ مختصات رأس آن بوده و محور yها محور تقارن آن باشد و از نقطهٔ $(-۵, -۱۰)$ بگذرد پیدا کنیم و مختصات کانون و خط هادی آن را به‌دست آوریم. توجه می‌کنیم که معادلهٔ این سهمی به‌صورت $x^۲ = ۴ay$ است. اکنون با توجه به این‌که مختصات نقطهٔ $(-۵, -۱۰)$ در معادلهٔ اخیر صدق می‌کند، a به‌دست می‌آید :

$$(-۱۰)^۲ = ۴a(-۵) ,$$

$$۱۰۰ = -۲۰a ,$$

$$a = -۵ .$$

پس معادلهٔ این سهمی $x^۲ = -۲۰y$ است. واضح است که $F = (۰, -۵)$ کانون این سهمی و خط به معادلهٔ $y = ۵$ خط هادی آن است.

تمرین

۱. سهمی‌های زیر را رسم کرده، مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی آنها را نیز تعیین کنید.

الف) $y^{۲} = ۴x$ ، ب) $x^{۲} = ۴y$ ، ج) $x^{۲} = -۸y$ ،

د) $x^{۲} = ۵۸y$ ، هـ) $y^{۲} = -۹۳x$ ، و) $x^{۲} = -۱۰۵y$.

۲. معادلهٔ هر یک از سهمی‌های زیر را که محور تقارن آنها مشخص شده و یک نقطه از آنها نیز داده شده است پیدا کنید. در هر مورد مختصات کانون و معادلهٔ خط‌هادی را نیز تعیین کنید.

الف) محور xها، $(۴,۸)$ ، ب) محور yها، $(۴,۲)$ ،

ج) محور xها، $(-۵,۱۰)$ ، د) محور xها، $(-۳,۶)$ ،

هـ) محور yها، $(-۶,-۹)$ ، و) محور xها، $(-۶,-۱۲)$.

۳. با استفاده از تعریف سهمی، معادلهٔ یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطهٔ $(۲,۲)$ و خط هادی آن $y = ۴$ باشد.

۴. با استفاده از تعریف سهمی، معادلهٔ یک سهمی را پیدا کنید که کانون آن نقطهٔ $(۶,۴)$ و خط هادی آن $x = ۲$ باشد.

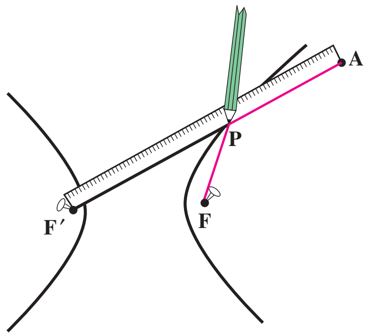
۴.۳ هذلولی

هذلولی یکی دیگر از مقاطع مخروطی است که از دو قطعهٔ متمایز تشکیل شده است. ابتدا به تعریف آن توجه کنید.

تعریف. **هذلولی** مکان هندسی تمام نقاطی از یک صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصلهٔ آنها از دو نقطهٔ ثابت و متمایزِ F و F' در آن صفحه به نام **کانون** مقدارِ مثبت ثابتی باشد.

برای رسم یک هذلولی یک خط‌کش و یک تکه‌نخ که طول آن از طول خط‌کش کوتاهتر است انتخاب می‌کنیم به‌طوریکه تفاضل طول خط‌کش و قطعه نخ همان مقدار ثابت موردنظر باشد. یک سر نخ را در نقطهٔ A ثابت کرده، سر دیگر آن را در یکی از کانونهای هذلولی ثابت می‌کنیم. یک سر دیگر

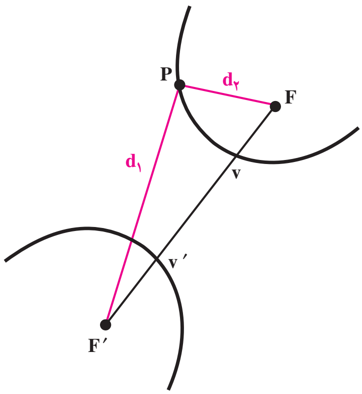
خط‌کش را هم در کانون دیگر ثابت می‌کنیم. مطابق شکل یک مداد را درکنارهٔ خط‌کش و نخ قرار می‌دهیم و با دوران خط‌کش در نقطهٔ F' مسیری که مداد ایجاد می‌کند و یک شاخه از هذلولی است را رسم می‌کنیم (شاخه دیگر هذلولی مشابهاً با تعویض نقطهٔ ثابت خط‌کش به F حاصل می‌شود). حال نشان می‌دهیم که واقعاً یک هذلولی رسم شده است. برای این منظور کافی است نشان دهیم که نقطهٔ P روی هذلولی قرار دارد، یعنی قدرمطلق تفاضل فاصلهٔ P از F' و F برابر مقدار ثابت (تفاضل طول خط‌کش و طول نخ) است و این نیز برقرار است زیرا



شکل ۱

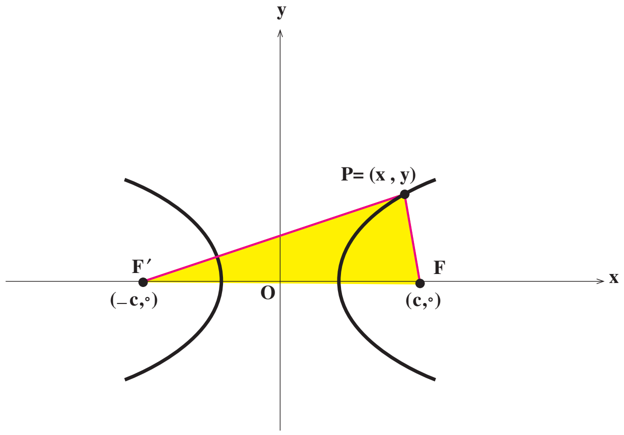
$$\left|PF'\right|-|PF|=\left|PF'\right|+|PA|-|PF|-|PA|$$
$$=\left|AF'\right|-(|PF|+|PA|)$$
$$= \text{(طول خط‌کش)} - \text{(طول نخ)}$$
$$= \text{مقدار ثابت} .$$

در شکل روبه‌رو F و F' کانونهای هذلولی هستند و V و V' نیز **رؤوس** هذلولی نامیده می‌شوند.



$|d_1 - d_2| =$ ثابت
شکل ۲

حال معادلهٔ هذلولی را در یک دستگاه مختصات قائم پیدا می‌کنیم. کانونهای هذلولی را دو نقطهٔ $F=(c,0)$ و $F'=(-c,0)$ می‌گیریم.



شکل ۳

نقطهٔ دلخواه P را روی هذلولی مذکور در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مقدار تفاضل ثابت با ۲a نشان داده شود که در آن a مثبت است. ملاحظه می‌کنیم که

$$|PF'| - |PF| < |FF'| ,$$

$$۲a < ۲c ,$$

$$a < c .$$

حال نقطهٔ $P = (x, y)$ روی هذلولی مذکور قرار دارد اگر و فقط اگر

$$\left||PF'| - |PF|\right| = ۲a ,$$

اگر و فقط اگر

$$\left|\sqrt{(x+c)^۲ + y^۲} - \sqrt{(x-c)^۲ + y^۲}\right| = ۲a ,$$

اگر و فقط اگر

$$(c^۲ - a^۲)x^۲ - a^۲y^۲ = a^۲(c^۲ - a^۲) ,$$

اگر و فقط اگر

$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{c^۲ - a^۲} = ۱ .$$

برای ساده‌تر شدن معادله، با توجه به این‌که $c^۲ - a^۲ > ۰$، می‌توانیم فرض کنیم $b = \sqrt{c^۲ - a^۲}$.

پس

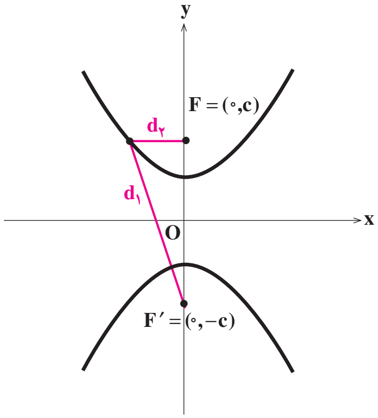
$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ ,$$

معادلهٔ هذلولی مذکور می‌باشد. از معادلهٔ فوق نتیجه می‌شود که هذلولی در نقاط $(a,0)$ و $(-a,0)$ (رؤوس) محور xها را قطع می‌کند ولی محور yها را قطع نمی‌کند.

اگر کانونهای هذلولی را روی محور yها انتخاب کنیم، یعنی فرض کنیم $F=(0,c)$ و $F'=(0,-c)$ کانونها باشند، به‌طور مشابه معادلهٔ هذلولی به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1,$$

که در آن $c>0$ و داریم $b^2=c^2-a^2$. مرکز هذلولی نیز هم‌چنان در مبدأ مختصات قرار دارد.



شکل ۴

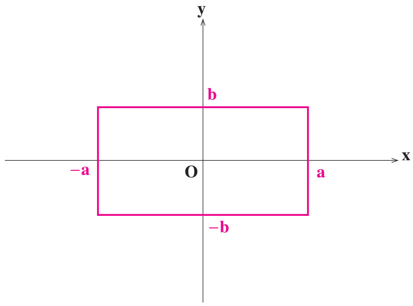
برای این‌که رسم نمودار هذلولی با سهولت و دقت بیشتری انجام شود، ملاحظات زیر را معمول می‌داریم. مثلاً هذلولی $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ را درنظر می‌گیریم و ابتدا y را برحسب x استخراج می‌کنیم:

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}.$$

اگر $|x|$ بزرگ شود و به سمت بینهایت میل کند عبارت زیر رادیکال به ۱ میل خواهد کرد. پس برای مقادیر بزرگ $|x|$، نمودار هذلولی نزدیک خطهای زیر است:

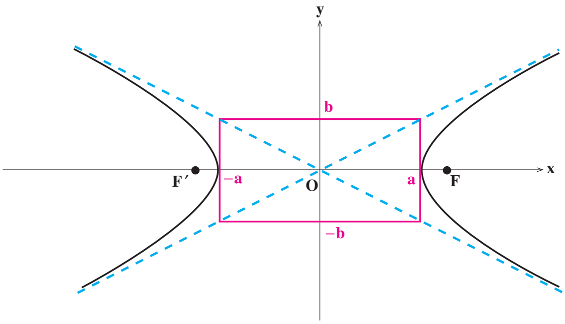
$$y=\pm\frac{b}{a}x.$$

این خطوط **مجانبهای** هذلولی نامیده می‌شوند، یعنی هذلولی به این خطوط رفته رفته نزدیک می‌شود. برای سهولت در رسم مجانبها و سپس هذلولی می‌توانیم ابتدا مستطیل صفحهٔ بعد را رسم کنیم.



شکل ۵

سپس اقطار این مستطیل که همان مجانبها هستند را رسم کرده و هذلولی را رسم می‌کنیم.

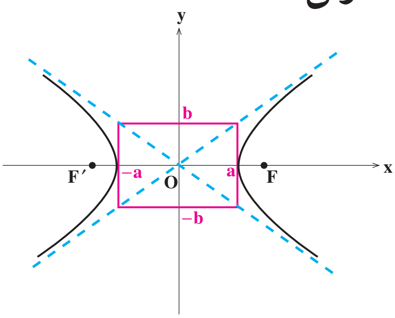


شکل ۶

با استفاده از رابطهٔ $c^۲ = a^۲ + b^۲$ ، به راحتی می‌توان دید اگر قوسی بر مرکز مبدأ مختصات و شعاعی برابر نصف قطر مستطیل رسم کنیم، آنگاه نقطهٔ تقاطع آن با محور xها، کانونهای هذلولی را مشخص می‌کند.

اکنون در زیر خلاصه‌ای از آنچه در این بخش مطرح کردیم را بیان می‌کنیم.

معادلهٔ استاندارد هذلولی



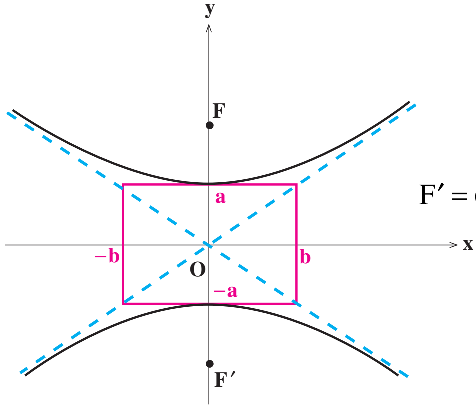
شکل ۷

۱) $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$.

رؤوس : $(a,۰)$ و $(-a,۰)$.

کانونها : $F = (c,۰)$ و $F' = (-c,۰)$

که $c^۲ = a^۲ + b^۲$.



شکل ۸

۲) $\frac{y^{۲}}{a^{۲}}-\frac{x^{۲}}{b^{۲}}=۱$.

رؤوس : $(۰,a)$ و $(۰,-a)$.

کانونها : $F=(۰,c)$ و $F'=(۰,-c)$

که $c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$.

در هر دو حالت محور xها و yها محورهای تقارن و مبدأ مختصات مرکز تقارن هذلولی است.

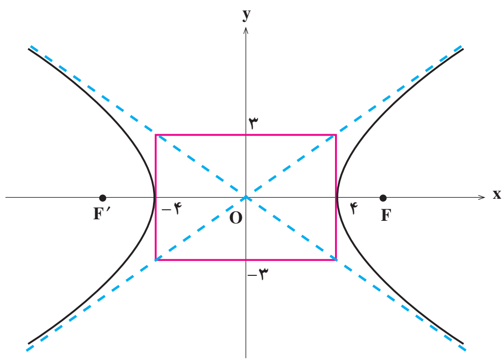
مثال ۱. در زیر هذلولی $۹x^{۲}-۱۶y^{۲}=۱۴۴$ را رسم می‌کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که $\frac{x^{۲}}{۱۶}-\frac{y^{۲}}{۹}=۱$. از طرفی

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲},$$

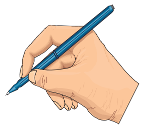
$$c^{۲}=۱۶+۹=۲۵,$$

$$c=۵.$$

پس $F=(۵,۰)$ و $F'=(-۵,۰)$ کانونهای هذلولی هستند و نمودار آن به‌صورت زیر است :



شکل ۹



تمرین

۱. هریک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۴}=۱$ ، ب) $\frac{x^۲}{۹}-\frac{y^۲}{۲۵}=۱$ ،

ج) $\frac{y^۲}{۴}-\frac{x^۲}{۹}=۱$ ، د) $\frac{y^۲}{۲۵}-\frac{x^۲}{۹}=۱$.

۲. هر یک از هذلولی‌های زیر را رسم کنید.

الف) $۴x^۲-y^۲=۱۶$ ، ب) $x^۲-۹y^۲=۹$ ،

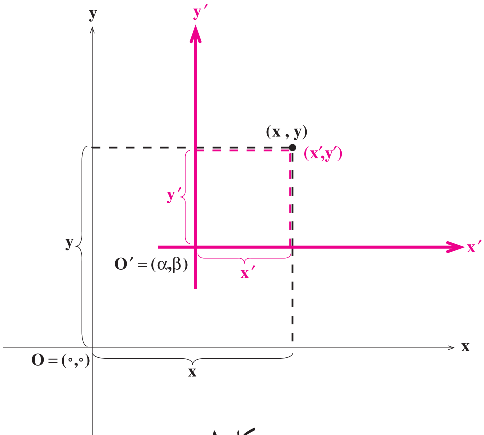
ج) $۹y^۲-۱۶x^۲=۱۴۴$ ، د) $۴y^۲-۲۵x^۲=۱۰۰$.

۵.۳ انتقال محورهای مختصات

تاکنون معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی یافته‌ایم که مرکز آنها در مبدأ مختصات قرار داشته و محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده است. در این بخش می‌خواهیم معادلات مقاطع مخروطی را در حالتی پیدا کنیم که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بوده و مرکز آنها نقطه‌ای دلخواه باشد.

برای این منظور از انتقال محورهای مختصات استفاده می‌کنیم. فرض کنیم مبدأ مختصات، یعنی نقطهٔ $O=(۰,۰)$ را به نقطهٔ $O'=(\alpha,\beta)$ منتقل کنیم. البته این انتقال را طوری انجام می‌دهیم که محورها در حالت انتقال‌یافته با محورهای قبل از انتقال موازی باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که اگر یک نقطه در صفحه، نسبت به دستگاه اوّلیه دارای مختصات (x,y) باشد و نسبت به دستگاه جدیدِ منتقل شده دارای مختصات (x',y')، آنگاه این دو مختصات چه رابطه‌ای با یکدیگر دارند. با توجه به شکل ۱ این رابطه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x=x'+\alpha \\ y=y'+\beta \end{cases}$$



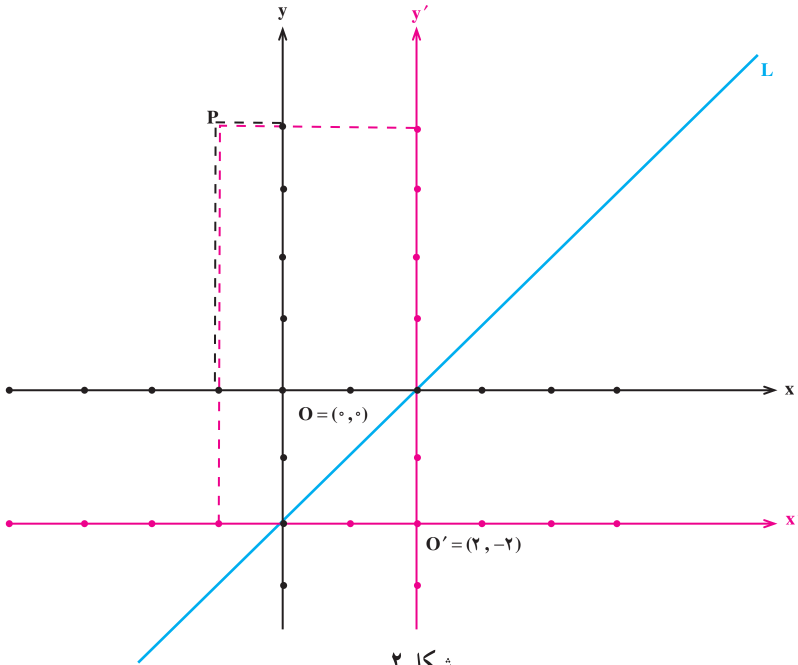
شکل ۱

مثال ۱. فرض کنیم یک دستگاه مختصات قائم با مبدأ مختصات $O=(۰,۰)$ داده شده است. یک نقطه در صفحهٔ این دستگاه مختصات قائم انتخاب می‌کنیم، مثلاً نقطهٔ $P=(-۱,۴)$. اکنون مبدأ مختصات را به نقطهٔ $O'=(۲,-۲)$ منتقل می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم که مختصات P در دستگاه جدید چه خواهد شد.

اگر مختصات P در دستگاه جدید (x',y') باشد، بنابر تساوی‌های بالا می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{cases} x'=-۱-۲=-۳ \\ y'=۴-(-۲)=۶ \end{cases}$$

پس مختصات P در دستگاه جدید برابر $(-۳,۶)$ است (به شکل ۲ نگاه کنید).



شکل ۲

اکنون فرض می‌کنیم خطی مانند L در صفحهٔ دستگاه اوّلیه داده شده است که در این صفحه معادله‌ای به‌صورت

$$x-y=۲$$

دارد. می‌خواهیم ببینیم که این خط در دستگاه جدید چه معادله‌ای دارد. نقطه‌ای دلخواه روی خط L انتخاب می‌کنیم که در دستگاه اوّلیه دارای مختصات (x,y) و در دستگاه جدید دارای مختصات

(x',y') است. چون

$$\begin{cases} x = x' + ۲ \\ y = y' - ۲ \end{cases}$$

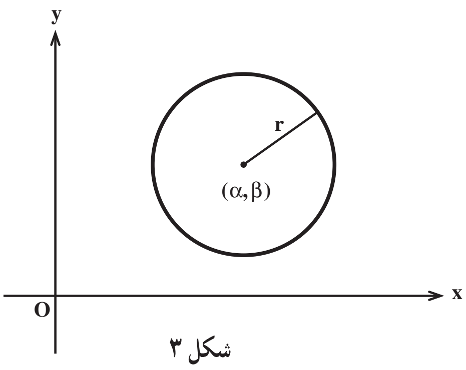
پس با توجه به این‌که $x - y = ۲$ ، به‌دست می‌آوریم $(x' + ۲) - (y' - ۲) = ۲$ ، یا $x' - y' = -۲$.

پس اگر نقطه‌ای روی خط L باشد که در دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') باشد، آنگاه $x' - y' = -۲$. برعکس، اگر نقطه‌ای در دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') باشد و در تساوی $x' - y' = -۲$ صدق کند، آنگاه لزوماً روی خط L است (چرا؟). پس

$$x' - y' = -۲$$

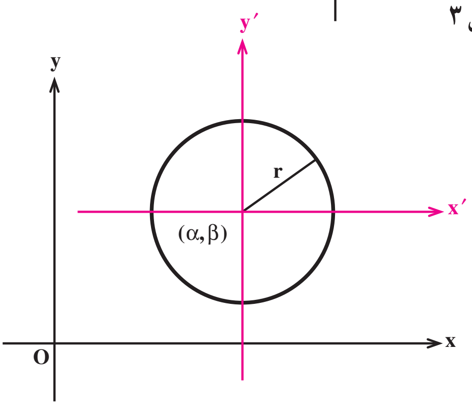
معادلهٔ خط L نسبت به دستگاه جدید است.

اکنون فرض می‌کنیم که یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می‌خواهیم معادلهٔ دایره‌ای را که مرکز آن نقطهٔ (α,β) می‌باشد و شعاع آن r است پیدا کنیم (به شکل ۳ نگاه کنید).



شکل ۳

مبدأ مختصات دستگاه را به نقطهٔ (α,β) منتقل می‌کنیم (به شکل ۴ نگاه کنید).



شکل ۴

معادلهٔ دایرهٔ داده شده نسبت به دستگاه جدید به‌صورت $x'^2 + y'^2 = r^2$ است. امّا

$$\begin{cases} x' = x - \alpha \\ y' = y - \beta \end{cases}$$

و لذا $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ معادلهٔ دایره در دستگاه قدیم است. درنتیجه می‌توانیم بگوییم معادلهٔ دایره به شعاع r و به مرکز (α,β) به‌صورت زیر است

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2.$$

مثال ۲. با دسته‌بندی جملات معادلهٔ $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ به‌صورت

$$(x^2 - 4x) + (y^2 + 2y) = 4,$$

$$(x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = 4,$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9,$$

ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ داده شده، معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $(2,-1)$ و شعاع ۳ است.

مثال ۳. می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی مانند $P = (x,y)$ را پیدا کنیم که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $A = (7,1)$ دو برابر فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $B = (1,4)$ باشد. برای این منظور توجه می‌کنیم که

$$|AP| = 2|BP|,$$

اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-1)^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2},$$

اگر و فقط اگر

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = 4\left[(x-1)^2 + (y-4)^2\right],$$

اگر و فقط اگر

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 30y + 18 = 0,$$

اگر و فقط اگر

$$x^2 + y^2 + 2x - 10y + 6 = 0,$$

اگر و فقط اگر

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 20.$$

پس مکانِ مطلوب، دایره‌ای به مرکز $(-1,5)$ و به شعاع $2\sqrt{5}=\sqrt{20}$ است.

حال گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. می‌خواهیم معادلهٔ یک بیضی را که مرکز آن نقطهٔ (α,β) می‌باشد پیدا کنیم. فرض می‌کنیم طول قطر بزرگ این بیضی $2a$ و طول قطر کوچک آن $2b$ باشد. کانونهای این بیضی را نیز نقاط $F=(\alpha+c,\beta)$ و $F'=(\alpha-c,\beta)$ فرض می‌کنیم (یعنی بیضی را به‌صورت افقی درنظر می‌گیریم). مانند بحث روی معادلهٔ دایره، مبدأ مختصات را به نقطهٔ (α,β) منتقل می‌کنیم. معادلهٔ این بیضی نسبت به دستگاه جدید $\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$ است. امّا

$$\begin{cases} x'=x-\alpha \\ y'=y-\beta \end{cases}$$

و لذا $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ معادلهٔ بیضی در دستگاه قدیم است. درنتیجه می‌توانیم بگوییم معادلهٔ بیضی به مرکز (α,β)، کانونهای $F=(\alpha+c,\beta)$ و $F'=(\alpha-c,\beta)$ و قطر بزرگ به طول $2a$ و قطر کوچک به طول $2b$ به‌صورت زیر است

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1\ ,$$

که در آن $a>b$ و $c^2=a^2-b^2$.

همچنین اگر کانونها $F=(\alpha,\beta+c)$ و $F'=(\alpha,\beta-c)$ فرض شوند (یعنی بیضی را بیضی قائم درنظر بگیریم) آنگاه معادلهٔ بیضی به‌صورت زیر خواهد بود

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1.$$

مثال ۴. نوع مقطع مخروطی $4x^2+y^2-32x+6y+57=0$ را تعیین کرده و آن را رسم می‌کنیم. برای این منظور با دسته‌بندی معادله به‌صورت

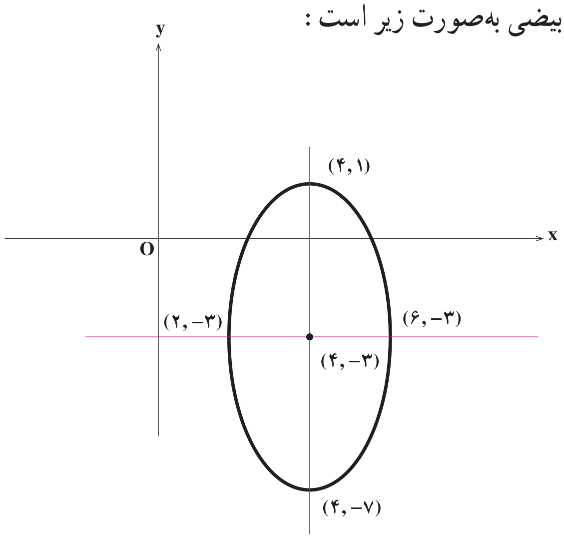
$$4(x^2-8x)+y^2+6y+57=0,$$

$$4(x-4)^2-64+(y+3)^2-9+57=0,$$

$$۴(x-۴)^۲+(y+۳)^۲=۱۶ \,,$$

$$\frac{(x-۴)^۲}{۴}+\frac{(y+۳)^۲}{۱۶}=۱ \,,$$

درمی‌یابیم که نوع مقطع مخروطی داده شده بیضی است که مرکز آن $(۴,-۳)$ می‌باشد و در آن $a=۴$ و $b=۲$. نمودار این بیضی به‌صورت زیر است :



شکل ۵

اکنون مشابه آنچه در بالا دیدیم می‌توانیم نشان دهیم که

$$(y-\beta)^۲=۴a(x-\alpha)$$

معادله یک سهمی است که رأس آن نقطهٔ (α,β) ، کانون آن نقطهٔ $F=(\alpha+a,\beta)$ و خط هادی آن دارای معادلهٔ $x=\alpha-a$ است.

همچنین

$$(x-\alpha)^۲=۴a(y-\beta)$$

نیز معادلهٔ یک سهمی است که رأس آن نقطهٔ (α,β) ، کانون آن نقطهٔ $F=(\alpha,\beta+a)$ و خط هادی آن دارای معادلهٔ $y=\beta-a$ است.

در مورد هذلولی به مرکز (α,β) نیز می‌توانیم معادلات زیر را به‌دست آوریم

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲}-\frac{(y-\beta)^۲}{b^۲}=۱ \,,$$

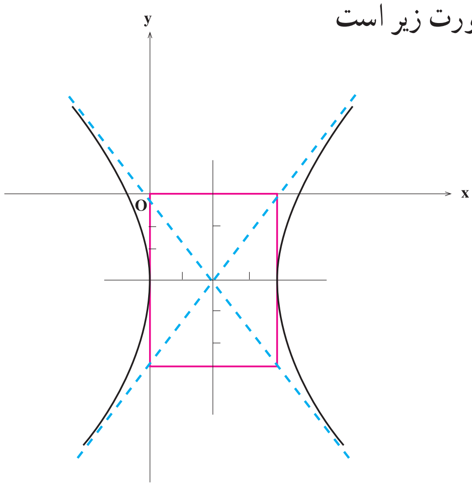
$$\frac{(y-\beta)^{۲}}{a^{۲}}-\frac{(x-\alpha)^{۲}}{b^{۲}}=۱.$$

مثال ۵. نوع مقطع مخروطی $۹x^{۲}-۴y^{۲}-۳۶x-۲۴y-۳۶=۰$ را تعیین کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم. توجه می‌کنیم که با دسته‌بندی، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید

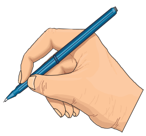
$$\frac{(x-۲)^{۲}}{۴}-\frac{(y+۳)^{۲}}{۹}=۱.$$

پس این مقطع مخروطی یک هذلولی به مرکز $(۲,-۳)$ است که در آن $a=۲$ و $b=۳$.

نمودار این هذلولی به‌صورت زیر است



شکل ۶



تمرین

۱. نشان دهید هر یک از معادلات زیر، معادلهٔ یک دایره است و شعاع و مرکز هر یک از آنها را به‌دست آورید.

الف) $x^{۲}+y^{۲}-۴y=۵$,

ب) $x^{۲}+y^{۲}-۴x+۶y=۳$,

ج) $x^{۲}+y^{۲}+۸x-۶y=۰$.

۲. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-۱,-۲)$ بوده و از نقطهٔ $(۲,۳)$ بگذرد.

۳. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(۲,-۲)$ بوده و بر خط $y = x + ۴$ مماس باشد.
۴. معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که از سه نقطهٔ $(۴,۶)$، $(-۲,-۲)$ و $(۵,-۱)$ بگذرد.
۵. مکان هندسی نقاطی مانند (x,y) را پیدا کنید که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(-۲,۱)$ نصف فاصلهٔ آنها از نقطهٔ $(۴,-۲)$ باشد.
۶. نوع هریک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

الف) $۴x^۲ + ۹y^۲ - ۱۶x - ۳۶y + ۱۶ = ۰$،

ب) $۱۶x^۲ + ۹y^۲ + ۶۴x + ۵۴y + ۱ = ۰$،

ج) $x^۲ + ۸x + ۸y = ۰$،

د) $y^۲ + ۱۲x + ۴y - ۳۲ = ۰$،

هـ) $x^۲ + y^۲ + ۱۲x + ۱۰y + ۴۵ = ۰$،

و) $x^۲ + y^۲ - ۸x - ۶y = ۰$،

ز) $-۹x^۲ + ۱۶y^۲ - ۷۲x - ۹۶y - ۱۴۴ = ۰$،

ح) $۱۶x^۲ - ۲۵y^۲ - ۱۶۰x = ۰$.

۶.۳ دوران محورهای مختصات

در بخش قبل دیدیم که معادلات

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲ \ ,$$

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱ \ , \quad \frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} + \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} = ۱ \ ,$$

$$(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha) \ , \ (x-\alpha)^۲ = ۴a(y-\beta) \ ,$$

$$\frac{(x-\alpha)^۲}{a^۲} - \frac{(y-\beta)^۲}{b^۲} = ۱ \ , \quad \frac{(y-\beta)^۲}{a^۲} - \frac{(x-\alpha)^۲}{b^۲} = ۱ \ ,$$

به‌ترتیب معادلات دایره، بیضی، سهمی و هذلولی بودند که محورهای آنها موازی محورهای مختصات بود و (α,β) برای دایره، بیضی و هذلولی مرکز و برای سهمی رأس محسوب می‌شد. اگر هریک از این معادلات را پس از به توان رساندن جملات آن و ساده کردن مرتب کنیم، معادله‌ای به‌صورت

$$ax^۲ + cy^۲ + dx + ey + f = ۰ \qquad (۱)$$

به‌دست می‌آوریم. اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ (۱) صدق می‌کنند چیست. برای پاسخ به این سؤال چند حالت را در نظر می‌گیریم.

۱) $a=c=0$.

در این حالت معادلهٔ (۱) به معادلهٔ $dx+ey+f=0$ تبدیل می‌شود که یک خط، یا کل صفحه (وقتی $d=e=f=0$) را مشخص می‌کند و یا مکانی را به‌دست نمی‌دهد (وقتی $d=e=0$ و $f\neq 0$).

۲) $a=0$ و $c\neq 0$.

در این حالت معادلهٔ (۱) به معادلهٔ $cy^2+dx+ey+f=0$ تبدیل می‌شود. در این صورت اگر $d=0$، به‌دست می‌آوریم $cy^2+ey+f=0$ که یک خط، یا دو خط موازی را مشخص می‌کند و یا مکانی را به‌دست نمی‌دهد. اگر $d\neq 0$ نیز پس از مرتب کردن، به معادلهٔ

$$\left(y-\frac{-e}{2c}\right)^2=4\left(\frac{-d}{4c}\right)\left(x-\frac{e^2-4cf}{4cd}\right)$$

دست می‌یابیم که یک سهمی را مشخص می‌کند.

۳) $a\neq 0$ و $c=0$.

این حالت مشابه حالت ۲ می‌باشد و مکانی که در این حالت معادلهٔ (۱) به‌دست می‌دهد، یک خط، یا دو خط موازی و یا یک سهمی می‌باشد و یا مکانی توسط (۱) مشخص نمی‌شود.

۴) $a\neq 0$ و $c\neq 0$.

در این حالت پس از مرتب کردن معادلهٔ (۱) به‌صورت مربعات کامل خواهیم داشت

$$a\left(x-\frac{-d}{2a}\right)^2+c\left(y-\frac{-e}{2c}\right)^2=\frac{d^2c+e^2a-4acf}{4ac}.$$

پس در این حالت معادلهٔ (۱)، بجز در حالات استثنایی که یک نقطه و یا دو خط متقاطع را به دست می‌دهد ؛ یک دایره، یک بیضی و یا یک هذلولی را مشخص می‌کند و یا مکانی را به‌دست نمی‌دهد. با توجه به آنچه در بالا گفته شد می‌توانیم قضیهٔ زیر را بنویسیم.

قضیهٔ ۱. مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ

$$ax^2+cy^2+dx+ey+f=0$$

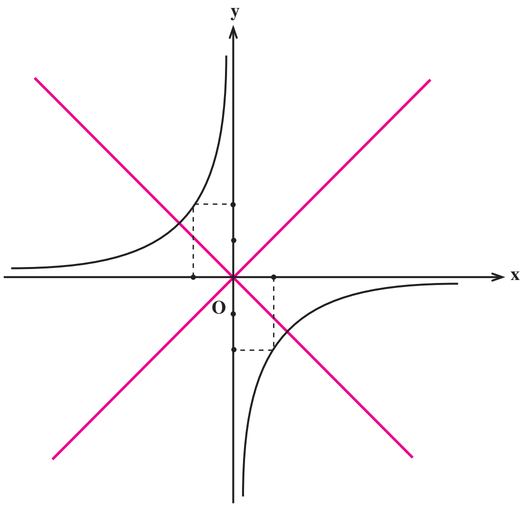
صدق می‌کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می‌باشد ؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

توجه می‌کنیم که معادلهٔ (۱)، یک حالت خاص از معادلهٔ درجهٔ دوم کلی زیر می‌باشد که در آن $b=0$

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0. \qquad (۲)$$

اکنون می‌خواهیم بررسی کنیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند چیست.

ابتدا یک حالت خاص را بررسی می‌کنیم. مثلاً فرض کنیم $a=c=d=e=0$، $b=1$ و $f=2$.
پس می‌خواهیم مکان هندسی نقاطی از صفحه را پیدا کنیم که در معادلهٔ $xy=-2$ صدق می‌کنند. این معادله را می‌توانیم به‌صورت $y=\frac{-2}{x}$ بنویسیم. از سال سوم به یاد داریم که این معادله یک تابع هموگرافیک را مشخص می‌کند و لذا نمودار آن به‌صورت زیر است.



شکل ۱

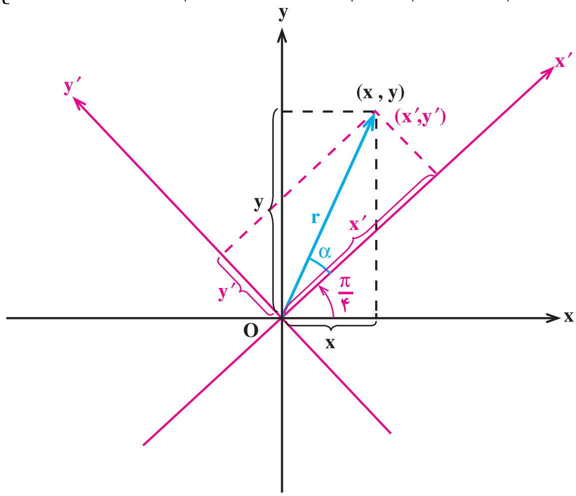
ببینیم چه اتفاقی افتاده است. نمودار $xy=-2$ به یک هذلولی شبیه شده است. سؤالی که پیش می‌آید این است که اگر واقعاً شکل بالا یک هذلولی است پس چرا معادلهٔ آن به شکل معادلاتی که در بخش ۴ مطالعه کردیم نمی‌باشد. البته این موضوع نمی‌تواند هذلولی بودن شکل بالا را زیر سؤال ببرد. درواقع اگر نمودار شکل ۱ یک هذلولی باشد خطوط قرمز موجود در شکل که موازی محورهای مختصات نمی‌باشند محورهای این هذلولی خواهند بود و لذا انتظاری نیست که معادلهٔ این هذلولی به‌صورت معادلات هذلولی‌های با محورهای موازی محورهای مختصات باشد.

اکنون می‌خواهیم سعی کنیم که نشان دهیم شکل بالا یک هذلولی است. به‌نظر شما چگونه با این مسأله برخورد کنیم. برای این منظور محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم. قطعاً اگر شکل بالا هذلولی باشد، بایستی در دستگاه جدید دارای معادله‌ای باشد از نوع معادلات هذلولی‌های مطرح شده در بخش ۴، زیرا محورهای آن موازی محورهای دستگاه مختصات جدید خواهند شد.

ابتدا مسأله دوران محورها را حول مبدأ مختصات به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ بررسی می‌کنیم. گیریم یک نقطه در دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') باشد. رابطهٔ بین این دو مختصات را پیدا می‌کنیم.

با توجه به شکل ۲ می‌توانیم بنویسیم $\begin{cases} x' = r\cos\alpha \\ y' = r\sin\alpha \end{cases}$ و $\begin{cases} x = r\cos(\alpha + \frac{\pi}{۴}) \\ y = r\sin(\alpha + \frac{\pi}{۴}) \end{cases}$. لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\frac{\pi}{۴} - r\sin\alpha\sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \\ y = r\cos\alpha\sin\frac{\pi}{۴} + r\sin\alpha\cos\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y' \end{cases}$$



شکل ۲

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) باشد، در دستگاه دوران‌یافتهٔ جدید با مختصات $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y', \frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y')$ ظاهر می‌شود. پس $xy = -۲$ در دستگاه جدید معادله‌ای به شکل $(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' - \frac{\sqrt{۲}}{۲}y')(\frac{\sqrt{۲}}{۲}x' + \frac{\sqrt{۲}}{۲}y') = -۲$ ، $\frac{۱}{۲}x'^{۲} - \frac{۱}{۲}y'^{۲} = -۲$ ، یا

$$\frac{y'^{۲}}{۴} - \frac{x'^{۲}}{۴} = ۱$$

دارد که همان معادلهٔ هذلولی با محورهای موازی محورهای مختصات است، البته محورهای دستگاه جدید. پس ثابت کردیم که مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ $xy = -۲$ صدق می‌کنند یک هذلولی است. این کار را با دوران محورهای مختصات حول مبدأ مختصات به اندازه $\frac{\pi}{۴}$ در جهت مثلثاتی، بازنویسی معادلهٔ $xy = -۲$ در دستگاه جدید و علم به این‌که معادلهٔ بازنویسی شدهٔ $xy = -۲$ در دستگاه جدید معادلهٔ یک هذلولی است انجام دادیم.

حال فرض کنیم اطّلاعی از این‌که باید محورهای مختصات را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ دوران می‌دادیم تا بازنویسی شدهٔ معادلهٔ $xy = -۲$ در دستگاه جدید به‌صورتی آشنا تبدیل شود نداشتیم، ولیکن می‌دانستیم که با دوران محورهای مختصات و بازنویسی معادلهٔ $xy = -۲$ نسبت به دستگاه جدید مکان مطلوب مشخص خواهد شد، چگونه بایستی زاویهٔ مناسبِ دوران را پیدا می‌کردیم. بیایید مجدداً مسأله دوران محورهای مختصات را مطرح کنیم. گیریم یک دستگاه مختصات قائم داده شده است. محورهای آن را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازهٔ زاویهٔ ثابت θ دوران می‌دهیم. می‌خواهیم ببینیم اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) باشد و نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات (x',y') ، آنگاه این دو مختصات چه رابطه‌ای با هم دارند.

مجدداً با توجه به شکل ۲ و با فرض این‌که زاویهٔ دوران به‌جای $\frac{\pi}{۴}$ ، θ باشد می‌توانیم بنویسیم

$\begin{cases} x' = r\cos\alpha \\ y' = r\sin\alpha \end{cases}$ و $\begin{cases} x = r\cos(\alpha+\theta) \\ y = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases}$. لذا با استفاده از بسط سینوس و کسینوس به‌دست می‌آوریم

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta = (\cos\theta)x' - (\sin\theta)y' \\ y = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta = (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y' \end{cases} \qquad (۳)$$

پس اگر یک نقطه نسبت به دستگاه قدیم دارای مختصات (x,y) باشد، نسبت به دستگاه جدید دارای مختصات $\left((\cos\theta)x' - (\sin\theta)y', (\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'\right)$ خواهد بود. حال فرض کنیم $xy = -۲$ معادلهٔ منحنی مورد مطالعه در دستگاه قدیم باشد. معادلهٔ این منحنی در دستگاه دوران‌یافتهٔ جدید را پیدا می‌کنیم:

$$\left((\cos\theta)x' - (\sin\theta)y'\right)\left((\sin\theta)x' + (\cos\theta)y'\right) = -۲ \ ,$$

$$(\cos\theta\sin\theta)x'^{۲} + (\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta)x'y' - (\sin\theta\cos\theta)y'^{۲} + ۲ = ۰.$$

معادلهٔ اخیر، معادلهٔ منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است. θ را باید چگونه انتخاب می‌کردیم تا این معادله قابل شناسایی می‌شد؟ بله پاسخ شما درست است. در اینجا جملهٔ شامل $x'y'$ یک جملهٔ مزاحم در شناسایی است و باید $۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲}$ را طوری انتخاب کنیم که ضریب این جمله صفر شود:

$$\cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta = ۰,$$

$$\cos ۲\theta = ۰,$$

$$۲\theta = \frac{\pi}{۲},$$

$$\theta = \frac{\pi}{۴}.$$

پس اگر محورها را به اندازهٔ $\frac{\pi}{۴}$ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم (یعنی زاویه‌ای که قبلاً نیز بررسی کرده بودیم)، به معادلهٔ

$$\frac{۱}{۲}x'^{۲} - \frac{۱}{۲}y'^{۲} + ۲ = ۰,$$

یا

$$\frac{y'^{۲}}{۴} - \frac{x'^{۲}}{۴} = ۱,$$

می‌رسیم که معادلهٔ منحنی مورد مطالعه در دستگاه جدید است. مجدداً مانند قبل می‌توانیم متوجه شویم که $xy = -۲$ نیز معادلهٔ یک هذلولی بوده است، چرا که بازنویسی شدهٔ این معادله نسبت به دستگاه دوران‌یافته یک هذلولی است.

حال با همین دیدگاه به بررسی مکان هندسی نقاطی از صفحه که معادلهٔ (۲)، یعنی

$$ax^{۲} + bxy + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰,$$

مشخص می‌کند می‌پردازیم.

گیریم محورهای مختصات را به اندازهٔ زاویهٔ θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم. منحنی که معادلهٔ (۲) مشخص می‌کند در دستگاه جدید دارای معادلهٔ

$$a((\cos\theta)x'-(\sin\theta)y')^{2}+b((\cos\theta)x'-(\sin\theta)y')((\sin\theta)x'+(\cos\theta)y')$$
$$+c((\sin\theta)x'+(\cos\theta)y')^{2}+d((\cos\theta)x'-(\sin\theta)y')+e((\sin\theta)x'+(\cos\theta)y')$$
$$+f=0,$$

می‌باشد. این معادله پس از به توان رساندن جملات آن و مرتب کردن جملات به‌صورت

$$Ax'^{2}+Bx'y'+Cy'^{2}+Dx'+Ey'+F=0$$

تبدیل می‌شود، که در آن ضریب $x'y'$، یعنی B، به‌صورت زیر است:

$$B=2(c-a)\sin\theta\cos\theta+b(\cos^{2}\theta-\sin^{2}\theta).$$

حال $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ را طوری تعیین می‌کنیم که ضریب $x'y'$ برابر صفر شود، یعنی داشته باشیم $B=0$:

$$2(c-a)\sin\theta\cos\theta+b(\cos^{2}\theta-\sin^{2}\theta)=0,$$
$$(c-a)\sin 2\theta+b\cos 2\theta=0,$$
$$(c-a)\tan 2\theta+b=0,$$
$$\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}.$$

پس اگر $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ را طوری انتخاب کنیم که $\tan 2\theta=\frac{b}{a-c}$، آنگاه بازنویسی شدهٔ معادلهٔ (۲) نسبت به دستگاه دوران یافته به اندازهٔ زاویهٔ θ به‌صورت

$$Ax'^{2}+Cy'^{2}+Dx'+Ey'+F=0,$$

خواهد بود. امّا بنابر قضیهٔ ۱، مکان هندسی نقاطی از صفحه را که معادلهٔ اخیر به‌دست می‌دهد، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط متقاطع و یا کل صفحه می‌باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است و لذا مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ (۲) صدق می‌کنند نیز چنین است. پس قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۲. مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ

$$ax^{2}+bxy+cy^{2}+dx+ey+f=0,$$

صدق می‌کنند، بجز در حالات استثنایی که تهی، یک نقطه، یک خط، دو خط موازی، دو خط

متقاطع و یا کل صفحه می‌باشد؛ یک دایره، یک بیضی، یک سهمی و یا یک هذلولی است.

مثال ۱. می‌خواهیم نوع مقطع مخروطی $۱۷x^{۲}-۶xy+۹y^{۲}-۷۲=۰$ را تعیین کنیم. در این مثال داریم $a=۱۷$، $b=-۶$، $c=۹$، $d=e=۰$ و $f=-۷۲$. محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازهٔ زاویهٔ θ دوران می‌دهیم که در آن θ از تساوی زیر به‌دست می‌آید

$$\tan ۲\theta=\frac{b}{a-c}=\frac{-۶}{۱۷-۹}=\frac{-۶}{۸}=\frac{-۳}{۴}.$$

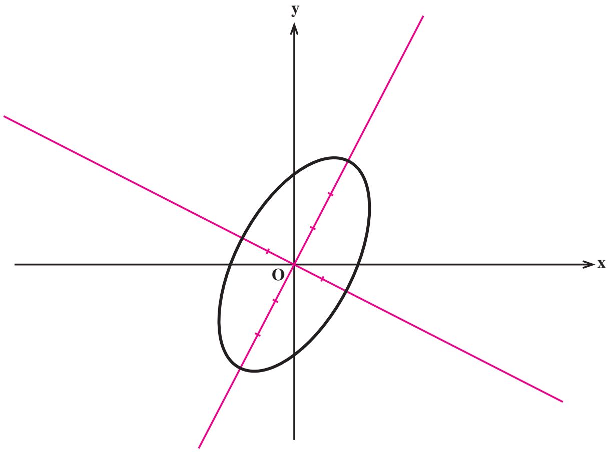
اکنون با توجه به اتحاد $۱+\tan^{۲} ۲\theta=\frac{۱}{\cos^{۲} ۲\theta}$ به‌دست می‌آوریم $\cos ۲\theta=\frac{-۴}{۵}$ و لذا از اتحادهای $\cos^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}(۱+\cos ۲\theta)$ و $\sin^{۲}\theta=\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\theta)$ نتیجه می‌شود $\cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ و $\sin\theta=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}$. اکنون معادلهٔ داده شده در مثال، نسبت به دستگاه دوران یافته با توجه به (۳) به‌صورت

$$۱۷(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x'-\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y')^{۲}-۶(\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}x'-\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}y')(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x'+\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}y')$$
$$+۹(\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}x'+\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}y')^{۲}-۷۲=۰$$

تبدیل می‌شود که پس از ساده کردن به‌صورت

$$\frac{x'^{۲}}{۹}+\frac{y'^{۲}}{۴}=۱$$

در می‌آید. چون این معادله یک بیضی را مشخص می‌کند، لذا معادلهٔ داده شده در مثال نیز بیضی را مشخص می‌کرده است. حال با توجه به $\tan ۲\theta=\frac{-۳}{۴}$ و به کمک ماشین‌حساب‌های مهندسی می‌توانیم اندازهٔ زاویهٔ θ را به‌دست آوریم که در اینجا تقریباً برابر ۷۱/۶ درجه می‌باشد. پس برای رسم بیضی داده شده در مثال کافی است محورهای مختصات را به اندازهٔ ۷۱/۶ درجه حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم و سپس در دستگاه جدید بیضی $\frac{x'^{۲}}{۹}+\frac{y'^{۲}}{۴}=۱$ را رسم کنیم:



شکل ۳

تمرین

۱. اگر محورهای مختصات را به اندازهٔ زاویهٔ θ حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران دهیم، هر یک از معادلات زیر را نسبت به دستگاه جدید بازنویسی کنید.

الف) $x^۲ + y^۲ = ۴۹ \ , \ \theta = \frac{\pi}{۴}$,

ب) $x^۲ + y^۲ = ۲۵ \ , \ \theta = \frac{\pi}{۳}$,

ج) $۲x^۲ + \sqrt{۳}xy + y^۲ - ۱۰ = ۰ \ , \ \theta = \frac{\pi}{۶}$,

د) $x^۲ + ۸xy + y^۲ - ۷۵ = ۰ \ , \ \theta = \frac{\pi}{۴}$.

۲. با استفاده از دوران محورهای مختصات به اندازه‌ای مناسب، نوع هر یک از مقاطع مخروطی زیر را تعیین کرده و آنها را رسم کنید.

الف) $x^۲ - ۴xy + y^۲ - ۱۲ = ۰$,

ب) $x^۲ + xy + y^۲ - ۶ = ۰$,

ج) $۸x^۲ - ۴xy + ۵y^۲ - ۳۶ = ۰$,

د) $۵x^۲ - ۴xy + ۸y^۲ - ۳۶ = ۰$,

هـ) $x^{۲} - ۲\sqrt{۳}xy + ۳y^{۲} - ۱۶\sqrt{۳}x - ۱۶y = ۰$,

و) $x^{۲} + ۲\sqrt{۳}xy + ۳y^{۲} + ۸\sqrt{۳}x - ۸y = ۰$.

۳. فرض کنید معادلهٔ $ax^{۲} + bxy + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰$ داده شده است. محورهای مختصات را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازه‌ای دلخواه دوران می‌دهیم. اگر معادلهٔ بالا نسبت به دستگاهِ جدیدِ دوران یافته به‌صورت $Ax'^{۲} + Bx'y' + Cy'^{۲} + Dx' + Ey' + F = ۰$ بازنویسی شود، ثابت کنید $B^{۲} - ۴AC = b^{۲} - ۴ac$.

از این‌جا نتیجه‌گیری کنید مکان هندسی نقاطی از صفحه که در معادلهٔ

$$ax^{۲} + bxy + cy^{۲} + dx + ey + f = ۰$$

صدق می‌کنند به‌صورت زیر رده‌بندی می‌شوند :

نوع مکان هندسی	$b^{۲} - ۴ac$
تهی، نقطه، دایره، بیضی	منفی
تهی، یک خط، دو خط موازی، کل صفحه، سهمی	صفر
دو خط متقاطع، هذلولی	مثبت