فصل ۱

دنباله‌ها

۱ـ۱ـ مقدمه

وقتی در یک برنامه تلویزیونی به حرکات و تکاپوی انبوهی از ماهی‌ها می‌نگریم، به این فکر وادار می‌شویم که رشد جمعیت ماهی‌ها از چه مدل و رابطه‌ای پیروی می‌کند.

آیا می‌توانیم با توجه به شرایط زیست‌محیطی و تغییرات آن رشد و زوال گونه خاصی از ماهی‌ها را پیش‌بینی کنیم؟ فرض کنیم مدل جمعیتی نوع خاصی از ماهی‌ها از رابطه

$$P_{n+1}=\frac{bp_n}{a+p_n}$$

پیروی کند که در آن p_n جمعیت ماهی‌ها در سال nام، P_{n+1} جمعیت ماهی‌ها در سال n+۱ام و a و b دو عدد ثابت‌اند که به شرایط محیطی ماهی‌ها وابسته‌اند.

با استفاده از این رابطه چنان‌چه جمعیت ماهی‌ها در سال اول، یعنی P_1 معلوم باشد، جمعیت ماهی‌ها در سال دوم و سال‌های بعد به دست می‌آید. یعنی اعداد

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, \cdots$$

حاصل می‌شوند که اصطلاحاً آن را دنباله می‌نامیم. مطالعه دنباله‌ها و خواص آنها موضوع این فصل می‌باشد.

مسأله

(الف) به نظر شما براساس مدل داده شده فوق تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها افزایش می‌یابد؟

(ب) تحت چه شرایطی جمعیت ماهی‌ها کاهش یافته و جمعیت فنا می‌شود؟

با مطالعه مبحث دنباله‌ها و بررسی خواص آنها به این پرسش‌ها می‌توان پاسخ داد.

۱ـ۲ـ دنباله‌های عددی

در سال‌های قبل با اعداد اعشاری و تبدیل کسرهای گویا به اعداد اعشاری آشنا شده‌اید. برای مثال برای آن‌که کسر $\frac{۱}{۳}$ را به کسر اعشاری تبدیل کنیم کافی است عدد ۱ در صورت کسر را به عدد ۳ مخرج تقسیم کنیم در ابتدا عدد ۰/۳ حاصل می‌شود. اگر تقسیم را ادامه دهیم اعداد ۰/۳۳، ۰/۳۳۳ و نظایر این‌ها به دست می‌آیند. چون باقیمانده هرگز صفر نمی‌شود این اعشار همچنان ادامه دارند. آیا $\frac{۱}{۳}$ با اعداد به‌دست آمده برابر است؟

هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳ اختیارکنیم، مقداری تقریبی برای $\frac{۱}{۳}$ به‌دست آورده‌ایم که خطای این تقریب کمتر از ۰/۱ است: زیرا

$$\frac{۱}{۳}-۰/۳=۰/۰۳۳\ldots$$

و ۰/۰۳۳...>۰/۱ هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳۳ اختیار کنیم، خطای تقریب از ۰/۰۱ نیز کوچک‌تر است. به همین نحوه هرگاه $\frac{۱}{۳}$ را برابر ۰/۳۳۳ بگیریم، خطای تقریب از ۰/۰۰۱ کوچک‌تر است. در عمل و محاسبات کاربردی خطای تقریب را از پیش معین کرده و متناسب با آن مقدار تقریب $\frac{۱}{۳}$ را به‌صورت اعشاری، با اعشار خاتمه یافته، مشخص می کنند.

مسأله

ممکن است چنین به نظر رسد که برای آن‌که خطای تقریب را به صفر برسانیم بهتر است بنویسیم

$$\frac{۱}{۳}=۰/۳۳۳۳\ \ldots$$

امّا نوشتن کسر اعشاری با نمایش ۰/۳۳۳۳۰۰۰ که در آن رقم اعشاری ۳، برای همیشه ادامه دارد، چه معنا و مفهومی می‌تواند داشته باشد؟ برخی برای آنکه ۳ صدم و ۳ هزارم و ... را تکرار نکنند می‌نویسند.

$$\frac{۱}{۳}=۰/\overline{۳}$$

اگر منظورمان از نوشتن سه نقطه «...» به دنبال آخرین ۳ این است که این رقم تا ابد ادامه دارد چگونه می‌توانیم تساوی فوق را تفسیر کنیم؟

در واقع دنباله‌ای از اعداد اعشاری به‌صورت

$$۰/۳,۰/۳۳,۰/۳۳۳,\ldots,۰/\overbrace{۳۳۳\ldots۳}^{n\text{ بار }۳},\ldots$$

$$a_۱\quad a_۲\quad a_۳,\ldots,a_n,\ldots$$

در دست داریم که در آن $a_n=۰/\overbrace{۳۳۳\ldots۳}^{n\text{ بار }۳}\ ,\ \ldots\ ,\ a_۲=۰/۳۳\ ,\ a_۱=۰/۳$

a_1 را جمله اول این دنباله، a_2 را جمله دوم و در حالت کلی، a_n را جمله nام این دنباله یا **جمله عمومی** دنباله می‌نامیم.

فعالیت

اکنون شما احمد بفرمایید که یک دنباله را به زبان ریاضی چگونه تعریف می‌کنید؟

احمد : یک دنباله عددی مجموعه‌ای از اعداد است که این اعداد با اعداد طبیعی شماره‌گذاری شده‌اند.

دبیر : بسیار خوب. آیا می‌توانی به زبان دقیق‌تری دنباله را تعریف کنی؟

احمد : آری، هر دنباله عددی، یا به‌اختصار دنباله، تابعی است با دامنه مجموعه اعداد طبیعی N و هم دامنه مجموعه اعداد حقیقی R.

دبیر : بسیار خوب. شما تعریف دقیق دنباله را ارایه دادید. می‌توانی با علامات ریاضی توضیح بیشتری بدهی؟

احمد : فرض کنیم $a: N \to R$ (۱)

یک تابع، یعنی یک دنباله باشد، در این صورت $a(۱)$ ، $a(۲)$، . . . ، $a(n)$ مقادیر تابع a بوده که اعدادی حقیقی‌اند. در موقعیت کاری با دنباله‌ها، به جای $a(۱)$ می‌نویسیم $a_۱$، به جای $a(۲)$ می‌نویسیم $a_۲$ و به‌طور کلی به جای $a(n)$ می‌نویسیم a_n. لذا نماد تابعی نمایش داده شده در (۱) به‌صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود :

$$a_۱ , a_۲ , \ldots , a_n , \ldots$$

دبیر : اکنون شما حسین دو دنباله دیگر نام ببرید.

حسین : این پرسش ساده‌ای است؛ می‌توانم بنویسم :

$$۱, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \ldots, \frac{۱}{n}, \ldots \qquad (۱)$$

$$\frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \frac{۴}{۵}, \ldots, \frac{n}{n+۱}, \ldots \qquad (۲)$$

دبیر : اکنون این دنباله را در نظر بگیرید :

$$۷, -۸, ۹, \frac{۵}{۶}, \frac{۶}{۷}, \frac{۷}{۸}, \frac{۸}{۹}, \ldots \qquad (۳)$$

آیا می‌توانی جمله عمومی این دنباله و یا شکل تابعی آن را بیان کنی؟

حسین : آری، ۷ اولین جمله این دنباله است، همین ۸− دومین و ۹ سومین و $\frac{5}{6}$ چهارمین جمله آن است. اگر نام این دنباله را b بنامیم، داریم

$$b_1 = 7,\ b_2 = -8\ ,\ b_3 = 9\ ,\ b_4 = \frac{5}{6}\ ,\ b_5 = \frac{6}{7}\ ,\ \cdots$$

اما از شماره ۴ به بعد جملات دنباله، که همان مقادیر تابع‌اند، منظم هستند، پس می‌نویسیم

$$b_1 = 7,\ b_2 = -8\ ,\ b_3 = 9\ ,\ b_n = \frac{n+1}{n+2}\ ,\ n \geq 4 \qquad (4)$$

دبیر : فرق این دنباله با دنباله نموده شده در (۲) چیست؟

حسین : دنباله‌های (۳) و (۲) فقط در سه جمله نخست با هم متفاوت‌اند. از شماره ۴ به بعد دو دنباله متحدند.

دبیر : آیا می‌توانیم بگوییم این دو دنباله یکی‌اند؟

حسین : خیر؛ امّا تفاوت در سه جمله تأثیری کلی در اعداد دو دنباله ندارد.

دبیر : ازدنباله‌های آشنای دیگر خاطرتان هست؟ دنباله هندسی را به خاطر دارید؟

احمد : آری، می‌توانم چند مثال بزنم، برای نمونه یک دنباله هندسی می‌سازم :

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots$$

دبیر : درست است. این دنباله یک دنباله هندسی است که قدر نسبت آن $q = \frac{1}{2}$ است. جملات آن مرتب کوچک و کوچکتر می‌شوند زیرا قدر نسبت آن کوچکتر از واحد است.

حسین : منظورتان از کوچکتر شدن چیست؟

دبیر : منظورمان این است که جملات دنباله به عدد صفر گرایش دارند، اصطلاحاً گوییم حد دنباله برابر صفر است.

حسین : اما هر کسر به شکل $\frac{1}{2^{n-1}}$ ولو n خیلی بزرگ باشد، هرگز برابر صفر نمی‌شود.

دبیر : آری درست است. منظور از آن‌که حد دنباله برابر صفر است، این نیست که جملات دنباله برابر صفر می‌شوند، بلکه خطای آنها تا صفر به دلخواه کوچک می‌گردد. اجازه دهید به این مبحث بعداً بپردازیم. فعلاً به تعاریف و مقدمات دنباله ادامه می‌دهیم.

نماد دنباله : وقتی با یک دنباله مانند

$$a_۱,\ a_۲, a_۳, \ldots, a_n, \ldots$$

سر و کار داریم، آن را با نماد آکولاد یعنی $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و یا مختصراً $\{a_n\}_{n=۱}$ و یا حتی مختصرتر با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم. برای مثال، دنباله‌هایی را که قبلاً حسین نام برد با $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}_{n=۱}$, $\left\{\frac{۱}{n}\right\}_{n=۱}$ نشان می‌دهیم، لذا جمله عمومی دنباله را در درون آکولاد قرار می‌دهیم و $n=۱$ نشانگر آن است که شماره جملات از عدد طبیعی ۱ شروع می‌شود.

البته هرگاه دنباله، فاقد ضابطه و قانون مشخص باشد، یعنی جمله عمومی آن را نتوانیم با فرمول ساده و معین مانند $a_n = \frac{۱}{n}$ بیان کنیم، چاره‌ای نداریم جز آنکه جملات دنباله را یکی یکی و به دنبال هم نام ببریم و از نماد دنباله نمی‌توانیم استفاده کنیم.

از این نوع دنباله‌ها، می‌توانیم به دنباله اعدادی که نمایشگر عدد π است اشاره کنیم (یعنی اعداد آن به عدد π گرایش دارند).

$$۳, ۳/۱۴, ۳/۱۴۱۵, \ldots$$

برای این دنباله هیچ قاعده و یا قانونی که بر طبق آن بتوان جملات دنباله را تولید کرد وجود ندارد (چرا؟).

نکته : ممکن است با یک توالی متناهی از اعداد سر و کار داشته باشیم. در این صورت این توالی را یک **دنباله متناهی** می‌نامیم، مانند

$$۱, ۲, ۳, ۴, \ldots, ۲۰$$

$$-۵, ۵, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \sqrt{۲}, -\sqrt{۳}$$

که اولی دنباله‌ای متناهی با ۲۰ جمله و دومی دنباله‌ای متناهی با ۶ جمله می‌باشد. اما وقتی از یک دنباله بدون قید نام برده می‌شود مرادمان یک دنباله نامتناهی است.

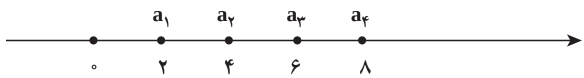
اکنون به ذکر مثال جالبی از دنباله‌ها می‌پردازیم که نظیر تابع ثابت می‌باشد.

مثال : فرض کنیم $C\in R$ عدد ثابتی باشد. دنباله $C, C, C, \ldots, C, \ldots$ که در آن هر جملهٔ آن برابر C، یعنی برای هر عدد طبیعی n، $C_n = C$، دنباله ثابت C نامیده می‌شود برای نمونه دنباله $\sqrt{۲}, \sqrt{۲}, \cdots, \sqrt{۲}, \cdots$

دنباله ثابت $\sqrt{۲}$ یعنی $\{\sqrt{۲}\}$ می‌باشد.

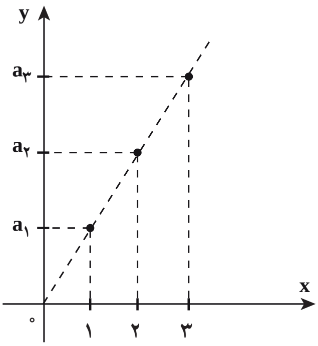
۱ـ۳ـ نمودار دنباله‌ها

یک دنباله را به دو صورت می‌توانیم نمایش دهیم. یک راه آن مشخص کردن جملات دنباله روی خط اعداد حقیقی است. برای نمونه دنباله اعداد زوج، یعنی $\{۲n\}_{n=۱}$ به‌صورت نقاطی روی محور اعداد نمایش داده می‌شود (شکل ۱ــ۱).



شکل ۱ــ۱ــ جملات دنباله $a_n = ۲n$، یعنی اعداد طبیعی زوج با نقاط توپر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده است.

راه دوم نمایش دنباله با استفاده از صورت تابعی آن است، همانند یک تابع نقاط دنباله را در صفحه مختصات نشان می‌دهیم. نمودار دنباله $a_n = ۲n$ در شکل ۱ــ۲ نشان داده شده است.



شکل ۱ــ۲ــ وقتی با خط به معادله $f(x) = ۲x$ مقایسه می‌کنیم، ملاحظه می‌کنیم که نمودار دنباله با ضابطه $a_n = ۲n$ به‌صورت نقاط مجزا و توپر روی این خط قرار دارند.

۱ـ۴ـ انواع دنباله‌ها

در درس حسابان با انواع مهمّی از توابع آشنا شده‌اید. مفاهیم تابع صعودی، تابع نزولی، تابع کراندار در حسابان از اهمیت اساسی برخوردارند. این مفاهیم را بار دیگر یادآوری می‌نماییم.

فرض کنیم A زیرمجموعه‌ای از مجموعه اعداد حقیقی باشد، تابع f را بر A صعودی می‌نامیم، درصورتی که همواره از $x_۱ < x_۲$ نتیجه شود $f(x_۱) \le f(x_۲)$، همچنین تابع f را بر A از بالا کراندار نامیم درصورتی که عدد حقیقی U یافت شود به‌طوری که برای هر $x \in A$ ، $f(x) \le U$

مفاهیم نزولی بودن و از پایین کراندار بودن مشابهاً تعریف می‌شوند تابع f را بر A کراندار می‌نامیم درصورتی که از بالا و از پایین کراندار باشد، یعنی عددی مثبت مانند U یافت شود به‌طوری که برای هر $x \in A$ ، $-U \le f(x) \le U$

چون هر دنباله ماهیتاً یک تابع است، همین مفاهیم را می‌توانید در مورد دنباله‌ها تکرار کنید. در این‌جا کار ساده‌تر است، زیرا دامنه هر دنباله مجموعه اعداد طبیعی است که به‌طور مرتب شده، از

کوچک به بزرگ، در نظر گرفته می‌شود :

$$1<2<3<4<\cdots<n<n+1\ \cdots$$
$$\downarrow a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,a_{n+1}\ ,\cdots$$

پس هرگاه دنباله $\{a_n\}$ بخواهد صعودی باشد، چون $1<2$، باید $a_1\leq a_2$. همچنین چون $2<3$ باید داشته باشیم $a_2\leq a_3$ و به‌طور کلی چون $n<n+1$، لازم است که $a_n\leq a_{n+1}$، یعنی هرگاه از سمت چپ به جملات دنباله بنگریم، هر جمله باید از جمله بعدی کوچکتر یا مساوی باشد.

برای دنباله نزولی وضعیت برعکس است، دنباله‌ای نزولی است که وقتی از چپ بدان می‌نگریم هر جمله از جمله بعدی بزرگتر یا مساوی است به عبارت دیگر دنباله $\{a_n\}$ صعودی است هرگاه برای هر n، $a_n\leq a_{n+1}$ و دنباله $\{b_n\}$ نزولی است هرگاه برای هر n، $b_n\geq b_{n+1}$

هر دنباله که یا صعودی و یا نزولی باشد یک دنباله **یکنوا** نامیده می‌شود.

تمرین در کلاس

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots , 2^{n-1}, \ldots$

ب) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{1}{243}, \cdots, \frac{1}{3^n}, \cdots$

ج) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$

د) $2, (\frac{3}{2})^2, (\frac{4}{3})^3, (\frac{5}{4})^4, (\frac{6}{5})^5, \cdots, (\frac{n+1}{n})^n, \cdots$

اکنون مشخص کنید کدام دنباله صعودی و کدامیک نزولی است.

نکته: در بحث دنباله، از ویژگی‌های حسابی دنباله چنان است که با افزایش شماره جمله دنباله، مقدار جملات افزایش می‌یابد، یا آن‌که وقتی دنباله‌ای از بالا کراندار است، جملات دنباله از یک عدد ثابتی بزرگتر نخواهند شد.

بررسی و مطالعه رفتار دنباله‌ها و همچنین توابع در واقع پیش‌بینی رفتار آنها است.

به دنباله‌های زیر توجه کنید.

الف) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots$

ب) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, (-\frac{1}{2})^n, \cdots$

ج) $2, -3, 4, -5, 6, -7, \cdots$

ویژگی این دنباله‌ها چنان است که جملات آن یک درمیان مثبت و منفی هستند. جملات دنباله (الف) همگی حول دو نقطه ۱ و ۱− گرد آمده‌اند و در واقع برابر ۱ یا ۱− هستند. جملات دنباله (ب) نیز حول یک عدد معین گرد آمده‌اند، درحالی که جملات دنباله (ج) فاقد چنین ویژگی هستند. هیچ‌یک از این سه دنباله نه صعودی‌اند و نه نزولی، پس یکنوا نیستند.

مسائل

۱ــ چهار دنباله زیر را در نظر بگیرید :

الف) $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$ ب) $\{(-1)^{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$

ج) $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ د) $\left\{1+(-\frac{1}{2})^n\right\}_{n=1}^{\infty}$

ابتدا تعدادی از جملات هر دنباله را بنویسید. این که چه تعداد از جمله‌های نخست را انتخاب می‌کنید به خودتان بستگی دارد. سپس مشخص کنید که کدامیک صعودی و کدامیک نزولی‌اند. همچنین تجمع احتمالی جملات هر دنباله را حول یک عدد معین بررسی کنید.

۲ــ یک دنباله بسازید که کراندار باشد امّا صعودی نباشد.

۳ــ یک دنباله بسازید که هم کراندار و هم نزولی باشد.

۴ــ نشان دهید که هیچ‌کدام از دو جمله از دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ برابر نیستند.

۵ــ ده عدد گویا معرفی کنید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۶ــ دنباله‌ای از اعداد گویا بسازید که بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع باشند.

۷ــ با بررسی جملات (اولیه) دنباله‌های زیر رفتار آنها را حدس زده و حدس خود را توضیح دهید.

الف) $\left\{1+(\frac{1}{2})^n\right\}$ ب) $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ ج) $\left\{1+(-1)^n\right\}$

د) $\left\{(1+\frac{1}{n})^n\right\}$ هـ) $\left\{\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{2n}\right\}$ ز) $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$

۸ــ دنباله $a_n=\frac{n}{n+1}$ را در نظر می‌گیریم : $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$

اکنون ۵ جمله نخست آن را تعویض می‌کنیم و دنباله جدید را $\{b_n\}$ می‌نامیم؛ بنابراین، برای مثال،

$$b_1=1,\ b_2=5,\ b_3=10,\ b_4=10,\ b_5=-15$$

و برای $n\geq 6$، قرار می‌دهیم $b_n=a_n$. رفتار دو دنباله $\{a_n\}$، $\{b_n\}$ را مقایسه کنید. چه نتیجه کلی از این بررسی عایدتان می‌شود؟ آن را بیان کنید.

۹ــ دنباله $c_n: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,\dots$

را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را پیدا کنید.

$\{c_n\}$ یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله‌های فیبوناتچی[1] معروف‌اند.

۱۰ــ ثابت کنید هرگاه دنباله $\{a_n\}$ کراندار باشد، عدد مثبتی مانند M هست به قسمی که برای هر n، $|a_n|\leq M$ و بالعکس.

۱۱ــ برای چندین جمله اولیه، فاصله جملات دنباله $\left\{\frac{2n}{n+1}\right\}$ را تا ۲ حساب کنید. n از چه عددی باید بزرگتر باشد تا نابرابری $\left|\frac{2n}{n+1}-2\right|<0/0001$ برقرار باشد.

۱ــ لئوناردو فیبوناتچی یک ریاضیدان ایتالیایی بود که در رابطه با مطالعه زاد و ولد خرگوش‌ها و افزایش جمعیت آنها این‌گونه دنباله‌ها را شناسایی کرده است. در واقع مدل افزایش جمعیت خرگوش‌ها را صورت‌بندی کرده است.

پرسش‌های مفهومی

پرسش‌های زیر را بررسی کنید، اگر فکر می‌کنید درست‌اند، آنها را توضیح دهید و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند مثالی ارائه دهید.

الف) هرگاه n جمله نخست یک دنباله را تغییر دهیم در رفتار آن تغییری حاصل نمی‌شود.

ب) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.

ج) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز صعودی است.

د) هرگاه $\{a_n\}$ دنباله‌ای یکنوا و C عدد ثابتی باشد دنباله $\{ca_n\}$ نیز یکنوا است.

۱ـ۵ـ همگرایی دنباله‌ها

سرچشمه بسیاری از اندیشه‌های جدید ریاضی در اندیشه‌های کشف شده قبلی یا تجربه‌های گذشته نهفته است. با این حال، در بیشتر موارد چنین سرچشمه‌هایی در لایه‌های زیرین مفاهیم مربوطه پنهان بوده و به آسانی نمی‌توان آنها را ملاحظه کرد. در واقع، دیدن و یافتن آنها نگاهی تیزبین و شجاعت در تفکر می‌خواهد؛ در بعضی موارد نیز ظرافت‌هایی دیده می‌شود ولی در بدو امر به نظر نمی‌رسد که اندیشه جدید ریاضی در ورای آنها وجود داشته باشد.

با چنین نگرشی به بحث‌ها و توصیف‌های مربوط به دنباله‌ها باز می‌گردیم و به کندوکاو سرچشمه‌ها، ظرافت‌ها یا اندیشه‌های نو می‌پردازیم.

برحسب هر ویژگی و یا مفهومی که تعریف کرده‌ایم دنباله‌ها را می‌توانیم به دو دسته تقسیم کنیم:

دنباله‌های کراندار و دنباله‌های بیکران (کراندار نیستند).

دنباله‌های یکنوا و دنباله‌هایی که یکنوا نیستند.

یک ویژگی دیگر در مجموعه دنباله‌های بررسی شده وجود دارد که کمتر خودنمایی می‌کند. برخی از دنباله‌ها این ویژگی را دارند که جملات آن به یک عدد مشخص نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند و از روی نمودار نیز شهود می‌شود که به یک نقطه می‌گرایند. بنابراین معیار دسته‌بندی جدید را از این دنباله‌هایی که جملات دنباله، به یک عدد معین می‌گرایند و دنباله‌هایی که جملات آنها، به یک عدد معین نمی‌گرایند. برای مثال از دنباله‌های دسته اوّل به دنباله‌های زیر توجّه می‌کنیم:

دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ دنباله $\left\{\frac{1}{n+1}\right\}$ دنباله $\left\{1+(-\frac{1}{2})^n\right\}$ دنباله $\left\{(-\frac{1}{2})^n\right\}$

و به‌عنوان نمونه از دنباله‌های دستهٔ دوم، یعنی دنباله‌هایی که با افزایش شمارهٔ جملهٔ دنباله، به یک عدد معین نمی‌گرایند، دنباله‌های زیر را نام می‌بریم :

دنبالهٔ اعداد زوج $\{۲n\}$، دنبالهٔ اعداد فرد $\{۲n-۱\}$، دنبالهٔ $\{(-۱)^{n+۱}\}$

ملاحظه می‌کنیم که دنبالهٔ $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ به صفر میل می‌کند به عبارت دیگر جملات این دنباله با افزایش شمارهٔ جمله‌ها، به طرز دلخواهی به عدد صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. همچنین با محاسبهٔ جملات دنبالهٔ $\left\{۱+(-\frac{۱}{۲})^n\right\}$ ملاحظه می‌کنیم که وقتی n بزرگ و بزرگتر می‌شود جملات این دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیکتر می‌شوند. برای آنکه این مفهوم «نزدیکی جملات دنباله به عدد ۱» را به لحاظ ریاضی واضح و روشن کنیم به نمودار این دنباله بار دیگر دقت می‌کنیم.

قبل از این، جدولی برای تعیین مقادیر این دنباله تنظیم می‌کنیم.

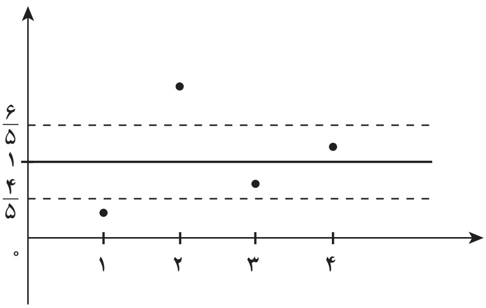
n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	…
a_n	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۷}{۸}$	$\frac{۱۷}{۱۶}$	$\frac{۳۱}{۳۲}$	$\frac{۶۵}{۶۴}$	$\frac{۱۲۷}{۱۲۸}$	…

می‌دانیم میزان نزدیکی دو عدد با قدرمطلق تفاضل آن دو عدد سنجیده می‌شود. پس هرگاه بخواهیم $|a_n-۱|<\frac{۱}{۵}$، کافی است به جای a_n عبارت $۱+(-\frac{۱}{۲})^n$ را قرار دهیم :

$$|a_n-۱|=\left|۱+(-\frac{۱}{۲})^n-۱\right|=(\frac{۱}{۲})^n$$

حال برای آن‌که $(\frac{۱}{۲})^n<\frac{۱}{۵}$ کافی است $۲^n>۵$ (۱) پس هرگاه مثلاً $۲^n\geq ۸=۲^۳>۵$ به‌طور قطع نامساوی (۱) نیز برقرار است؛ در این صورت باید $n\geq ۳$.

در جدول نیز ملاحظه می‌کنیم که از شمارهٔ $n=۳$ به بعد اختلاف جملات دنباله تا عدد ۱ از $\frac{۱}{۵}$ کوچکتر است. به نمودار این دنباله نیز توجه می‌کنیم :



شکل ۱ــ۳

شکل ۱ــ۳ نقاط معرف جملات دنباله از جایی به بعد در درون نوار به مرکز $y=۱$ قرار دارند وقتی نواری به مرکز خط $y=۱$ و به شعاع $\frac{۱}{۵}$ در نظر می‌گیریم مقادیر جملات دنباله از مرتبهٔ ۳ به بعد در

این نوار قرار می گیرند؛ به زبان فنی‌تر هرگاه $n\geq ۳$، یعنی $a_n \in (۱-\frac{۱}{۵},۱+\frac{۱}{۵})$ ، یعنی $a_n \in (\frac{۴}{۵},\frac{۶}{۵})$

$$n=۳\,,\ |a_n-۱|=\left|\frac{۷}{۸}-۱\right|=\frac{۱}{۸}<\frac{۱}{۵}$$

$$n=۴\,,\ |a_n-۱|=\left|\frac{۱۷}{۱۶}-۱\right|=\frac{۱}{۱۶}<\frac{۱}{۵}$$

$$n=۵\,,\ |a_n-۱|=\left|\frac{۳۱}{۳۲}-۱\right|=\frac{۱}{۳۲}<\frac{۱}{۵}$$

$$n=۶\,,\ |a_n-۱|=\left|\frac{۶۵}{۶۴}-۱\right|=\frac{۱}{۶۴}<\frac{۱}{۵}$$

فعالیت

بار دیگر به دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ برمی‌گردیم. می‌دانیم که با بزرگ و بزرگتر شدن n جملات دنباله به عدد صفر می‌گرایند. اکنون از شما خواسته می‌شود که با محاسبات ریاضی این معنی را روشن‌تر سازید. برای نمونه به یک مورد توجه می‌کنیم :

هرگاه $a_n=\frac{۱}{n}$ ، از چه شماره و یا مرتبه‌ای به بعد اختلاف جملات دنباله تا صفر از $\frac{۱}{۱۰۰}$ کوچکتر است؟

در واقع می‌خواهیم جواب‌های نامساوی $|a_n-۰|=\frac{۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰}$ را پیدا کنیم. این نامساوی معادل نامساوی $n>۱۰۰$ می‌باشد، پس داریم.

$$n>۱۰۰\Rightarrow |a_n-۰|<\frac{۱}{۱۰۰}$$

برای مثال

$$n=۱۰۱\Rightarrow |a_n-۰|=\frac{۱}{۱۰۱}<\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$n=۱۰۵\Rightarrow |a_n-۰|=\frac{۱}{۱۰۵}<\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$n=۱۰۰۰\Rightarrow |a_n-۰|=\frac{۱}{۱۰۰۰}<\frac{۱}{۱۰۰}$$

فعالیت

حال با اختیارکردن $\frac{1}{1000}$ به جای $\frac{1}{100}$، مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سپس با اختیارکردن $\frac{1}{1,000,000}$ به جای $\frac{1}{100}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

همچنین با اختیارکردن $\frac{1}{1,000,000,000}$ به جای $\frac{1}{100}$ مرتبه مربوطه را پیدا کنید.

سؤال : آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک نظیر یک صد میلیونم، و یک میلیاردم برقرار است؟

❖ **نکته:** برای پاسخگویی به پرسش اخیر به بررسی بیشتر دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ می‌پردازیم. برخی از مقادیر این دنباله را برای nهای بزرگ در جدول زیر درج کرده‌ایم.

n	$10,$	$100,$	$1000,$	$10^6,$	$10^8,$	$10^9,$	$\dots$
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{10},$	$\frac{1}{100},$	$\frac{1}{1000},$	$\frac{1}{10^6},$	$\frac{1}{10^8},$	$\frac{1}{10^9},$	$\dots$

این جدول برخی مقادیر دنباله $\frac{1}{n}$ را نشان می‌دهد.

با توجه به مقادیر دنباله مشاهده می‌کنیم که هر اندازه n بزرگتر اختیار شود مقدار $\frac{1}{n}$ کوچکتر می‌شود و نقاط نمایش‌دهنده مقادیر این دنباله، روی محور اعداد، به نقطه صفر نزدیک و نزدیکتر می‌شوند.

از طرف دیگر می‌دانیم که همه مقادیر دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ مثبت هستند و لذا نقاط متناظر این مقادیر روی محور حقیقی سمت راست مبداء، یعنی صفر، قرار دارند. می‌توان چنین تصور کرد که چون مقادیر این دنباله از صفر کمتر نمی‌شوند، عدد صفر مانند یک نقطه که مانع عبور نقاط دنباله به سمت چپ خودش است، ایستادگی می‌کند و نقاط دنباله هرگز به صفر نمی‌رسند گرچه به دلخواه به آن نزدیک می‌شوند و گویی نقطه صفر حد نقاط این دنباله است. باید توجه کنیم که شهود بصری، در مواردی، با دقت ریاضی تفاوت دارد؛ در مورد دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ و نمودار هندسی نقاط آن روی محور اعداد به نظر می‌رسد که نقاط نمایش مقادیر $\frac{1}{n}$ برای nهای بزرگ در نزدیک‌های نقطه صفر به هم می‌چسبند و گویی طولی پیوسته می‌سازند! در صورتی که این شهود هندسی کاملاً نادرست است. زیرا هیچ دو نقطه‌ای از این دنباله بر هم منطبق نیستند تا آن‌که طولی پیوسته به وجود آید، مهم‌تر از این می‌دانیم که در واقع بین هر دو کسر گویا بی‌شمار عدد حقیقی گویای دیگر وجود دارد.

با توجه به این‌که فاصله دو نقطه روی محور با قدرمطلق تفاضل آن دو نقطه سنجش می‌شود، از منظر جبری و محاسباتی قدر مطلق تفاضل دو عدد، اختلاف و نزدیکی آن دو عدد را مشخص می‌کند. بنابراین به‌جاست که مفاهیم مربوط به رفتار دنباله را با استفاده از نِماد و مفهوم قدرمطلق صورت‌بندی کنیم.

در حالت کلی هرگاه عددی را که تصور می‌شود جملات یک دنباله به آن می‌گرایند و یا حول آن تجمع می‌کنند «L» بنامیم، آنگاه به آسانی می‌توانیم عبارت‌هایمان را به زبان ریاضی برگردانیم:

اختلاف جمله nام دنباله $\{a_n\}$ با مقدار حدی L به زبان ریاضی می‌شود $|a_n - L|$ و یا فاصله جمله nام دنباله تا نقطه حدی دنباله می‌شود $|a_n - L|$

در حالت خاص دنباله $a_n = \frac{۱}{n}$، عبارت قدرمطلقی مربوطه به صورت زیر است:

$$|a_n - L| = \left|\frac{۱}{n} - ۰\right| = \frac{۱}{n}$$

در انجام فعالیت قبلی ملاحظه کردیم که اگر بخواهیم $\frac{۱}{n} < \frac{۱}{۱۰۰۰,۰۰۰}$ باشد، باید $n > ۱۰۰۰,۰۰۰$؛ و هرگاه بخواهیم $\frac{۱}{n} < \frac{۱}{۱۰^۹}$ کافی است مقادیر n در نامساوی $n > ۱۰^۹$ صدق کنند.

احمد: آیا می‌توان گفت که اختلاف جملات این دنباله از عدد صفر از مقدار $\frac{۱}{۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰}$ (یک صد میلیاردم) نیز کمتر می‌شود.

دبیر: آری، کافی است که n را از ۱۰۰،۰۰۰،۰۰۰،۰۰۰ بزرگتر بگیریم، مثلاً $n = ۱۰^{۱۱} + ۱$ در این صورت

$$\frac{۱}{n} = \frac{۱}{۱۰^{۱۱} + ۱} < \frac{۱}{۱۰^{۱۱}}$$

احمد: آیا این وضعیت برای همه اعداد کوچک و کوچکتر از یکصد میلیاردم نیز صادق است؟

دبیر: آری هر عدد کوچک (مانند $\varepsilon > ۰$ اپسیلن) که انتخاب کنیم ازشماره‌ای به بعد اختلاف جملات مربوطه از صفر کمتر از ε است که در مثال بالا $\varepsilon = \frac{۱}{۱۰^{۱۱}}$ اختیار شد.

امّا چون نمی‌توانیم این وضعیت را برای همه اعداد کوچک نظیر یک میلیونم، یک میلیاردم و یا یکصد میلیاردم امتحان کنیم به ناچار باید متوسل به ε شویم (بخوانید اپسیلن)

ε درواقع نماینده همه اعداد کوچک و مثبت است و چون در عمل **دلخواه** فرض می‌شود ما را از تجربه‌ها و محاسباتی که پایان ندارد بی‌نیاز می‌سازد.

احمد : این بسیار جالب است، امّا شماره جمله‌ها چگونه عددی خواهد شد؟

دبیر : طبیعی است شماره جملات مربوطه که باید برای آنها نامساوی $\left|\frac{۱}{n}-۰\right|=\frac{۱}{n}<\varepsilon$ برقرار باشد به ε بستگی خواهد داشت. برای نمونه وقتی $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰}$، $M=۱۰۱$ به دست آمد، یعنی هرگاه $n\geq ۱۰۱$، $\frac{۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰}$، M نماینده شماره مربوطه است.

وقتی $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰۰۰}$، شماره مربوطه یعنی $M=۱۰۰۱$ به‌دست آمد.

وقتی $\varepsilon=\frac{۱}{۱۰^{۱۱}}$ شماره مربوطه یعنی $M=۱۰^{۱۱}+۱$ به‌دست آمد، زیرا دیدیم از **این شماره به بعد**، یعنی هرگاه $n>۱۰^{۱۱}$ مثلاً $n=۱۰^{۱۱}+۱$، $n=۱۰^{۱۱}+۲$ ، $n=۱۰^{۱۱}+۳$، ...

$$\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۱۰^{۱۱}+۱}<\frac{۱}{۱۰^{۱۱}}=\varepsilon$$

$$\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۱۰^{۱۱}+۲}<\frac{۱}{۱۰^{۱۱}}=\varepsilon$$

$$\frac{۱}{n}=\frac{۱}{۱۰^{۱۱}+۳}<\frac{۱}{۱۰^{۱۱}}=\varepsilon$$

و به‌طورکلی برای هر n که $n\geq ۱۰^{۱۱}+۱$ ، $\frac{۱}{n}<\varepsilon$

اکنون می‌توانیم تجربه‌مان را در خصوص دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ ریاضی وارتر بیان کنیم، برای هر عدد مثبت (ولو بسیار کوچک) ε فاصله a_nها از صفر از شماره‌ای مانند M به بعد کمتر از ε می‌شود.

به عبارت دقیق‌تر

برای هر عدد $\varepsilon>۰$، عددی طبیعی مانند M هست که هرگاه $n\geq M$، $|a_n-۰|<\varepsilon$ و بالاخره به این مفهوم کلیت داده و آن را برای هر دنباله دلخواه $\{a_n\}$ و عدد حقیقی مانند L که تصور می‌کنیم جملات دنباله به آن گرایش دارند، بیان می‌کنیم :

تعریف : گوییم دنباله $\{a_n\}$ دارای حد L است، هرگاه برای هر عدد $\varepsilon>۰$، عددی طبیعی مانند M وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر عدد طبیعی n که $n\geq M$، نابرابری $|a_n-L|<\varepsilon$ برقرار باشد.

این جمله را که «دنباله $\{a_n\}$ دارای حدی برابر L است» با نماد ریاضی به شکل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ نوشته و آن را چنین می‌خوانیم.

«حد دنباله a_n وقتی n به ∞ میل می‌کند برابر L است»

یا آن‌که می‌گوییم « دنباله $\{a_n\}$ به L همگراست» و در این صورت دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله **همگرا** می‌نامیم.

وقتی برای دنباله‌ای مانند $\{a_n\}$ چنین عددی حقیقی مانند L که در تعریف فوق صدق می‌کند وجود نداشته باشد دنباله $\{a_n\}$ را یک دنباله **واگرا** می‌نامیم.

مثال: دنباله $\{(-1)^n\}_{n=1}$ را در نظر می‌گیریم، جملات این دنباله یک درمیان اعداد ۱− و ۱ را اختیار می‌کنند. در واقع جملات این دنباله به‌عنوان نقاط خط حقیقی روی دو نقطه ۱− و ۱ قرار گرفته و لذا به این دو نقطه گرایش دارند. امّا معلوم است که این دنباله همگرا نمی‌باشد، زیرا مقدار L می‌بایست یک عدد **منحصر به فرد** بوده و همه جملات به همین یک عدد گرایش کنند.

حال هرگاه $L=1$ اختیار کنیم جملات این دنباله با nهای فرد هرگز به L (به مقدار دلخواه) نزدیک نمی‌شوند. همین وضعیت برای $L=-1$ نیز صادق است، پس یک عدد مشخص L که در تعریف همگرایی صدق کند وجود ندارد.

تمرین در کلاس

۱ــ توضیح دهید که چرا دنباله $a_n=2n+1$ همگرا نمی‌باشد.

۲ــ دنباله $\dots, -\frac{5}{6}, 5, -\frac{4}{5}, 4, -\frac{3}{4}, 3, -\frac{2}{3}, 2, -\frac{1}{2}, 1$ را در نظر بگیرید، ابتدا ضابطه این دنباله را معلوم کنید، سپس از این دنباله دو دنباله استخراج کنید که یکی همگرا و دیگری واگرا باشد.

نکته: مسأله‌های مربوط به تشخیص همگرایی و یا پیداکردن حد دنباله‌ها را می‌توان چنین طبقه‌بندی کرد.

الف) مسأله‌هایی که در آنها از پیش همگرایی دنباله بررسی شده و از شما خواسته می‌شود تا مطابق تعریف تساوی حدی

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad (1)$$

را محقق سازید، برای اثبات (۱) طبق تعریف می‌بایست نشان دهیم که حکم منطقی زیر برقرار و درست است.

(۲) برای هر عدد $\varepsilon>0$، عددی طبیعی مانند M هست به قسمی که برای هر $n\geq M$، $|a_n - L| < \varepsilon$

در اثبات (۲)، $\varepsilon>0$ به‌عنوان یک عدد حقیقی مثبت **معلوم** مسأله است.

همچنین در اینجا M به‌عنوان یک عدد طبیعی (شماره جملات مورد نظر) مجهول مسأله است.

M را باید چنان پیدا کنیم که در گزاره شرطی زیر صدق کند :

اگر n عددی طبیعی و $n \geq M$ آنگاه $|a_n - L| < \varepsilon$

معنای این گزاره شرطی آن است که از شماره M به بعد جملات دنباله در نامساوی $|a_n - L| < \varepsilon$ صدق کرده و لذا در اطراف L تجمع می کنند.

در مسائل مربوط به اجرای دستورالعمل فوق، چون می‌خواهیم نابرابری $|a_n - L| < \varepsilon$ برقرار باشد و ε بر ما معلوم است. با این نابرابری کار می کنیم تا بتوانیم به نحوی M را پیدا کنیم.

ب) دسته دوم مسأله‌های مربوط به حد مسأله‌هایی است که در آن L بر ما معلوم نیست. در واقع در این نوع مسأله‌ها از شما خواسته می‌شود با بررسی جملات دنباله چنانچه فکر می کنید دنباله مورد نظر همگـراست ابتدا L را حدس بزنید و سپس در صورت واقعیت امـر و درست بـودن حـدس خـود، مطابق بند الف تساوی حدی، $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ را ثابت کنید.

ضمناً همیشه یادتان باشد که :

> تسلط بر خواص نابرابری‌ها و درک درست حکم منطقی (۲)، که همان مفهوم حد است، از ملزومات اساسی حل مسأله‌های مربوط به همگرایی است.

مثال: همگرایی دنباله $\left\{3-(\frac{1}{2})^n\right\}_{n=1}$ را بررسی کنید.

حل: باید معلوم کنیم که آیا این دنباله همگراست یا واگرا و اگر همگراست به چه عددی همگراست؟

با اندکی کنکاش در مقادیر این دنباله ملاحظه می کنیم که جملات دنباله، برای nهای به قدر کافی بزرگ، به عدد ۳ گرایش دارند. دلیل این امر آن است که مقدارهای $(\frac{1}{2})^n$ برای nهای بزرگ، کوچک و کوچکتر شده و مقدار آن به صفر نزدیک می‌شود.

حدس : $\lim_{n\to\infty}(۳-(\frac{۱}{۲})^n)=۳$ ، در این‌جا $L=۳$.

❖ **برهان:** فرض کنیم $\varepsilon>۰$ عدد دلخواهی باشد باید Mی پیدا کنیم که

(۱) برای هر n که $n\geq M$ ، $\left|\left(۳-(\frac{۱}{۲})^n\right)-۳\right|<\varepsilon$

داریم $\left|\left(۳-(\frac{۱}{۲})^n\right)-۳\right|<(\frac{۱}{۲})^n$

درنتیجه باید معلوم کنیم که از چه شماره‌ای به بعد نابرابری $(\frac{۱}{۲})^n<\varepsilon$ برقرار می‌گردد و همین شماره مورد نظر مجهول M را به‌دست می‌دهد. این نابرابری معادل نابرابری $\frac{۱}{\varepsilon}<۲^n$ است. از طرفین لگاریتم در پایه ۲ می‌گیریم $n>\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}$

چون معلوم نیست که $\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}$ عددی طبیعی باشد، M را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$M=\left[\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}\right]+۱$$

و بدین ترتیب مجهول M به‌دست می‌آید.

احمد : از کجا معلوم است که این مقدار M در گزاره شرطی (۱) صدق می‌کند؟

دبیر : می‌توانیم M را آزمون نماییم، برای این کار فرض کنیم n عددی طبیعی و $n\geq M$ باید نشان دهیم

(۲) $\left|(۳-(\frac{۱}{۲})^n)-۳\right|<\varepsilon$

در اینجا $a_n=۳-(\frac{۱}{۲})^n$ ، چون : $n\geq M=\left[\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}\right]+۱$

و برای هر x، $[x]+۱>x$ ، پس $n>\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}$

درنتیجه : $۲^n>۲^{\log_۲\frac{۱}{\varepsilon}}=\frac{۱}{\varepsilon}$

با معکوس کردن جملات، جهت نابرابری تغییر می‌کند : $\frac{۱}{۲^n}<\varepsilon$

و یا $(\frac{۱}{۲})^n<\varepsilon$

امّا $\left|(۳-(\frac{۱}{۲})^n)-۳\right|=(\frac{۱}{۲})^n<\varepsilon$

یعنی برای هر n که $n \geq M$، نابرابری (۲) برقرار است.

محسن : نیازی به آزمایش M نیست زیرا برای یافتن M، همه عملیات برگشت‌پذیرند.

دبیر : درست است، اگر به برگشت‌پذیری عملیات و کار با نابرابری‌ها توجه بکنید لزومی به آزمایش M به دست آمده نمی‌باشد.

مثال: آیا دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \sin\frac{n\pi}{۲}$ همگراست؟

حل: برخی مقادیر این دنباله را بررسی می‌کنیم.

$$n = ۱ \ , \ a_۱ = \sin\frac{\pi}{۲} = ۱$$

$$n = ۲ \ , \ a_۲ = \sin \pi = ۰$$

$$n = ۳ \ , \ a_۳ = \sin\frac{۳\pi}{۲} = -۱$$

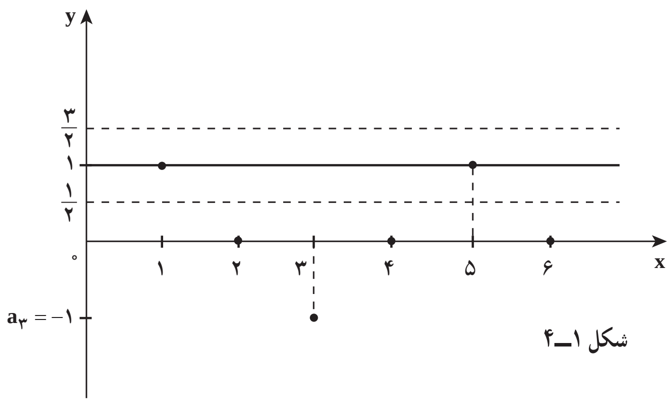
$$n = ۴ \ , \ a_۴ = \sin ۲\pi = ۰$$

$$n = ۵ \ , \ a_۵ = \sin\frac{۵\pi}{۲} = ۱$$

با ادامه محاسبات ملاحظه می‌کنیم که مقدارهای این دنباله منحصر به اعداد ۱ و ۰ و ۱− هستند پس این دنباله نمی‌تواند همگرا بوده باشد.

احمد : بسیاری از جملات دنباله برابر ۱ بوده و لذا در ۱ مجتمع می‌شوند، آیا ممکن نیست که دنباله همگرا به عدد ۱ باشد.

دبیر : خیر. در این مورد ساده‌ترین راه استفاده از نمودار دنباله است و کافی است بازه‌ای مانند $(۱-\frac{۱}{۲}, ۱+\frac{۱}{۲})$ یعنی نواری به مرکز ۱ و به شعاع $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$ را حول خط $y=۱$ در نظر بگیریم (شکل ۱ــ۴)



شکل ۱ــ۴

هرچقدر M را بزرگ اختیار کنیم، $n\geq M$ را می‌توان به‌صورت $n=2k$ در نظر گرفت و لذا $a_{2k}=\sin_{k\pi}=0$ یعنی تعداد زیادی از جملات که با شماره زوج هستند خارج از بازه $(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$ قرار می‌گیرند.

احمد : امّا تعداد زیادی از جملات دنباله که با شماره فرد هستند برابر ۱ بوده و لذا در بازه $(1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$ هستند.

دبیر : درست است. امّا اگر بخواهد تساوی حدی $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{2}=1$ اتفاق بیفتد باید نظیر $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ که در اینجا $\varepsilon=\frac{1}{2}$، طبق تعریف عدد طبیعی M یافت شود که برای هر $n\geq M$، $a_n \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ (و یا $|a_n-1|<\varepsilon$)

توجه کنید که این یک حکم **کلی** است : برای هر n که $n\geq M$ باید نابرابری برقرار باشد. درحالی که گفته شد هرچقدر که M را اختیار کنیم nهایی هست، $n=2k$ که $n\geq M$ امّا $|a_n-1|\geq\varepsilon=\frac{1}{2}$ زیرا $a_n \notin (1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2})$، و این با تعریف همگرایی در تناقض است.

مسائل

۱ــ ابتدا حد دنباله $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}_{n=1}$ را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.

۲ــ فرض کنیم $\{a_n\}_{n=1}$ یک دنباله همگرا باشد. همچنین فرض کنیم K عدد صحیح و ثابت است به قسمی که $n+k\geq 1$، دنباله $\{b_n\}_{n=1}$ را چنین تعریف می‌کنیم : $b_n=a_{n+k}$ برای مثال هرگاه $k=2$ و دنباله $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots$ $\{a_n\}$ باشد، دنباله $\{b_n\}$ چنین است :

$$b_1=a_3, b_2=a_4, b_3=a_5, \cdots, b_n=a_{n+2}, \cdots$$

یعنی $a_3, a_4, a_5, \ldots, a_{n+2}, \ldots$

همان دنباله $\{b_n\}_{n=1}$ است. ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$ و آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$

۳ــ کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست. آنهایی را که فکر می‌کنید همگرا نیستند، واگرایی دنباله را توضیح دهید.

الف) $\left\{(\frac{1}{3})^{n-1}\right\}_{n=1}$ ب) $\{3^n\}_{n=1}$ ج) $\{\log n\}_{n=1}$ د) $\left\{\log\frac{1}{n}\right\}_{n=1}$

کسانی که مفهوم حد دنباله و حد توابع را به درستی درک کنند ریاضیات را بهتر درک می‌کنند. (استاد دکتر غلامحسین مصاحب ۱۳۵۸ـ۱۲۸۹).

۱ـ۶ـ دنباله‌های واگرا به $\pm\infty$

دنباله‌های واگرا را به دو دسته می‌توان تقسیم‌بندی کرد :

دنباله‌هایی مانند $\{(-1)^n\}_{n=1}$ که برای آنها هیچ عدد حقیقی، و $\pm\infty$ یافت نمی‌شود به‌طوری که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

دنباله‌های واگرایی مانند $\{2n\}_{n=1}$ گرچه جملات دنباله، برای nهای بزرگ، حول یک عدد حقیقی تجمع ندارند، لیکن دنباله به نوعی خوش‌رفتار است!

ادعای ما از خوش‌رفتاری این دنباله چیست؟

وقتی برای nهای بزرگ جملات دنباله را بررسی می‌کنیم (با مقداردهی به n) ملاحظه می‌کنیم که مقادیر جملات از هر عدد حقیقی که **بخواهیم** بزرگتر می‌شوند و این یک **نوع** خوش‌رفتاریست!

مثلاً هرگاه **بخواهیم** $2n > 10^6$ **کافی** است $n > 500,000$

هرگاه **بخواهیم** $2n > 10^8$ **کافی** است $n > 50,000,000$

معنی این گزاره شرطی آن است که جملات دنباله از شماره $50,000,000$ بعد از عدد (از پیش‌تعیین شده) $100,000,000$ بزرگترند،زیرا از $n > 50,000,000$ نتیجه می‌گیریم که $2n > 100,000,000$.

به‌طورکلی فرض کنیم k عدد حقیقی کاملاً دلخواهی باشد برای آنکه $2n > k$ کافی است $n > \frac{k}{2}$ و چون می‌خواهیم n طبیعی باشد (شماره جملات) کافی است که $n \geq \left[\frac{k}{2}\right]+1$ اختیار کنیم زیرا واضح است که $\left[\frac{k}{2}\right]+1 > \frac{k}{2}$.

حال می‌توانیم تعریف خاصی از واگرایی ارایه دهیم.

تعریف: گوییم دنباله $\{a_n\}_{n=1}$ واگرا به ∞ (یا $+\infty$) است هرگاه گزاره منطقی زیر برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی مثبت K، عددی طبیعی مانند M یافت شود به قسمتی که هرگاه $n \geq M$ ، $a_n > k$.

در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

به زبان ساده واگرایی به ∞ دلالت بر آن دارد که جملات دنباله بزرگ و بزرگتر می‌شوند به نحوی که برای هر عدد حقیقی (بزرگ) k، از شماره‌ای به بعد همه جملات از k بزرگترند.

نکته‌ای که فوراً از واگرایی به ∞ حاصل می‌شود این است که هرگاه تساوی $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ اتفاق بیفتد، جملات دنباله، از **جایی به بعد** الزاماً مثبت‌اند، نه تنها مثبت‌اند بلکه بزرگ و بزرگتر می‌شوند و به صورتی مجازی می‌توان گفت که در حول و حوش ∞ گرد می‌آیند!

مشابه وضعیت فوق وقتی است، که جملات دنباله، از جایی به بعد منفی‌اند، لیکن از نظر قدرمطلقی بزرگ و بزرگتر می‌شوند.

تعریف : گوییم دنباله $\{a_n\}_{n=1}$ واگرا به$-\infty$است و می‌نویسیم $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ هرگاه گزاره زیر برقرار باشد.

برای هر عدد حقیقی منفی K، عدد طبیعی مانند M وجود داشته باشد به طوری که هرگاه $n \geq M$ آنگاه $a_n < k$

پس هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ اتفاق افتد جملات دنباله می‌بایست از جایی به بعد منفی بوده و از نظر قدرمطلق بزرگ و بزرگتر شوند.

پرسش : آیا دنباله‌ای که جملات آن به‌صورت نوسانی مثبت و منفی می‌شوند می‌تواند واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ باشد؟

تمرین در کلاس

ابتدا با حدسیه‌سازی مشخص کنید که کدامیک از دنباله‌ها واگرا به $+\infty$ یا واگرا به $-\infty$ است و سپس حدس خود را ثابت کنید.

۱) $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ ۲) $\{1000 - n^2\}_{n=1}^{\infty}$ ۳) $\left\{\frac{1}{10^6}(n+1)\right\}_{n=1}^{\infty}$

برای نمونه و راهنمایی به (۱) می‌پردازیم

وقتی n مقادیر بزرگ اختیار می‌کند، قطعاً n^2 نیز بزرگتر می‌شود، درنتیجه حدسمان این است که $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = +\infty$ (۱)

برهان (۱) : فرض کنیم $K>0$ عدد مثبت دلخواهی باشد. باید نشان دهیم از شماره ای به بعد $n^2>K$، پس شماره‌ای مانند M است که هرگاه $n\geq M$ ، $n^2>K$ در اینجا K معلوم مسأله است.

امّا نامساوی $n^2>k$ معادل $n>\sqrt{k}$ می‌باشد. می‌توانیم شماره M مجهول را $M=[\sqrt{k}]+1$ اختیار کنیم. اکنون می‌توانیم حکم مسأله را آزمون نماییم : فرض کنیم $n\geq[\sqrt{k}]+1$ پس $n>\sqrt{k}$ درنتیجه $n^2>K$

و یا

$$a_n=n^2>K$$

یک بار دیگر حل مسأله رابه اختصار مرور می کنیم.

ادعا داشتیم که $\lim\limits_{n\to\infty} n^2=+\infty$ ، برای اثبات این ادعا، می‌بایست ثابت کنیم (*) برای هر عدد $K>0$ ، Mیی هست که هرگاه $n\geq M$ ، $n^2>k$ در اثبات (*)، k معلوم و M مجهول است. M باید چنان پیدا شود که برای هر $n\geq M$ ، $n^2>k$

با استفاده از خواص نامساوی‌ها از نامساوی $n^2>K$، که مطلوب ماست، راه افتادیم و به $M=[\sqrt{k}]+1$ به‌عنوان شماره مجهول رسیدیم.

یادتان باشد، که در حل مسأله‌های مربوط به حد دنباله‌ها :

> استفاده از خواص نابرابری‌ها و درک صحیح گزاره‌های شرطی اگر ... آنگاه در یادگیری حسابان نقش اساسی دارد.

مسائل

۱ــ ثابت کنید الف) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}=\infty$

ب) دنباله $\left\{(-1)^n\frac{n^2+1}{n}\right\}$ نه به $+\infty$ و نه به $-\infty$ واگراست.

۲ــ ثابت کنید هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ آنگاه $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$

۳ــ فرض کنیم همواره $a_n>0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

۴ــ فرض کنیم همواره $a_n<0$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$. ثابت کنید $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

۵ــ فرض کنیم $a_n = \dfrac{5n^2 - 3n + 11}{2n+1}$ ، $b_n = \dfrac{n^2 - 1}{6n^3 + 1}$ ، $c_n = \dfrac{3n^2 + 1}{2n^2 + 7}$

دنباله‌هایی از اعداد باشند. ثابت کنید.

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{3}{2} \;،\; \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \;،\; \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

۱ـ۷ـ اصل موضوع تمامیت

مطالعه حد دنباله‌ها ارتباط تنگاتنگی با ویژگی‌های مجموعه اعداد حقیقی یعنی R دارد. پس از کشف نظریه حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط دانشمندان آلمانی و انگلیسی در قرن هفدهم نابسامانی‌هایی در برخی موارد و نتایج آن بروز کرد. ریاضیدانان چندی در رفع این نابسامانی‌ها تلاش کردند و سرانجام پس از طی بیش از یک قرن وایراشتراس توانست به رفع آن نایل شود. وایراشتراس دریافت که صورت‌بندی دقیق و منطقی بحث حساب دیفرانسیل و انتگرال بر شناخت عمیق‌تر دستگاه اعداد حقیقی استوار است. اصل تمامیت یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های R است که دستگاه اعداد گویا، یعنی Q، فاقد آن است، گرچه Q همه خواص جبری و ترتیبی مربوط به R را داراست. در این بخش قصدمان این نیست تا نقص Q را بررسی کنیم، لیکن به دلیل نیاز به استفاده از اصل تمامیت، این اصل را بیان خواهیم کرد. اصل تمامیت، همانند بیشتر اصول دیگر، گرچه به لحاظ شهودی درکی ساده دارد، امّا به لحاظ نظری اثبات آن ناممکن جلوه می‌کند.

ابتدا دو ویژگی در باب زیر مجموعه‌های R بیان می‌کنیم که منبعث از رابطه ترتیبی روی R می‌باشند. در اینجا فرض می‌کنیم A یک زیرمجموعه ناتهی R باشد.

تعریف ۱ : عدد حقیقی U را یک کران بالای A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $x \leq u$.

$b \in R$ را کوچکترین کران بالای A می‌نامیم هرگاه a یک کران بالای A بوده و برای هر کران بالای دیگر A مانند U، $a \leq U$

مشابهاً می‌توانیم از پایین به مجموعه A نگاه کنیم :

تعریف ۲ : عدد حقیقی V را یک کران پایین A نامیم هرگاه برای هر $x \in A$، $v \leq x$.

$b \in R$ را بزرگترین کران پایین A نامیم هرگاه b یک کران پایین A بوده و برای هر کران پایین دیگر A مانند v، $v \leq b$.

کوچکترین کران بالا را سوپریموم و بزرگترین کران پایین را اینفیموم می‌نامند.

دقت کنید که تعریف ۲ چگونه از روی تعریف ۱ ساخته شده است!

برای مثال، فرض کنیم $A=[۱,۲]$: در این صورت ۳ یک کران بالای A است.

۳/۵ نیز یک کران بالای A است.

۲/۵ چطور؟ A چند کران بالا دارد؟

کوچکترین کران بالای A کدام است؟ آری $a=۲$ کوچکترین کران بالای A است.

مشابهاً به‌آسانی معلوم است که $b=۱$ بزرگترین کران پایین A است. در این مثال هم a و هم b به A تعلق دارند، امّا ممکن است کوچکترین کران بالا و یا بزرگترین کران پایین یک مجموعه به آن مجموعه تعلق نداشته باشند.

هرگاه $B=(۱,۲)$ (بازه باز) آنگاه کوچکترین کران بالای B برابر ۲ و بزرگترین کران پایین B نیز برابر ۱ است درحالی که هیچ‌یک به B تعلق ندارند. (چرا؟)

سؤال : آیا همهٔ زیرمجموعه‌های ناتهی R دارای کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین هستند؟ نظرتان را در مورد $A=[۱,+\infty)$ و $B=(-\infty,۲)$ بیان کنید.

تمرین در کلاس

الف) در مورد احکام زیر فکر کنید، می‌توانید با مثال‌ها کار کنید. اگر فکر می‌کنید درست‌اند آنها را توضیح دهید. و اگر فکر می‌کنید نادرست‌اند، نیز توضیح دهید.

۱ــ هر مجموعه از بالا کراندار دارای کوچکترین کران بالا است.

۲ــ هر مجموعه از پایین کراندار دارای بزرگترین کران پایین است.

۳ــ هرگاه A یک مجموعه کراندار و ناتهی باشد هم کوچکترین کران بالا و هم بزرگترین کران پایین دارد.

۴ــ هرگاه $\phi\neq A\subseteq B$ و $U\in B$ یک کران بالای B باشد، U یک کران بالای A نیز می‌باشد.

۵ــ حکمی نظیر ۴ در باب کران‌های پایین بیان کنید.

اکنون **اصل موضوع تمامیت** را بیان می‌کنیم، باید توجه داشت «اصل موضوع» و یا اختصاراً «اصل» در ریاضیات به **گزاره‌ای گفته می‌شود که بدون اثبات پذیرفته می‌شود اصل موضوع تمامیت** در باب اعداد حقیقی.

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا است.

این اصل معادل است با اصل زیر :

یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگترین کران پایین است.

اکنون با استفاده از این اصل به اثبات مهمترین قضیهٔ این فصل می‌پردازیم

قضیه ۱: فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله صعودی و از بالا کراندار باشد در این صورت $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ وجود دارد. به عبارت دیگر هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست.

برهان : قرار می‌دهیم $S=\{a_n \mid n\in N\}$ ، یعنی S مجموعه مقادیر عددی جملات دنباله مورد بحث است پس $S\neq\phi$ و S دارای کران بالایی مانند K است. بنابر اصل موضوع تمامیت S دارای کوچکترین کران بالاست. این کوچکترین کران بالای S را L می‌نامیم. نشان می‌دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

برای هر n ، $a_n\leq L$ حال فرض کنیم $\varepsilon>0$ عدد دلخواهی باشد. پس $L-\varepsilon$ یک کران بالای S نیست، زیرا $L-\varepsilon<L$ و L کوچکترین کران بالای S فرض شده است.

چون $L-\varepsilon$ کران بالای S نیست، حداقل یک عضو S مانند a_N وجود دارد.

به طوری که $L-\varepsilon<a_N$. حال برای هر $n\geq N$.

$$a_n\geq a_N>L-\varepsilon$$

از طرف دیگر $a_n<L$ درنتیجه برای هر n که $n\geq N$

$$L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$$

یعنی برای هر $n\geq N$،

$$|a_n-L|<\varepsilon$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ، همچنان که ادعا شده است.

قضیه فوق یک زوج دارد که از تبدیل مفاهیم موجود در قضیه به مفاهیم زوج آن به‌دست می‌آید! آن را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲ : هر دنباله نزولی و کراندار از پایین همگراست.

مثال: ثابت کنید دنباله $\left\{\sin\dfrac{\pi}{۲n}\right\}_{n=۱}$ همگراست.

حل: با توجه به شناختی از رفتار تابع $y=\sin\dfrac{\pi}{۲n}$ به ویژه در بازه $(۰,\dfrac{\pi}{۲})$ داریم، معلوم است که این دنباله یک دنباله نزولی است. به‌علاوه برای هر n، $۰<\sin\dfrac{\pi}{۲n}$ پس عدد ۰ یک کران پایین این دنباله است. بنابراین بر طبق قضیه ۲، این دنباله همگراست.

تمرین در کلاس

ابتدا نشان دهید که دنباله‌های زیر همگرا هستند

الف) $\left\{۱+\dfrac{۱}{n^۲+۱}\right\}$ ب) $\left\{۱-\dfrac{۱}{n}\right\}$

سپس حد آنها را حساب کنید.

این بخش را با یک قضیه مهم به پایان می‌رسانیم که در حسابان و آنالیز نقشی کلیدی دارد.

قضیه: هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویا است.

اثبات: فرض کنیم u عدد حقیقی دلخواهی باشد. دو حالت وجود دارد.

حالت اول: u عددی گویا است. قرار می‌دهیم $u_n=u$، (برای هر $n\in N$)

پس $\{u_n\}$ دنباله‌ای ثابت و متشکل از اعداد گویای U بوده و معلوم است که $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=u$.

حالت دوم: $U>۰$ عددی گنگ است، بسط اعشاری u را در نظر می‌گیریم.

$$u=u_۰/u_۱\,u_۲\,u_۳\cdots u_n\cdots$$

که در آن $u_۰$ جزء صحیح u بوده و عددی صحیح است. چون u گنگ است بسط اعشاری u نامتناهی و البته نامنظم می‌باشد. قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned}
r_۱&=U_۰/U_۱\\
r_۲&=U_۰/U_۱U_۲\\
&\vdots\\
r_n&=U_۰/U_۱U_۲\cdots U_n\\
&\vdots
\end{aligned}$$

لذا هر r_n عددی گویا است زیرا بسط اعشاری مختوم دارد: به علاوه

$$۰<u-r_n=۰/\underbrace{۰۰\cdots۰}_{\text{n بار صفر}}U_{n+۱}U_{n+۲}\cdots$$