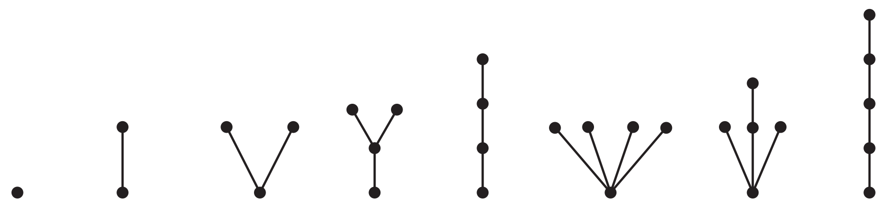
فصل ۳

درخت و ماتریس

در این فصل کوتاه ابتدا ردهٔ خاص دیگری از گراف‌ها موسوم به درخت‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آنها می‌پردازیم. سرانجام به هر گراف یک ماتریس نسبت می‌دهیم و نشان می‌دهیم که هر گراف را می‌توان با یک ماتریس بسیارخاص نیز نمایش داد.

۳ـ۱ـ درخت

گراف همبندی را که هیچ دور نداشته باشد **درخت** می‌نامیم. گراف‌های K_1 و K_2 درخت‌اند و به ترتیب «تنها» درخت‌های با یک و دو رأس هستند. در شکل ۱ تمام درخت‌های از مرتبهٔ p، $1 \leq p \leq 5$، را رسم کرده‌ایم.



شکل ۱ــ درخت‌های از مرتبهٔ ۱ تا ۵

گراف مربوط به هر هیدروکربن C_nH_{2n+2} نیز یک درخت است. می‌بینیم که در هر یک از این مثال‌ها بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این مطلب همواره درست است.

قضیهٔ ۱ : بین هر دو رأس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

اثبات : اثبات در حالتی که دو رأس متمایز نباشند واضح است. فرض کنید u و v دو رأس متمایز درختی چون G باشند. چون G همبند است بین u و v دست کم یک مسیر وجود دارد. اگر در G دو مسیر مختلف (در واقع دو دنبالهٔ مختلف از رأس‌های متمایز G) از u به v وجود داشته باشند، آن‌گاه این دو مسیر مختلف «ایجاب» می‌کنند که دوری در G وجود داشته باشد. پس G درخت نیست و این، یک تناقض است. ■

مطلب دیگری که از درخت‌های شکل ۱ برمی‌آید این است که، به‌جز K_1، هر یک دست‌کم دو رأس از مرتبهٔ یک دارد. این مطلب نیز همواره درست است.

قضیهٔ ۲ : هر درختی که بیش از یک رأس داشته باشد دست‌کم دو رأس از درجهٔ یک دارد.

اثبات : از به اصطلاح استقرای تعمیم یافته روی مرتبهٔ درخت G استفاده می‌کنیم. اگر $p=2$ آن‌گاه $G=K_2$ و درستی حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم در مورد هر درخت با $k \geq 2$ رأس درست است. سپس درختی چون G از مرتبهٔ $k+1$ را در نظر می‌گیریم. اگر G رأسی چون v از درجهٔ یک داشته باشد آنگاه با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن گرافی مانند G' به‌دست می‌آوریم که درخت است و $k\geq 2$ رأس دارد. پس بنا به فرض استقراء، G' و در نتیجه G دست‌کم دو رأس از درجهٔ یک دارد. پس فرض می‌کنیم درجهٔ هیچ رأسی از G از دو کمتر نباشد. در این صورت رأسی چون u از G را در نظر می‌گیریم. با آغاز از u و انتخاب یالی از G که از u می‌گذرد مسیری چون P را به این ترتیب می‌پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأسی تازه یالی از G را در پیش می‌گیریم که اولاً از آن رأس بگذرد، ثانیاً قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد، و ثالثاً انتهای دیگر آن رأسی تازه‌تر از G باشد. این کار باید در جایی متوقف شود. چون درجهٔ هر رأس دست‌کم دو است توقف آن با رسیدن به یکی از رأس‌های قبل میسر است و لذا دوری در G به‌وجود می‌آید. این تناقض قضیه را ثابت می‌کند. ■

به مثال‌های گوناگون درخت‌ها نظر افکنید، می‌بینید که در مورد تمام آنها قضیهٔ زیر درست است.

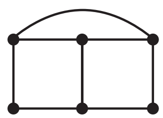
قضیهٔ ۳ : اگر G درختی با p رأس و q یال باشد آن‌گاه

$$p=q+1$$

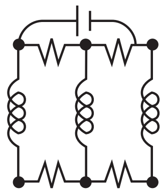
اثبات : با استقراء بر p قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر $p=1$ آن‌گاه $q=0$ و داریم $p=q+1$. فرض کنید قضیه درمورد هر درختی با k، $k\geq 1$، رأس درست باشد. حال درختی چون G را در نظر می‌گیریم که $k+1$ رأس دارد. باید نشان دهیم تعداد یال‌های آن k است. بنا به قضیهٔ قبل G رأسی چون v دارد که $\deg v=1$. با حذف رأس v و تنها یال مارّ بر آن درختی چون G' ایجاد می‌شود که مرتبه‌اش k است. بنابه فرض استقراء، گراف G' دارای $k-1$ یال است. پس درخت G دقیقاً k یال دارد. ■

مجلهٔ ریاضی

درخت در رشته‌های مختلفی مانند شیمی، مهندسی برق و علم محاسبه کاربرد دارد. کرشهف در سال ۱۸۴۷ میلادی هنگام حل دستگاه‌های معادلات خطی مربوط به شبکه‌های الکتریکی درخت‌ها را کشف و نظریهٔ درخت‌ها را بارور کرد. در شکل زیر N یک شبکهٔ الکتریکی و G گراف مربوط به آن است.



G



N

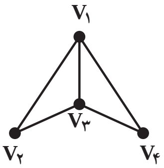
کِیلی در سال ۱۸۵۷ میلادی درخت‌ها را در ارتباط با شمارش ایزومرهای مختلف هیدروکربن‌ها کشف کرد. وقتی مثلاً می‌گوییم دو ایزومر مختلف C_4H_{10} وجود دارند منظورمان این است که دو درخت «متفاوت» با ۱۴ رأس وجود دارند که درجهٔ ۴ رأس از این ۱۴ رأس چهار و درجهٔ هر یک از ۱۰ رأس باقیمانده یک است.

اگر هزینهٔ کشیدن مثلاً راه‌آهن بین هر دو شهر از p شهر مفروض مشخص باشد ارزان‌ترین شبکه‌ای که این p شهر را به هم وصل می‌کند با مفهوم یک درخت از مرتبهٔ p ارتباط نزدیک دارد. به‌جای مسألهٔ مربوط به راه‌آهن می‌توان وضعیت مربوط به شبکه‌های برق‌رسانی، لوله‌کشی نفت، لوله‌کشی گاز و ایجاد کانال‌های آبرسانی را در نظر گرفت. برای تعیین یک شبکه با نازل‌ترین هزینه از قاعده‌ای به نام الگوریتم صرفه‌جویی استفاده می‌شود که کاربردهای فراوان دارد.

۳ـ۲ـ گراف‌ها و ماتریس‌ها

گراف $G=(V,E)$ با $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ و $E=\{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_3v_4\}$ را که در شکل ۲ رسم شده است در نظر بگیرید. به این گراف ماتریسی 4×4 چون $A=(a_{ij})$ به شرح زیر نسبت می‌دهیم. در مقابل چهار سطر و چهار ستون این ماتریس طبق شکل ۲ می‌نویسیم v_1 ، v_2 ، v_3 و v_4 . درایهٔ a_{ij} از این ماتریس ۱ است هر گاه $v_iv_j \in E$ و ۰ است هر گاه $v_iv_j \notin E$.

G :



$$A: \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & & & & \\ v_2 & & & & \\ v_3 & & & & \\ v_4 & & & & \end{array}$$

$$A: \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

شکل ۲ــ گراف و ماتریس مجاورت آن

توجه کنید که :

(۱) درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند زیرا گراف‌های (سادهٔ) موضوع بحث ما «طوقه» ندارند، یعنی هیچ رأسی با خودش مجاور نیست.

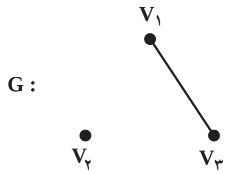
(۲) تعداد سطرهای این ماتریس برابر است با تعداد ستون‌های آن، یعنی ماتریس A مربعی است.

(۳) هر درایهٔ ماتریس A یا صفر است یا یک، یعنی همواره $a_{ij} \in \{0,1\}$.

(۴) ماتریس A متقارن است، یعنی همواره $a_{ij}=a_{ji}$، زیرا اگر $v_iv_j \in E$ آن‌گاه $v_jv_i \in E$.

واضح است که به هر گراف دلخواه G همواره می‌توان ماتریسی چون A با ویژگی‌های چهارگانه بالا نسبت داد. این ماتریس را **ماتریس مجاورت گراف** G می‌نامیم و آن را با $A(G)$ یا به‌طور ساده با A نمایش می‌دهیم.

جالب این‌جاست که به هر ماتریس با ویژگی‌های چهارگانه بالا می‌توان یک گراف نسبت داد. مثلاً اگر ماتریس A از شکل ۳ را به ما بدهند فوراً می‌توانیم گراف G از همین شکل را به آن نسبت دهیم. برای این کار به‌ازای سطر (یا ستون) اول ماتریس نقطه‌ای چون v_1، به ازای سطر (یا ستون) دوم ماتریس نقطه‌ای چون v_2 و همین‌طور به ازای سطر (یا ستون) سوم نقطهٔ دیگر v_3 را در نظر می‌گیریم و نقطهٔ v_i را به نقطهٔ v_j با خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه درایهٔ مربوط در ماتریس داده شده یک باشد و در غیر این صورت آن دو را به هم وصل نمی‌کنیم.



$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

شکل ۳ـــ ماتریس با شرایط چهارگانهٔ بالا و گراف آن

پس می‌بینیم که یک گراف با p رأس در واقع چیزی جز یک ماتریس مربعی $p \times p$ با شرایط چهارگانهٔ بالا نیست. و لذا برای مطالعهٔ گراف‌ها می‌توان صرفاً ماتریس‌های مربعی متقارنی را مطالعه کرد که درایه‌های آنها از مجموعهٔ $\{۱, ۰\}$ انتخاب می‌شوند و درایه‌های روی قطر اصلی آن‌ها صفرند. بنابراین نظریهٔ گراف‌ها را می‌توان شاخه‌ای از جبر هم تلقی کرد.

قضیهٔ ۴ : فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G با $V(G) = \{v_۱, \ldots, v_p\}$ باشد. آن‌گاه درایهٔ واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس $A^۲$ برابر است با درجهٔ رأس v_i در گراف G.

اثبات : درایهٔ واقع در سطر iام و ستون iام ماتریس $A^۲$ برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و ستون iام A. چون A متقارن است این درایه از حاصل‌ضرب‌های درایه‌های نظیر به نظیر سطر iام A و سطر iام A حاصل می‌شود. تعداد یک‌های موجود در سطر iام A برابر است با درجهٔ رأس v_i و لذا برای محاسبهٔ درایهٔ موردنظر از ماتریس $A^۲$ باید به اندازهٔ $\deg v_i$ عدد $۱ = ۱ \times ۱$ را با هم جمع کنیم. ■

۳ـ۳ـ تمرین‌ها

۱ــ گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه و اندازهٔ آن ۸ باشد.

۲ــ گراف همبندی معرفی کنید که حاصل‌ضرب مرتبه و اندازهٔ آن ۲۰ باشد.

۳ــ فرض کنید ماکسیمم درجهٔ یک درخت T برابر با k باشد. ثابت کنید که T دست‌کم k رأس از درجهٔ یک دارد.

۴ــ گرافی از مرتبهٔ ۶ و اندازهٔ ۶ معرفی کنید که ۲ــ منتظم باشد.

۵ ــ تمام درخت‌های از مرتبهٔ ۶ را رسم کنید.

۶ ــ دو ماتریس M_1 و M_2 به صورت زیر داده شده‌اند.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

آن را که معرف یک گراف است مشخص کنید و نمودار آن را بکشید.

۷ــ اگر ماتریس مجاورت گراف K_p، $p\in \mathbb{N}$، را با M نمایش دهید هر درایهٔ واقع بر روی قطراصلی ماتریس M^2 برابر با $p-1$ است.

۸ ــ الف) قضیهٔ ۱ را با استفاده از استقراء روی مرتبهٔ یک درخت و با به کار بردن قضیهٔ ۲ ثابت کنید.

ب) اثباتی را که در متن برای قضیهٔ ۱ ارائه شده است با اثباتی که طبق بند (الف) این تمرین به‌دست می‌آید مقایسه کنید و با ذکر دلیل به پرسش‌های زیر پاسخ دهید :

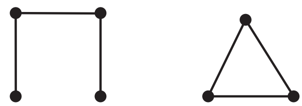
ــ کدام اثبات شهودی‌تر است؟

ــ کدام اثبات «دقیق‌تر» است؟

ــ کدام اثبات را بیشتر می‌پسندید؟

۹ــ الف) در شکل زیر یک گراف ناهمبند G رسم شده است. رأس‌های G را با v_1، v_2، v_3، v_4، v_5، v_6 و v_7 چنان برچسب بزنید که ناهمبند بودن G از ماتریس مجاورت آن آشکار باشد.

G :



ب) اگر این فکر را در مورد یک گراف ناهمبند و دلخواه G به کار بریم ماتریس مجاورتش چه صورتی خواهد داشت؟

۱۰ــ الف) با توجه به تعریف ماتریس مجاورت گراف (ساده) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار را تعریف کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۴ از فصل ۱ را بنویسید.

۱۱ــ گراف همبند G داده شده است. اگر $u , v\in V(G)$ فاصلهٔ u از v در G که با $d(u,v)$ نمایش داده می‌شود برابر است با طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v در G. نشان دهید :

الف) $d(u,v) = 0$ اگر و تنها اگر $u = v$.

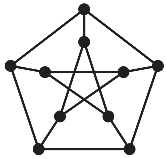
ب) به ازای هر $u , v\in V(G)$ داریم $d(u,v) = d(v,u)$.

پ) به ازای هر $u , v, w\in V(G)$ داریم $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$.

۱۲ــ گراف زیر موسوم به **گراف پِتِرسِن** را در نظر بگیرید.

الف) در این گراف دوری مشخص کنید که طول آن هر یک از اعداد ۵، ۶، ۸ و ۹ باشد.

ب) آیا این گراف هَمیلِتنی است؟ چرا؟



مراجع

1ــ M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak–Foster, Graphs and Digraphs, Wadsworth International Group, Belmont, Galif. 1979.

2ــ O. Ore, and R. J. Wilson, Graphs and their Uses, The Mathematical Association of America, 1990.