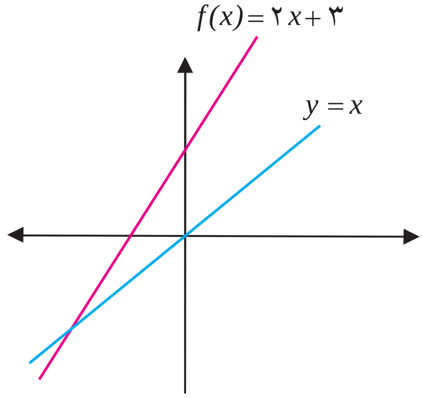
یافتن ضابطهٔ تابع وارون

فعالیت ۹

نمودار تابع خطی $f(x) = ۲x + ۳$ داده شده است.



۱ــ وارون این تابع را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

۲ــ معادله‌ای برای وارون این تابع به دست آورید. می‌توانید از این نکته استفاده کنید که نقاط $(۰,۳),(۱,۵)$ روی نمودار f قرار دارند. پس نقاط $(۳,۰),(۵,۱)$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارند و نمودار $f^{-۱}$ یک خط راست است.

پیدا کردن ضابطهٔ $f^{-۱}$ در فعالیت قبل چندان دشوار نبود زیرا f یک تابع خطی بود. اما اگر f خطی نباشد کار چندان ساده نیست. اکنون با روش دیگری وارون f را به دست می‌آوریم که بتوان آن را هنگامی که تابع داده شده خطی هم نیست به کار برد.
تابع $f(x) = ۲x + ۳$ را در نظر می‌گیریم. در جدول زیر برخی از مقادیر از دامنه و مقادیر نظیر آن از برد داده شده‌اند. همان طور که می‌دانید f یک به یک است اگر شبیه همین جدول را برای تابع وارون f در نظر بگیریم جدولی به دست می‌آید که در آن جای مقادیر متناظر y,x تغییر کرده است.

جدول تابع $f^{-۱}$

x	y
۷	۲
۵	۱
$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

جدول تابع f

x	y
۲	۷
۱	۵
$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۱}{۳}$
۰	۳
-۱	۱
-۲	-۱

زوج مرتب $(۱,۵)$ به f تعلق دارد و زوج $(۵,۱)$ به وارون آن. عدد ۱ توسط قانون تابع به ۵ نظیر شده است یعنی ۱ در ۲ ضرب شده و ۳ واحد به آن اضافه شده است اما چه قانونی ۵ را به ۱ نظیر می‌کند؟ پاسخ برگشت از همین مسیر است. یعنی ابتدا سه واحد از ۵ کم کنیم و سپس مقدار به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم جدول روبه‌رو این فرآیند را بهتر توصیف می‌کند. اگر تابع وارون f را با g نمایش دهیم، ضابطه آن به صورت : $g(y)=\dfrac{y-۳}{۲}$ می‌باشد. مشخص است که yها از برد f اختیار می‌شوند.

y	$\dfrac{y-۳}{۲}=x$
۷	۲
۵	۱
$\dfrac{۱۱}{۳}$	$\dfrac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

همان طور که می‌دانید g را به صورت‌های زیر هم می‌توان نمایش داد :

$$g(a)=\frac{a-۳}{۲}\quad,\quad g(b)=\frac{b-۳}{۲}\quad,\quad g(t)=\frac{t-۳}{۲}$$

آن چه که مهم است این است که دامنهٔ g همان برد f است بنابراین می‌توان نوشت :

$$g(x)=\frac{x-۳}{۲}\qquad x\in R_f$$

از آنجا که g را معمولاً با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم داریم : $f^{-۱}(x)=\dfrac{x-۳}{۲}$

اکنون آن چه بیان شده را به عنوان یک روش به کار می‌بریم.

تذکر :

برای به‌دست‌آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر مانند f در معادلهٔ $y=f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال

ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۲x+۳$ را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=۲x+۳\Rightarrow y=۲x+۳$$
$$\Rightarrow ۲x=y-۳$$
$$\Rightarrow x=\frac{y-۳}{۲}$$
$$\Rightarrow g(y)=\frac{y-۳}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲}$$

تمرین در کلاس

نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ب) $g(x)=\frac{x-۵}{۲x+۳}$

فعالیت ۱۰

۱ــ اگر $f(x)=۲x+۳$ دیدیم که وارون آن، تابع $g(x)=\frac{x-۳}{۲}$ است. توابع $(g\circ f)(x),(f\circ g)(x)$ را محاسبه کنید.

۲ــ اگر $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ ثابت کنید که f وارون‌پذیر است و وارون آن تابع $g(x)=\frac{x^۲+۱}{۲}$ است. توابع $(g\circ f)(x),(f\circ g)(x)$ را محاسبه کنید.

۳ــ به طور کلی اگر تابع f دارای تابع وارون g باشد در مورد توابع $(g\circ f)(x),(f\circ g)(x)$ چه حدس می‌زنید؟ توجه کنید که تابع و تابع وارون عکس یکدیگر عمل می‌کنند.

خاصیت تابع و تابع وارون نشان می‌دهد که قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم :

$$D_g=R_f \quad , \quad R_g=D_f$$

و برای هر x در دامنهٔ f داریم : $g(f(x))=x$

و برای هر x در دامنهٔ g داریم : $f(g(x))=x$

تذکر : توجه داریم که $f^{-۱}$ یک نماد است و نباید آن را با $\frac{۱}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

تمرین در کلاس

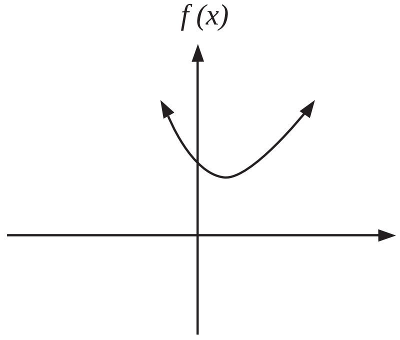
۱ــ اگر $f(x)=\frac{۷}{x}+۳$ ، $g(x)=\frac{۷}{x-۳}$ ، $h(x)=\frac{x-۳}{۷}$ ثابت کنید که f و g وارون یکدیگرند ولی g و h وارون یکدیگر نمی‌باشند.

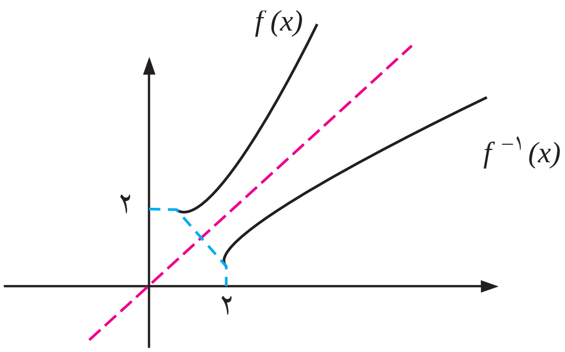
۲ــ آیا دو تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ ، $g(x)=\frac{۵}{۲}$ وارون یکدیگرند؟

۳ــ اگر $y=m_۱x+b_۱$ و $y=m_۲x+b_۲$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید $m_۱m_۲=۱$.

مثال

تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ یک به یک نیست. زیرا $f(۰)=f(۳)$ ولی $۳\neq ۰$ یک به یک نبودن f از روی نمودار آن نیز به سادگی دیده می‌شود.





اما تحدید این تابع روی بازهٔ $[۱,\infty)$ تابعی یک به یک است و می‌توانیم معادله‌ای برای $f^{-۱}$ به دست آوریم. نمودار بالا یک‌به یک بودن تحدید f روی بازهٔ $[۱,\infty)$ را نشان می‌دهد و با روش جبری نیز می‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱^۲-۲x_۱+۳=x_۲^۲-۲x_۲+۳$$
$$\Rightarrow (x_۱-۱)^۲+۲=(x_۲-۱)^۲+۲$$
$$\Rightarrow (x_۱-۱)^۲=(x_۲-۱)^۲$$
$$\Rightarrow x_۱-۱=x_۲-۱$$
$$\Rightarrow x_۱=x_۲$$

توجه داشته باشید که در نتیجه‌گیری‌های بالا از این که $۱\leq x_۱$ و $۱\leq x_۲$ استفاده کرده‌ایم (چگونه؟). برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون داریم :

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۳ \Rightarrow y=(x-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow y-۲=(x-۱)^{۲} \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y-۲}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین $x-۱=\sqrt{y-۲}$ در نتیجه

$$x=\sqrt{y-۲}+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

به کمک نمودارها و نیز از ضابطه توابع دیده می‌شود که :

$$D_f=[۱,+\infty)=R_{f^{-۱}}$$
$$R_f=[۲,+\infty)=D_{f^{-۱}}$$

بنابراین :

$$f^{-۱}:[۲,+\infty)\rightarrow[۱,+\infty)$$
$$f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

درستی تساوی $f(f^{-۱}(x))=x$ با محاسبه زیر روشن می‌شود.

$$f(f^{-۱}(x))=f(\sqrt{x-۲}+۱)=(\sqrt{x-۲}+۱-۱)^{۲}+۲=(\sqrt{x-۲})^{۲}+۲=x-۲+۲=x$$

اثبات درستی رابطهٔ $f^{-۱}(f(x))=x$ به طریق مشابه است.

بحث در کلاس

وارون یک تابع صعودی (اکید)، صعودی است یا نزولی؟ وارون یک تابع نزولی (اکید) چگونه است؟

مسائل

۱ــ تحقیق کنید که توابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۲$ ، $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم $f(g(x))=x$ و برای کدام مقادیر x داریم $g(f(x))=x$ ؟

۲ــ فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار $f^{-۱}$ درکدام ناحیه قرار می‌گیرد؟

۳ــ نشان دهید تابع $f(x)=|x-۲|+۳$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴ــ در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=x^{۳}-۵$, $g(x)=\sqrt[۳]{x+۵}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}\ ,\ g(x)=x^{۲}+۲\ ،\ x\geq ۰$

۵ــ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عددحقیقی x ، $x<f(x)$.

۶ــ وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند به دست آورید.

الف) $f(x)=(x+۵)^{۲}\ ،\ x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱\ ،\ x\geq ۱$

ج) $f(x)=(x-۳)^{۲}$

د) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۷ــ نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{۳x-۲}{۵x-۳}$ وارون خودش است.

۸ ــ تابع $f(x)=ax+b$ $a\neq ۰$ داده شده است همهٔ مقادیرb,a را که به ازای آن‌ها $f^{-۱}(x)=f(x)$ را بیابید.

۹ــ در مورد وارون پذیری تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲ & x\leq -۱\\ x^{۲} & -۱<x<۱\\ x+۱ & ۱\leq x\end{cases}$ تحقیق کنید.

۱۰ــ اگر $f(x)=x+۳$ ، $g(x)=۳x-۷$ با محاسبه نشان دهید $g^{-۱}\circ f^{-۱}=(f\circ g)^{-۱}$.

۱۱ــ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-\dfrac{۴۹}{۱۰}t^{۲}$ به دست می‌آید.،

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟

توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب

قبلاً با توابع خطی آشنا شده‌اید. هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=۰$، تابع به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامند. توابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که آن‌ها را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

تعریف :

هر تابع به‌صورت : $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \quad + a_۱ x + a_۰$ که در آن $a_n, a_{n-۱}, \quad, a_۲, a_۱, a_۰$ اعدادی حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n \neq ۰$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

درجدول زیر مثال‌هایی از توابع چندجمله‌ای ارائه شده است.

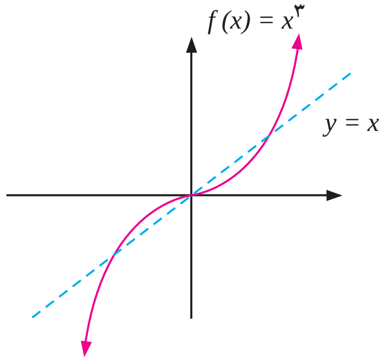
مثال	شکل کلی	درجهٔ چندجمله‌ای
$f(x)=۳$	$f(x)=a$	۰ (توابع ثابت)
$f(x)=\frac{۲}{۳}x-۵$	$f(x)=a_۱x+a_۰$	۱(خط با شیب $a_۱$)
$f(x)=-۳x^۲+۲x+۱$	$f(x)=a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$	۲(سهمی‌ها)
$f(x)=۷x^۳-\sqrt{۲}x^۲+۲x-۵$	$f(x)=a_۳x^۳+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$	۳
$f(x)=x^۴-x^۳+x$	$f(x)=a_۴x^۴+a_۳x^۳+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$	۴

با رسم نمودار توابع چندجمله‌ای از درجه ۰، ۱، ۲ و یافتن دامنه و برد آن‌ها آشنا شده‌اید. دراین‌جا نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^۳$ و برخی از توابع چندجمله‌ای دیگر درجه سوم که به‌کمک تابع $y=x^۳$ می‌توان نمودار آن‌ها را رسم کرد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دامنهٔ تابع $f(x)=x^۳$ برابر IR است و تابعی فرد است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است. با توجه به ضابطه تابع برای مقادیر مثبت x، مقدار تابع مثبت است بنابراین کافی است نمودار تابع در ربع اول را رسم کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم. این تابع صعودی است زیرا اگر $x_۱<x_۲$ می‌توان نتیجه گرفت $x_۱^۳<x_۲^۳$.

برای $۰<x<۱$ داریم : $۰<x^۳<x$ و برای $x>۱$ داریم $x<x^۳$، بنابراین نمودار این تابع دربازهٔ $(۰,۱)$ زیر خط $y=x$ و در بازهٔ $(۱,\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد.

اکنون با کمک نقطه‌یابی رسم نمودار تقریبی $f(x)=x^{۳}$ به سادگی انجام می‌شود.



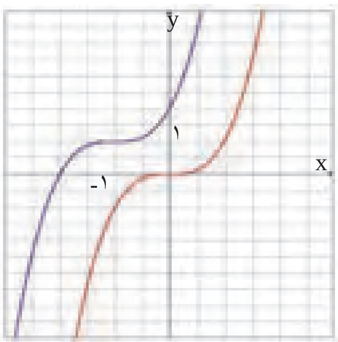
x	$f(x)$
۰	۰
$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲۷}$
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۲۷}{۸}$
۲	۸

باتوجه به یک به یک بودن، این تابع وارون‌پذیر است و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$.

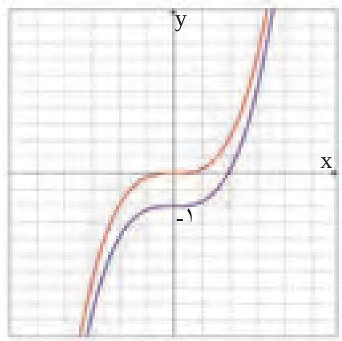
تمرین در کلاس

۱ــ نمودار $y=\sqrt[۳]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y=x^{۳}$ رسم کنید.

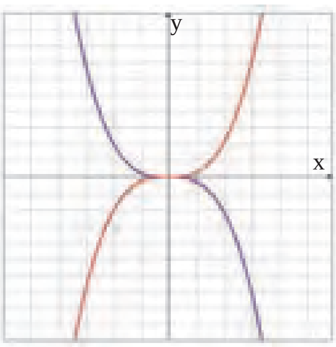
۲ــ در هریک از شکل‌های زیر نمودار تابع $y=x^{۳}$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.



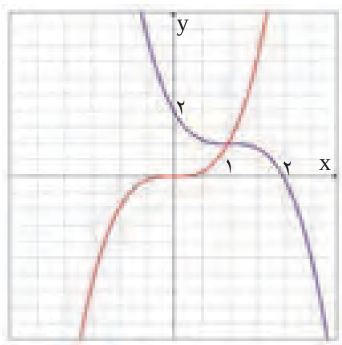
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳ــ نمودار توابع $y=(x+\frac{۳}{۲})^{۳}$ و $y=(x-۱)^{۳}+۲$ و $y=۲x^{۳}$ را به کمک نمودار تابع $y=x^{۳}$ رسم کنید.

حرکت‌هایی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند حرکت متناوب می‌نامند. حرکت زمین دور خورشید، تغییر فصل‌ها، حرکت عقربه‌های ساعت از این نوع حرکت‌ها هستند. این نوع حرکت در تنظیم بلند مدت وقت و محاسبه زمان به انسان کمک می‌کند. حرکت دیگر تناوبی گردش ماه به دور زمین است که در طی یک دوره تقریباً ۲۸ روزه صورت می‌گیرد و ما را در محاسبه تعداد ماه‌ها یاری می‌نماید. بسیاری از پدیده‌های طبیعی دیگر در عالم خلقت نیز دارای رفتار تناوبی هستند. انسان‌ها از این‌گونه رفتارها در ساخت مصنوعات بشری مانند ساعت هم استفاده کرده‌اند.

توابعی که بیان کننده این حرکات تناوبی هستند شکل خاصی دارند و آن‌ها را تابع‌های متناوب می‌نامند. سال قبل با توابع متناوبی مانند $y = sinx$ و $y = cosx$ و دوره تناوب برخی از توابع مثلثاتی آشنا شده‌اید. در اینجا به طور دقیق‌تری توابع متناوب را تعریف می‌کنیم.

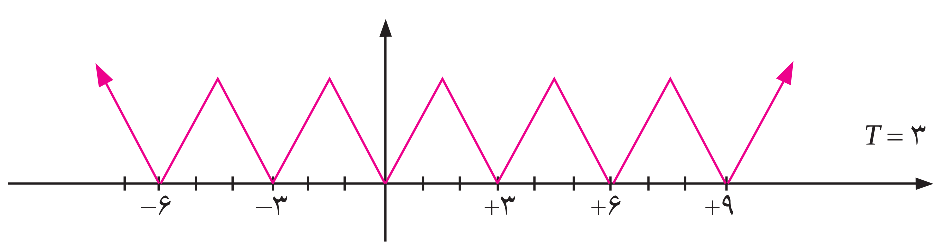
تعریف :

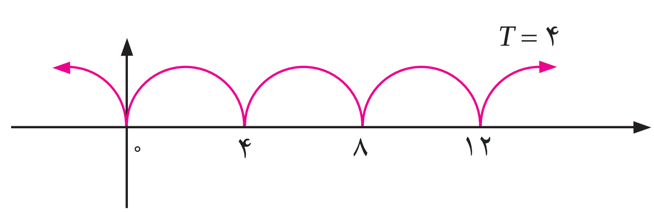
تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد مثبت T با خاصیت بالا را دورهٔ تناوب f می‌نامند.

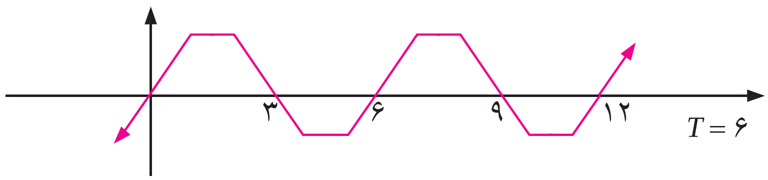
مثال

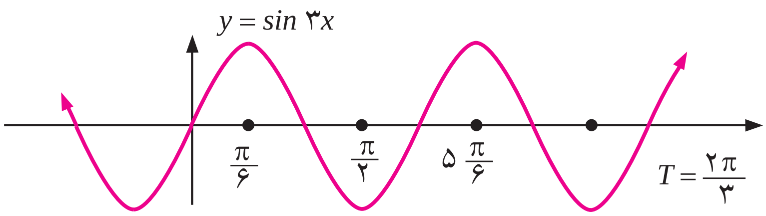
۱ : توابع $y = sinx$ و $y = cosx$ توابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲π هستند.

۲ : توابعی که نمودار آن‌ها در زیر آمده است توابعی متناوب با دورهٔ تناوب‌های مختلف هستند.



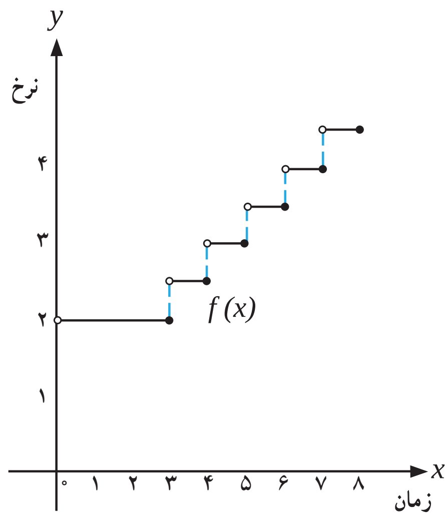






توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

نرخ ارسال بسته‌های پستی به طور معمول تابعی از وزن آن‌ها است. همچنین نرخ توقف درپارکینگ‌ها برحسب ساعت توقف اتومبیل‌ها در آن جا تعیین می‌شود، یعنی نرخ پارکینگ تابعی از زمان توقف است. فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲هزارتومان و برای هر ساعت اضافه یا زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد، نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد به شکل زیر است.



$f(x)=$ نرخ برحسب هزار تومان	x (ساعات توقف)
۲	$۰<x\le ۳$
۲/۵	$۳<x\le ۴$
۳	$۴<x\le ۵$
۳/۵	$۵<x\le ۶$
۴	$۶<x\le ۷$
۴/۵	$۷<x\le ۸$

دامنه این تابع $(۰,۸]$ و برد آن مجموعه $\{۲,۲/۵,۳,۳/۵,۴,۴/۵\}$ می‌باشد. برای مثال برای توقف ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه‌ای باید مبلغ ۳۵۰۰ تومان پرداخت کرد.

توابعی که نمودار آن‌ها شبیه تابع بالا هستند به توابع پله‌ای معروف هستند.

تعریف :

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها تابع ثابت باشد یک تابع پله‌ای می‌نامند.

گونه خاصی از توابع پله‌ای تابع جزء صحیح می‌باشد. ابتداجزء صحیح یک عدد را تعریف می‌کنیم و بعد تابع جزء صحیح را تعریف می‌کنیم.

تعریف :

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

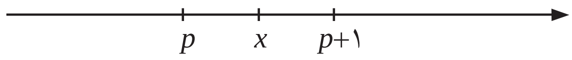
برای مثال داریم :

$$[\sqrt{۳}]=۱ \qquad [۷]=۷ \qquad [۴/۹]=۴ \qquad [۳/۲]=۳$$

$$[-۲/۹۵]=-۳ \qquad [-۲]=-۲ \qquad [۱-\sqrt{۲}]=-۱ \qquad [-۱/۵]=-۲$$

جزء صحیح یک عدد به شکل زیر نیز مشخص می‌شود.

برای هر عدد حقیقی x، یک عدد صحیح p موجود است که $p \le x < p+۱$. p همان جزء صحیح x است.

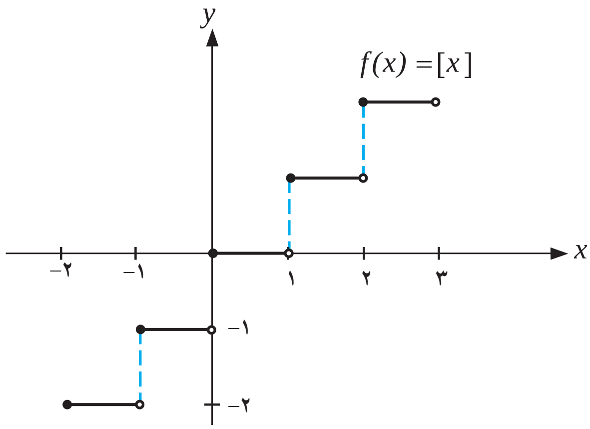


تعریف :

تابعی که به‌هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می‌شود.

دامنه تابع جزء صحیح مجموعه‌اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می‌باشد. نمودار این تابع با توجه به جدول، در بازه $[-۲ ، ۳)$ رسم شده‌است.

x	$[x]$
$-۲ \le x < -۱$	-۲
$-۱ \le x < ۰$	-۱
$۰ \le x < ۱$	۰
$۱ \le x < ۲$	۱
$۲ \le x < ۳$	۲



تمرین در کلاس

یک شرکت خدماتی برای هر ساعت کار، یا کسری از ساعت ۵ هزار تومان هزینه دریافت می‌کند. تابعی بنویسید که هزینه x ساعت کار را محاسبه کند. نمودار این تابع را نیز رسم کنید.

مثال : تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازه $[-۱ \,،\, ۲]$ رسم می‌کنیم.

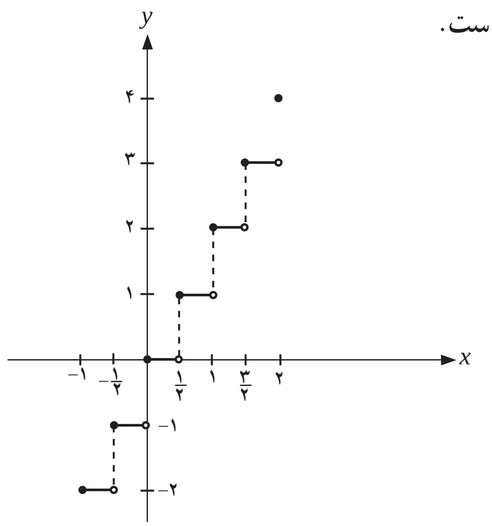
می‌دانیم که نمودار این تابع از انقباض نمودار تابع $[x]$ با ضریب $\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید. اگر $-۱ \leq x \leq ۲$ آنگاه $-۲ \leq ۲x \leq ۴$ و با توجه به تعریف جزء صحیح، $[۲x]$ مقدارهای ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد.

$$[۲x]=-۲ \Rightarrow -۲ \leq ۲x < -۱ \Rightarrow -۱ \leq x < -\frac{۱}{۲}$$

با استدلال مشابه داریم :

$$[۲x]=-۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲} \leq x < ۰ \,,\, [۲x]=۰ \Rightarrow ۰ \leq x < \frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع در بازه‌های متوالی به طول $\frac{۱}{۲}$ که از نقطه ۱- شروع می‌شود به‌ترتیب مقدارهای۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد. نمودار این تابع به شکل زیر است.



مسائل

۱ــ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x \leq -۳ \\ -۱ & -۱ \leq x < ۴ \\ ۲ & ۴ \leq x \end{cases}$$

۲ــ نمودار تابع $y=[\frac{۱}{۳}x]$ را در بازه $[-۶ \,،\, ۶]$ رسم کنید.

۳ــ وارون پذیری تابع $y=[x]$ را بررسی کنید.

۴ــ نمودار توابع زیر را در بازه $[-۲ ، ۲]$ رسم کنید .

الف) $y=۲[x]$ ب) $y=[-x]$

۵ــ نشان دهید تابع $y=x-[x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶ــ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

الف) $y=[x]-\frac{۱}{۲}$ ب) $y=۲[x]+۱$

۷ــ نمودارهای دو تابع $y=[x-۳]$ و $y=[x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۸ــ یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی تا کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به‌همین ترتیب دریافت می‌کند. اگر $f(x)$ هزینه‌ارسال یک بسته پستی x کیلوگرمی می‌باشد، نمودار آن را رسم کنید و معادله‌ای برای آن بیابید.