

### استدلال در هندسه



تصویر مجسمه «متفکر» اثر رُودن، مجسمه‌ساز فرانسوی (۱۸۴۰ – ۱۹۱۷)

#### ۱-۱- استدلال استقرایی

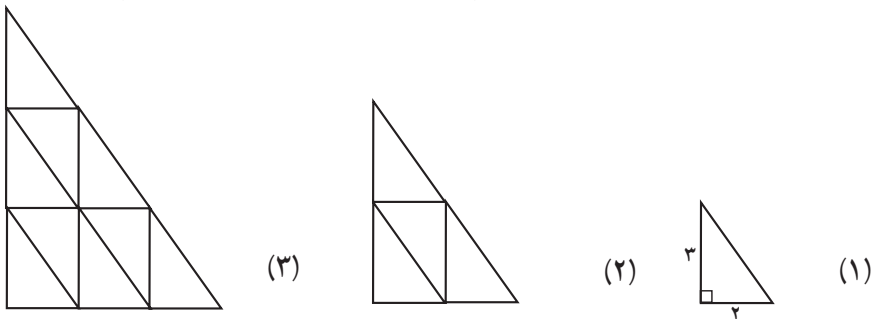
وقتی بیماری به پزشک مراجعه می‌کند، پزشک با استفاده از تجربه خود، حدسهایی درباره نوع بیماری می‌زند. با این حال، او برای تشخیص قطعی بیماری، تنها به احساس تجربی خود اکتفا نمی‌کند و با انجام آزمایشهای متعدد و مشاهده علامتهای مختلف، در مورد نوع بیماری و روش درمان تصمیم نهایی را می‌گیرد. به این ترتیب، پزشک با مشاهده، جمع‌آوری اطلاعات از طریق آزمایش و اندازه‌گیری و دیدن نظمی در آنها، بیماری را تشخیص می‌دهد و راههای درمان را پیش می‌گیرد.

روش استدلال در مسائل پزشکی و علوم تجربی، استقرایی است. در ریاضی نیز از استدلال

استقرایی به عنوان یک استراتژی خوب حل مسأله استفاده می‌شود. در چنین روشی، نخست حدس می‌زنیم، سپس حدسهای خود را دقیق و دقیقتر می‌کنیم، آنگاه برای نتیجه‌گیری کلی، با استفاده از استدلال استنتاجی، به‌طور قطع و یقین، درباره‌ی درستی آن حکم می‌کنیم.

## فعالیت ۱-۱

مثلثهای شکلهای ۱، ۲ و ۳ با هم متشابه و مثلثهای کوچک همه با هم هم‌نهشت هستند.



۱- تعداد مثلثهای کوچک هر شکل را تعیین و سپس جدول زیر را کامل کنید.

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مثلثهای کوچک			

۲- رسم مثلثهای متشابه را تا پنجمین شکل ادامه دهید. در شکل پنجم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟ جدول خود را تا شکل پنجم کامل کنید.

۳- در شکل دهم چند مثلث کوچک جا می‌گیرد؟ آیا رابطه‌ای بین شماره‌ی شکل و تعداد مثلثهای کوچک وجود دارد؟ توضیح دهید.

۴- در مورد شکل پانصدم چه حدسی می‌زنید؟

۵- در حالت کلی حدس شما چیست؟

۶- آیا می‌توانید درستی حدس خود را در مورد شکل هزارم توجیه کنید؟

در این فعالیت برای بررسی رابطه‌ی بین شماره‌ی شکل و تعداد مثلثهای کوچک در هر شکل، چندین مرحله را آزمایش و بررسی کردیم و سپس جدولی از اطلاعات به‌دست آمده را تنظیم نمودیم. آنگاه با دیدن نظم در اطلاعات به دست آمده، در مورد رابطه‌ی بین شماره‌ی شکلها و تعداد مثلثهای

کوچک در هر شکل حدسی زدیم.  
این فعالیت، نمونه‌ای از به کار بردن روش استدلال استقرایی برای رسیدن به یک حدس کلی است.

## فعالیت ۱-۲

۱- مثلث دلخواهی را در نظر بگیرید :

الف) نیمسازهای زاویه‌های داخلی این مثلث را رسم کنید. این نیمسازها نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ب) بند (الف) را در مورد چند مثلث دیگر تحقیق کنید.

پ) از دو بند بالا چه نتیجه‌ای را پیش‌بینی می‌کنید؟

۲- الف) عمودمنصف‌های ضلعهای مثلث دلخواهی را رسم کنید. عمودمنصف‌ها نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ب) بند (الف) را در مورد چند مثلث دیگر تحقیق کنید.

پ) با توجه به دو بند بالا، در حالت کلی چه حدسی می‌زنید؟ یعنی حدس شما برای وضعیت عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث دلخواه نسبت به هم چیست؟

نیمسازها، میانه‌ها و ارتفاعهای یک مثلث از ویژگیهای جالبی برخوردارند. فعالیت بعدی به شما فرصت می‌دهد تا یکی از این ویژگیها را در مورد میانه‌ها تحقیق کنید.

## فعالیت ۱-۳

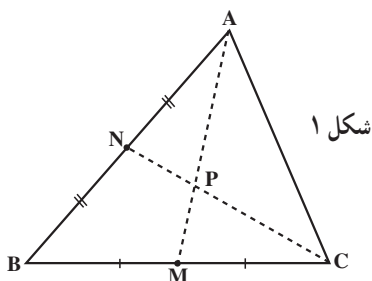
الف) مثلث دلخواه ABC را در نظر بگیرید و میانه‌های نظیر ضلعهای AB و BC را رسم کنید و نقطه برخورد آنها را P بنامید (مانند شکل ۱).

ب) با اندازه‌گیری طول پاره‌خطهای AP و

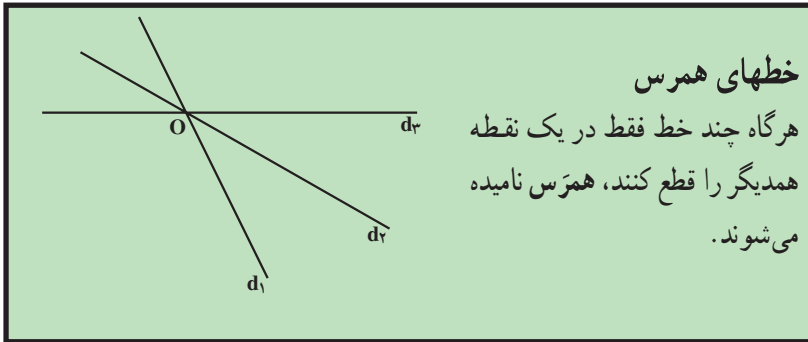
PM، نسبتهای  $\frac{AP}{AM}$  و  $\frac{PM}{AM}$  را به دست آورید.

پ) با اندازه‌گیری طول پاره‌خطهای CP و

PN، نسبتهای  $\frac{CP}{CN}$  و  $\frac{PN}{CN}$  را تعیین کنید.



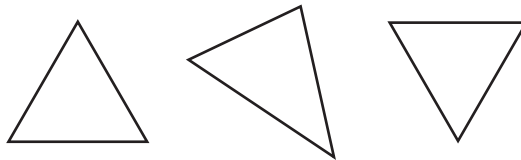
ت) با توجه به نتیجه‌های به‌دست آمده از بندهای (ب) و (پ) چه حدسی می‌زنید؟  
 ث) میانه نظیر ضلع AC را رسم کنید. سه میانه مثلث ABC چه وضعی نسبت به هم دارند؟  
 ج) چند مثلث دیگر رسم کنید و بندهای (الف) تا (ث) را در مورد آنها تحقیق نمایید.



با انجام سه فعالیت بالا، نتیجه‌های جالبی به‌دست آوردید. اما می‌دانید که این نتیجه‌ها قابل استناد نیستند زیرا فقط براساس استدلال استقرایی حاصل شده‌اند.

## فعالیت ۴-۱

۱- سه ارتفاع هر یک از مثلثهای زیر را رسم کنید.



الف) نقطه هم‌رسی ارتفاعها نسبت به مثلثها چه وضعی دارند؟  
 ب) حدس شما درباره نقطه هم‌رسی ارتفاعهای هر مثلث دلخواه چیست؟  
 پ) حدس خود را در مورد مثلثی به ضلعهای ۴، ۵ و ۶ آزمایش کنید. آیا این آزمایش حدس قبلی شما را تأیید می‌کند؟

۲- مثلثی به ضلعهای ۶، ۸ و ۱۲، و سه ارتفاع آن را رسم کنید.

الف) نقطه هم‌رسی ارتفاعهای این مثلث در کجا قرار می‌گیرد؟  
 ب) آیا حدس شما درباره نقطه هم‌رسی ارتفاعهای مثلث تأیید شد؟

پ) با توجه به بندهای الف و ب، حدس شما در مورد محل هم‌رسی ارتفاعها در هر مثلث دلخواه چیست؟

۳- یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه رسم کنید. سپس ارتفاعهای آن را رسم نمایید.

الف) نقطه هم‌رسی ارتفاعها کجا قرار دارد؟

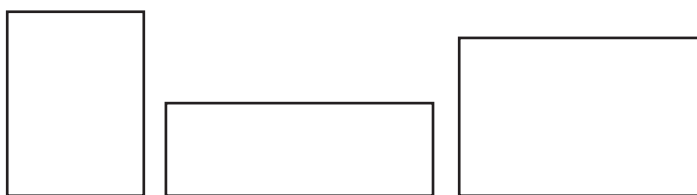
ب) حدس شما در مورد محل نقطه هم‌رسی ارتفاعها در هر مثلث تأیید یا رد شد؟ چرا؟ توضیح دهید.

تمرین - وسط ضلعهای یک چهارضلعی دلخواه را به‌طور متوالی به هم وصل کنید و با استفاده از استدلال استقرایی، ویژگیهای شکل حاصل را بررسی نمایید. اگر چهارضلعی اولیه مستطیل، مربع، لوزی یا متوازی‌الاضلاع باشد، حدس شما درباره ویژگی چهارضلعی پدید آمده از وصل کردن وسطهای ضلعهای آنها چیست؟ چرا؟

## فعالیت ۱-۵

اگر نیمسازهای زاویه‌های یک مربع را رسم کنیم، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند (آزمایش کنید!) زیرا در مربع، قطرهای نیمساز زاویه‌ها هستند. حال اگر به جای یک مستطیل در نظر بگیریم، وضعیت نیمسازها چگونه خواهد شد؟ در این فعالیت، به بررسی این سؤال می‌پردازیم.

الف) در زیر سه مستطیل رسم شده است:



(۳)

(۲)

(۱)

نیمسازهای زاویه‌های داخلی هریک را رسم کرده، ویژگیهای شکل پدید آمده از برخورد نیمسازها را با اندازه‌گیری (با خط‌کش و نقاله) در جدولی یادداشت کنید.

ب) براساس این سه تجربه، در مورد شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل چه حدسی می‌زنید؟

پ) مستطیل دلخواه دیگری رسم کنید و درستی حدس خود را تحقیق نمایید.



آیا تا به حال به شباهت قسمت‌های مختلف گل کلم و خود آن توجه کرده‌اید؟ اگر از یک تکه گل کلم عکس بگیرید و آن را بزرگ کنید، تصویر حاصل تقریباً فرقی با خود گل کلم ندارد! یعنی هر تکه گل کلم شبیه کل آن است. تشابه که یکی از پرکاربردترین مفهومی‌های هندسی است، در پدیده‌های طبیعی بسیار مشاهده می‌شود. ویژگی این گونه پدیده‌ها خود – متشابه بودن آنها است.

اگر قسمتی از یک شکل با کل شکل متشابه باشد، آن شکل خود – متشابه نامیده می‌شود.

## فعالیت ۱-۶

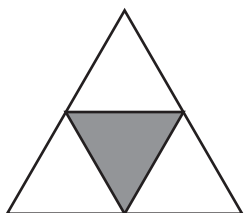
یک مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر بگیرید.

**دستور ترسیم:**

الف) وسط ضلعها را همانطور که نشان داده شده است به هم وصل کنید.

ب) سه مثلثی را که در گوشه‌ها ایجاد می‌شوند، نگه دارید و مثلث میانی را با سیاه کردن حذف کنید.

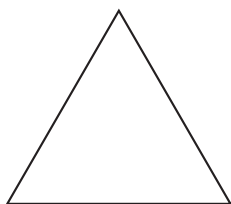
۱- این فرآیند را روی سه مثلث جدید تکرار کنید. به این ترتیب ۹ مثلث همنهشت تولید می‌شود.



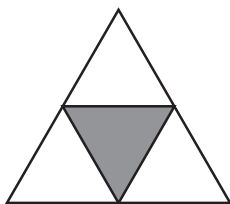
- ۲- فرآیند بالا را تا سه مرحله دیگر، تکرار کنید.
- ۳- شکلی را که از تکرار این فرآیند ایجاد می شود در ذهن خود مجسم کنید و آن را توصیف نمایید. چنین شکلی مثلث سِرپینسکی نامیده می شود.

## فعالیت ۱-۷

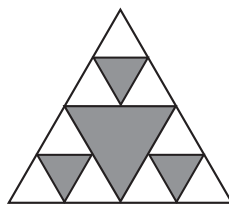
چهار مرحله اول رسم مثلث سِرپینسکی در زیر نشان داده شده است. مرحله های بعدی، با تقسیم مثلثها به مثلثهای کوچکتر ادامه پیدا می کند.



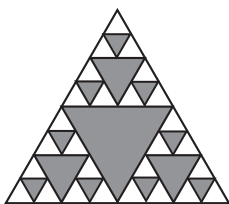
مرحله ۰



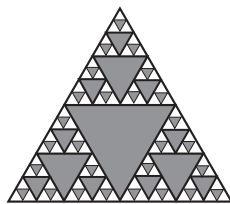
مرحله ۱



مرحله ۲



مرحله ۳



مرحله ۴

۱. تعداد مثلثهای جدیدی را که در هریک از مراحل ۱ تا ۴ ایجاد شده اند، بشمارید و در جدول زیر یادداشت کنید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	۵	...	n
تعداد	۱							

۲. در مورد تعداد مثلثها در مرحله ۵ چه حدسی می زنید؟ در هر مرحله، تعداد مثلثها چگونه تغییر می کند؟
۳. برای یافتن تعداد مثلثها در مرحله n، چه الگویی را پیشنهاد می کنید؟
۴. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، تعداد مثلثها چگونه تغییر می کند؟

۵. اگر مساحت مثلث در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، مساحت باقی‌مانده را در مرحله‌های ۱ تا

۴ به دست آورید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
مساحت	۱						

۶. در مورد مساحت باقی‌مانده در مرحلهٔ ۵، چه حدسی می‌زنید؟

۷. در هر مرحله مساحت باقی‌مانده چگونه تغییر می‌کند؟

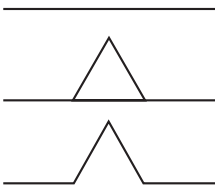
۸. برای یافتن مساحت باقی‌مانده در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟

۹. اگر n بزرگ و بزرگتر شود، مساحت مثلث‌های باقی‌مانده چگونه تغییر می‌کند؟

## فعالیت ۸-۱

دستور ترسیم زیر را در نظر بگیرید :

الف) پاره‌خط را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید ؛



ب) روی قسمت میانی، یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کنید ؛

پ) پاره‌خط میانی را حذف کنید.

۱. یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید.

۲. دستور ترسیم را بر روی هریک از ضلعهای مثلث اجرا نمایید. توجه کنید که در این

حالت، هر پاره‌خط به چهار پاره‌خط کوچکتر با طولهای مساوی تبدیل می‌شود.

۳. دستور فوق را در دو مرحلهٔ دیگر، روی هریک از پاره‌خطهای ایجاد شده تکرار کنید.

۴. تعداد پاره‌خطهای ایجاد شده در مرحله‌های ۱ تا ۳ را بشمارید و در جدول زیر یادداشت

نمایید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	n
تعداد پاره‌خطها	۳	۱۲					

۵. در مورد تعداد پاره‌خطها در مرحلهٔ ۴ چه حدسی می‌زنید؟ در هر مرحله تعداد پاره‌خطها

چگونه تغییر می‌کند؟

۶. برای یافتن تعداد پاره‌خطها در مرحلهٔ n، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟



۷. اگر  $n$  بزرگ و بزرگتر شود، تعداد پاره‌خطها چگونه تغییر می‌کند؟
۸. اگر طول ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع در مرحلهٔ صفر برابر ۱ باشد، محیط شکل حاصل در مرحله‌های ۱، ۲ و ۳ را به دست آورید و در جدول زیر یادداشت کنید.

مرحله	۰	۱	۲	۳	۴	...	$n$
محیط	۳						

۹. حدس شما در مورد محیط شکل در مرحلهٔ ۴ چیست؟ محیط شکل در هر مرحله با چه ضربی تغییر می‌کند؟

۱۰. برای یافتن محیط شکل در مرحلهٔ  $n$ ، چه الگویی را پیشنهاد می‌کنید؟
۱۱. اگر  $n$  بزرگ و بزرگتر شود، محیط شکل حاصل چگونه تغییر می‌کند؟
- اگر دستور فوق روی ضلعهای مثلث تا بینهایت تکرار شود شکلی به نام برف دانه کُخ ایجاد می‌شود. نکتهٔ شگفت آور در مورد این شکل آن است که با وجود سطح محدود، محیط آن از هر عدد بزرگی بزرگتر می‌شود، تا جایی که گفته می‌شود محیط این شکل به بینهایت میل می‌کند.
- در فعالیت زیر، با استفاده از استراتژی تغییردیدگاه، به بررسی مثالی از استدلال استقرایی بپردازید.

## فعالیت ۱-۹

- هرگاه دو رأس غیر مجاور در یک چندضلعی محدب به وسیلهٔ یک پاره‌خط به هم وصل شود، یک قطر از آن چندضلعی به دست می‌آید.
- الف) چند ضلعیهای محدب را تا هشت ضلعی رسم کنید.
- ب) قطرهای هریک از این چندضلعیها را رسم کنید و جدول زیر را کامل نمایید.

جدول ۱

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸
تعداد قطرها	۰	۲	۵			

- پ) آیا رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرها وجود دارد؟
- همانطور که تجربه کردید، به سادگی نمی‌توان رابطه‌ای بین داده‌های جدول ۱ پیدا کرد تا به شما در پیدا کردن الگویی برای پیش‌بینی رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطرها چندضلعیها در هر

مرحله، که هدف این فعالیت بود، کمک کند. بنابراین دیدگاه خود را تغییر دهید و به جمع‌آوری داده‌های متفاوت برای رسیدن به هدف این فعالیت و حل این مسأله پردازید.  
(ت) جدول ۲ را تکمیل کنید:

جدول ۲

۸	۷	۶	۵	۴	۳	تعداد ضلعها
				۱	۰	تعداد قطره‌ای رسم شده از یک رأس

(ث) در چندضلعیهای جدول ۲، آیا رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطره‌ای رسم شده از یک رأس وجود دارد؟

(ج) آیا می‌توانید رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطره‌ای که از تمام رأسهای چندضلعیهای صفحه قبل رسم می‌شوند، حدس بزنید؟

(چ) آیا رابطه‌ای بین تعداد ضلعها و تعداد قطره‌ای رسم شده از هر رأس یک  $n$  ضلعی وجود دارد؟

(ح) اگر در قسمت (ج) رابطه‌ای پیدا کردید، آیا می‌توانید با استفاده از آن، رابطه بین تعداد ضلعها و تعداد قطره‌ای که از تمام رأسهای یک  $n$  ضلعی می‌گذرند را حدس بزنید؟  
(خ) چگونه استراتژی تغییر دیدگاه به شما کمک کرد تا رابطه‌ای برای تعیین تعداد قطره‌ای چندضلعیها به دست آورید؟

## مسأله‌ها

۱. با استفاده از استدلال استقرایی، رابطه‌ای که مجموع زاویه‌های داخلی یک  $n$  ضلعی محدب را بیان می‌کند حدس بزنید و مراحل انجام کار را توضیح دهید.

۲. با استفاده از استدلال استقرایی، ویژگیهای شکل حاصل از برخورد نیمسازهای یک متوازی‌الاضلاع را پیش‌بینی کنید و چگونگی رسیدن به حدسهای خود را توضیح دهید.

۳. در مسأله قبل به جای متوازی‌الاضلاع یک دوزنقه متساوی‌الساقین در نظر می‌گیریم. چه حدسی در مورد شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن می‌زنید؟

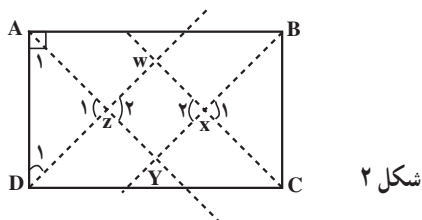
۴. یک نقطه دلخواه روی قاعده یک مثلث متساوی‌الساقین در نظر بگیرید. از این نقطه به موازات دو ساق مثلث خطوطی رسم کنید. طول دو پاره‌خط را اندازه‌گیری کرده سپس مجموع آنها را به دست آورید. با جابه‌جا کردن این نقطه روی قاعده، چه تغییری در اندازه این مجموع ایجاد

می‌شود؟ آیا رابطه‌ای بین این مجموع و اجزای مثلث وجود دارد؟

## ۲-۱- استدلال استنتاجی

در فعالیت ۵-۱ درباره شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مستطیل حدسهایی زدیم و با آزمایش دیدیم که آن شکل، یک مربع است. با این حال، نمی‌توانیم فقط با استناد به نتیجه چند آزمایش یک نتیجه‌گیری کلی کنیم و بگوییم که از برخورد نیمسازهای هر مستطیل، یک مربع حاصل می‌شود. اگر بخواهیم درستی این نتیجه را برای هر مستطیلی نشان دهیم، باید از روش استدلال استنتاجی استفاده کنیم. درستی حدسی را که در فعالیت ۵-۱ با کمک استدلال استقرایی زدیم، با روش استدلال استنتاجی نشان می‌دهیم:

مستطیل دلخواه ABCD را در نظر گرفته، نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن را رسم می‌کنیم.



### گام ۱

–  $\widehat{AY}$  نیمساز زاویه  $A$  است و زاویه  $A$  قائمه است. پس:

$$\widehat{A}_1 = 45^\circ$$

–  $\widehat{DW}$  نیمساز زاویه  $D$  است و زاویه  $D$  قائمه است. پس:

$$\widehat{D}_1 = 45^\circ$$

بنابراین، مثلث  $AZD$  متساوی‌الساقین است و در زاویه  $Z$  قائمه می‌باشد. در نتیجه

$$\widehat{Z}_1 = \widehat{Z}_2 = 90^\circ, \quad AZ = DZ \quad (1)$$

### گام ۲

با استدلالی مشابه گام ۱ نتیجه می‌شود مثلث  $BXC$  متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. پس:

$$\widehat{X}_1 = \widehat{X}_2 = 90^\circ, \quad BX = CX \quad (2)$$

با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و مستطیل بودن ABCD، نتیجه می‌شود که دو مثلث  $ADZ$  و  $BXC$  همنهشت هستند. بنابراین:

$$DZ = CX$$

با استدلالی مشابه گام ۱، نتیجه می‌گیریم که مثلث CWD نیز متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه است. یعنی :

$$\hat{W} = 90^\circ, \quad DW = CW \quad (3)$$

گام ۳

از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که چهارضلعی WXYZ مستطیل است (چرا؟) باتوجه به رابطه‌های (۲) و (۳) می‌توان نوشت :

$$DW - DZ = CW - CX$$

یا

$$WZ = WX \quad (4)$$

رابطه (۴) نشان می‌دهد که طول و عرض مستطیل WXYZ با هم برابر است، پس WXYZ یک مربع است. در نتیجه در حالت کلی نشان دادیم که :

شکل حاصل از برخورد نیمساز زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع است.

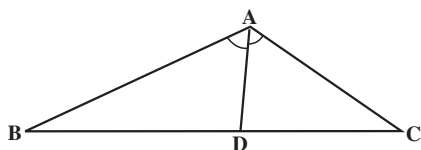
در اثبات بالا، از حکمهایی (حقایقی) استفاده کردیم که درستی آنها را قبلاً دیده بودیم. آن حکمها عبارتند از :

- مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث  $180^\circ$  درجه است ؛
  - مثلثی که دو زاویه برابر دارد، متساوی‌الساقین است ؛
  - زاویه‌های متقابل به رأس برابرند ؛
  - اگر از طرفین یک تساوی، دو مقدار یکسان کم کنیم، حاصل با هم برابر است.
- مثال بالا، نمونه‌ای از روش استدلال استنتاجی است.
- تمرین – مشخص کنید هریک از حکمهای بالا در چه قسمتهایی از اثبات بالا مورد استفاده قرار گرفته است؟

با رسم نیمساز هر زاویه مثلث، ضلع مقابل به آن زاویه به دو پاره خط تقسیم می‌شود. طول دو پاره خط ایجاد شده رابطه جالبی با طول دو ضلع آن زاویه دارند. این رابطه را در قضیه بعدی بیان کرده و با استفاده از استدلال استنتاجی، درستی آن را نشان می‌دهیم.

**قضیه:** در هر مثلث، نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند.

یعنی با توجه به شکل اگر AD نیمساز زاویه داخلی A باشد، باید ثابت کنیم :

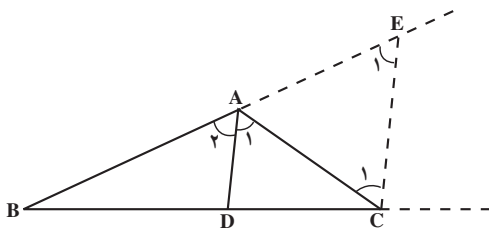


شکل ۳

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

برهان: ضلعهای BA و BC را امتداد می‌دهیم و

از رأس C خطی به موازات نیمساز زاویه A (یعنی AD) رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در E قطع کند.



شکل ۴

چون AD موازی CE است اگر AC را به عنوان خط مورب در نظر بگیریم آنگاه

$$\hat{A}_1 = \hat{C}_1 \quad (1)$$

و اگر BE را به عنوان خط مورب آنها در نظر بگیریم آنگاه

$$\hat{A}_2 = \hat{E}_1 \quad (2)$$

از طرفی طبق فرض مسأله، AD نیمساز است در نتیجه

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad (3)$$

حال از رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$\hat{C}_1 = \hat{E}_1$$

پس مثلث AEC متساوی الساقین است و

$$AE = AC \quad (4)$$

در مثلث BEC، AD موازی EC است، پس طبق قضیه تالس داریم

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC} \quad (5)$$

با توجه به رابطه (۴) اگر در رابطه (۵) به جای AE مساوی آن AC را جایگزین کنیم، خواهیم داشت

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

که حکم ثابت می‌شود.

ادعایی که درستی آن را در قضیه قبل نشان دادیم، محدود به مثلث خاصی نیست. زیرا یک مثلث را بدون هیچ شرطی رسم کردیم و نشان دادیم که نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند. نمادهایی را هم که برای نامگذاری امتداد ضلعها و رأسهای مثلث در شکل به کار بردیم، هیچ ویژگی خاصی نداشتند و می‌توانستیم آنها را با هر نماد دیگری عوض کنیم و با روش استدلال استنتاجی، ادعای فوق را ثابت نماییم.

تمرین: ثابت کنید نیمساز هر زاویه خارجی مثلث، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم می‌کند.

تا کنون، با استفاده از روش استدلال استنتاجی ثابت کردیم که:

– از تلاقی نیمسازهای هر مستطیل، یک مربع پدید می‌آید؛

– هر زاویه خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است؛

– نیمساز هر زاویه داخلی مثلث ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع آن زاویه تقسیم

می‌کند.

این نتیجه‌های کلی که همیشه درست هستند، نمونه‌هایی از قضیه می‌باشند.

به مثالهای بیشتری توجه کنید:

۱– یکی از مهمترین قضیه‌های ریاضی قضیه فیثاغورس است:

در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است.

۲– اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگری

نظیر به نظیر برابر باشند، آنگاه آن دو مثلث همنهشت هستند<sup>۱</sup>.

۳– برای هر زاویه  $\alpha$ ، رابطه زیر برقرار است:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

۴– برای هر دو عدد حقیقی مثبت  $x$  و  $y$ ،

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

۱– ۲– ۱– مثال نقض: در فعالیت ۱–۴، پس از چند آزمایش، چنین به نظر آمد که

همیشه نقطه هم‌رسی ارتفاعها در داخل مثلث قرار دارد. اما وقتی که این حدس را با مثلثی به

۱– اثبات این قضیه در هندسه ۱ آمده است.

ضلعهای ۶، ۸ و ۱۲ آزمودید، مشاهده کردید که ارتفاعها بیرونِ مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند. این مثلث خاص، مثال نقضی برای آن حدس کلی بود.

شاید با این مثال نقض، حدس خود را کامل‌تر نمودید و ادعا کردید که نقطهٔ هم‌رسی ارتفاعها یا داخل مثلث قرار می‌گیرد یا خارج آن. با این حال، ادامهٔ فعالیت ۱-۴ و بررسی نقطهٔ هم‌رسی ارتفاعهای مثلث قائم‌الزاویه به شما نشان داد که حدس جدید نیز یک نتیجه‌گیری کلی نمی‌باشد زیرا با یک مثال، عمومیت نتیجه‌گیری کلی از بین رفت.

به مثالی که نشان دهد یک نتیجه‌گیری یا یک حدس کلی نادرست است مثال  
نقض گفته می‌شود.

توجه: درستی یک نتیجه‌گیری کلی به وسیلهٔ استدلال استنتاجی اثبات می‌گردد، یا نادرستی آن با یک مثال نقض نشان داده می‌شود.

مثال: حاصل جمع هر دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است.

حل: برای رد این ادعای کلی، کافی است دو عدد گنگ را به صورت زیر انتخاب کنیم

$$x = \sqrt{2}$$

$$y = -\sqrt{2}$$

در این صورت،

$$x + y = \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$$

یعنی اگر چه موارد زیادی وجود دارد که در آنها، مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است ولی با این حال، با مثال نقض بالا، نادرستی نتیجه‌گیری کلی مجموع دو عدد گنگ همواره عددی گنگ است را نشان دادیم.

در هندسه، مثال نقض کاربردهای فراوانی دارد.

## فعالیت ۱-۱۰

برای رد حدسهای کلی زیر مثال نقض ارائه کنید.

الف) نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های سه ضلع یک مثلث همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد.

ب) نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های سه ضلع یک مثلث یا داخل مثلث یا خارج آن واقع است.

پ) ارتفاعهای هر مثلث داخل مثلث واقع است.

ت) هر زاویهٔ خارجی یک چندضلعی، از هر زاویه داخلی آن بزرگتر است.

۱- ۲- ۲- قضیه‌های شرطی: زبان فارسی سرشار از ضرب‌المثل‌های شیرین و آموزنده

است و هدف آنها، آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهایشان است. ضرب‌المثل‌های «درخت تو گر بار دانش بگیرد، به زیر آوری چرخ نیلوفری را»، «تا نبارد ابر، کی خندد چمن» و «سحرخیز باش تا کامروا باشی» تأکید می‌کنند که اگر «گرفتن بار دانش»، «باریدن»، و «سحرخیزی» باشد، آنگاه «به زیر آوردن چرخ نیلوفری»، «خندیدن چمن»، و «کامروایی» میسر خواهد شد.

در ریاضیات، بسیاری از قضیه‌ها به صورت جمله‌های شرطی هستند. به مثال‌های زیر توجه کنید:

الف) اگر عدد حقیقی  $x$  بزرگتر از ۵ باشد، آنگاه  $4x$  بزرگتر از ۲۰ است یا اگر  $x > 5$  آنگاه

$$4x > 20$$

ب) اگر مثلی متساوی‌الساقین باشد، آنگاه زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند.

پ) اگر چهارضلعی مستطیل باشد، آنگاه از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی آن یک مربع به وجود می‌آید.

این گونه جمله‌های شرطی قضیه‌های شرطی نامیده می‌شوند.

در قضیه‌های شرطی، جمله شرط یا جمله‌ای که بعد از «اگر» می‌آید، «فرض قضیه» و جمله نتیجه که بعد از کلمه «آنگاه» می‌آید، «حکم قضیه» نامیده می‌شود. در مثال‌های بالا، فرض و حکم از این قرارند:

الف)  $x > 5$ ، فرض قضیه و  $4x > 20$ ، حکم قضیه است.

ب) مثلث متساوی‌الساقین است، فرض قضیه و زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها برابرند، حکم قضیه است.

پ) چهارضلعی مستطیل است، فرض قضیه و مربع بودن شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی، حکم قضیه است.

دو کلمه اگر و آنگاه نقش تعیین‌کننده‌ای در قضیه‌های شرطی دارند و در هر قضیه شرطی، حکم از فرض نتیجه می‌شود. برای مثال، از فرض  $x > 5$  نتیجه می‌شود که  $4x > 20$ . این رابطه را می‌توان به زبان نمادین به صورت زیر نوشت:

$$x > 5 \Rightarrow 4x > 20$$

این عبارت به دو صورت زیر خوانده می‌شود:

—  $x > 5$  نتیجه می‌دهد  $4x > 20$

— اگر  $x > 5$ ، آنگاه  $4x > 20$



بنابراین، علامت « $\Rightarrow$ » به دو صورت نتیجه می‌دهد و آنگاه خوانده می‌شود. در حالت کلی، یک قضیه شرطی به صورت  $p \Rightarrow q$  بیان می‌گردد که در آن  $p$  فرض قضیه و  $q$  حکم قضیه است. هر قضیه کلی را می‌توان به صورت قضیه‌های شرطی بیان کرد. به مثال‌های زیر توجه کنید:

۱- در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است.

این قضیه را می‌توان به صورت یک قضیه شرطی نوشت:

اگر مثلثی قائم‌الزاویه باشد، آنگاه مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر آن مثلث است.

۲- مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث  $180^\circ$  است.

این قضیه را می‌توان به صورت قضیه شرطی زیر بیان کرد:

اگر شکلی مثلث باشد، آنگاه مجموع زاویه‌های داخلی آن  $180^\circ$  است.

**قضیه‌های شرطی در هندسه دارای نقش مهمی هستند و اغلب برای سادگی بیان، قضیه شرطی، قضیه نامیده می‌شود.**

هرگاه در یک عبارت شرطی، فرض برقرار باشد ولی حکم درست نباشد، این عبارت شرطی یک قضیه شرطی نخواهد بود. برای مثال عبارت شرطی زیر را در نظر بگیرید:

اگر  $x > 0$ ، آنگاه  $x^2 > x$ .

اگر  $x = \frac{1}{4}$  را در رابطه بالا قرار دهیم، آنگاه  $x^2 = \frac{1}{16}$  در اینجا، فرض  $x > 0$  برقرار است

ولی حکم  $x^2 > x$  یعنی  $\frac{1}{16} > \frac{1}{4}$  نادرست است. بنابراین، این عبارت شرطی یک قضیه نیست.

۱- ۲- ۳- **عکس قضیه:** در ریاضیات، بعضی از قضیه‌های شرطی مانند قضیه فیثاغورس از قضیه‌های شرطی دیگر مهم‌تر و با ارزش‌تر هستند. در قضیه فیثاغورس، فرض آن است که مثلث قائم‌الزاویه است و حکم آن است که مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر مثلث است. حالا به عبارت شرطی زیر توجه کنید:

اگر در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد، آنگاه آن مثلث قائم‌الزاویه است.

در این عبارت، فرض آن است که در مثلثی مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است و حکم آن است که آن مثلث قائم‌الزاویه است.

مشاهده می‌شود که در این عبارت شرطی، فرض و حکم برعکس فرض و حکم در قضیه فیثاغورس است. در این حالت می‌گوییم این عبارت شرطی، عکس قضیه فیثاغورس است.

اگر جای فرض و حکم در یک قضیه شرطی عوض شود، عبارت شرطی حاصل عکس قضیه شرطی نامیده می‌شود.

در مثال قبل، عکس قضیه فیثاغورس خود یک قضیه شرطی است. آیا همیشه عکس یک قضیه شرطی، یک قضیه شرطی است؟ به آن فکر کنید!

## فعالیت ۱-۱۱

۱- قضیه‌های شرطی زیر را در نظر بگیرید :

(الف) مساحت‌های هر دو مثلث همنهشت با هم برابرند.

(ب) اگر در دو مثلث، طول ضلعها نظیر به نظیر با هم برابر باشند، آنگاه زاویه‌ها نظیر به نظیر با هم برابرند.

(پ) اگر سه ضلع مثلث برابر باشند، آنگاه هر زاویه آن  $60^\circ$  است.

(ت) مثلثی که دو زاویه برابر دارد، دارای دو ضلع برابر است.

۲- عکس قضیه‌های شرطی بند (۱) را بنویسید.

۳- عکس کدامیک از قضیه‌های شرطی بند (۱) خود یک قضیه شرطی است و کدامیک از آنها قضیه شرطی نیست؟ چرا؟ دلیل آن را توضیح دهید.

اگر عکس یک قضیه شرطی خود یک قضیه شرطی باشد، آنگاه این دو قضیه شرطی را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای، قضیه دو شرطی نامیده می‌شود.

چنانچه در قضیه فیثاغورس، فرض قضیه یعنی «مثلث قائم‌الزاویه است» را با  $p$  و حکم قضیه یعنی «مربع وتر برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر است» را با  $q$  نمایش دهیم، آنگاه، با این نمادگذاری قضیه فیثاغورس به صورت

$$p \Rightarrow q$$

و عکس قضیه فیثاغورس به صورت

$$q \Rightarrow p$$

نمایش داده می‌شود. چون قضیه فیثاغورس و عکس آن هر دو برقرار هستند، با استفاده از نمادگذاری بالا می‌نویسیم

$$p \Leftrightarrow q$$

و می‌گوییم  $p$  هم‌ارز (معادل)  $q$  است و می‌خوانیم  $p$  اگر و تنها اگر  $q$

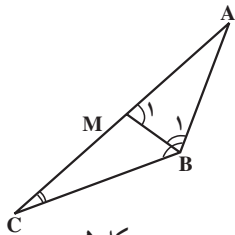
یعنی :

مثلث قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگر باشد. بنابراین، برای اثبات قضیه دوشرطی  $p \Leftrightarrow q$ ، بایستی قضیه‌های شرطی  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  را ثابت کنیم.

حال از طریق استدلال استنتاجی یک قضیه شرطی را ثابت می‌کنیم.

**قضیه:** اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، آنگاه زاویه مقابل به ضلع بزرگتر، بزرگتر است از زاویه مقابل به ضلع کوچکتر.

یعنی در مثلث  $ABC$  (شکل ۵)



شکل ۵

فرض:  $AC > AB$ ، و حکم:  $\hat{B} > \hat{C}$

برهان: چون طبق فرض،  $AC > AB$ ، بنابراین پاره خط  $AM$  را به اندازه  $AB$  روی  $AC$  جدا می‌کنیم و از نقطه  $M$  به  $B$  وصل می‌کنیم. چون  $AB = AM$ ، پس مثلث  $ABM$  متساوی‌الساقین است، در نتیجه؛

$$\hat{B}_1 = \hat{M}_1 \quad (1)$$

از طرفی چون زاویه  $M_1$  یک زاویه خارجی مثلث  $MBC$  است، در نتیجه از هر یک از زاویه‌های داخلی غیرمجاورش بزرگتر خواهد بود. بنابراین؛

$$\hat{M}_1 > \hat{C} \quad (2)$$

با توجه به دو رابطه (۱) و (۲)

$$\hat{B}_1 > \hat{C} \quad (3)$$

از طرفی، نقطه  $M$  بین دو نقطه  $A$  و  $C$  واقع است، بنابراین  $BM$  نیم‌خطی داخل زاویه  $B$  است و در نتیجه زاویه  $B_1$  جزئی از زاویه  $B$  است، یعنی؛

$$\hat{B} > \hat{B}_1 \quad (4)$$

از مقایسه (۳) و (۴) نتیجه می شود :

$$\hat{B} > \hat{C}$$

با عوض کردن جای فرض و حکم در قضیه شرطی، عکس قضیه را می توان بیان کرد.

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه روی زاویه بزرگتر، بزرگتر است از ضلع روبه روی زاویه کوچکتر.

تمرین — از طریق استدلال استقرایی، پیش بینی کنید که آیا عکس قضیه فوق برقرار است؟

### مسأله ها

۱. با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.  
الف) در هر مثلث ارتفاعها همرسند.  $ABC$  یک مثلث قائم الزاویه است.  
نتیجه : ارتفاعهای  همرسند.  
ب) لازمه اشتغال در قرن ۲۱ میلادی داشتن سواد ریاضی است. علی در سال ۱۳۷۰ خورشیدی به دنیا آمده است.  
نتیجه : علی برای پیدا کردن شغل، باید .  
پ) برای اینکه بتوانیم مسأله ای را حل کنیم ابتدا باید مسأله را بفهمیم. محمود می خواهد مسأله حل کند.  
نتیجه : محمود باید .  
۲. آیا نتایج زیر از عبارتهای داده شده حاصل می شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.  
الف) همه دانش آموزان توانایی یادگرفتن ریاضی را دارند.  
گلنار دانش آموز است.  
نتیجه : گلنار می تواند ریاضی یاد بگیرد.  
ب) بعضی از متوازی الاضلاعها مربع هستند.  
چهارضلعی  $ABCD$  یک متوازی الاضلاع است.  
نتیجه :  $ABCD$  یک مربع است.  
۳. کدامیک از عبارتهای زیر درست و کدامیک نادرست است. در صورت نادرست بودن یک مثال نقض پیدا کنید.  
الف) اگر دو زاویه مکمل یکدیگر باشند، آنگاه هر دو زاویه قائمه هستند.

(ب) اگر سه نقطه روی یک خط باشند، آنگاه از این سه نقطه فقط یک صفحه می‌گذرد.  
۴. قضیه‌های زیر را به صورت قضیه‌های شرطی بنویسید و سپس تعیین کنید عکس آنها قضیه شرطی است یا نه در صورتی که یک قضیه نباشد یک مثال نقض بیاورید.

(الف) هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.

(ب) هر دو مثلث همنهشت دارای مساحت‌های برابر هستند.

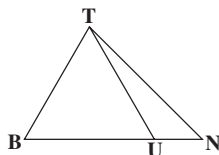
(پ) در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناظر، متناسب هستند.

(ت) در مثلث قائم‌الزاویه عمود منصف‌های ضلع‌ها در وسط وتر هم‌رس می‌شوند.

(ث) هر کس در شیراز زندگی می‌کند، در استان فارس است.

۵. قضیهٔ تالس را به صورت قضیهٔ دوشرطی بنویسید.

۶. در شکل مقابل :



فرض کنیم  $BT = BU$

ثابت کنید  $\hat{B}TN > \hat{T}UB$

۷. درستی حدس به دست آمده از انجام فعالیت ۱-۱ را با استفاده از استدلال استنتاجی نشان

دهید.

۸. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث

متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن مقداری ثابت است. سپس آن مقدار ثابت را به دست آورید.

۹. با استفاده از استدلال استقرایی پیش‌بینی کردید که از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک

متوازی‌الاضلاع، یک مستطیل پدید می‌آید. این حدس را با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید.

۱۰. با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید اگر از یک نقطهٔ اختیاری روی قاعده یک

مثلث متساوی‌الساقین دو خط به موازات دو ساق رسم کنیم تا آنها را قطع کند، آنگاه مجموع طول

پاره‌خط‌های ایجاد شده برابر طول ساق مثلث خواهد بود.

۱۱. از تقاطع نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک مستطیل، یک مربع پدید می‌آید. رابطهٔ بین

طول ضلع این مربع و اضلاع مستطیل را به دست آورید.

۱۲. مثلث متساوی‌الساقین ABC را در نظر بگیرید. نقطهٔ دلخواه P را روی قاعدهٔ BC

اختیار کنید سپس مجموع فاصله‌های نقطهٔ P از دو ساق AB و AC را به دست آورید. با جابه‌جا

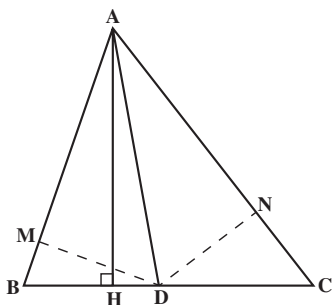
کردن نقطهٔ P روی قاعده این مجموع چگونه تغییر می‌کند؟ درستی حدس خود را با استفاده از

استدلال استنتاجی ثابت کنید.

۱۳. مسأله ۱۲ را در حالتی که نقطه P روی امتداد BC قرار داشته باشد در نظر بگیرید و نشان دهید تفاضل فاصله‌های نقطه P از دو ساق مقدار ثابتی خواهد بود.

۱۴. سه ضلع مثلثی ۸، ۱۲ و ۱۵ سانتی مترند، اندازه پاره خطهایی که نیمساز درونی زاویه بزرگتر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد، را تعیین کنید.

۱۵. در مثلث ABC میانه AM و نیمسازهای دو زاویه AMB و AMC را رسم کنید، این دو نیمساز اضلاع AB و AC را قطع می‌کنند، این نقاط را به ترتیب P و Q بنامید. سپس ثابت کنید دو خط PQ و BC با هم موازیند.



۱۶. در مثلث ABC، AH ارتفاع و AD نیمساز است.

مساحت مثلث ABD و ACD را به ترتیب با S و S' نشان می‌دهیم.

الف) با در نظر گرفتن BD و DC به عنوان قاعده این

مثلثها، نسبت  $\frac{S}{S'}$  را به دست آورید.

ب) از D عمودهایی بر اضلاع AB و AC رسم کنید و پای

آنها را M و N بنامید. DN و DM چه رابطه‌ای با هم دارند؟

پ) با در نظر گرفتن AB و AC به عنوان قاعده مثلثهای ABD و ADC، نسبت  $\frac{S}{S'}$  را به دست

آورید.

ت) از مقایسه نسبتها در بند الف) و پ) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

### ۱-۳ اثبات غیرمستقیم یا برهان خلف

معمولاً برای اثبات قضیه‌ها، به‌طور مستقیم از داده‌ها که همان فرض‌ها هستند شروع می‌کنیم و با استفاده از سایر قضیه‌ها و اصلها و تعریفها یعنی حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، برقراری حکم را نشان می‌دهیم. با این حال، به سادگی نمی‌توانیم بعضی از قضیه‌ها را به‌طور مستقیم اثبات کنیم و بهتر است راه غیرمستقیم را پیش بگیریم.

در زندگی روزانه از استدلال غیرمستقیم استفاده زیادی می‌کنیم. برای مثال، در یک آزمون سه گزینه‌ای، اگر مطمئن نباشید که پاسخ درست، کدام گزینه است اما بتوانید درباره نادرستی دو گزینه با اطمینان قضاوت کنید و به دلیل نادرستی آنها را حذف نمایید، آنگاه با اعتماد به نفس احساس می‌کنید که گزینه باقی‌مانده پاسخ درست است. استدلال غیرمستقیم پایه اثبات غیرمستقیم است که در آن، تمام نتیجه‌گیری‌های ممکن به جز نتیجه‌گیری‌های مورد نظر حذف می‌شوند. بنابراین، نتیجه‌گیری

باقی مانده باید درست باشد!

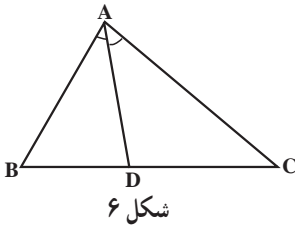
مثال: در مثلث  $ABC$  (شکل ۶)،  $AD$  نیمساز زاویه  $A$  است. اگر  $BD \neq DC$  ثابت کنید

$$AB \neq AC$$

حل: با فهمیدن مسأله؛ می‌توانیم فرض و حکم آن را بنویسیم:

فرض: در مثلث داده شده  $ABC$ ،  $BD \neq DC$

حکم:  $AB \neq AC$



دو پاره‌خط  $AB$  و  $AC$  نسبت به هم فقط دو حالت دارند: یا با هم مساوی نیستند یا با هم مساوی هستند. اگر با هم مساوی نباشند، این همان نتیجه مطلوب بوده و حکم ثابت است. با استفاده از اثبات غیرمستقیم می‌خواهیم امکان وجود حالت دوم یعنی تساوی این دو پاره‌خط را حذف کنیم. برای این کار، با قبول فرض مسأله، خلاف یا نقیض حکم را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که با وجود فرض مسأله، برقراری نقیض حکم امکان‌پذیر نیست.

اگر نقیض حکم یعنی  $AB = AC$  برقرار باشد، در این صورت مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است و می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویه رأس، میانه ضلع مقابل به آن نیز هست،  $BD = DC$ . اما طبق فرض مسأله،  $BD \neq DC$  یعنی وجود نقیض حکم با فرض داده شده در تناقض است، یعنی  $AB = AC$  نمی‌تواند درست باشد. (چرا؟) پس  $AB \neq AC$  باید برقرار باشد و حکم ثابت است.

این حقیقت که یک عبارت ریاضی نمی‌تواند همزمان هم درست و هم نادرست باشد اساس روش اثبات غیرمستقیم است. به بیان دقیق‌تر روش اثبات غیرمستقیم بر مبنای دو اصل منطقی استوار است:

- ۱- یک عبارت ریاضی و خلاف (نقیض) آن، هر دو درست نیستند؛
  - ۲- فقط یکی از دو عبارت ریاضی که یکی از آنها خلاف (نقیض) دیگری است، درست است.
- اثبات غیرمستقیم، برهان خلف نیز نامیده می‌شود. برای استفاده از برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم، گامهای زیر را بر می‌داریم:

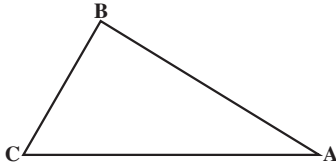
گام ۱: فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد.

گام ۲: نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه در تناقض است.

گام ۳: با نادرست بودن نقیض حکم، نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

مثال: قضیه زیر را با استفاده از روش برهان خلف ثابت کنید :

اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه رو به زاویه بزرگتر، بزرگتر از ضلع روبه روی زاویه کوچکتر است.



شکل ۷

حل: ابتدا شکلی رسم می‌کنیم که شرایط فرض مسأله را داشته باشد، یعنی مثلثی با دو زاویه نابرابر رسم می‌کنیم و آن را ABC می‌نامیم. اگر در مثلث ABC، زاویه B بزرگتر از زاویه C باشد، آنگاه باید نشان دهیم ضلع AC بزرگتر از ضلع AB است. به زبان نمادین.

فرض:  $\hat{B} > \hat{C}$

حکم:  $AC > AB$ .

گام ۱: فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد یعنی  $AC \not> AB$ .

گام ۲: در این صورت  $AC \leq AB$ .

– اگر  $AC = AB$ ، آنگاه مثلث متساوی الساقین است و در نتیجه  $\hat{B} = \hat{C}$  که با فرض قضیه

یعنی  $\hat{B} > \hat{C}$  در تناقض است؛

– اگر  $AC < AB$ ، طبق قضیه ۱ بخش قبل، که با فرض قضیه یعنی  $\hat{B} > \hat{C}$  در تناقض

است.

بنابراین به یک تناقض رسیدیم.

گام ۳: این تناقض نشان می‌دهد که نقیض حکم یعنی  $AC \not> AB$  نادرست است. در نتیجه

حکم قضیه درست می‌باشد.

این مثال نشان می‌دهد که عکس قضیه ۱ برقرار است، یعنی قضیه ۱، یک قضیه دوشروطی

است. پس می‌توان گفت :

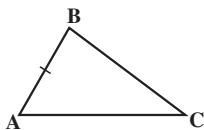
در مثلث، یک ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است اگر و تنها اگر زاویه روبه رو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه روبه رو به ضلع کوچکتر باشد.



قضیه نامساوی مثلث: در هر مثلث، مجموع طولهای هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است.

توجه: با فرض مثلث بودن ABC، می‌خواهیم درستی حکم زیر را

نشان دهیم:

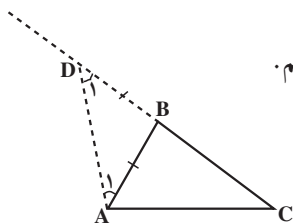


شکل ۸

$$\begin{cases} AB + BC > AC \\ AB + AC > BC \\ BC + AC > AB \end{cases}$$

حکم:

کافی است یکی از سه نامساوی حکم را ثابت کنیم (اثبات دو قسمت دیگر کاملاً مشابه این قسمت است).



شکل ۹

برهان: مسأله را به مسأله‌ای تبدیل می‌کنیم که حل آن را می‌دانیم.  
برای این کار، ضلع BC را از رأس B امتداد می‌دهیم و به اندازه AB روی آن جدا می‌کنیم تا نقطه D به دست آید. سپس، D را به A وصل می‌کنیم.

در مثلث ADB، چون

$$DB = AB \quad (۱)$$

$$\hat{D}_1 = \hat{A}_1 \quad (۲)$$

در نتیجه

همچنین، در مثلث ADC

$$DC = DB + BC \quad (۳)$$

با توجه به (۱)،

$$DC = AB + BC \quad (۴)$$

و با توجه به شکل،

$$\hat{D}\hat{A}\hat{C} > \hat{A}_1 = \hat{D}_1 \quad (۵)$$

طبق (۵) و قضیه ۱،

$$DC > AC$$

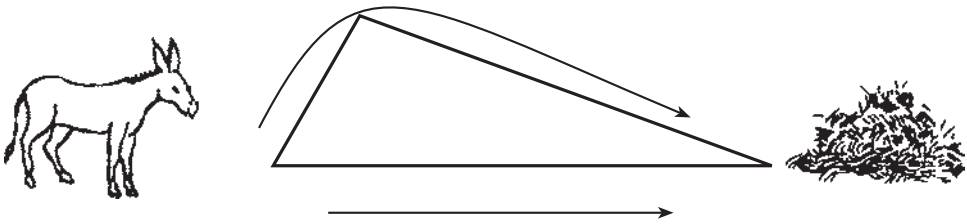
با استفاده از (۴)،

$$AB + BC > AC$$

و حکم ثابت است.

نکته: این قضیه در ریاضیات ایرانی به «قضیه جمار» مشهور است و دلیل این نامگذاری این

است که اگر برای رسیدن به علوفه دو راه به صورت زیر ممکن باشد، حیوان به طور غریزی و طبیعی راه کوتاهتر را انتخاب می کند که حاکی از بدیهی بودن قضیه نامساوی مثلث است.



شکل ۱۰

در اثبات قضیه بالا، ابتدا آن را به قضیه ای تبدیل کردیم که اثبات آن را می دانستیم و سپس با استفاده از آن، حکم را ثابت کردیم. این استراتژی، تبدیل مسأله به مسأله خویشاوند<sup>۱</sup> است که استفاده از آن در حل بعضی مسأله ها و اثبات بعضی قضیه ها، بسیار مفید است. عکس قضیه بالا نیز یک قضیه است که به قضیه وجود مثلث معروف است.

**قضیه وجود مثلث:** سه عدد حقیقی مثبت  $a$ ،  $b$  و  $c$  داده شده اند، اگر هریک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلعهای آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  هستند.<sup>۲</sup>

مثال: آیا مثلثی با ضلعهای ۱۲، ۲۰ و ۳۰ وجود دارد؟

حل: برای اثبات وجود مثلث، رابطه های زیر باید برقرار باشند:

$$۱۲ < ۲۰ + ۳۰ = ۵۰$$

$$۲۰ < ۱۲ + ۳۰ = ۴۲$$

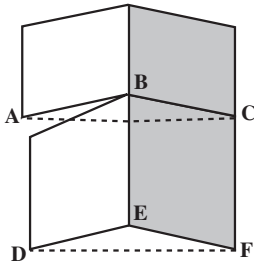
$$۳۰ < ۲۰ + ۱۲ = ۳۲$$

از برقراری نامساوی بالا، طبق قضیه وجود مثلث نتیجه می گیریم که مثلثی با ضلعهای ۱۲، ۲۰ و ۳۰ وجود دارد.

**تمرین —** ثابت کنید در هر مثلث طول هر ضلع از تفاضل طول دو ضلع دیگر بزرگتر است.

۱- خلاقیت ریاضی نوشته جورج پولیا ترجمه پرویز شهریار

۲- اثبات این قضیه خارج از برنامه رسمی درس است و در مجله ریاضی آورده شده است.



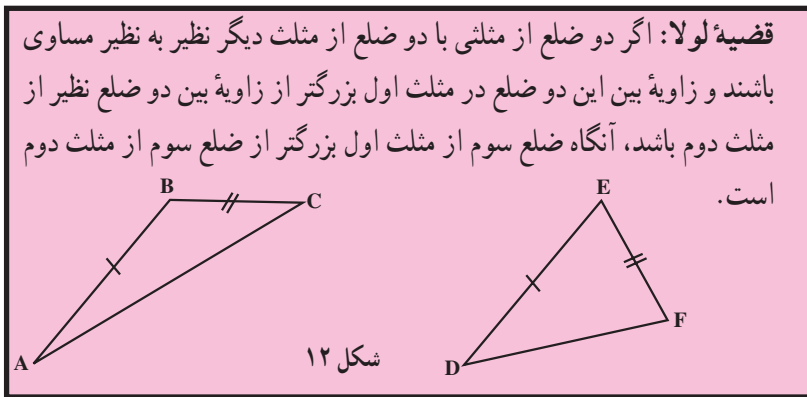
شکل ۱۱

### قضیه لولا (قضیه قیچی)

قضیه لولا را می‌توانید به صورت یک در دو قسمتی تصور کنید. اگر قسمت بالایی در از قسمت پایینی بیشتر باز باشد، مثلی که توسط زاویه‌های  $ABC$  و  $DEF$  تشکیل می‌شود دارای دو جفت ضلع هم‌نهشت است، یعنی  $AB = DE$  و  $BC = EF$ . اما

$$\hat{ABC} > \hat{DEF}$$

ضلع  $AC$  را با  $DF$  مقایسه کنید. به نظر می‌آید که  $AC > DF$ .

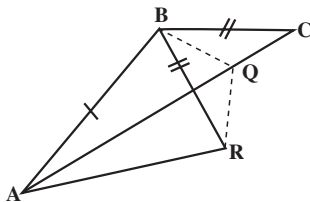


شکل ۱۲

توجه: برای ساده‌تر شدن، فرض و حکم قضیه را می‌نویسیم:  
فرض: مثلهای  $ABC$  و  $DEF$  داده شده‌اند به طوری که

$$\hat{ABC} > \hat{DEF} \text{ و } BC = EF \text{ و } AB = DE$$

حکم:  $AC > DF$



شکل ۱۳

با رسم  $AR$ ، مثلث  $ABR$  با مثلث  $DEF$  هم‌نهشت می‌شود. (چرا؟) در نتیجه؛

$$AR = DF$$

$$BC = EF$$

$$BR = EF$$

$$BC = BR$$

چون

و

پس

حال Q را روی AC طوری انتخاب می‌کنیم که BQ نیمساز زاویه RBC باشد. با رسم QR، دو مثلث BQR و BQC همنهشت هستند. چرا؟ در نتیجه؛

$$QR = QC \quad (1)$$

همچنین در مثلث AQR، با توجه به نامساوی مثلث؛

$$AQ + QR > AR \quad (2)$$

با استفاده از (۱)،

$$AQ + QC > AR \quad (3)$$

چون Q بر پاره خط AC قرار دارد، بنابراین:

$$AQ + QC = AC \quad (4)$$

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود

$$AC > AR$$

چون  $AR = DF$  پس  $AC > DF$  و حکم ثابت است.

**عکس قضیه لولا:** اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر مساوی باشد و ضلع سوم مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم مثلث دوم باشد، آنگاه زاویه بین دو ضلع از مثلث اول بزرگتر از زاویه بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم است.

تمرین — با استفاده از روش اثبات غیرمستقیم، عکس قضیه لولا را ثابت کنید.

## مسئله‌ها

۱. حسن در دادگاه تخلّفات رانندگی اظهار داشت «من نمی‌توانم عامل این تصادف باشم زیرا در زمان وقوع تصادف، در محل کارم بوده‌ام و برای این ادّعا، شاهد هم دارم.» نوع استدلال حسن را توضیح دهید.

با استفاده از برهان خلف، مسئله‌های ۲ تا ۶ را حل کنید.

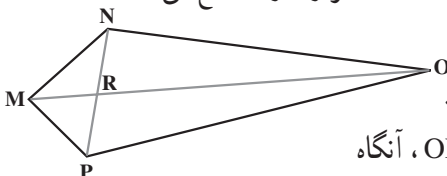
۲. اگر  $a, b$  و  $c$  سه خط راست باشند که  $a \parallel b$  و  $c \parallel b$ ، آنگاه  $a \parallel c$ .

۳. در چهارضلعی MNOP، دو قطر MO و NP یکدیگر را در R قطع می‌کنند.

(الف) نشان دهید اگر  $MP = MN$  و

$ON \neq OP$ ، آنگاه MO نیمساز زاویه PMN نیست.

(ب) نشان دهید اگر  $MP = MN$  و  $ON \neq OP$ ، آنگاه



OM بر NP عمود نیست.

۴. در دو مثلث ABC و  $A'B'C'$ ، اگر  $AB = A'B'$  و  $AC = A'C'$  و  $\hat{A} \neq \hat{A}'$ ، ثابت کنید  $BC \neq B'C'$ .

۵. در هر مثلث

(الف) هر دو نیمساز زاویه‌های داخلی متقاطعند.

(ب) هر دو میانه متقاطعند.

(پ) هر دو ارتفاع متقاطعند.

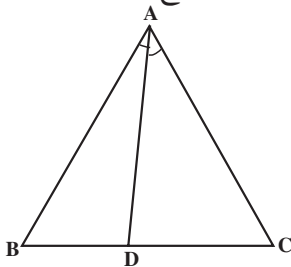
(ت) عمودمنصف‌های هر دو ضلع متقاطعند.

۶. عمود منصف هر پاره خط یکتاست.

۷. سه پاره خط با طولهای  $6x$ ،  $x+7$ ،  $4(x-1)$  داده شده‌اند. اگر مجموع این طولها ۳۶ باشد، آیا این پاره خطها می‌توانند ضلعهای یک مثلث باشند؟ توضیح دهید.

۸. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

اگر  $BD < DC$ ، ثابت کنید  $\hat{BAD} < \hat{DAC}$ .



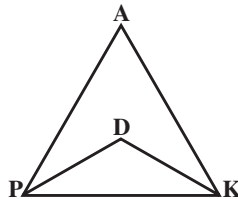
۹. ثابت کنید در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر است.

۱۰. ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه داخل مثلث از سه رأس، از نصف مجموع سه

ضلع مثلث بزرگتر است.

۱۱. نقطه D را به دلخواه در درون مثلث PAK انتخاب می‌کنیم ثابت کنید زاویه PDK از

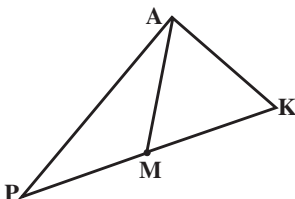
زاویه PAK بزرگتر است.

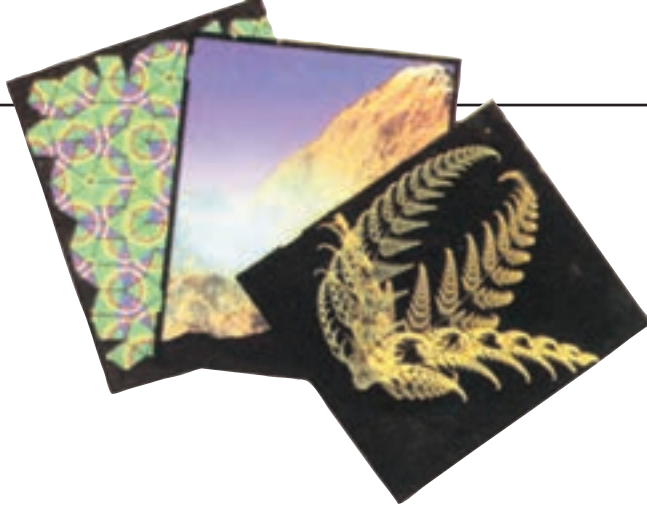


۱۲. در مثلث PAK، نقطه M روی ضلع PK قرار دارد.

(الف) ثابت کنید اگر  $PM = AK$  آنگاه  $AP > MK$

(ب) ثابت کنید اگر  $AM = AK$  آنگاه  $AP > AK$





## مجلهٔ ریاضی

هرچند گالیله گفته است «کتاب عظیم طبیعت را به زبان ریاضی نوشته‌اند» و افزوده است که «الفبای این زبان، مثلثها، دایره‌ها و سایر شکلهای هندسی‌اند که بدون آنها انسان در هزارتوی ظلمانی سردرگم می‌شود»، اما این شکلهای هندسهٔ اقلیدسی در الگوسازی دستگاههای نامنظم به هیچ کار نمی‌آیند. این پدیده‌ها به هندسه‌هایی نیاز دارند که از مثلثها و دایره‌ها بسیار دورند. در مورد آنها باید از ساختارهای نااقلیدسی و بخصوص از هندسهٔ نوینی به نام هندسهٔ فراکتالها استفاده کرد.

واژهٔ فراکتال را در سال ۱۹۷۵ از کلمهٔ لاتینی فراکتوس به معنی سنگی که به شکل نامنظم شکسته و خرد شده است، ساخته‌اند. فراکتالها شکلهایی هستند که برعکس شکلهای هندسهٔ اقلیدسی به هیچ وجه منظم نیستند. این شکلهای اولاً سراسر نامنظم‌اند، ثانیاً، میزان بی‌نظمی آنها در همهٔ مقیاسها یکسان است. جسم فراکتالی از دور و از نزدیک یکسان دیده می‌شود و به تعبیر دیگر، خود — متشابه است. وقتی به یک جسم نزدیک شویم، می‌بینیم که تکه‌های کوچکی از آن که از دور همچون دانه‌های بی‌شکلی به نظر می‌رسید به صورت جسم مشخصی درمی‌آید که شکلیش کم و بیش مثل همان شکل کلی است که از دور دیده می‌شد.

در طبیعت نمونه‌های فراوانی از فراکتالها دیده می‌شوند که سرخسها و انواع گوناگون گل کلم از آن جمله‌اند زیرا به هر شاخه از گیاه که نگاه کنیم، تصویری از کل گیاه در ذهن ما ایجاد می‌شود. قانونهای حاکم بر رشد این گیاهان موجب می‌شود که خصوصیتی که در مقیاس کوچک وجود دارد به مقیاسهای بزرگ نیز منتقل شود.

---

بنوا مندلیرات — هندسهٔ فراکتالها، توصیفگر طبیعت، ترجمهٔ محمد باقری — مجله دانشمند شمارهٔ

۳۳۸ — آذر ۱۳۷۰.



## ۱-۴- مکان هندسی

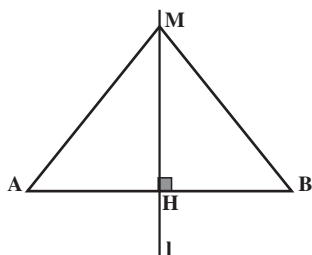
وقتی پره‌های یک هلیکوپتر<sup>۱</sup> در حال چرخیدن هستند، نوک پره‌ها مجموعه نقطه‌هایی از فضای اطراف هلیکوپتر را مشخص می‌کنند که دارای ویژگی مشترکی هستند. ویژگی این نقطه‌ها آن است که همگی از محور چرخش پره‌ها به یک فاصله‌اند. همچنین، نوک عقربه ثانیه‌شمار ساعت‌های عقربه‌ای، مجموعه نقطه‌هایی از صفحه دایره ساعت را تشکیل می‌دهند که دارای ویژگی مشترکی هستند و آن این که همگی از مرکز صفحه ساعت به یک فاصله‌اند. این مجموعه نقطه‌ها نمونه‌هایی از مکان هندسی‌اند.

مکان هندسی، مجموعه همه نقطه‌های صفحه یا فضا است که دارای ویژگی مشترکی هستند؛ یعنی هر نقطه در این مجموعه دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می‌باشد.

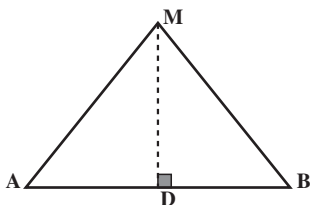
مثال ۱: می‌خواهیم ثابت کنیم عمود منصف یک پاره خط، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. در اینجا ویژگی مشترکی که در تعریف مکان هندسی ذکر کردیم، یکسان بودن فاصله نقطه از دو سر پاره خط است. پس برای اثبات این مطلب باید نشان دهیم:

(الف) هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است؛

۱- به نازگی، واژه چرخ بال برای هلیکوپتر انتخاب شده است.



شکل ۱۴



شکل ۱۵

(ب) هر نقطه که از دو سر پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط واقع است.

حل: برای اثبات (الف) فرض می‌کنیم نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB (خط l) باشد. چون l عمود منصف است، در H بر وسط AB عمود است. دو مثلث قائم الزویه AMH و BMH به حالت برابری دو ضلع و زاویه بین آنها، همنهشت هستند. در نتیجه،  $MA = MB$  یعنی M از A و B به یک فاصله است.

برای اثبات (ب) فرض می‌کنیم نقطه M از A و B به یک فاصله باشد، یعنی در مثلث MAB، داریم  $MA = MB$ . از M به نقطه D وسط پاره خط AB وصل می‌کنیم. دو مثلث MAD و

MBD به دلیل تساوی سه ضلع ( $MD = MD, DA = DB, MA = MB$ ) همنهشت هستند. پس  $\hat{MDA} = \hat{MDB} = 90^\circ$ . یعنی MD عمود بر AB و در نتیجه، MD عمود منصف پاره خط AB است. بنابراین، M روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

**قضیه:** نقطه M روی عمود منصف پاره خط AB است اگر و فقط اگر فاصله M از A و B مساوی باشد.

نقطه‌هایی که روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارند، مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه هستند که آنها را با  $S_1$  نشان می‌دهیم. نقطه‌هایی از صفحه که از دو سر پاره خط AB به یک فاصله اند نیز مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه است که آن را با  $S_2$  نشان می‌دهیم. در قسمت (الف) مثال ۱، عضوی از مجموعه  $S_1$  را مثل M در نظر گرفتیم و نشان دادیم M عضوی از مجموعه  $S_2$  است. در قسمت (ب) عضوی از مجموعه  $S_2$  را انتخاب کردیم و ثابت کردیم آن نقطه عضوی از مجموعه  $S_1$  است. در واقع، هر عضو مجموعه  $S_1$  عضوی از مجموعه  $S_2$  و هر عضو مجموعه  $S_2$  عضوی از مجموعه  $S_1$  نیز هست. یعنی:

$$S_1 = S_2$$

پس دو مرحله اثبات مکان هندسی بودن یک مجموعه، معادل این است که تساوی دو مجموعه را ثابت کنیم.



برای مشخص کردن مکان هندسی، برداشتن سه گام زیر سودمند است. این گامها براساس استدلال استقرایی است:

**گام اول:** به اندازه کافی نقطه‌هایی را که در ویژگی داده شده صدق می‌کنند بیابید؛

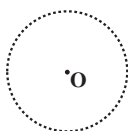
**گام دوم:** آن نقطه‌ها را به یکدیگر وصل کنید تا تصویری شهودی از مکان هندسی مورد نظر پیدا کنید؛

**گام سوم:** مکان هندسی را توصیف کنید. سپس بررسی کنید که آیا هر نقطه در مجموعه نقطه‌هایی که یافته‌اید در ویژگی داده شده صدق می‌کند و برعکس، آیا هر نقطه که در این ویژگی صدق کند، در مجموعه‌ای که یافته‌اید قرار دارد؟

مثال ۲: می‌خواهیم مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را بیابیم که از یک نقطه ثابت داده شده به فاصله واحد باشد. در اینجا، ویژگی مشترک، هم فاصله‌بودن از یک نقطه ثابت است.

حل:

**گام اول:** نقطه ثابت را O می‌نامیم و تعدادی از نقطه‌ها را با ویژگی بیان شده پیدا می‌کنیم. این نقطه‌ها در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



**گام دوم:** شکل حاصل یک دایره به نظر می‌رسد.

**گام سوم:** مکان هندسی مورد نظر، یک دایره به مرکز O و شعاع «یک» است. فاصله هر نقطه روی این دایره از مرکز آن یعنی O، برابر واحد است. همچنین اگر فاصله نقطه‌ای مانند M از O برابر واحد باشد، آنگاه  $OM = 1$  پس OM یک شعاع دایره خواهد بود، در نتیجه M روی دایره است.



**مثال ۳:** مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را پیدا کنید که از یک خط داده

شده 1 به فاصله  $\frac{1}{2}$  باشد.

حل:

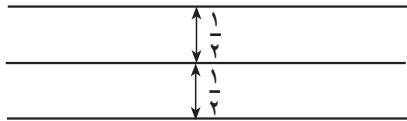
**گام اول:** ابتدا تعدادی از نقطه‌هایی را که در این ویژگی صدق می‌کنند، پیدا می‌کنیم.



گام دوم: با وصل کردن هر مجموعه از نقطه‌هایی که در یک طرف خط  $l$  قرار دارند، دو خط راست به دست می‌آوریم. پس به نظر می‌رسد این مکان هندسی، دو خط باشد.

گام سوم: مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصله  $\frac{1}{4}$  از خط داده شده  $l$  قرار دارد، دو خط راست

موازی با  $l$  است.



دو نتیجه‌ای را که در مثالهای ۲ و ۳ براساس استدلال استقرایی به دست آوردیم، به صورت

زیر می‌توان بیان کرد.

۱: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که به فاصله  $R$  از نقطه ثابت  $O$  درون همان صفحه قرار دارد، دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $R$  است.

۲: مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه که از یک خط راست داده شده در همان صفحه به فاصله  $d$  قرار دارد، دو خط راست موازی با آن خط و در دو طرف آن است.

قضیه: نیمساز یک زاویه، مکان هندسی نقطه‌ای در صفحه آن زاویه است که فاصله آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

برهان: در این قضیه، ویژگی مشترکی که مکان هندسی را مشخص می‌کند «یکسان بودن

فاصله نقطه از دو ضلع زاویه» است. براساس تعریف مکان هندسی،

اثبات دو مرحله دارد:

مرحله اول: ثابت می‌کنیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از

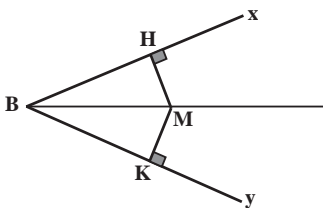
دو ضلع زاویه به یک فاصله است. نقطه  $M$  را روی نیمساز زاویه

$\widehat{XBY}$  در نظر می‌گیریم. از  $M$  خطهایی بر ضلعهای  $BX$  و  $BY$

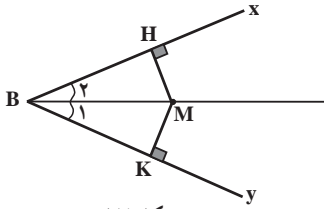
عمود می‌کنیم تا آنها را به ترتیب در  $H$  و  $K$  قطع کنند. دو مثلث

$BMH$  و  $BMK$  به حالت برابری دو زاویه و ضلع بین آنها، همنهشت هستند، پس:

$$MH = MK$$



شکل ۱۶

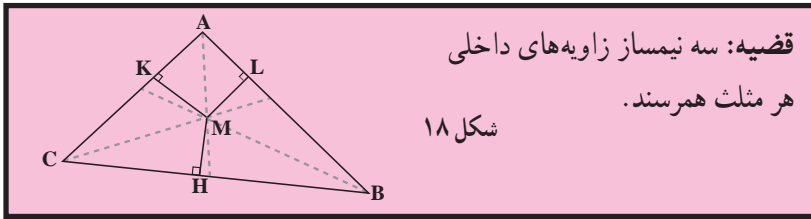


شکل ۱۷

مرحله دوم: اگر نقطه M از دو ضلع BX و BY به فاصله یکسان باشد، چون دو مثلث قائم الزاویه BMH و BMK به حالت تساوی وتر و یک ضلع همنهشت هستند، پس:

$$\hat{B}_1 = \hat{B}_2$$

یعنی خطی که از B و M می‌گذرد، نیمساز زاویه است. در نتیجه، M روی نیمساز زاویه B واقع و از این، درستی حکم نتیجه می‌شود.



شکل ۱۸

برهان: در مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های داخلی B و C را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M قطع کنند. از M بر ضلعهای AB، AC و BC عمود می‌کنیم تا به ترتیب آنها را در نقطه‌های L، K و H قطع نمایند. چون M روی نیمساز زاویه B است، پس:

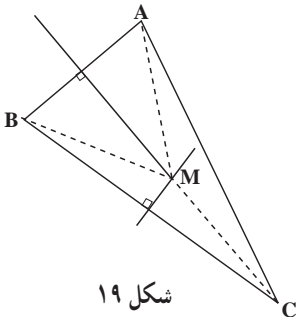
$$MH = ML \quad (1)$$

و چون M روی نیمساز زاویه C قرار دارد، پس:

$$MH = MK \quad (2)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود  $MK = ML$ . بنابراین، M روی نیمساز زاویه A نیز قرار دارد. پس M محل تلاقی سه نیمساز مثلث ABC است، یعنی سه نیمساز زاویه‌های داخلی هر مثلث همرسند.

قضیه: عمودمنصف‌های ضلعهای هر مثلث همرسند.



شکل ۱۹

برهان: عمودمنصف‌های دو ضلع AB و BC از مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. چون M روی عمودمنصف BC است، پس:

$$MB = MC \quad (3)$$

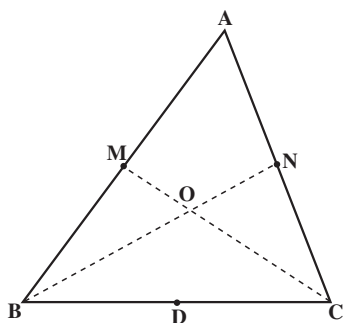
و چون M روی عمودمنصف AB است پس:

$$MA = MB$$

(۴)

از (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که  $MA = MC$ . بنابراین، نقطه  $M$  از دو سر پاره خط  $AC$  به یک فاصله است. یعنی نقطه  $M$  روی عمود منصف  $AC$  است. در نتیجه، هر سه عمود منصف از نقطه  $M$  می‌گذرند. بنابراین، عمود منصف‌های ضلع‌های هر مثلث هم‌رسانند.

## فعالیت ۱۲-۱



شکل ۲۰

هدف این فعالیت آن است که درستی حدسی را که در فعالیت ۳-۱ از طریق استدلال استقرایی با بررسی چند حالت خاص ارائه کردید، با استفاده از استدلال استنتاجی در حالت کلی نشان دهید. برای این کار، مثلث دلخواه  $ABC$  و دو میانه  $CM$  و  $BN$  را رسم کنید و محل تقاطع آنها را  $O$  بنامید.

الف) وسط  $BO$  را  $P$  و وسط  $CO$  را  $Q$  بنامید و

پاره خط  $PQ$  را رسم کنید.

ب) با استفاده از عکس قضیه تالس و این خاصیت که دو خط موازی با یک خط، خود

موازی‌اند، نشان دهید که  $MN$  موازی  $PQ$  است.

پ) با استفاده از قضیه تالس، نشان دهید  $MN = PQ$ .

ت) ثابت کنید که چهارضلعی  $MNQP$  متوازی‌الاضلاع است.

ث) نشان دهید

$$\frac{BO}{ON} = \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1}$$

چون میانه‌های  $CM$  و  $BN$  به دلخواه انتخاب شده بودند، پس این رابطه برای هر دو میانه

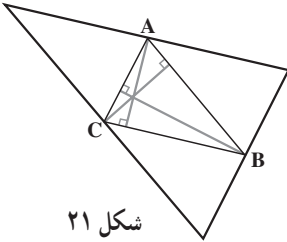
دلخواه دیگر نیز درست است.

از اینجا نتیجه می‌گیریم که سه میانه هم‌رسانند (چرا؟) و همدیگر را به نسبت ۱ و ۲ قطع می‌کنند.

توجه: نقطه هم‌رسانی میانه‌های مثلث، مرکز ثقل آن است.

قضیه: سه میانه هر مثلث هم‌رسانند.

**قضیه: سه ارتفاع هر مثلث هم‌رسانند.**



شکل ۲۱

**تمرین — قضیه بالا را ثابت کنید.**

(راهنمایی: از رأسهای مثلث خط‌هایی به موازات سه ضلع مثلث رسم کنید تا مثلث جدیدی تشکیل شود. آنگاه ثابت کنید ارتفاعهای مثلث اولیه، عمود منصف‌های مثلث جدید هستند.)

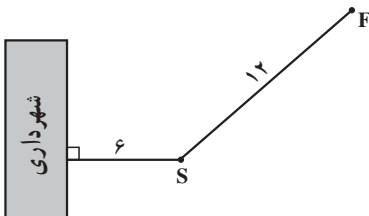
## مسئله‌ها

در هریک از موارد زیر مکان هندسی را به کمک استدلال استقرایی حدس بزنید.

۱. مکان هندسی مرکز تویی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلطد.
۲. مکان هندسی مرکز دایره‌ای که در خارج یک دایره داده شده واقع است و روی محیط آن می‌غلطد.

۳. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است.
۴. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحه موازی به یک فاصله باشد.
۵. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از دو صفحه موازی M و R به یک فاصله باشد و از نقطه ثابت P، به فاصله d باشد.

۶. مکان هندسی نقطه‌ای در فضا که از یک خط داده شده به فاصله d باشد.
۷. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در یک نقطه مشخص بر یک خط داده شده مماس باشد.
۸. سکه‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر را بر روی صفحه مربع شکلی به ضلع  $10^\circ$  سانتی‌متر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آنجا قرار گیرد، سکه کاملاً داخل مربع واقع می‌شود.



۹. نمودار مقابل محل قرارگرفتن ساختمان شهرداری، مجسمه S و فواره F را نشان می‌دهد. می‌خواهیم میله پرچم را در محلی نصب کنیم که از مجسمه و فواره به یک فاصله باشد و از مقابل ساختمان شهرداری به فاصله ۹ متر باشد. مکان هندسی محل نصب میله پرچم را تعیین کنید.

## ۱-۵- ترسیم با خط‌کش و پرگار

«رسم یا ساختن شکل‌های هندسی به کمک پرگار و خط‌کش، به طور سنتی جای نمایانی را در آموزش هندسهٔ مسطحه گرفته است. ساده‌ترین این ترسیم‌ها آنهایی است که به طور وسیع مورد استفادهٔ صنعتگران قرار می‌گیرد. ولی در سایر موردها، ارزش عملی ترسیم‌های هندسی قابل توجه نیست و اهمیت نظری چندان زیادی هم ندارد. با همهٔ اینها، کاملاً به حق می‌توان این ارزش را برای این گونه ترسیم‌ها در آموزش قایل شد، چرا که این ترسیم‌ها، مناسب‌ترین وسیله برای آشنایی با شکل‌های هندسی هستند و بهتر از هر وسیلهٔ دیگری، زمینه را برای فراگرفتن حل مسئلهٔ ریاضی فراهم می‌کنند.»

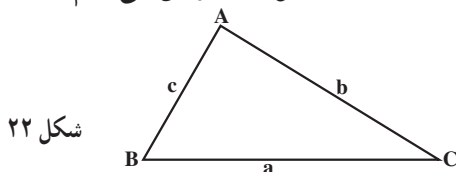
ترسیم‌های هندسی به زمان اقلیدس برمی‌گردد. در مسئلهٔ اول از کتاب اول اصول اقلیدس، پیشنهاد شده است که «روی یک پاره‌خط، یک مثلث متساوی‌الاضلاع بنا کنید.»، در واقع حل این مسئله به سادگی حل مسئلهٔ تعمیم‌یافتهٔ زیر است:

مثلی رسم کنید که سه ضلع آن داده شده باشد.

با تجزیه و تحلیل این مسئله، می‌توانیم یک روش کلی برای حل مسئله‌های ترسیم‌های هندسی پیدا کنیم:

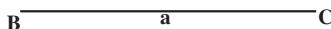
در هر مسئله یک مجهول وجود دارد. اگر همه چیز دانسته شده باشد، دیگر موردی برای جست‌وجو و کاری برای انجام دادن باقی نمی‌ماند. در این مسئله، چیزی که به دنبال آن هستیم، یعنی مجهول، یک شکل هندسی و در اینجا، یک مثلث است. با این حال، در هر مسئله باید چیزی معلوم باشد که به آن داده می‌گوییم. داده‌های این مسئله، طول ضلع‌های مثلث هستند که آنها را  $a$ ،  $b$  و  $c$  می‌نامیم.

استراتژی حل مسئله: مسئله را حل شده فرض می‌کنیم.



شکل ۲۲

با توجه به شکل، چون طول هر یک از ضلع‌ها داده شده‌اند، پس می‌توانیم یکی از ضلع‌ها مثلاً  $BC$  را با طول معلوم  $a$  رسم کنیم:



بنابراین، برای رسم مثلث  $ABC$  که مجهول مسئله است، باید رأس  $A$  را طوری پیدا کنیم تا در

شرطهای مسأله ما صدق کند یعنی

$$AC = b \quad \text{شرط (۱)}$$

$$AB = c \quad \text{شرط (۲)}$$

یعنی مجهول مسأله ما تبدیل به نقطه مجهول A گردید.

با توجه به شرط (۱)، نقطه A باید به فاصله b از C قرار داشته باشد، پس مکان هندسی نقطه A در صفحه، دایره‌ای به مرکز C و شعاع b است. همچنین، طبق شرط (۲)، نقطه A به فاصله c از B قرار می‌گیرد، پس مکان هندسی نقطه A در صفحه، دایره‌ای به مرکز B و شعاع c است. بنابراین، هرکدام از این دو شرط، یک مکان هندسی برای رأس A که مجهول مسأله بود مشخص کرد. پس نقطه A به ناچار به این دو مکان هندسی تعلق دارد. در نتیجه، برای یافتن نقطه A دو دایره به مرکزهای B و C و به ترتیب با شعاعهای c و b رسم می‌کنیم، نقطه برخورد آنها نقطه A است. این مسأله چند جواب دارد؟

حل این مسأله به ما نشان داد که نقطه A، رأس سوم مثلث، به وسیله دو مکان هندسی مشخص می‌شود. از این یافته، به عنوان استراتژی دو مکان هندسی<sup>۱</sup> در حل مسأله‌های ترسیمی استفاده می‌کنیم.

را هبرد حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی

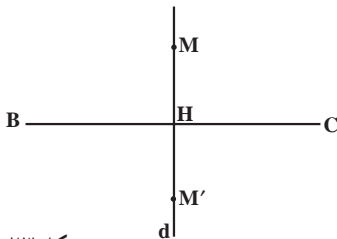
گام اول: مسأله ترسیم را حل شده فرض می‌کنیم.

گام دوم: مسأله ترسیم را تبدیل به یافتن یک نقطه مجهول می‌کنیم.

گام سوم: شرطهای مسأله را به دو جزء تقسیم می‌کنیم به طوری که هرکدام از شرطها، به یک مکان هندسی برای نقطه مجهول تبدیل شود و هر یک از این دو مکان هندسی، باید خط راست یا دایره باشد.

گام چهارم: نقطه مجهول، فصل مشترک این دو مکان هندسی است.

مسأله ۱: رسم عمود منصف یک پاره خط



پاره خط BC داده شده است. می‌خواهیم عمود منصف این

پاره خط را رسم کنیم.

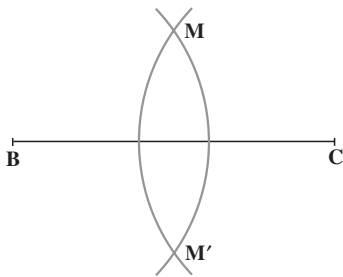
حل:

گام اول: مسأله را حل شده فرض می‌کنیم یعنی فرض

می‌کنیم که خط d عمود منصف پاره خط BC باشد.

شکل ۲۳

گام دوم: برای مشخص شدن خط  $d$ ، کافی است دو نقطه متمایز از آن را پیدا کنیم. پس مجهول ما پیدا کردن دو نقطه متمایز از خط  $d$  است. این دو نقطه می‌تواند هر دو نقطه دلخواه مانند  $M$  و  $M'$  روی خط  $d$  باشد که در دو طرف پاره خط  $BC$  قرار دارند و از  $C$  و  $B$  به یک فاصله‌اند. گام سوم: حال به پیدا کردن شرطهای این نقطه می‌پردازیم و سعی می‌کنیم که این شرطها را به دو جزء تقسیم کنیم به طوری که هر کدام از این شرطها، به یک مکان هندسی برای نقطه مجهول  $M$  تبدیل شود. چون  $M$  روی عمود منصف پاره خط  $BC$  است و عمود منصف هر پاره خط مکان هندسی نقطه‌ای است که از دو سر آن پاره خط به یک فاصله باشد، پس نقطه مجهول  $M$  روی دو دایره با شعاع یکسان و به مرکزهای  $B$  و  $C$  قرار دارد، یعنی این مسأله تبدیل به مسأله دو مکان هندسی شد.



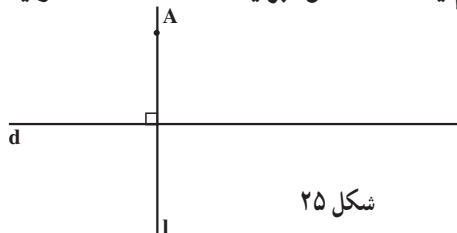
شکل ۲۴

گام چهارم: این دو مکان هندسی، دو دایره به شعاع دلخواه بزرگتر از نصف  $BC$  است زیرا می‌خواهیم که فصل مشترک دو دایره دو نقطه باشد. بنابراین، به مرکز  $B$  و شعاع دلخواه بیش از نصف  $BC$  دایره‌ای رسم می‌کنیم و با همین شعاع، دایره دیگری به مرکز  $C$  رسم می‌کنیم. این دو دایره همدیگر را در دو نقطه  $M$  و  $M'$  قطع می‌کنند. چون نقطه‌های  $M$  و  $M'$  روی دو دایره با شعاعهای مساوی هستند، بنابراین

روی عمود منصف  $BC$  قرار می‌گیرند. پس با وصل کردن  $M$  به  $M'$ ، عمود منصف خواسته شده رسم می‌شود.

تمرین — مراحل رسم نیمساز یک زاویه داده شده را با استفاده از استراتژی حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی توضیح دهید.

مسأله ۲: رسم یک خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن



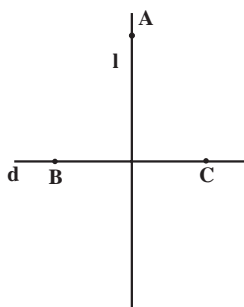
شکل ۲۵

حل: خط  $d$  و نقطه  $A$  خارج آن داده شده‌اند. می‌خواهیم از  $A$  خطی رسم کنیم که بر  $d$  عمود

باشد.<sup>۱</sup>

۱- این مراحل را در هندسه ۱ انجام داده‌اید.





شکل ۲۶

فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خط  $l$  از نقطه  $A$  بر خط  $d$  عمود شده است.

اگر بتوانیم از مسأله‌هایی که تا به حال حل کرده‌ایم استفاده کنیم، کار آسانتر می‌شود. در مسأله ۱ با رسم عمود منصف یک پاره خط آشنا شدیم. اگر خط  $l$  عمود منصف یک پاره خط باشد که روی  $d$  قرار گرفته است، در این صورت هر نقطه روی  $l$  از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است. یعنی فرض کنیم دو نقطه  $B$  و  $C$  روی  $d$  چنان وجود دارد که  $l$  عمود منصف  $BC$  باشد.

پس اگر  $B$  و  $C$  را پیدا کنیم و عمود منصف آن را رسم نماییم، عمود منصف حاصل از  $A$  می‌گذرد و بر  $d$  عمود است.

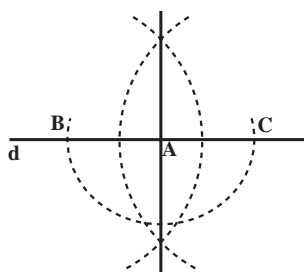
حالا مسأله ما تبدیل به پیدا کردن نقطه‌های  $B$  و  $C$  روی خط  $d$  شده است که خط  $l$  عمود منصف آنها می‌باشد. چون  $A$  روی عمود منصف  $BC$  قرار دارد، بنابراین  $A$  از  $B$  و  $C$  به یک فاصله است یا به عبارتی،  $B$  و  $C$  روی دایره‌ای به مرکز  $A$  قرار دارند. این دایره یکی از دو مکان هندسی ما است. اما چون  $B$  و  $C$  روی خط  $d$  قرار دارند، پس خط  $d$  مکان هندسی دیگر است. حال با استفاده از استراتژی دو مکان هندسی،  $B$  و  $C$  روی این دو مکان قرار دارند. برای پیدا کردن  $B$  و  $C$ ، به مرکز  $A$  و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا  $d$  را در دو نقطه قطع کند، آنها را  $B$  و  $C$  می‌نامیم. حال  $B$  و  $C$  نقاط مطلوب هستند و مسأله حل شده است، زیرا عمود منصف  $BC$  خط مورد نظر است.

• A



شکل ۲۷

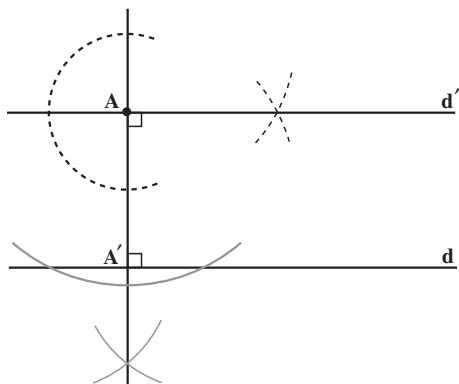
مسأله ۳: رسم خطی عمود بر خط داده شده از یک نقطه روی آن



شکل ۲۸

یعنی فرض کنیم خط  $d$  و نقطه  $A$  روی آن داده شده‌اند. می‌خواهیم از  $A$  عمودی بر  $d$  رسم کنیم این مسأله را با روشی مانند مسأله قبلی حل می‌کنیم، یعنی نقطه‌های  $B$  و  $C$  را روی  $d$

طوری پیدا می‌کنیم که A وسط آنها باشد. بنابراین، دایره‌ای به مرکز A و شعاع اختیاری رسم می‌کنیم تا d را در دو نقطه B و C قطع کند. حال طبق مسأله قبلی، عمود منصف BC را رسم می‌کنیم. این عمود منصف از A می‌گذرد و بر d عمود است.



مسأله ۴: رسم خطی موازی یک خط از یک نقطه خارج آن خط

خط d و نقطه A خارج آن داده شده است. می‌خواهیم از نقطه A خطی به موازات d رسم کنیم. برای این منظور ابتدا از نقطه A بر خط d عمودی رسم می‌کنیم تا آن را در نقطه A' قطع کند. سپس از نقطه A خطی عمود بر AA' رسم می‌کنیم و آن را d' می‌نامیم. حال می‌توان ادعا کرد که d و d' موازی یکدیگرند (چرا؟).

با توجه به چهار مسأله حل شده فوق، می‌توان تعداد زیادی از مسأله‌های ترسیمهای هندسی را حل کرد.

## مسأله‌ها

۱. خط d و نقطه A غیر واقع بر آن، داده شده‌اند. نقطه‌ای روی خط d تعیین کنید که از نقطه A به فاصله معلوم R باشد. با توجه به اندازه R روی تعداد جوابهای مسأله بحث کنید.

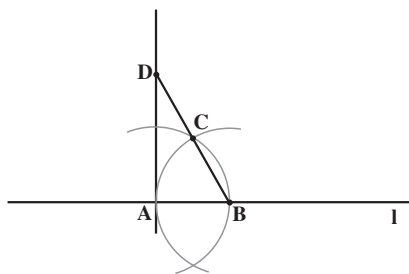
۲. دو نقطه A و B و خط d در یک صفحه واقعند. نقطه‌ای روی خط d بیابید که از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد. آیا مسأله همواره جواب دارد؟

۳. دایره (C) و خط Δ در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایره (C) تعیین کنید که از خط Δ به فاصله معلوم l باشد. مسأله چند جواب دارد؟

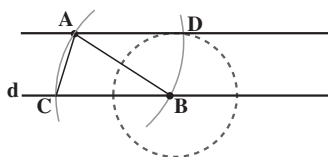
۴. از مثلث ABC، اندازه ضلعهای  $AB = c$ ،  $AC = b$  و طول ارتفاع  $AH = h_a$  معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۵. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های: ضلع  $BC = a$ ، میانه‌های  $BB' = m_b$  و  $CC' = m_c$ ، رسم کنید.

۶. ابوالوفاء بوزجانی (۳۸۸-۳۲۸ ه.ق) ریاضیدان ایرانی برای رسم خط عمود از نقطه A واقع بر خط مفروض l روش زیر را به کار برده است: نقطه دلخواه B را روی خط l اختیار می‌کنیم.



دهانه پُرگار را به اندازه پاره خط  $AB$  باز می‌کنیم دو دایره به مرکزهای  $A$  و  $B$  و به شعاع  $AB$  رسم می‌کنیم یک نقطه برخورد این دو دایره را  $C$  می‌نامیم. از  $B$  به  $C$  وصل می‌کنیم و پاره خط  $BC$  را از طرف نقطه  $C$  به اندازه خودش تا نقطه  $D$  امتداد می‌دهیم. از  $D$  به  $A$  وصل می‌کنیم. خط  $AD$  در نقطه  $A$  بر خط  $l$  عمود است.



دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.  
۷. خط  $d$  و نقطه  $A$  خارج آن، داده شده‌اند. از نقطه  $A$  خطی به موازات خط  $d$  رسم کنید.

ابوالوفاء بوزجانی مسأله را چنین حل می‌کند:

نقطه دلخواه  $B$  را روی خط  $d$  اختیار می‌کنیم و دهانه پُرگار را به اندازه پاره خط  $AB$  می‌گشاییم. به مرکز  $B$  و به شعاع  $BA$  یک دایره رسم می‌کنیم تا خط  $d$  را در نقطه  $C$  قطع کند، آنگاه به مرکز  $A$  و با همان شعاع قبلی دایره دیگری رسم می‌نماییم. سپس به مرکز  $B$  و به شعاعی برابر پاره خط  $AC$  دایره دیگری رسم می‌کنیم و نقطه برخورد دو دایره به مرکزهای  $A$  و  $B$  را  $D$  می‌نامیم. از  $A$  به  $D$  وصل می‌کنیم.  $AD$ ، خطی است که از نقطه  $A$  به موازات خط  $d$  رسم می‌شود. دلیل درستی روش ابوالوفاء را بنویسید.

۸. مربعی رسم کنید که پاره خط مفروض  $DE$  قطر آن باشد.



۹. زاویه  $XOY$  داده شده است روی نیم خط  $O'X'$  زاویه‌ای به رأس  $O'$  و مساوی زاویه

$XOY$  رسم کنید.



### قضیه وجود مثلث

در ریاضیات معمولاً مسأله‌ها یا قضیه‌هایی که با اثبات وجود شیء یا ویژگی، سروکار دارند دارای برهانی مشکل هستند و معمولاً در فرآیند اثبات به روندی ساختنی نیاز است. در آموزش ریاضیات دبیرستانی به خاطر پیچیدگی برهان آن از دامن زدن به این گونه قضیه‌ها و مسائل پرهیز می‌شود و در صورت لزوم بصورت یک حکم بدیهی پذیرفته می‌شود. قضیه وجود مثلث نمونه‌ای از اینگونه قضیه‌هاست که با اثبات وجود (مثلث) سروکار دارد.

بررسی اثبات این قضیه و پی بردن به پیچیدگی اثبات می‌تواند مفید باشد.

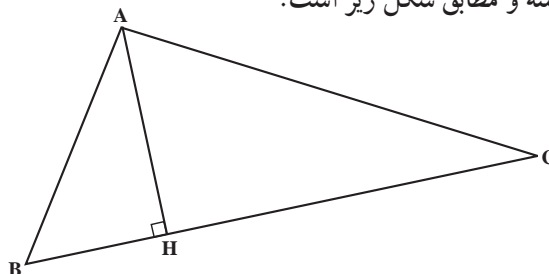
**قضیه وجود مثلث:** سه عدد حقیقی مثبت  $a$ ،  $b$  و  $c$  داده شده‌اند. اگر هر یک از این عددها از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، آنگاه مثلثی وجود دارد که ضلعهای آن  $a$ ،  $b$  و  $c$  هستند. ابتدا (با فهمیدن مسأله) فرض و حکم آن را مشخص می‌کنیم.

**فرض:**  $a$ ،  $b$  و  $c$  سه عدد حقیقی مثبت و  $a+b > c$ ،  $a+c > b$ ،  $c+b > a$   
**حکم:** مثلثی چون  $ABC$  وجود دارد به طوری که  $a$ ،  $b$  و  $c$  اندازه اضلاع آن هستند.

**برهان:** برای سادگی و بدون کاستن از کلیت می‌توان فرض کرد  $a \geq b \geq c > 0$ . چرا؟

پاره خط  $BC$  را به اندازه  $a$  انتخاب می‌کنیم. در این صورت حکم قضیه معادل است با یافتن نقطه‌ای مانند  $A$  طوری که  $AC = b$  و  $AB = c$ .

«مسأله را حل شده فرض می‌کنیم» یعنی فرض می‌کنیم مثلث  $ABC$  مورد نظر وجود داشته و مطابق شکل زیر است.



H را پای ارتفاع وارد بر BC می گیریم

نقطه H بین B و C است (چرا؟). قرار می دهیم

$$BH = x, \quad AH = y$$

در این صورت  $HC = a - x$ .

طبق قضیه فیثاغورس روابط زیر برقرارند.

$$y^2 = c^2 - x^2 \quad (1)$$

$$y^2 = b^2 - (a - x)^2 \quad (2)$$

با اندکی محاسبه (محاسبات را انجام دهید!) از روابط (1) و (2) نتیجه می شود.

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad (3)$$

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} \quad (4)$$

رابطه های (4) و (1) با رابطه های (3) و (2) معادل است (نشان دهید!) یعنی اگر

x و y در (1) و (2) صدق کنند آنگاه در (3) و (4) نیز صدق می کنند و برعکس.

اکنون به شروع کار بازمی گردیم. سه عدد حقیقی و مثبت a, b, c با شرط

$$a \geq b \geq c > 0 \text{ داده شده اند. قرار می دهیم } x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \text{ و } y = \sqrt{c^2 - x^2}.$$

باتوجه به فرض قضیه x و y هر دو اکیداً مثبت هستند. (بعنوان یک تمرین سر راست

ثابت کنید  $x > 0$ ,  $y > 0$ ) برای رسم مثلث به کمک خط کش و پرگار ضلع BC را

به طول a رسم می کنیم و روی آن BH را به اندازه x جدا می کنیم. سپس از نقطه H

عمودی رسم کرده و روی آن به اندازه y جدا می کنیم نقطه A (نقطه مطلوب) به دست

می آید. به آسانی می توان دید که

$$AC = b, \quad AB = c$$