فصل ۱

محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

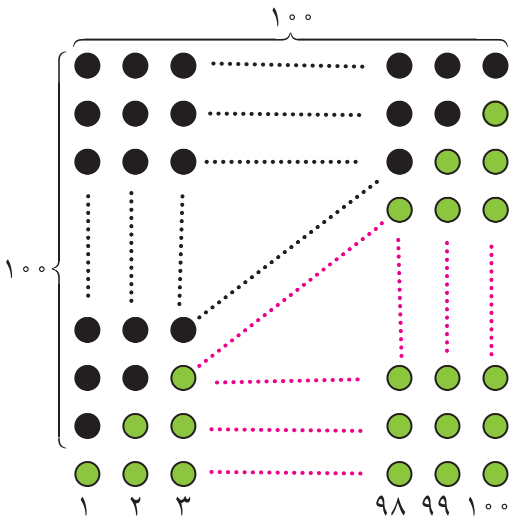
ترجمه فارسی دیباچه مفتاح الحساب
بسم الله الرحمن الرحیم
ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است، و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتا است. و درود بر بهترین آفریده او محمد(ص) که والاترین شفاعت‌کننده روز رستاخیز است، و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمونند. اما بعد......

۱. مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری
۳. بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی
۴. بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها
۵. معادلات
۶. ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم
۷. معادلات شامل عبارات گویا
۸. معادلات شامل عبارات گنگ
۹. حل معادلات به روش هندسی
۱۰. قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۱۱. معادلات قدرمطلقی
۱۲. نامعادلات ــ نامعادلات قدرمطلقی
۱۳. حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آن‌ها می‌خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به‌دست آورند. در حالی که دانش‌آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به‌سرعت به‌دست می‌آورد و به‌معلم ارائه می‌کند.

آیا شما هم می‌توانید این عمل جمع را به‌سرعت انجام دهید؟ شکل مقابل می‌تواند ایده‌ای برای این کار به شما بدهد.



بحث در کلاس

از شکل بالا چگونه می‌توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورد؟

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از تجربیاتی که در بالا به‌دست آورده‌اید برای یک عدد طبیعی n نشان دهید :

$$۱+۲+ \quad +n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲ــ اگر جمله اول یک دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل زیرند :

$$a, a+d, a+۲d, \ldots, a+nd, \ldots$$

نشان دهید مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$.

۳ــ نشان دهید $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$.

بحث در کلاس

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به‌مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به‌همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

این مسئله به‌نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی* با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.

حل یک مسئله

طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی‌از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی‌از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به‌همین ترتیب در هر مرحله نیمی‌از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌زنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

آن مقدار از مساحت مربع (بر حسب متر مربع) که در هر مرحله رنگ می‌شود یک دنباله هندسی به‌شکل زیر تشکیل می‌دهد.

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\quad ,(\frac{۱}{۲})^n,$$

بنابراین آن مقدار از مساحت مربع که پس از n مرحله رنگ می‌شود برابر است با

$$S_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\quad +(\frac{۱}{۲})^n$$

$\frac{۱}{۲}S_n$ شباهت زیادی با S_n دارد. از همین نکته برای محاسبه S_n استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}S_n=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\quad +(\frac{۱}{۲})^n+(\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$
$$=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\quad +(\frac{۱}{۲})^n+(\frac{۱}{۲})^{n+۱}=-\frac{۱}{۲}+S_n+(\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

این تساوی معادله‌ای بر حسب S_n است و از آن نتیجه می‌شود، $S_n=۱-(\frac{۱}{۲})^n$.

حال باید نامعادله $\frac{۹۹}{۱۰۰}\leq ۱-(\frac{۱}{۲})^n$ را حل کنیم.

$$\frac{۹۹}{۱۰۰}\leq ۱-(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow ۹۹\leq ۱۰۰-\frac{۱۰۰}{۲^n} \Rightarrow \frac{۱۰۰}{۲^n}\leq ۱ \Rightarrow ۱۰۰\leq ۲^n$$

* ترجمه میزان‌الحکمه ص ۷۷

حداقل مقدار n که در این نامعادله صدق می‌کند ۷ می‌باشد، یعنی پس از مرحله هفتم حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است.

فعالیت ۱

۱ــ برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q قرار دهید $S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$. با مقایسه S و qS نتیجه بگیرید :

$$(1-q)S = 1 - q^{n+1}$$

۲ــ اگر $q \neq 1$ نشان دهید :

$$1+q+q^2+ \quad +q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

۳ــ اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.

$$a, aq, aq^2, \ldots, aq^n, \ldots$$

نشان دهید در حالت $q \neq 1$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a\dfrac{1-q^n}{1-q}$

۴ــ درحالت $|q| < 1$، مجموع n جمله اول دنباله هندسی بالا با افزایش n به چه عددی نزدیک می‌شود؟

با انجام فعالیت بالا قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه :

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله اول a و قدر نسبت q که $|q| < 1$ ، مجموع تمام جملات آن برابر است با $\dfrac{a}{1-q}$.

مثال

توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به‌هوا پرتاب کرده‌ایم تا به‌ارتفاع ۵ متری برسد. می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟

ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. روشن است که

$$A_1 = 5, A_2 = \frac{5}{4}, A_3 = \frac{5}{16}, \quad , A_n = \frac{5}{4^{n-1}},$$

بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از :

$$10, \frac{10}{4}, \frac{10}{16}, \quad \ldots, \frac{10}{4^{n-1}}, \ldots$$

کل مسافت طی شده توسط توپ برابر است با مجموع جملات دنباله بالا. اما دنباله بالا یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله اول ۱۰ و قدر نسبت $\frac{1}{4}$ است و مجموع جملات آن برابر است با

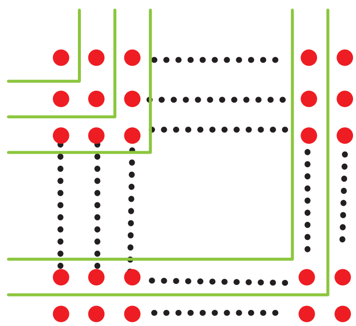
$$\frac{a}{1-q} = \frac{10}{1-\frac{1}{4}} = \frac{40}{3} \approx 13/33$$

یعنی توپ تقریباً ۱۳/۳۳ متر تا توقف کامل طی می کند.

مسائل

۱ــ در دنباله حسابی ...، ۱۱، ۸، ۵ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۲ــ به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$.

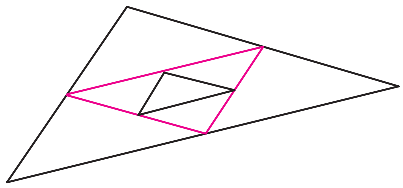


۳ــ در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

۴ــ علی می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹ پول واریزی در روز قبل را در صندوق قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۵ــ برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌هایی محافظتی ساخته شده‌است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد؟

۶ـ یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به‌هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به‌طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به‌دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

در سال‌های پیش دیدیم که با تقسیم یک چندجمله‌ای $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای ناصفر $B(x)$ یک خارج‌قسمتِ $Q(x)$ و باقی‌مانده $R(x)$ به‌دست می‌آید که $R(x)$ برابر صفر است یا درجه آن از درجهٔ $B(x)$ کمتر خواهد بود و می‌توان نوشت :

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

این تساوی را **رابطهٔ تقسیم** می‌نامند.

تمرین در کلاس

۱ـ چندجمله‌ای $P(x)=4x^4+2x^3+1$ را بر چندجمله‌ای $B(x)=x^2-1$ تقسیم کنید.

۲ـ مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

۳ـ رابطهٔ تقسیم را بنویسید و به‌کمک آن مقدار $P(1)$ و $P(-1)$ را به‌دست آورید.

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $B(x)$ صفر باشد، نتیجه می‌شود، $P(x) = B(x)Q(x)$
در این‌حالت گوییم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال

چندجمله‌ای x^3+1 بر $x+1$ بخش‌پذیر است، زیرا $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$.

فعالیت ۲

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ تقسیم شده است و باقی‌ماندهٔ آن R باشد.

۱ــ رابطهٔ تقسیم را بنویسید.

۲ــ درجهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چیست؟

۳ــ $P(a)$ را به‌دست آورید.

۴ــ اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

از فعالیت بالا قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه :

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ همان $P(a)$ است. بنابراین اگر $P(a)$ صفر باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

مثال

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=۲x^۸-۵x^۲+x+۳$ بر $x+۱$ را حساب می‌کنیم.

$x+۱$ را می‌توانیم به‌صورت $x-(-۱)$ بنویسیم، پس $P(-۱)$ را حساب می‌کنیم.

$$R=P(-۱)=۲(-۱)^۸-۵(-۱)^۲+(-۱)+۳=۲-۵-۱+۳=-۱$$

بحث در کلاس

چگونه می‌توانیم باقیمانده تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ بر چندجمله‌ای $ax+b$ را به‌دست آوریم؟

تمرین در کلاس

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید :

۱ــ عبارت $۳x^۲-۵x+۲$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. ☐

۲ــ چندجمله‌ای x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است. ☐

۳ــ چندجمله ای x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است. ☐

۴ــ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-b)$. ☐

ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴x^۳-۲x+۱$ بر $۲x-۱$ را تعیین کنید.

فعالیت ۳

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S=1+a+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ عبارت $aS-S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

۲ــ اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید :

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots-a+1)$$

مثال

به کمک اتحادهای بالا عبارت‌های زیر را ساده می‌کنیم.

$$A=\frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1} \quad , \quad B=\frac{(1+t+t^2+t^3+t^4)(1-t)}{t^{10}-1}$$

صورت و مخرج کسر A را تجزیه می‌کنیم.

$$A=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=x^4-x^3+x^2-x+1$$

برای ساده کردن B می‌توان نوشت :

$$B=\frac{1-t^5}{(t^5+1)(t^5-1)}=\frac{-1}{t^5+1}$$

تمرین در کلاس

به کمک اتحاد $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\quad+a^2+a+1)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\quad+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی

در سال‌های قبل با محاسبه مربع و مکعب دوجمله‌ای‌ها آشنا شدید. در حالت کلی نیز می‌توان توان‌های طبیعی دوجمله‌ای‌ها را به‌دست‌آورد.

فعالیت ۴

به اتحادهای زیر و ضرایبی که در آن‌ها است توجه کنید.

$(a+b)^0=1$	۱
$(a+b)^1=a+b$	۱ ۱
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	۱ ۲ ۱
$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	۱ ۳ ۳ ۱
$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	۱ ۴ ۶ ۴ ۱
$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
....	

۱ــ چه الگویی در توان‌های a و b و ضرایب آن‌ها می‌یابید؟

۲ــ با توجه به الگوی به‌دست آمده $(a+b)^6$ برابر چه عبارتی می‌شود؟

۳ــ تعداد جملات هر بسط با توان دو جمله‌ای چه رابطه‌ای دارد؟

هرعبارت به‌صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، **دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی** و بسط آن را به‌صورت چندجمله‌ای از a و b **بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی** می‌نامند زیرا این دانشمند ایرانی از اولین کسانی بوده است که روی آن کار کرده است. این چندجمله‌ای دارای $n+1$ جمله است و هر جملهٔ آن به‌صورت مضربی از a^kb^{n-k} است و جملات a^kb^{n-k} و $a^{n-k}b^k$ ضریب‌های مساوی دارند.

ضرایب بسط دوجمله‌ای را می‌توان در مثلثی مانند زیر مرتب کرد که به آن **مثلث خیام ــ پاسکال** می‌گویند.

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

....

مرتب نمودن ضرایب به‌صورت بالا را ابتدا خیام، دانشمند مشهور ایرانی، و سپس پاسکال انجام داد و به همین خاطر به نام هر دوی آن‌ها خوانده می‌شود.

تمرین در کلاس

۱ــ اعداد هرسطر در مثلث خیام ــ پاسکال چگونه از طریق اعداد سطر قبل از آن به‌دست‌می‌آیند؟

۲ــ چه ارتباطی بین اعداد هر سطر در مثلث صفحهٔ قبل با بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی وجود دارد؟

۳ــ مجموع ضرایب در هر یک از بسط‌های $(a+b)^2$ ، $(a+b)^3$ و $(a+b)^4$ را به‌دست‌آورید. آیا می‌توانید مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ را حدس بزنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

۴ــ طرف دوم هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست‌آورید.

$$(2x+y)^5=$$

$$(3x+2z)^4=$$

$$(2a-1)^6=$$

مسائل

۱ــ $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالت‌های زیر $P(x)$ را به‌گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.

الف) $P(1)=0\ ,P(2)=0$ ب) $P(0)=0\ ,P(1)=1$ ج) $P(-1)=2\ ,P(2)=-1$

۲ــ مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=x^3-mx^2-x+4$ بر $2x+1$ بخش‌پذیر باشد.

۳ــ در چندجمله‌ای $P(x)=x^3+ax^2+x+b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ بوده و بر $x+2$ بخش‌پذیر باشد.

۴ــ m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای x^4-3x^3+mx+n بر x^2-5x+6 بخش‌پذیر باشد.

۵ــ نشان دهید عبارت $x-2$ یک فاکتور(عامل) $f(x)=x^3+2x^2-5x-6$ است. سپس معادلهٔ $f(x)=0$ را حل کنید.

۶ــ a را چنان بیابید که یک جواب معادلهٔ $x^3-2x^2+ax+2=0$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به‌دست آورید.

۷ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(1-x)^7$ ب) $(1+\frac{2}{x})^6$ ج) $(2x-3y)^4$

۸ــ عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$A=x^9-x^3y^3 \quad , \quad B=(a^6+1)^2-(a^6-1)^2$$

۹ـ اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد زیر را به‌دست آورید.

$$1-x^n=(1+x)(1-x+\cdots-x^{n-1})$$

بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها

در دورهٔ راهنمایی با مفاهیم مقسوم علیه، عدد اول و تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شدیم. مشابه این مفاهیم برای عبارت‌های جبری نیز قابل بررسی است. با مروری بر این مفاهیم به‌تعمیم آن به‌عبارات جبری می‌پردازیم.

تجزیه عدد : هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را می‌توان به‌حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه اعداد عامل‌های اول تکراری را به‌صورت توانی بنویسیم به آن **تجزیه استاندارد** می‌گوییم.

برای تجزیهٔ یک عدد به‌عامل‌های اول، مرتباً عدد را به عامل‌های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم سپس آن را به‌صورت تجزیهٔ استاندارد می‌نویسیم.

مثال

عدد ۳۶۰ را به‌صورت تجزیهٔ استاندارد می‌نویسیم.

عدد ۳۶۰ را مطابق الگوی مقابل به‌طور متوالی بر مقسوم علیه‌های اول آن تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم. در نتیجه ۳۶۰ حاصلضرب اعداد اول سمت راست هستند.

۲	۳۶۰
۲	۱۸۰
۲	۹۰
۳	۴۵
۳	۱۵
۵	۵
	۱

$$۳۶۰=۲^۳\times۳^۲\times۵$$

تمرین در کلاس

عددهای ۱۲۰ و ۵۲۵ و ۴۷ را به‌صورت تجزیهٔ استاندارد بنویسید.

می‌دانید که بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخش‌پذیرند بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد نامیده می‌شود که به اختصار با ب.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ب.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت استاندارد به‌عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های مشترک با **کمترین توان**، ب.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال

ب.م.م. اعداد ۳۶ و ۲۲۵ و ۴۰۵ را تعیین می‌کنیم.

هریک از اعداد را به‌صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم.
$$\begin{cases} ۳۶ = ۲^{۲} \times ۳^{۲} \\ ۲۲۵ = ۳^{۲} \times ۵^{۲} \\ ۴۰۵ = ۳^{۴} \times ۵ \end{cases}$$
تنها عامل مشترک عدد ۳ است و کمترین توان آن ۲ است. پس ب.م.م. $۳^{۲}$ است. روشن است که همه این اعداد بر ب.م.م. خود بخش‌پذیرند.

تمرین در کلاس

ب. م.م. اعداد ۷۸ و ۲۳۴ و ۱۵۶ را به‌دست آورید.

می‌دانید که کوچکترین عددی که بر دو عدد طبیعی a و b بخش‌پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد می‌نامند که به اختصار با ک.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ک.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های موجود در این تجزیه‌ها با **بزرگترین توان**، ک.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال

ک.م.م. اعداد $a = ۲^{۳} \times ۵^{۲}$ و $b = ۲ \times ۵^{۳} \times ۷^{۲}$ و $c = ۲^{۵} \times ۵ \times ۱۳$ را تعیین می‌کنیم.

حاصلضرب همهٔ عامل‌های مشترک و غیرمشترک a ، b و c با بیشترین توان را به‌دست می‌آوریم:

$$۲^{۵} \times ۵^{۳} \times ۷^{۲} \times ۱۳$$

عدد بالا ک.م.م. سه عدد a ، b و c است و روشن است که بر a ، b و c بخش پذیر است.

تمرین در کلاس

۱ــ ک.م.م. اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به‌دست آورید.

۲ــ می‌خواهیم سالنی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرش‌های مربع شکل هم اندازه که اندازهٔ ضلع آن‌ها بر حسب متر عدد طبیعی باشد بپوشانیم. اندازهٔ ضلع فرش‌ها چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ضلع فرش‌ها چقدر باشد تا کمترین تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد بدون آن‌که فرش‌ها روی هم بیفتند؟

۳ــ ب.م.م. و ک.م.م. هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. (حروف نشان دهنده اعداد اول متمایزند و مخالف ۲، ۳ و ۵ هستند.)

الف) $۳۲a^۳ , ۱۶ab^۲ , ۸a^۲b^۳$ ب) $۶x^۲y , ۸xy^۲z , ۱۰x^۲y^۲z^۲$

در چندجمله‌ای‌ها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخش‌پذیری برقرار است. پس می‌توانیم ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.

فعالیت ۵

چندجمله‌ای‌های $P(x)=۲x^۳-۱۶$ و $Q(x)=۳x^۲-۱۲$ را در نظر بگیرید.

۱ــ $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.

۲ــ بزرگ‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بنویسید.

۳ــ کوچک‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که هم بر $P(x)$ و هم بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد را بنویسید.

آنچه که در فعالیت بالا انجام دادید یافتن ب.م.م. و ک.م.م. دو چندجمله‌ای بود.

تعریف :

بزرگ‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (به اختصار ب.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

کوچک‌ترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچک‌ترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

این تعاریف برای بیش از دو چندجمله‌ای به شکل مشابه انجام می‌شود.

مثال

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌های $P(x)=x^3+1$ و $Q(x)=x^6-1$ و $R(x)=4x^2-4$ را تعیین می‌کنیم. برای این کار، ابتدا هر یک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم. سپس مشابه آنچه که در مورد ب.م.م. و ک.م.م. اعداد گفته شد عمل می‌کنیم.

$$P(x)=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$Q(x)=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$

$$R(x)=4(x^2-1)=4(x-1)(x+1)$$

تنها عامل مشترک در این تجزیه‌ها $x+1$ است و کمترین توان آن ۱ است، پس $x+1$ ب.م.م. این سه چندجمله‌ای است.

عواملی که در این تجزیه‌ها وجود دارند عبارتند از : x^2+x+1 , x^2-x+1 , $x-1$, $x+1$, 4 و بزرگترین توان آن‌ها ۱ است. بنابراین ک.م.م. این سه چندجمله‌ای عبارت است از :

$$4(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)=4(x^3+1)(x^3-1)=4(x^6-1)$$

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها کمک زیادی به کوتاه‌تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌کند.

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{1}{72}+\frac{5}{48}-\frac{1}{16}$$

۲ــ کسرهای زیر را به‌ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A=\frac{3x^2-3xy}{3(x-y)^2} \qquad B=\frac{x^2+2x+1}{x^2+8x+7}$$

۳ــ حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+5}{a-1}-\frac{6}{a^2+a+1}-\frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$$

مسائل

۱ــ سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟

۲ــ در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۴ ,۷ ,۱۰ , ...　　　　۱ ,۵ ,۹ ,...

۳ــ می‌خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم، حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟(گنجایش شیشه‌ها را بر حسب لیتر عدد طبیعی فرض کنید.)

۴ــ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

ب) $\dfrac{x^۲-۲x-۳}{x^۲-۹} \div \dfrac{x^۲-۶x-۷}{x^۲-۱۰x+۲۱}$　　الف) $\dfrac{x^۲-۵x+۴}{x^۲-۴x} \div \dfrac{x^۲+x-۲}{x^۳+۲x^۲}$

د) $\dfrac{x+۱}{x-۱}+\dfrac{۱}{x+۳}-\dfrac{۸}{x^۲+۲x-۳}$　　ج) $\dfrac{۱}{a^۲-۱}+\dfrac{۲a}{a^۲+۲a+۱}-\dfrac{۲}{a+۱}$

معادلات

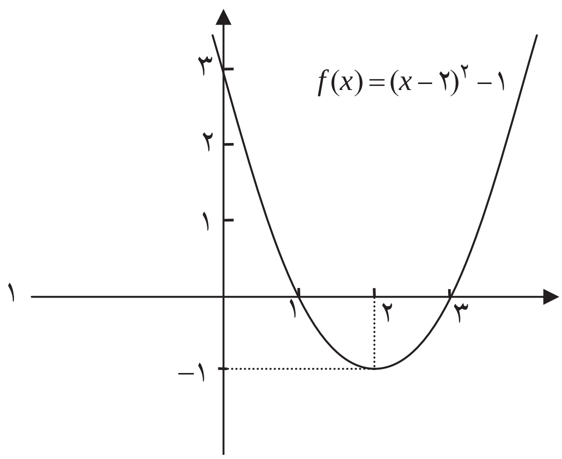
در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادلهٔ درجهٔ اول و درجهٔ دوم آشنا شدید. در این بخش با برخی نکات جدید دربارهٔ حل معادلات آشنا خواهیم شد و سپس انواع دیگری از معادلات جبری را بررسی خواهیم کرد.

فعالیت ۶

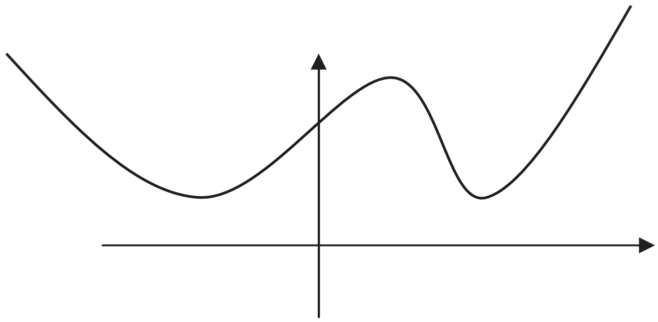
۱ــ نمودار تابع $f(x) = x^۲-۴x+۳$ به شکل مقابل است.

جواب‌های معادله $f(x) = x^۲-۴x+۳ = ۰$ چه ویژگی از نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کند؟

از طریق نمودار $f(x)$ چگونه می‌توان در مورد جواب‌های معادله $f(x)=۰$ اظهارنظر کرد؟



۲ــ نمودار تابع $g(x)$ به شکل زیر است. در مورد جواب‌های معادله $g(x)=۰$ چه می‌توانید بگویید؟

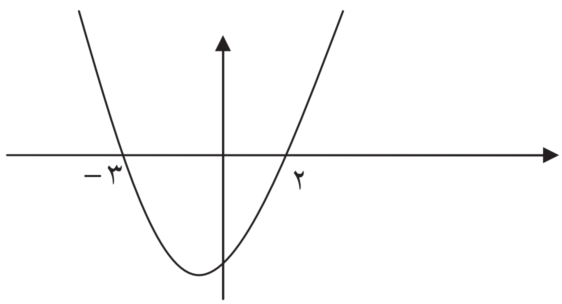


۳ــ با رسم نمودار تابع $f(x)=x^۲-۴x+۴$ توضیح دهید چرا معادله $x^۲-۴x+۴=۰$ فقط یک جواب دارد.

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را (در صورت وجود) **صفرهای تابع *f*** می‌نامیم. صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به‌ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f، طول‌های نقاط تلاقی نمودار f با محور طول‌ها است.

مثال

اعداد ۲ و ۳− صفرهای تابع $f(x)=x^۲+x-۶$ می‌باشند و نمودار f در نقاطی به‌طول‌های ۲ و ۳− محور طول‌ها را قطع می‌کند.



نمودار توابعی که ضابطه آن‌ها یک چندجمله‌ای درجه دوم است را **سهمی** می‌نامند. سهمی‌ها شکل‌های مشابه و خواص هندسی مشترکی دارند که در درس هندسه با آن‌ها بیشتر آشنا خواهید شد.

در سال‌های قبل دیدیم یک معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ که $\Delta=b^۲-۴ac>۰$ دارای دو جواب به صورت زیر است.

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad , \quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

در حالت $\Delta=0$ داریم $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ در این حالت معادله فقط یک جواب دارد و می‌توان تعبیر کرد که معادله دو جواب مساوی دارد. به‌همین خاطر در این حالت گوییم معادله یک جواب مضاعف (تکراری) دارد. سال قبل دیدیم که اگر x' و x'' جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم $x'+x''=\frac{-b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$.

حل یک مسئله

مستطیلی بسازید که محیط آن ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌مترمربع باشد.

برای مشخص کردن این مستطیل باید طول و عرض آن را تعیین کنیم. اگر چنین مستطیلی وجود داشته باشد ضلع‌های آن را با x' و x'' نشان می‌دهیم. فرضیات مسئله به معنای آن است که

$$x'x''=28\,,x'+x''=11$$

x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $(x-x')(x-x'')=0$ هستند. از طرف دیگر

$$(x-x')(x-x'')=x^2-(x'+x'')x+x'x''=x^2-11x+28$$

بنابراین برای یافتن جواب مسئله کافی است جواب‌های معادلهٔ $x^2-11x+28=0$ را حساب کنیم. از حل این معادله نتیجه می‌شود: $x'=4$ و $x''=7$.

قضیه:

اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$، آنگاه α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ هستند.

مثال

معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن ۲ و ۳ باشد.

روش اول: داریم $S=x'+x''=2+3=5$ و $P=x'\times x''=2\times3=6$، پس ۲ و ۳ جواب‌های معادلهٔ $x^2-5x+6=0$ هستند.

روش دوم: $(x-2)(x-3)=0$ معادله‌ای است که مستقیماً دیده می‌شود ۲ و ۳ جواب‌های آن هستند. این یک معادلهٔ درجه دوم است و پس از انجام عمل ضرب به شکل $x^2-5x+6=0$ در می‌آید.

ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم

حل یک مسئله

بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟

برای فهم درست مسئله شکلی مانند بالا رسم می‌کنیم. برای حل مسئله باید تشخیص دهیم چه چیزی را باید به‌دست آوریم. در اینجا یافتن طول مستطیل برای حل مسئله کافی است. طول این زمین مستطیل شکل را با x نشان می‌دهیم. پس عرض زمین برابر $\frac{120-x}{2}$ خواهد بود. اگر مساحت این زمین را با A نشان دهیم، داریم :

$$A=x(60-\frac{x}{2})=-\frac{x^2}{2}+60x$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-120x)=-\frac{1}{2}\left[(x-60)^2-3600\right]=-\frac{1}{2}(x-60)^2+1800$$

بیشترین مقدار A وقتی است که $x-60=0$ و در نتیجه $x=60$. پس با انتخاب طول ۶۰ متر بیشترین مساحت ساخته می‌شود که برابر ۱۸۰۰ مترمربع خواهد بود.

فعالیت ۷

تابع $f(x)=ax^2+bx+c$ را در نظر بگیرید که در آن $a\neq 0$.

۱ــ درستی محاسبات زیر را توضیح دهید.

$$f(x)=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left((x+\frac{b}{2a})^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

۲ــ اگر $a<0$ به ازای چه مقداری از x تابع f بیشترین مقدار را خواهد یافت؟

۳ــ اگر $a>0$ به ازای چه مقداری از x تابع f کمترین مقدار را خواهد یافت؟

از فعالیت فوق قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه :

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ در حالت $a > 0$ به‌کمترین مقدار (مینیمم) و در حالت $a < 0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) خود می‌رسد.

مثال

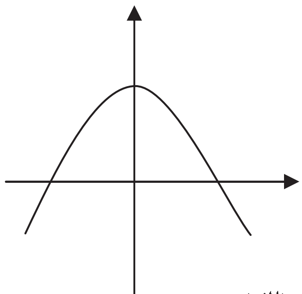
کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ را تعیین می کنیم.

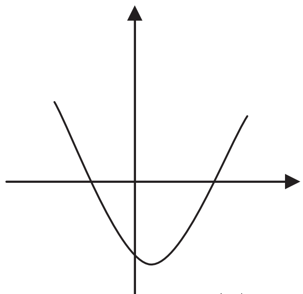
به‌ازای $x = \frac{12}{6} = 2$ تابع کمترین مقدار را داراست. از آنجا که $f(2) = -7$، کمترین مقدار تابع برابر -7 می‌باشد.

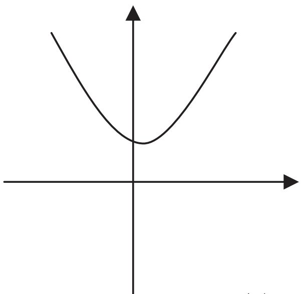
تمرین در کلاس

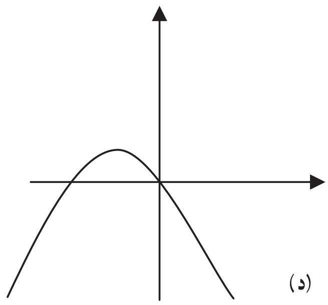
۱ــ اگر جمع دو عدد $\frac{7}{6}$ و حاصل ضربشان $\frac{-1}{2}$ باشد آن دو عدد را بیابید.

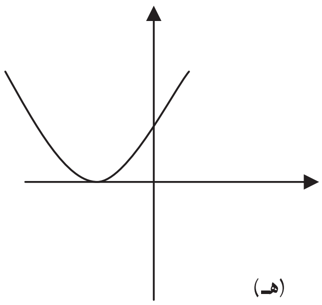
۲ــ در هر یک از شکل‌های زیر سهمی به‌معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a , b , c و تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.

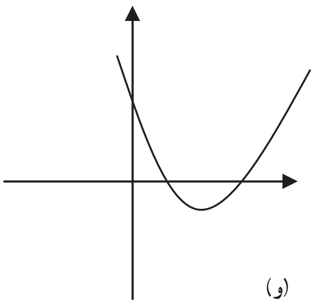

(الف)


(ب)


(ج)


(د)


(هـ)


(و)

۳ــ نشان دهید در بین مستطیل‌هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.

حل یک مسئله

یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بیابید که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ یک جواب آن باشد.

عباس : جواب این مسئله بسیار ساده است کافی است معادلهٔ چندجمله‌ای $x-(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})=۰$ را درنظر بگیریم.

معلم : در این چندجمله‌ای اعداد غیر صحیح به‌کار رفته است و این جواب مسئله نیست.

حسن : ما چگونه می‌توانیم چنین معادله‌ای بسازیم؟

معلم : بهتر است اول در حالت ساده‌تری این مسئله را حل کنید. مثلاً معادله‌ای با ضرایب صحیح بسازید که $\sqrt{۲}$ یک جواب آن باشد.

عباس : ما قبلاً به‌چنین معادله‌ای برخورد کرده‌ایم. کافی است معادله $x^۲-۲=۰$ را در نظر بگیریم.

معلم : این معادله را چگونه می‌توانید به‌دست آورید؟

عباس : کافی است در تساوی $x=\sqrt{۲}$ طرفین را به توان ۲ برسانیم. نتیجه می‌شود $x^۲=۲$ و سپس معادله $x^۲-۲=۰$ به‌دست می‌آید.

معلم : بله این روش شما کارساز است. البته توجه دارید که معادله ساخته شده جواب‌های دیگری هم دارد. آیا می‌توانید این روش را برای حل مسئله اصلی هم به‌کار برید؟

عباس : بهتر است این روش را آزمایش کنیم. قرار می‌دهیم $x=\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$. با به توان دو رساندن طرفین این تساوی می‌توان نوشت $x^۲=۵+۲\sqrt{۶}$. متأسفانه هنوز اعداد غیر صحیح در معادله جدید وجود دارند.

معلم : بله هنوز اعداد غیر صحیح وجود دارند و باز هم باید عملیات دیگری را انجام دهید.

عباس : فکر می‌کنم باز هم باید روش خود را تکرار کنیم. می‌توان نوشت $x^۲-۵=۲\sqrt{۶}$ و با به توان دو رساندن طرفین این معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت : $x^۴-۱۰x^۲+۱=۰$. به‌نظر می‌رسد این معادله جواب مسئله باشد.

معلم : بله شما به‌جواب مسئله رسیده‌اید. البته این معادله جواب‌های دیگری هم دارد و خوب است بقیهٔ جواب‌های این معادله را هم به‌دست آوریم. این یک معادله درجه چهار است ولی با در نظرگرفتن $x^۲=z$ می‌توان آن را به یک معادلهٔ درجه دوم بر حسب z تبدیل کرد : $z^۲-۱۰z+۱=۰$. با حل این معادله خواهیم داشت : $z=۵\pm۲\sqrt{۶}$. حال با حل دو معادلهٔ $x^۲=۵+۲\sqrt{۶}$, $x^۲=۵-۲\sqrt{۶}$ خواهیم داشت :

$$x^۲=۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^۲\Rightarrow x=\pm(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$$

با همین روش جواب‌های $x=\pm(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$ برای معادلهٔ دیگر به‌دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است.

در برخی از معادلات با درنظر گرفتن یک متغیر جدید می‌توان آن را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد.

تمرین در کلاس

معادلهٔ $(x^۲-۱)^۴+(x^۲-۱)^۲-۲=۰$ را حل کنید.

حل یک مسئله

اگر $P(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد که $a_۰\neq ۰$ و از روی آن چندجمله‌ای درجه n، $Q(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+\cdots+a_{n-۱}x+a_n$ را بسازیم، آیا رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو چندجمله‌ای وجود دارد؟ چند جمله‌ای $Q(x)$ را چند جمله‌ای وارونه $P(x)$ می‌نامند.

یکی از دانش‌آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چندجمله‌ای فکر کرده بود مسئله بالا برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش‌آموزان مطرح کرد تا همه درباره آن فکر کنند و راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

در جلسهٔ بعدی درس، معلم از دانش‌آموزان خواست راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

علی : به‌نظر من بهتر است ابتدا در حالت‌های خاص که ساده‌تر است مسئله را بررسی کنیم، مثلاً چندجمله‌ای‌های درجه اول و دوم را بررسی کنیم.

معلم : آفرین، این روش شما کمک زیادی به‌حل یک مسئله می‌کند. با مشاهدهٔ مسئله در حالت‌های خاص می‌توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پیدا کنیم. حال بگو چه پیشنهادی داری؟

علی : من توانستم حدس بزنم که چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چندجمله‌ای وجود دارد ولی نتوانستم اثباتی برای آن ارائه کنم.

در حالت چندجمله‌ای‌های درجه اول مانند $P(x)=ax+b$ داریم $Q(x)=bx+a$ و ریشه‌های آن‌ها به‌ترتیب $\frac{-b}{a}$ و $\frac{-a}{b}$ می‌باشند که وارون یکدیگرند. در حالت چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم محاسبات پیچیده‌تر بود و نتوانستم فکر خود را تعقیب کنم.

سعید : جالب است اتفاقاً من نیز همین کار را کردم ولی با چندجمله‌ای درجه دوم خاصی که ریشه‌هایشان را می‌دانستم محاسبه کردم و به‌همین نتیجه رسیدم. من یک چندجمله‌ای ساده مثل $P(x)=(x+۳)(x-۴)$ را در نظر گرفتم که ریشه‌هایش را از قبل می‌دانستم. اگر آن را به‌صورت استاندارد بنویسیم داریم : $P(x)=x^۲-x-۱۲$. بنابراین $Q(x)=-۱۲x^۲-x+۱$ و ریشه‌های آن از دستور کلی معادلهٔ درجهٔ دوم $\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۴}$ خواهند شد.

معلم : هر دو روش کارهای خوبی برای حل مسئله انجام داده‌اند. در هر دو روش این حدس پیش می‌آید که ریشه‌های دو چندجمله‌ای معکوس یکدیگرند. شما می‌توانید این حدس را در مثال‌های دیگری هم بررسی کنید. حال چگونه می‌توانید این مطلب را برای یک چندجمله‌ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به‌شکل دقیق‌تری بیان کنید. مثلاً برای دو چندجمله‌ای $P(x)=ax^۲+bx+c$ و $Q(x)=cx^۲+bx+a$ اگر r یک ریشهٔ $P(x)$ باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{۱}{r}$ یک ریشه $Q(x)$ می‌شود؟

علی : پس باید از $P(r)=0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q(\frac{1}{r})=0$. اما اگر صفر یک ریشه $P(x)$ باشد چنین نتیجه‌گیری امکان‌پذیر نخواهد بود.

معلم : لابد صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ شود. آیا می‌توانید این مطلب را بررسی کنید؟

سعید : درست است صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ باشد، زیرا $P(0)=a_0 \neq 0$.

معلم : حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r)=0$ حکم $Q(\frac{1}{r})=0$ را به‌دست آورید.

عباس : پس فرض کنیم $P(r)=ar^2+br+c=0$ اکنون می‌خواهیم $Q(\frac{1}{r})$ را به‌دست آوریم.

$$Q(\frac{1}{r})=c(\frac{1}{r})^2+b(\frac{1}{r})+a=\frac{c+br+ar^2}{r^2}=\frac{P(r)}{r^2}=0$$

معلم : آفرین، محاسبه را به‌درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه‌ای از چندجمله‌ای $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ باشد آن‌گاه $P(r)=0$ بنابراین :

$$Q(\frac{1}{r})=a_0(\frac{1}{r})^n+a_1(\frac{1}{2})^{n-1}+\quad+a_{n-1}(\frac{1}{r})+a_n$$

$$=\frac{1}{r^n}(a_0+a_1r+a_2r^2+\quad+a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n)=\frac{1}{r^n}P(r)=0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشهٔ $Q(x)$ است.

علی : آیا عکس مطلب هم درست است اگر s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد آیا می‌توان گفت $P(\frac{1}{s})=0$ ؟

معلم : این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله‌ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله‌ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$ می‌شود.

تذکر :

برهان نهایی این مسئله مانند یک مبحث ریاضی مختصر و رسمی‌است و نتایج نهایی فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. ولی مطلب مهم آن است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه‌حل‌های خود را به‌دست آوریم؟ اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به‌منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسألهٔ کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین در کلاس

با استفاده از فرمول جواب‌های دو معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ و $cx^2+bx+a=0$ را به‌دست‌آورید و نشان دهید جواب‌های آن‌ها عکس یکدیگرند.