بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی (۳)

(پودمانی)

کلیهٔ رشته‌های زمینهٔ صنعت

و

رشتهٔ کامپیوتر زمینهٔ خدمات

شاخهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای

شمارهٔ درس ۱۵۱۵

عنوان و نام پدیدآور	:	ریاضی (۳) (پودمانی) [کتاب‌های درسی] ۴۸۲/۸،کلیهٔ رشته‌های زمینهٔ صنعت و رشتهٔ کامپیوتر، زمینهٔ خدمات، شاخهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای/ مؤلفان : اسماعیل بابلیان، محمدهاشم رستمی، جواد لآلی؛ برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش؛ [برای] وزارت آموزش و پرورش،سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.
مشخصات نشر	:	تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	:	۱۵۹ ص. : مصور (بخش رنگی).
شابک	:	۸ ـ ۱۲۸۱ ـ ۰۵ ـ ۹۶۴
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
موضوع	:	۱ـ ریاضیات. ۲ـ ریاضیات ـ آزمون‌ها و تمرین‌ها (متوسطه)
شناسه افزوده	:	الف ــ بابلیان، اسماعیل،۱۳۲۵. ب ــ رستمی، محمدهاشم،۱۳۱۸. ج ــ لآلی، جواد،۱۳۲۷. د ــ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. هـ ــ دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش. و ــ ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
رده‌بندی کنگره	:	QA ۳۹/۳/ ر ۹۳ ۱۳۹۲
رده‌بندی دیویی	:	۳۷۳/ک ۴۸۲/۸
شماره کتابشناسی ملی	:	۳۱۱۹۷۹۷

۱۳۹۵

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :

پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

پیام‌نگار(ایمیل) **tvoccd@roshd.ir**

وب‌گاه (وب‌سایت) **www.tvoccd.medu.ir**

این کتاب با توجه به برنامهٔ سالی ـ واحدی و با روش «پودمانی» توسط کمیسیون تخصصی رشتهٔ ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش بررسی و تأیید شده است.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش**

نام کتاب : **ریاضی (۳) (پودمانی) ـ ۴۸۲/۸**

مؤلفان : **اسماعیل بابلیان، محمدهاشم رستمی و جواد لآلی**

ویراستاران فنی : **سیّد احمد سادات حسینی ، سیّد مرتضی رضوی**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : **www.chap.sch.ir**

مدیر امور فنی و چاپ : **لیدا نیک‌روش**

رسام : **فتح‌اله نظریان**

طراح جلد : **علیرضا رضائی‌کُر**

صفحه‌آرا : **سمیه قنبری**

حروفچین : **فاطمه باقری مهر**

مصحح : **رضا جعفری، حسین قاسم‌پور اقدم**

امور آماده‌سازی خبر : **زهرا محمدنظامی**

امور فنی رایانه‌ای : **حمید ثابت کلاچاهی، ناهید خیام‌باشی**

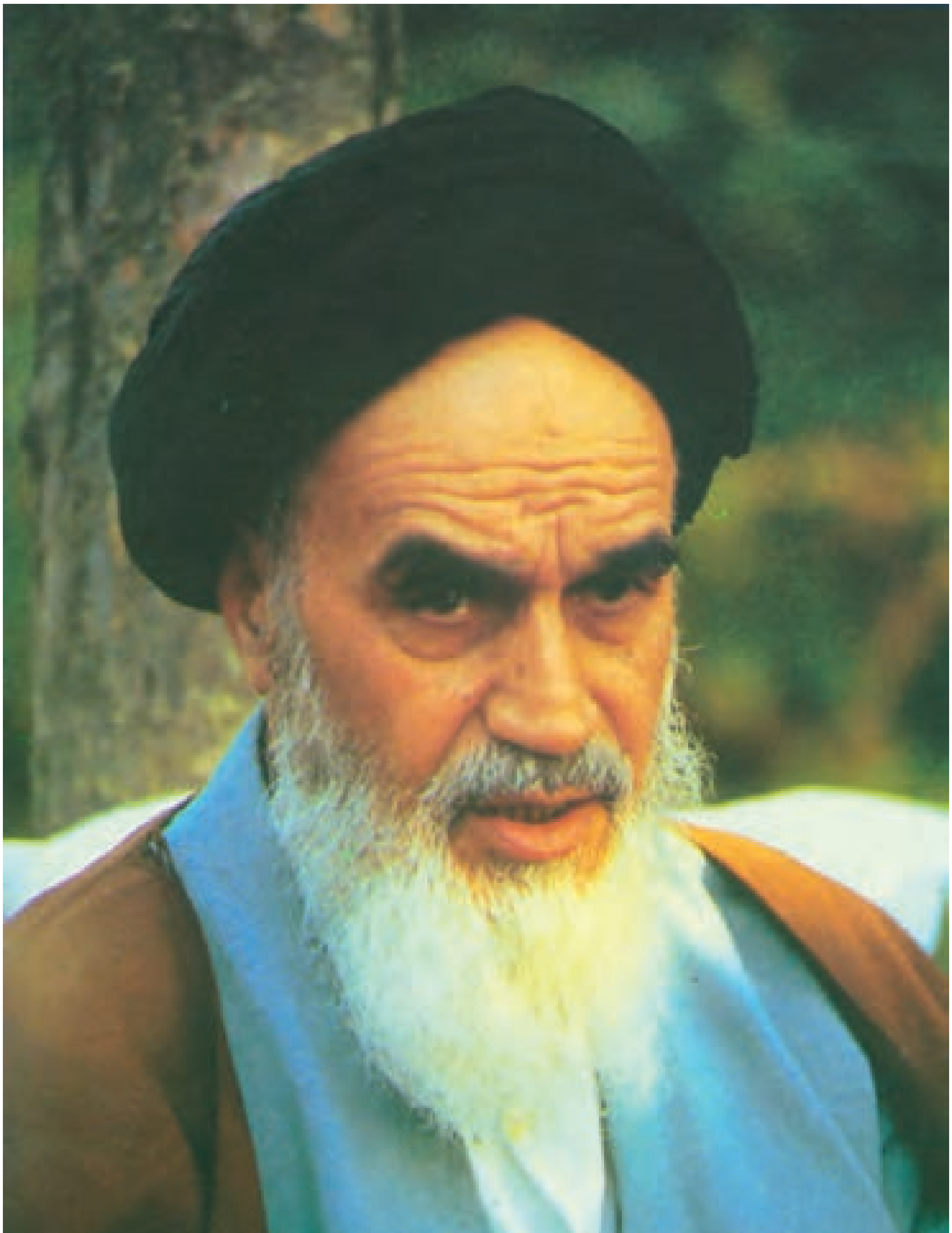
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن : ۵ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ چهارم ۱۳۹۵**

ISBN 964-05-1281-8 ۹۶۴ـ۰۵ـ۱۲۸۱ـ۸ شابک



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتّکای به اجانب بپرهیزید.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

پیشگفتار

هنرجویان شاخه‌ی آموزش‌های فنی و حرفه‌ای امروزه به عنوان نسل جوان و آینده‌ساز جامعه‌ی ما، پا به عصری می‌گذارند که **عصر دانایی** لقب گرفته است. در این عصر که گستره‌ای از اطلاعات متنوع در دسترس انسان قرارگرفته است کسانی توان رویارویی و سازگاری با جهان پیشرفته را دارند که دارای ذهنی پویا، متفکر و نقاد باشند و بتوانند از میان انبوه اطلاعات، مفیدترین آن‌ها را انتخاب کنند و به کار گیرند.

براین اساس، دانش‌آموزان ما باید اصولی آموزش ببینند تا بتوانند از دانش روز بهره‌ی کافی گرفته و توانایی فنّاورانه‌ی مناسبی جهت چالش با جهان کنونی به‌دست آورند. مسلّم است که یکی از مهم‌ترین عوامل اصلی و زیربنایی آموزش و پیشرفت در زمینه‌ی فنّاوری، دانش ریاضی است و ما باید بکوشیم تدریس این علم ر ابه شیوه‌ی مؤثر در نظام آموزشی خود ترویج کنیم.

از آن‌جا که تدریس مؤثر ریاضی نیازمند به چالش انداختن و درگیرساختن هنرجویان و سهیم نمودن آن‌ها در فرایند یادگیری است، کتاب حاضر به گونه‌ای تدوین شده که آموزش هر مفهوم، حتی‌المقدور، با طرح مسئله‌ای کاربردی شروع شود و حل آن در قالب یک یا چند فعالیت، در گروه‌های کوچک از هنرجویان و با راهنمایی‌های لازم دبیر درس انجام گیرد. بدین طریق یادگیرنده درگیر مدل‌سازی مسئله‌های واقعی، حل مسئله و انتخاب بهترین راه حل‌ها می‌شود. **کار در کلاس‌هایی** نیز به منظور خودآزمایی و تقویت هنرجویان در پرداختن به ریاضی **به طور مستقل** در نظر گرفته شده است؛ با این حال هنرجویان، در صورت لزوم، می‌توانند از راهنمایی‌های لازم دبیر خود برخوردار شوند.

با توجه به این که این اولین کتاب ریاضی تألیف شده برای هنرجویان شاخه‌ی فنی و حرفه‌ای، به سبک پودمانی، است و با تأکید بر فعالیت یادگیرنده تدوین شده است، از کلیه‌ی عزیزانی که به نحوی با این کتاب در ارتباط قرار می‌گیرند تقاضا داریم پیشنهادها و انتقادهای خود را به نشانی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی،دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵ ارسال نمایند و ما را از راهنمایی‌های خود بهره‌مند سازند.

در خاتمه از آقای مهندس عبدالمجید خاکی صدیق به خاطر مطالعه‌ی دقیق دست‌نویس کتاب و راهنمایی‌های سازنده تشکر می‌نماییم.

مؤلفان

فهرست مطالب

بخش اول ــ یادآوری و تکمیل ویژگی‌های تابع

بخش دوم ــ حد و پیوستگی

بخش سوم ــ مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی کتاب

درک مفهوم تابع، حدّ، پیوستگی و مشتق و کاربردهای آن‌ها به منظور پیدا نمودن توانایی‌های لازم برای مدل‌سازی پدیده‌های ساده به زبان ریاضی و بررسی شیوه‌ها و فنون پاسخ‌گویی به سؤالات و مسائل مربوط به آن‌ها.

جدول عناوین بخش‌ها

شماره‌ی بخش	عنوان بخش	زمان
بخش اول	یادآوری و تکمیل ویژگی‌های تابع	۳۶ ساعت
بخش دوم	حدّ و پیوستگی	۳۶ ساعت
بخش سوم	مشتق و کاربردهای آن	۱۸ ساعت

بخش اول

یادآوری و تکمیل ویژگی‌های تابع

هدف کلی بخش

آشنایی با ویژگی‌ها و شیوه‌های مختلف نمایش یک تابع، عملیات روی تابع‌ها و کاربردهای آن‌ها در زمینه‌های مختلف.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	محور اعداد	۶ ساعت
دوم	بازه	۴ ساعت
سوم	تابع	۸ ساعت
چهارم	دامنه‌ی تابع‌های حقیقی	۶ ساعت
پنجم	عملیات روی تابع‌ها	۶ ساعت
ششم	ترکیب دو تابع	۶ ساعت

بخش اول

فصل اول

محور اعداد

هدف کلی

یادآوری مطالب مربوط به محور اعداد و دستگاه مختصات

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ـ محور اعداد را تعریف کند.

۲ـ دستگاه مختصات را رسم کند.

۳ ـ مختصات نقطه‌های صفحه‌ی مختصات را تعیین کند.

۴ ـ نقطه‌های داده شده را روی صفحه‌ی مختصات مشخص کند.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ محور اعداد را تعریف کنید.

۲ــ x نقطه‌های روی محور را تعیین کنید (شکل ۱ــ۱).

۳ــ اگر $x_A=-3$ ، $x_B=\frac{1}{2}$ و $x_C=0/75$ نقطه‌های A، B و C را روی محور اعداد مشخص کنید (شکل ۲ــ۱).

۴ ــ نقطه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید :

$$A\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right. ,\quad B\left|\begin{matrix}-1\\-2\end{matrix}\right. ,\quad C\left|\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right.$$

۵ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x+8=0$

ب) $2x+3=x-5$

پ) $\frac{3}{2}x+2=\frac{1}{6}x+7$

۶ــ دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}2x-y=3\\x+3y=5\end{cases}$$

۷ــ نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}2\\0\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-2\\-2\end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix}0\\-1\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right.$ داده شده‌اند.

الف) کدام نقطه روی محور xها قرار دارد؟

ب) کدام نقطه روی محور yها قرار دارد؟

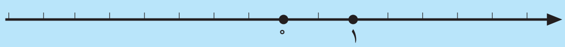
پ) کدام نقطه روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

ت) کدام نقطه در ناحیه‌ی سوم دستگاه مختصات است؟

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

شکل ۱ــ۱

$x_A=$ $\qquad x_B=$ $\qquad x_C=$



شکل ۲ــ۱

۱ــ۱ــ محور اعداد

معلم گرامی

چنانچه به تفصیل در کتاب راهنمای معلم ریاضی (۳) آمده است، دانش‌آموزان را به گروه‌های چندنفری تقسیم کنید سپس با نظارت خود،فعالیت‌ها و کار در کلاس‌ها را توسط گروه‌ها انجام دهید.

رنه دکارت (کارتزین): ارائه‌دهنده‌ی دستگاه مختصات

فعالیت ۱ــ۱

۱) یک خط راست، در زیر، رسم کنید.

۲) یک نقطه به عنوان مبدأ روی این خط انتخاب کنید و آن را O بنامید.

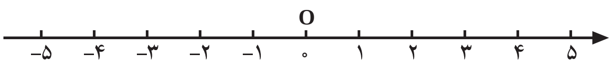
۳) در دو طرف نقطه‌ی O با یکای (واحد) مشخص، خط را تقسیم‌بندی کنید.

۴) یک سوی خط را مثبت در نظر بگیرید و آن را با پیکان مشخص کنید.

۵) عدد نظیر نقطه‌ی O را صفر بگیرید.

۶) عددهای صحیح نظیر نقطه‌های دیگر تقسیم‌بندی را بنویسید.

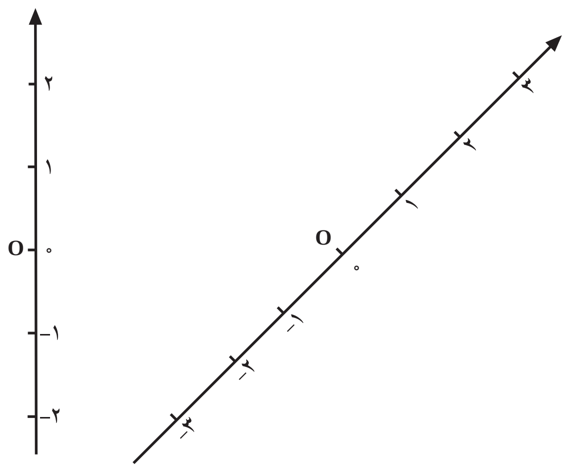
شما به این ترتیب یک محور اعداد، مشابه محور اعداد شکل۳ــ۱ ساخته‌اید.



شکل ۳ــ۱

نکته: محور اعداد می‌تواند به صورت افقی، قائم یا مایل رسم شود ؛ امّا، معمولاً آن را به صورت افقی یا قائم رسم می‌کنند.

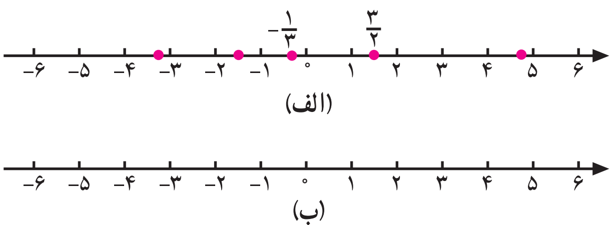
در شکل۴ــ۱ دو محور اعداد در جهت‌های مختلف ملاحظه می‌کنید.



(ب) (الف) شکل ۴ــ۱

فعالیت ۲ــ۱

۱) روی محور اعداد (الف) چند نقطه و عدد نظیر هر یک مشخص شده‌اند، عددهای نظیر نقطه‌های قرمز را بنویسید (شکل ۵ــ۱).



شکل ۵ــ۱

۲) نقاط نظیر عددهای ۳، $-\frac{۵}{۴}$ ، $-\frac{۷}{۲}$ و $\sqrt{۲}$ را روی محور (ب) مشخص کنید.

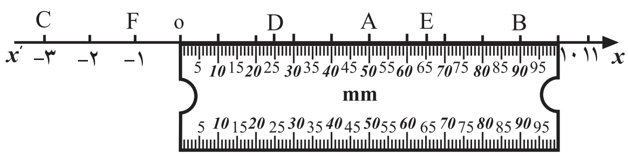
۳) نقطه‌ی نظیر $\sqrt{۲}$ را چگونه تعیین کردید؟

۴) دانش‌آموزی نقطه‌ی نظیر $\sqrt{۲}$ را به این صورت مشخص کرده است. او می‌گوید : عدد $\sqrt{۲}$ در ماشین حساب به صورت عدد اعشاری... ۱/۴۱۴۲ است. این عدد را تا یک رقم اعشارگرد می‌کنیم تا عدد ۱/۴ به دست آید. بعد، نقطه‌ی نظیر ۱/۴ را تعیین می‌کنیم. به نظر شما این روش مناسب است؟ نقطه‌ی نظیر $\sqrt{۳}$ را به این روش مشخص کنید.

۵) یک محور اعداد رسم کنید و بر روی آن اعداد $۱۰^{۳}$، ۲×۱۰^{۳}، ۱۰×۱۰^{۳} و $(-۷)\times۱۰^{۳}$ را مشخص کنید.

از فعالیت ۲ــ۱ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

هر نقطه از محور اعداد یک عدد حقیقی را مشخص می‌کند و به عکس، به ازای هر عدد حقیقی، تنها یک نقطه روی محور اعداد حقیقی وجود دارد.

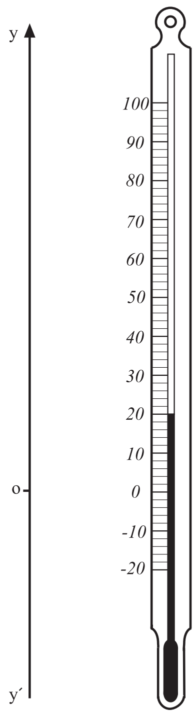


شکل ۶ــ۱ــ خط‌کش مدرّج

یعنی : یک تناظر یک به یک بین نقطه‌های محور اعداد و عددهای حقیقی برقرار است.

۱ــ۱ــ۱ــ مختصّ نقطه

محور اعداد افقی را معمولاً با $x'ox$ نشان می‌دهند. عدد نظیر هر نقطه از این محور را x نقطه (بخوانید : ایکسِ نقطه) یا مختصّ نقطه می‌نامند. مثلاً، x نقطه‌ی A مساوی عدد ۵، x نقطه‌ی B عدد ۹، x نقطه‌ی C مساوی ۳− ، x نقطه‌ی D مساوی ۲/۵ و x نقطه‌ی F مساوی ۱− است (شکل ۶ــ۱).



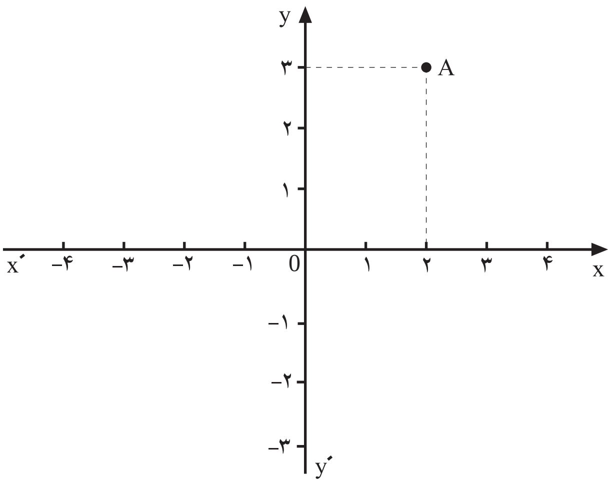
شکل ۷ــ۱

در شکل ۷ــ۱ کناره‌ی سمت چپ دماسنج بخشی از یک محور اعداد قائم را مشخص می‌کند. محور اعداد قائم را معمولاً با $y'oy$ نشان می‌دهند. دماسنج چه دمایی را نشان می‌دهد؟

۲ــ۱ــ۱ــ دستگاه محورهای مختصات: با دو محور اعداد افقی و قائم، که مبدأ مشترک داشته باشند، یک دستگاه محورهای مختصات ساخته می‌شود (شکل ۸ــ۱).

این دستگاه مختصات را، دستگاه مختصات قائم (دکارتی) می‌نامند. هر نقطه‌ی واقع در صفحه‌ی این دستگاه مختصات، دارای دو مختص است. به عنوان مثال، نقطه‌ی A دارای دو مختص است. عدد ۲ مختص اول A یا x نقطه‌ی A یا x_A است. عدد ۳ مختص دوم A یا y نقطه‌ی A است.

معمولاً می‌نویسیم $A\left|\begin{matrix}۲\\۳\end{matrix}\right.$ یا $A(۲,۳)$ ، یعنی، برای نقطه‌ی A، $x_A=۲$ و $y_A=۳$ است.



شکل ۸ــ۱

> به‌طور کلی، $A(x,y)$ یا $A\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ را می‌خوانیم A به مختصات x و y.

فعالیت ۳ــ۱

دستگاه مختصات xoy داده شده است (شکل ۹ــ۱).

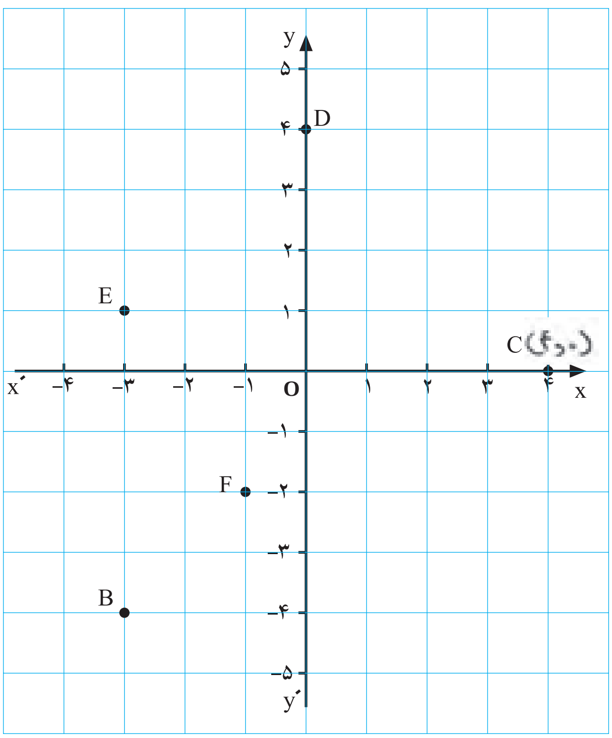
الف) مختصات نقطه‌های B، C، D، E و F را بنویسید.

B(,), C(,), D(,), E(,), F(,).

ب) نقطه‌های $G(-۲,۲)$ ، $H(۳,-۲)$ و $K(-۳,۰)$ را روی این دستگاه مختصات مشخص کنید.

ج) نقطه‌ی B را به نقطه‌ی E وصل کنید. توضیح دهید چرا پاره‌خط BE موازی محور $y'oy$ است؟

د) پاره‌خط FH را رسم کنید. چرا این خط موازی محور $x'ox$ است؟



شکل ۹ــ۱

فعالیت ۴ـ۱

۱) دستگاه محورهای مختصات قائم xoy را رسم کنید.

۲) در این دستگاه نقطه‌های A(۱ ,۲) ، B(−۱ ,−۲) ، C(۰ ,۳) و D(−۲,۰) را مشخص کنید.

۳) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به محور x′ox تعیین کنید و آن را $A_۱$ بنامید. مختصات $A_۱$ را بنویسید.

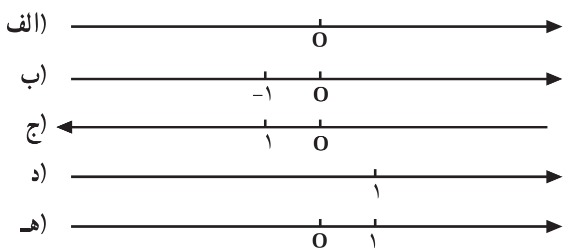
۴) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به محور y′oy تعیین کنید و آن را $A_۲$ بنامید، مختصات $A_۲$ را بنویسید.

۵) قرینه‌ی نقطه‌ی A را نسبت به مبدأ مختصات تعیین کنید و آن را $A_۳$ بنامید، مختصات نقطه‌ی $A_۳$ را بنویسید.

کار در کلاس ۱ـ۱

۱) از شکل‌های روبه‌رو کدام محور اعداد است؟ (شکل ۱۰ـ۱).

الف	
ب	
ج	
د	
هـ	



شکل ۱۰ـ۱

۲) جمله‌ی زیر را کامل کنید.

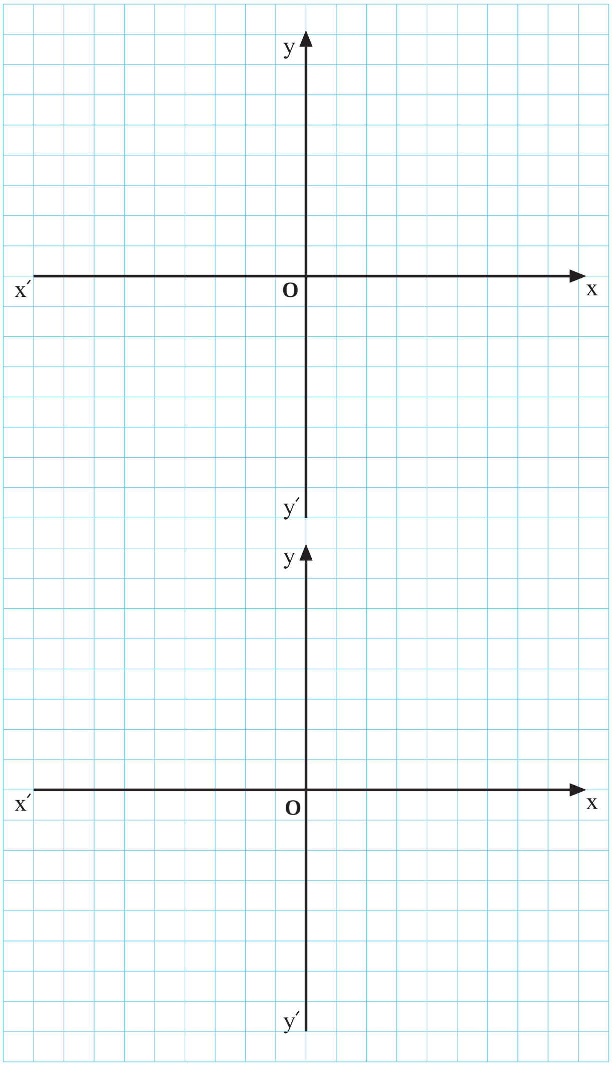
یک خط مستقیم سودار (جهت‌دار) که یک نقطه به عنوان ... و یک ... روی آن مشخص شده باشد ... نامیده می‌شود.

۳) x کدام یک از نقطه‌های زیر مساوی ۲ است؟

B(−۱,۲) ، C(۰,۳) ، D(۲,۱) ، E(۰,−۲) ، F(۲,۲)

۴) y کدام یک از نقطه‌های زیر مساوی ۱− است؟

A(۰,۲) ، B(۲,−۱) ، C(۱,۲) ، D(−۱,۰) ، E(۰,۱)



۵) از نقطه‌های زیر، چند نقطه روی محور y′oy است؟

جواب : ... نقطه

B(−۲,۳)، C(۲,−۲)، D(۰,۲)، E(۱,۰)، O(۰,۰)

۶) کدام نقطه روی محور x′ox قرار دارد؟

A(۳,۲)، B(۳,۰)، C(۰,۲)، D(۴,۱)، E(۲,۲)، F(۱,−۱)

۷) عدد m را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی A(m+۱,۲) روی محور y′oy باشد، سپس مختصات A را بنویسید.

۸) عدد k را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی B(۱,۲k−۱) روی محور x′ox باشد، سپس مختصات B را بنویسید.

۹) عددهای s و t را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی C(s,t−۱) بر نقطه‌ی D(۲,۳) منطبق باشد، سپس مختصات C را بنویسید.

تمرین ۱ــ۱

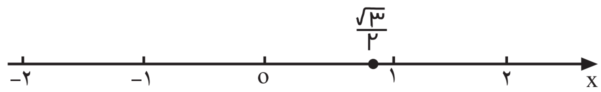
۱) اعداد زیر را به کمک ماشین‌حساب، تا دو رقم اعشار بنویسید. سپس نقطه‌ی نظیر هر عدد را روی محور اعداد مشخص کنید (برای مشخص‌کردن جای نقطه‌ی نظیر هر عدد، آن عدد را تا یک رقم اعشار گرد کنید).

$$\frac{\sqrt{۳}}{۲} \cong ۰/۸۶ \cong ۰/۹$$

$$\sqrt{۴/۵} \cong$$

$$-\sqrt{۱/۵} \cong$$

$$\frac{\pi}{۲} \cong$$



۲) اگر A و B دو نقطه روی یک محور اعداد افقی باشند و x نقطه‌ی A کمتر از x نقطه‌ی B باشد، روی این محور اعداد، A در کدام سمت B قرار دارد؟ (شکل ۱۱ــ۱).

شکل ۱۱ــ۱

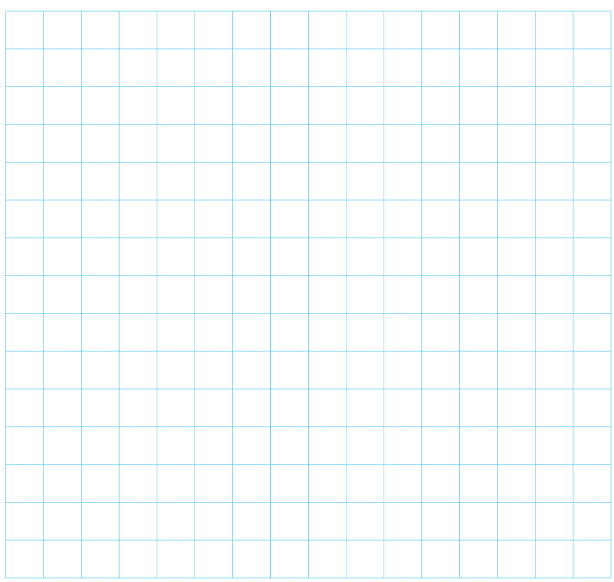
۳) یک دستگاه مختصات قائم رسم کنید.

الف) دو نقطه‌ی $A(۲,۱)$ و $B(۲,-۴)$ را مشخص کنید. پاره‌خط AB را رسم کنید. این پاره‌خط با کدام محور موازی است؟ چرا؟

ب) نقطه‌ی $C(۴,۱)$ را مشخص کنید. پاره‌خط AC را رسم کنید. این پاره‌خط با کدام محور موازی است؟ چرا؟

ج) نقطه‌ی $D(-۲,-۱)$ را مشخص کنید. پاره‌خط AD را رسم کنید. چرا این پاره‌خط از مبدأ مختصات می‌گذرد؟

د) نقطه‌ی $E(۳,۳)$ را مشخص کنید. پاره‌خط OE را رسم کنید (O مبدأ مختصات است). زاویه‌ی پاره‌خط OE با محورها چند درجه است؟

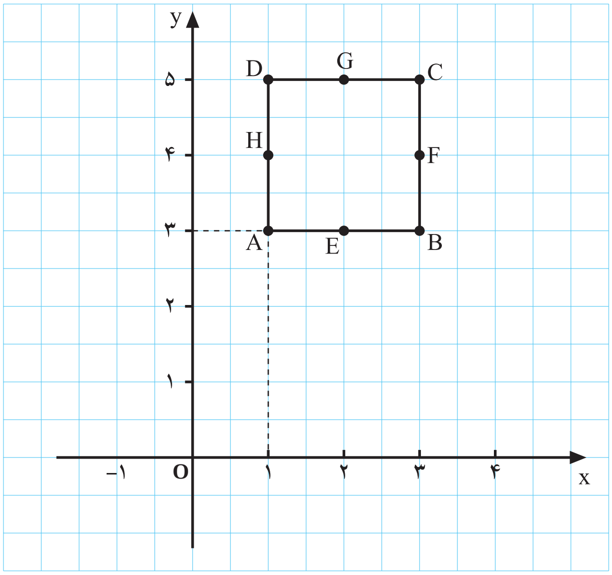


۴) در دستگاه مختصات xoy نقطه‌ی $A(۱,۳)$ رأس مربع $ABCD$، به ضلع ۲ سانتی‌متر است، که ضلع‌های آن موازی محورهای مختصات است (شکل ۱۲ـ۱).

الف) مختصات نقطه‌های B، C و D (سه رأس دیگر مربع) را تعیین کنید.

ب) مختصات نقطه‌های E، F، G و H (وسط ضلع‌ها) را به‌دست آورید.

ج) مختصات محل تلاقی قطرهای مربع را به‌دست آورید.



شکل ۱۲ـ۱

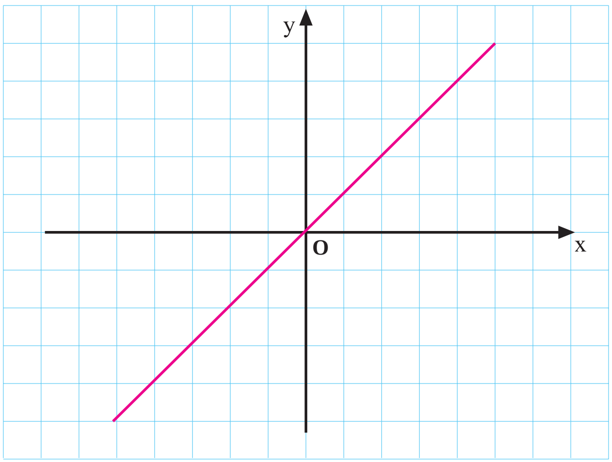
۵)

الف) مقدار a را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $A(a-۱,۲)$ روی محور $y'oy$ باشد.

ب) مقدار b را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی $B(۳,۲b+۱)$ روی محور $x'ox$ باشد.

ج) مقدار c را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $D(۲c,c-۱)$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

د) مقدارهای d و e را طوری تعیین کنید که دو نقطه‌ی $F(d-۱,e)$ و $G(e+۱,d-e)$ بر هم منطبق باشند.

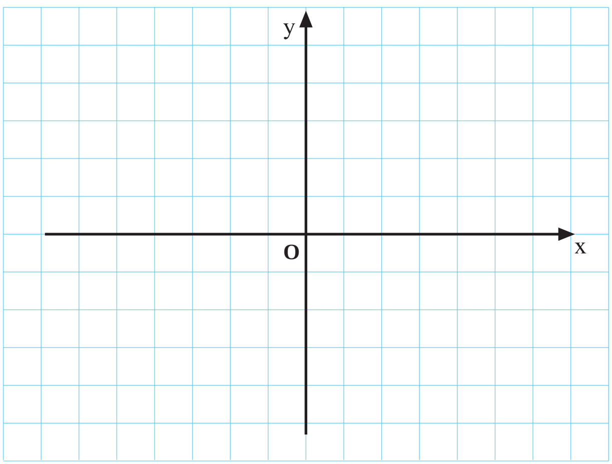


۶) در یک دستگاه مختصات xoy سه نقطه‌ی $A(۱,۵)$، $B(۱,۲)$ و $C(۵,۲)$ را مشخص کنید.

الف) مثلث ABC را رسم کنید. ABC چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

ج) طول ضلع‌های این مثلث را حساب کنید.



آزمون پایانی (۱)

۱ــ نقطه‌های نظیر عددهای زیر را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید (شکل ۱۳ــ۱).

$$-۱/۵ \;،\; ۳ \;،\; \frac{۷}{۲} \;،\; \sqrt{۱۰}$$

۲ــ x نقطه‌های داده شده روی محور اعداد را بنویسید (شکل ۱۴ــ۱).

۳ــ نقطه‌های زیر را روی یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

$$A\left|\begin{matrix}-۲\\۱\end{matrix}\right. \;،\; B\left|\begin{matrix}۰\\۳\end{matrix}\right. \;،\; C\left|\begin{matrix}۲\\۲\end{matrix}\right. \;،\; D\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.$$

۴ــ مختصات نقطه‌های مشخص‌شده روی دستگاه مختصات xoy را بنویسید (شکل ۱۵ــ۱).

$$A\left|\begin{matrix}\\ \\\end{matrix}\right. \qquad B\left|\begin{matrix}\\ \\\end{matrix}\right. \qquad C\left|\begin{matrix}\\ \\\end{matrix}\right.$$

۵ــ عدد b را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}b+۱\\۳\end{matrix}\right.$

الف) روی محور yها باشد؛

ب) روی نیمساز ربع اول و سوم باشد؛

پ) روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

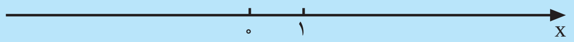
۶ــ سه نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۲\\۱\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-۲\\۱\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\۵\end{matrix}\right.$ را در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

الف) مثلث ABC را رسم کنید.

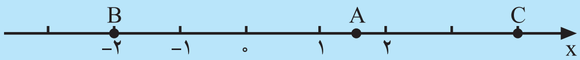
ب) نوع مثلث را تعیین کنید.

پ) مساحت مثلث را حساب کنید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

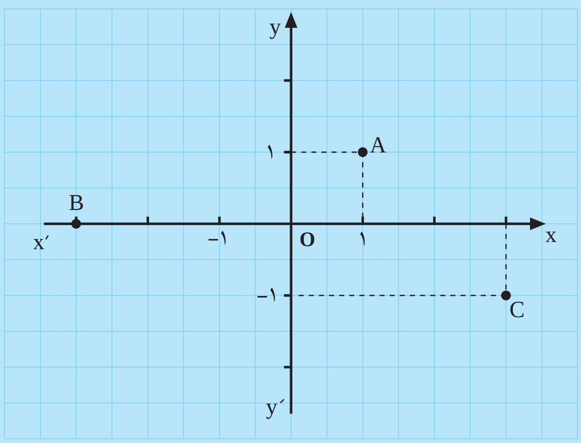


شکل ۱۳ــ۱



$x_A=$ $\qquad$ $x_B=$ $\qquad$ $x_C=$

شکل ۱۴ــ۱



شکل ۱۵ــ۱

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

ابوبکر بن محمد بن حسین یا حسن کرجی، ریاضیدان بزرگ در اواخر سده دهم میلادی/ چهارم قمری تا اوایل قرن یازدهم میلادی/پنجم قمری می‌زیسته است. تاریخ وفات کرجی را حدود سال ۱۰۲۹/۴۲۰تعیین کرده‌اند. کرجی در تاریخ ریاضیات جایگاه مهمی دارد. کار عمده‌ی کرجی عملیات بر روی عبارت‌های جبری است. ووپکه می‌گوید : او مهم‌ترین و کمابیش تنها نظریه‌ی حساب جبری در میان دانشمندان عرب زبان را تا به امروز بیان کرده است. کرجی جبر را یکی از روش‌های حساب می‌داند و حساب را در مقدمه الفخری چنین تعریف می‌کند :

چنین دریافتم که موضوع علم حساب، درباره‌ی استخراج مجهول‌ها از روی معلوم‌ها در انواع آن است و پی‌بردم که واضح‌ترین راه به سوی آن و نخستین وسیله برای رسیدن به آن صنعت جبر و مقابله است.

کرجی با آغاز شرح نظریه‌ی حساب جبری در بین جبردانان (خوارزمی و ابوکامل) رویکرد جدیدی را به کار گرفت. هدف مهم آن درک به صورت مستقل بود. تا پیش از کرجی همه مفاهیم ریاضیات از جمله جبر در سایه‌ی هندسه با معنی بود زیرا در ریاضیاتی که از یونان آمده بود، قضایا باید به روش هندسی اثبات می‌شد. از نظر کرجی همچون خوارزمی جبر، روش بیان عملیات جبری بود و از نمادهایی مانند x و y استفاده نمی‌شد و به جای آن واژه‌هایی مخصوص به کار می‌بردند. مثلاً شیء (x یا مقدار مجهول)، مال (توان دوم)،کعب (توان سوم)، مال مال (توان چهارم مقدار مجهول یا x^4) و مال کعب (توان پنجم مقدار مجهول یا x^5) و... و عدد یا درهم(مقدار معلوم). اثرش به نام الفخری نخستین شرح جبر چند جمله‌ای بود.

کرجی در الفخری ابتدا توان‌های جبری را منظم می‌کند و سپس به کاربرد عملیات حساب و اصطلاحات جبری می‌پردازد. کرجی کوشش کرد که عملیات حساب را در مورد عبارات و جمله‌های غیرگویا به کار بندد. از راه کاربرد منظم اعمال حساب در بازه، مبنای تازه‌ای برای جبر پی نهاد و این کار در اثر آشنایی با جبر خوارزمی و خواندن آثار دیوفانتوس در حساب امکان‌پذیر شد. رهیافت جدید به همت جانشینان کرجی، به ویژه سموئل بسط یافت. برخی از دانشمندان اعتقاد دارند که ممکن است بر لئوناردو فیبوناتچی و لوی بن گرسون تأثیر گذاشته باشد. کار مهم کرجی در ریاضیات و جبر، بررسی و حل معادله‌های سیال (جبر نامعین) است که آن‌ها را براساس کتاب دیوفانتوس آغاز کرد و تا معادله‌های درجه بالاتر از محاسبه‌های دیوفانتوس ادامه داد. کرجی معادله یک، دو و سه مجهولی، دو معادله تک مجهولی، دو معادله دو مجهولی، دو معادله سه‌مجهولی، سه معادله دو مجهولی و سه معادله سه مجهولی را بررسی کرده است. تمام آثار کرجی درباره‌ی حساب است. آثار مهم کرجی عبارت‌اند از :

۱) الفخری فی الجبر و المقابله ۲) الکافی فی الحساب ۳) البدیع فی الحساب ۴) علل حساب و الجبر و المقابله و شرح‌ها ۵) مختصر فی الحساب و المساحه ۶) فی حساب الهند ۷) فی‌الاستقراء ۸) الاجذار ۹) المسائل و الاجوبه في الحساب ۱۰) انباط المیاه الخفیه ۱۱) العقود و الابنیه ۱۲) المدخل فی علم النجوم ۱۳) نوادر الاشکال ۱۴) الدور و الوصایا.

بخش اول

فصل دوم

بازه

هدف کلی

یادآوری مفهوم بازه و تکمیل مفهوم‌های وابسته به آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ بازه را تعریف کند.

۲ــ انواع بازه را به‌صورت مجموعه بنویسد.

۳ــ انواع بازه را روی محور اعداد نمایش دهد.

۴ــ اعمال روی بازه‌ها را انجام دهد.

پیش‌آزمون (۲)

۱ــ مجموعه‌ی $\{x \in \mathbb{R} : ۱ \le x \le ۳\}$ را روی محور اعداد نمایش دهید و به‌صورت بازه نیز بنویسید (شکل ۱۶ــ۱).

۲ــ بازه‌ی $[-۳,-۱)$ را روی محور اعداد نمایش دهید (شکل ۱۷ــ۱). این بازه را به‌صورت مجموعه نیز بنویسید.

۳ــ بازه‌ی مربوط به هر محور اعداد را بنویسید (شکل ۱۸ــ۱).

الف) $[\cdots,\cdots)$

ب) $(\cdots,\cdots]$

پ) $[\cdots,\cdots]$

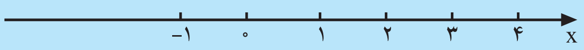
ت) $(\cdots,\cdots)$

۴ــ مجموعه‌ی جواب هر یک از نامعادله‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

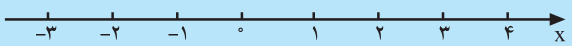
الف) $۰ \le ۳x + ۲ \le ۱$

ب) $-۱ \le \frac{۲x-۱}{۳} \le ۲$

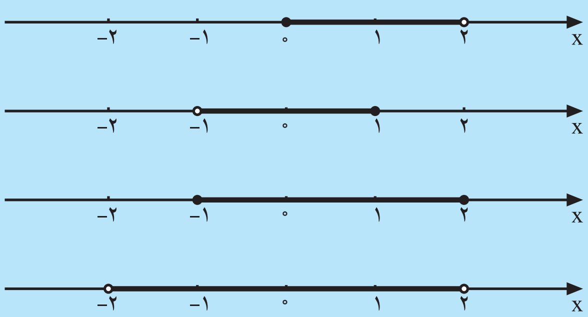
محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون



شکل ۱۶ــ۱



شکل ۱۷ــ۱



شکل ۱۸ــ۱

۲ــ۱ــ بازه

به دماسنج پزشکی نگاه کنید. این دماسنج دماهای $۳۵^\circ C$ تا $۴۲^\circ C$ را اندازه می‌گیرد (شکل ۱۹ــ۱).

بازه‌ی دمایی این دماسنج $[۳۵,۴۲]$ است. توجه داشته باشید که در بازه‌ی بالا، تمام اعداد حقیقی از ۳۵ تا ۴۲، و اعداد ۳۵ و ۴۲، قرار دارند. یعنی،

$$[۳۵,۴۲]=\{x\in \mathbb{R}: ۳۵\le x\le ۴۲\}$$

فعالیت ۵ــ۱

۱) بازه‌ی دمایی دماسنج آزمایشگاهی را بنویسید و آن را با نماد مجموعه نیز نشان دهید (شکل ۱۹ــ۱).

۲) بازه‌ی دمایی دماسنج عقربه‌ای را بنویسید و آن را با نماد مجموعه نیز نشان دهید (شکل ۲۰ــ۱).

۳) به میکروآمپرمتر (گالوانومتر) نگاه کنید (شکل ۲۰ــ۱). بازه‌ی جریان‌های الکتریکی را که این دستگاه اندازه می‌گیرد بنویسید و آن را با مجموعه نیز نمایش دهید.

هر بازه را به سه صورت می‌توان نشان داد:

الف) با استفاده از نماد بازه، برای نمونه، $[۱,۲]$ ؛

ب) با استفاده از نماد مجموعه، برای نمونه، $\{x\in \mathbb{R}: ۱\le x\le ۲\}$ ؛

ج) با استفاده از محور اعداد برای نمونه،

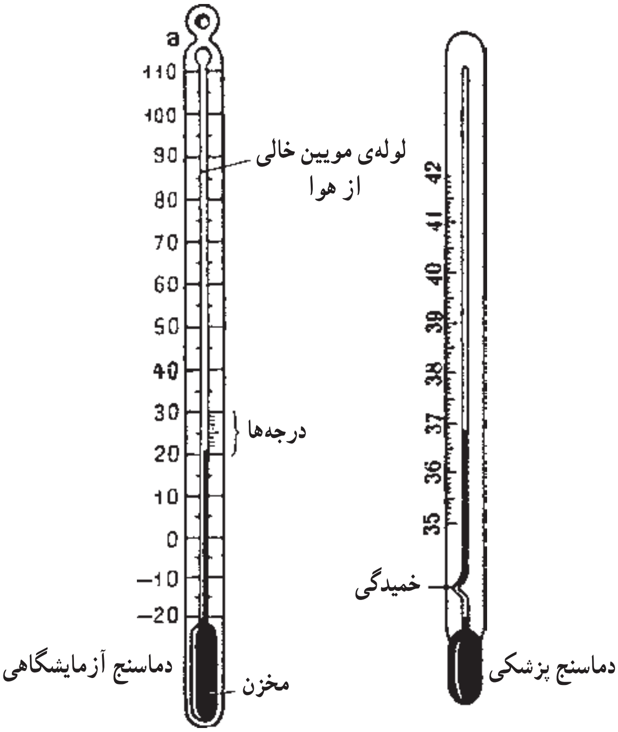
بازه‌ی $[۱,۲]$ را **بازه‌ی بسته‌ی یک و دو** می‌خوانیم؛ زیرا عددهای ۱ و ۲ نیز به این بازه تعلق دارند (شکل ۲۱ــ۱).

نمونه‌های دیگری از بازه را در زیر ملاحظه می‌کنید.

بازه‌ی $(۱,۲)$ را **بازه‌ی باز یک و دو** می‌گوییم. این بازه شامل **تمام اعداد حقیقی بین یک و دو**، به جز یک و دو، است (شکل ۲۲ــ۱).

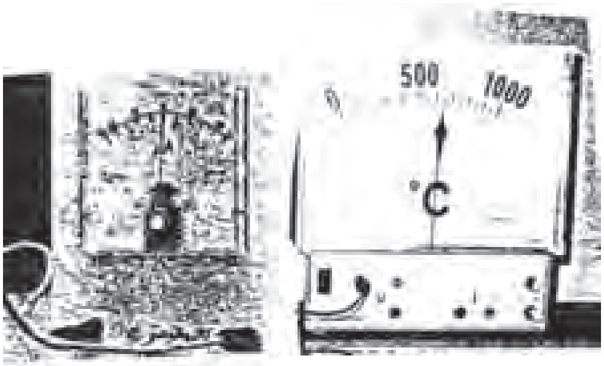
بازه‌ی $[۱,۲)$ را نیم باز از راست می‌گویند (شکل ۲۳ــ۱).

$[۱,۲)$ را بخوانید: **بازه‌ی بسته‌ی یک و باز دو**.



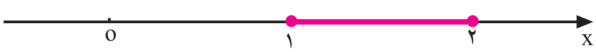
(ب) (الف)

شکل ۱۹ــ۱



(ب) گالوانومتر (الف) دماسنج عقربه‌ای

شکل ۲۰ــ۱

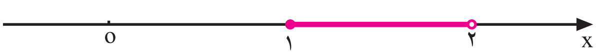


$[۱,۲]=\{x\in \mathbb{R}:\ ۱\le x\le ۲\}$

شکل ۲۱ــ۱

$(۱,۲)=\{x\in \mathbb{R}:\ ۱< x< ۲\}$

شکل ۲۲ــ۱



$[۱,۲)=\{x\in \mathbb{R}:\ ۱\le x< ۲\}$

شکل ۲۳ــ۱

بازه‌ی $(۱,۲]$ را نیم‌باز از چپ گویند. $(۱,۲]$ را بخوانید : **بازه‌ی باز یک و بسته‌ی دو** (شکل ۲۴ـ۱).

$(۱,۲]=\{x\in\mathbb{R}:\ ۱<x\leq ۲\}$

شکل ۲۴ـ۱

کار در کلاس ۲ـ۱

۱) هریک از بازه‌های زیر را به‌صورت مجموعه بنویسید.

$[-۲,۱۰۰)=$

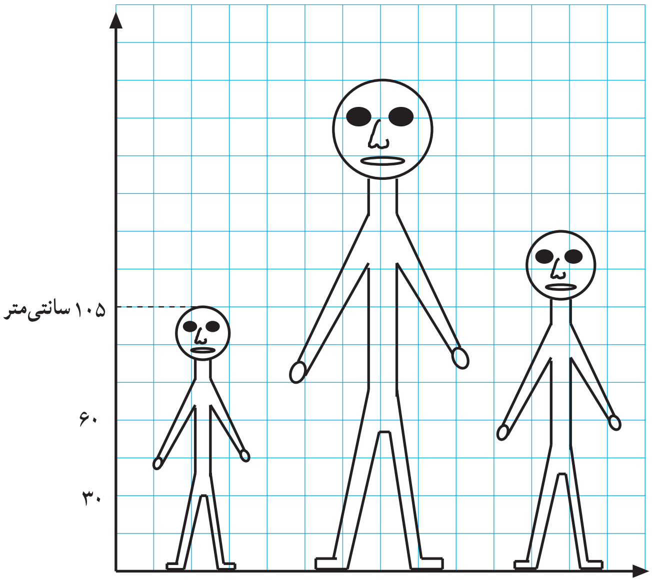
$(۱,\sqrt{۲})=$

$\left[-۱/۵,\dfrac{۳}{۷}\right]=$

۲) مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

$\{x\in\mathbb{R}:-۱<x\leq ۲\}=$

$\left\{x\in\mathbb{R}:\sqrt{۲}\leq x\leq\sqrt{۵}\right\}=$



شکل ۲۵ـ۱

۳) با توجه به یکای شکل ۲۵ـ۱، اندازه‌ی قد آدمک را بنویسید.

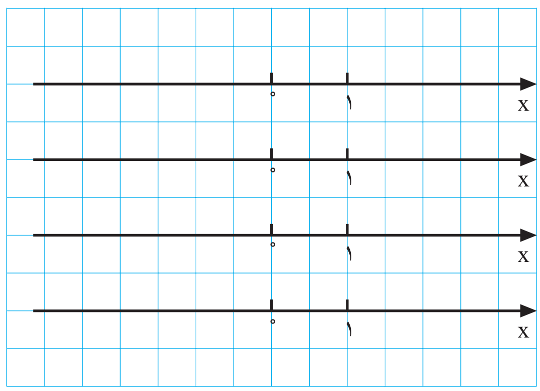
۴) هر بازه را روی محور اعداد نمایش دهید.

$[-۲,۳]$

$[-۳,۰)$

$(۱,۳)$

$(-۱,۲]$



شکل ۲۶ـ۱

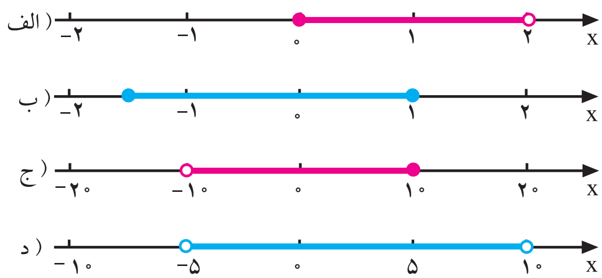
۵) بازه‌ی مربوط به هر شکل را با نماد بازه بنویسید (شکل ۲۷ـ۱).

$[\cdots,\cdots)$

$[\cdots,\cdots]$

$(\cdots,\cdots]$

$(\cdots,\cdots)$

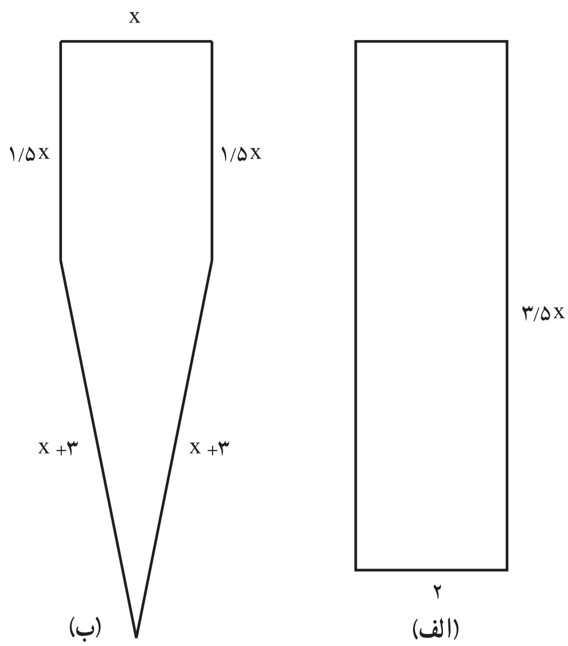


شکل ۲۷ـ۱

تمرین ۲ــ۱

۱) نامعادلهٔ $x^{۲} < ۴$ را در نظر بگیرید. این نامعادله را حل کنید و مجموعهٔ جواب آن را به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نمایش دهید.

۲) شکل‌های زیر داده شده‌اند. حدود x را چنان تعیین کنید که محیط شکل (ب) بیشتر از محیط شکل (الف) باشد (شکل۲۸ــ۱).



شکل ۲۸ــ۱

۳) مجموعهٔ $\{x \in \mathbb{R} : -۱ \leq x < ۲\}$ با کدام بازه برابر است؟

الف) $[-۱,۲]$

ب) $(-۱,۲)$

پ) $[-۱,۲)$

ت) $(-۱,۲]$

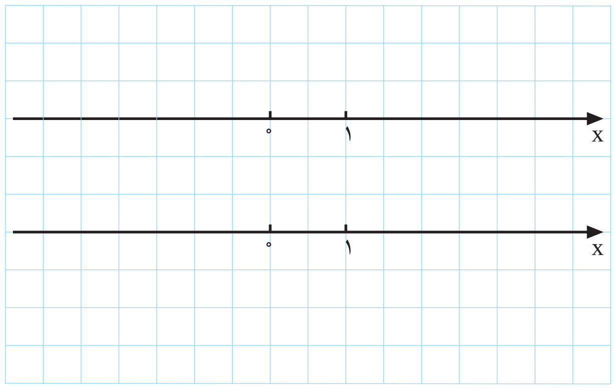
۴) مجموعه‌ی زیر را به‌صورت بازه بنویسید :

$\{x \in \mathbb{R} : -\sqrt{۲} < x \leq ۱/۵\}$ جواب :

۵) بازه‌های زیر را روی محور اعداد نمایش دهید (شکل ۲۹ـ۱).

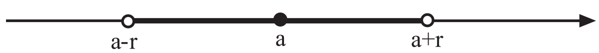
الف) $(-۱,۳]$

ب) $(-۲,۴)$



شکل ۲۹ـ۱

۶) اگر a یک عدد حقیقی و $r > ۰$ آنگاه $(a-r, a+r)$ یک بازه به مرکز a و شعاع r نامیده می‌شود (شکل ۳۰ـ۱).



شکل ۳۰ـ۱

مثلاً، بازه‌ی $(-۱,۳)$ به مرکز $۱ = \frac{-۱+۳}{۲}$ و شعاع $۲ = \frac{۳-(-۱)}{۲}$ است.

در بازه‌های زیر مرکز و شعاع بازه را تعیین کنید.

الف) $(-۲,۰)$

ب) $(-۴,۱)$

پ) $(۱,۵)$

ت) $(\sqrt{۲}, ۲+\sqrt{۲})$

۱ــ۲ــ۱ــ معرفی بینهایت

غروب خورشید در دریا

فعالیت ۶ــ۱

۱) در عبارت‌های زیر واژه‌ی **بینهایت** را توصیف کنید.

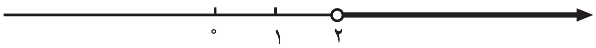
ــ من مادرم را بینهایت دوست دارم ؛

ــ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی بینهایت عدد زوج وجود دارد ؛

ــ در بازه‌ی (۰,۱) بینهایت عدد گویا وجود دارد.

۲) چند عبارت بیان کنید که در آن‌ها واژه‌ی بینهایت به‌کار رفته باشد، سپس منظور خود را از به‌کاربردن این واژه توضیح دهید.

۳) نامعادله‌ی $x > ۲$ را در نظر بگیرید. جواب این نامعادله روی محور اعداد شکل ۳۱ــ۱ مشخص شده است.



شکل ۳۱ــ۱

۴) به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

آیا عدد ۱۰ در معادله‌ی بالا صدق می‌کند؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰ میلیون چطور؟ نقاط متناظر با این اعداد در کدام سمت محور قرار دارند؟

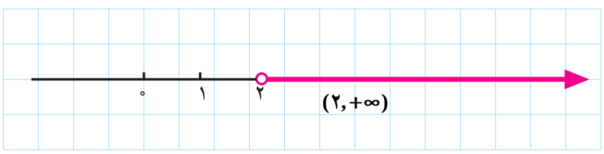
آیا شما، یا یکی از همکلاسی‌های شما، می‌توانید **بزرگ‌ترین عددی** را که در نامعادله صدق می‌کند نام ببرید؟ توضیح دهید چرا؟

ریاضی‌دان‌ها $+\infty$ (بینهایت) را، که نمادی قراردادی است و یک عدد نیست، ابداع کرده‌اند. این نماد بیانگر این مطلب است که **اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد، x از $+\infty$ کوچک‌تر است**. یعنی،

اگر $x \in \mathbb{R}$ آنگاه $x < +\infty$

می‌توان گفت که : $+\infty$ از هر عدد حقیقی مثبت بزرگی، بزرگ‌تر است.

بنابراین، **مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی** $x > ۲$ را می‌توان با بازه‌ی $(۲,+\infty)$ نمایش داد (شکل ۳۲ــ۱).

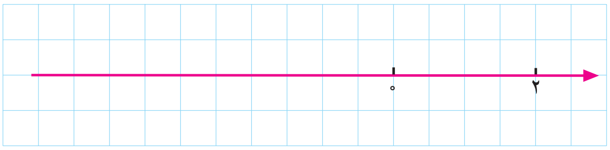


شکل ۳۲ــ۱

فعالیت ۷ــ۱

نامعادله‌ی $x \leq 2$ را در نظر بگیرید.

۱) جواب این نامعادله را روی محور اعداد (شکل ۳۳ــ۱) مشخص کنید.



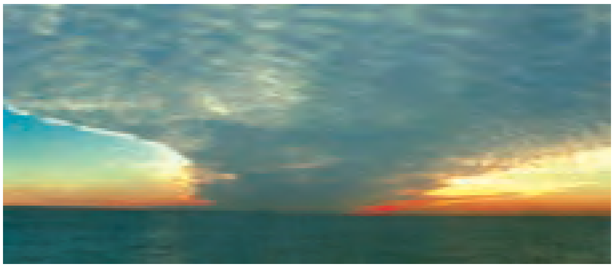
شکل ۳۳ــ۱

۲) آیا عدد ۳− در نامعادله‌ی بالا صدق می‌کند؟

عدد ۵− چطور؟

اعداد ۳− و ۵− را روی یک محور اعداد مشخص کنید.

۳) آیا اعداد ۱۰−، ۱۰۰−، ۱۰۰۰− و ۱۰۰۰۰۰− نیز در این معادله صدق می‌کنند؟



۴) آیا می‌توانید کوچک‌ترین عدد حقیقی را که در این نامعادله صدق می‌کند نام ببرید؟ توضیح دهید چرا؟

مطابق آن‌چه در فعالیت ۶ــ۱ گفته شد، جواب نامعادله‌ی $x \leq 2$ با بازه‌ی $(-\infty, 2]$ نشان داده می‌شود.

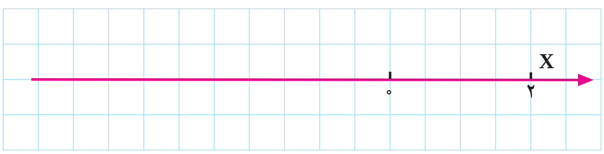
> به‌طورکلی، اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد آنگاه $x > -\infty$. یعنی، هر عدد حقیقی از $-\infty$ (منهای بینهایت) بزرگ‌تر است. می‌توان گفت که: $-\infty$ از هر عدد حقیقی منفی کوچکی، کوچک‌تر است.

بنابراین، اگر x عددی حقیقی باشد آنگاه،

$$-\infty < x < +\infty$$

و درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$



شکل ۳۴ــ۱

یعنی، مجموعه‌ی اعداد حقیقی همان مجموعه‌ی اعداد متعلق به بازه‌ی $(-\infty, +\infty)$ است.

یادآور می‌شویم که $+\infty$ و $-\infty$ **عدد نیستند**، ضمناً به‌جای $+\infty$ از نماد ∞ نیز استفاده می‌شود.

کار در کلاس ۳ــ۱

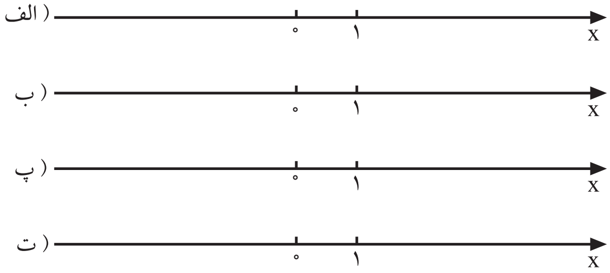
۱) هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید، سپس جواب آن را به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $۲x \le ۵$

ب) $۳x \le ۸$

پ) $۲ - ۴x \le ۶$

ت) $x^{۲} \ge ۰$



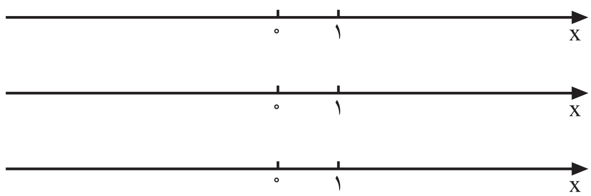
شکل ۳۵ــ۱

۲) مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید و روی محور اعداد نمایش دهید.

$\{x \in \mathbb{R} : x < ۳\}$

$\{x \in \mathbb{R} : \ge -۱\}$

$\{x \in \mathbb{R} : x > ۰\}$



شکل ۳۶ــ۱

۳) مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^{۲} > ۱$ را به‌دست آورید و آن را روی محور اعداد شکل ۳۷ــ۱ نمایش دهید. آیا مجموعه‌ی جواب‌های این نامعادله یک بازه است؟

آیا می‌توان مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $x^{۲} > ۱$ را به کمک بازه‌ها نوشت؟ چگونه؟

شکل ۳۷ــ۱

تمرین ۳ــ۱

۱) هریک از بازه‌های روبه‌رو با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

$$A=\{x\in \mathbb{R}: x\leq ۲\}\quad ,\quad B=\{x\in \mathbb{R}: -۱\leq x<\sqrt{۳}\}$$

$$C=\{x\in \mathbb{R}: x>-۱\}\quad ,\quad D=\{x\in \mathbb{R}: -۲\leq x<۲\}$$

الف) $(-۱,+\infty)$

ب) $[-۲,۲)$

پ) $[-۱,\sqrt{۳})$

ت) $(-\infty,۲]$

۲) هر یک از بازه‌های روبه‌رو را به صورت مجموعه بنویسید.

الف) $(-۲,+\infty)$

ب) $[-۲,\sqrt{۲})$

پ) $[-۴,۳]$

ت) $(-\infty,۵]$

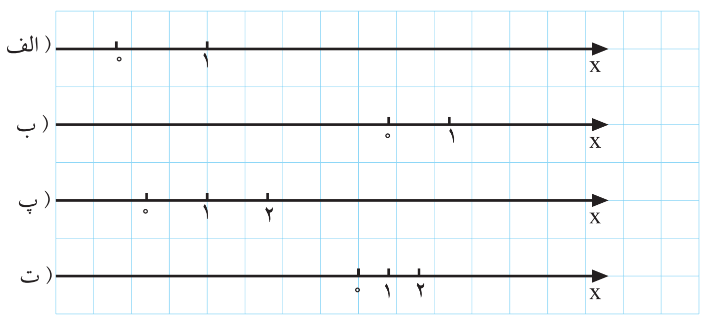
۳) بازه‌های زیر را روی محور اعداد نمایش دهید (شکل ۳۸ــ۱).

الف) $(۱,۴]$

ب) $(-\infty,۱]$

پ) $[۲,+\infty)$

ت) $(-۵,۲)$



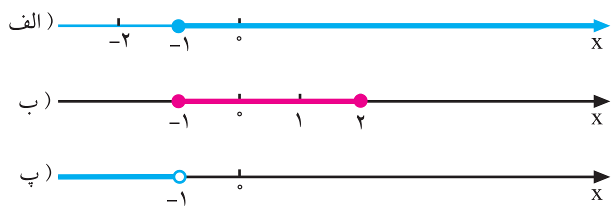
شکل ۳۸ــ۱

۴) مجموعه‌ی نقاطی که روی هر محور نشان داده شده با کدام بازه‌ی مقابل آن برابر است؟ (شکل ۳۹ــ۱)

$(-\infty,-۱]$ ، $[-۱,+\infty)$ ، $[-۲,+\infty)$

$(-۱,۲)$ ، $[-۱,۲]$ ، $[-۱,۲)$

$(-۱,\infty)$ ، $(-\infty,-۱)$ ، $(-\infty,-۱]$



شکل ۳۹ــ۱

۵) هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به‌صورت مجموعه و بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نمایش دهید (شکل ۴۰ــ۱).

الف) $۲x > ۰$

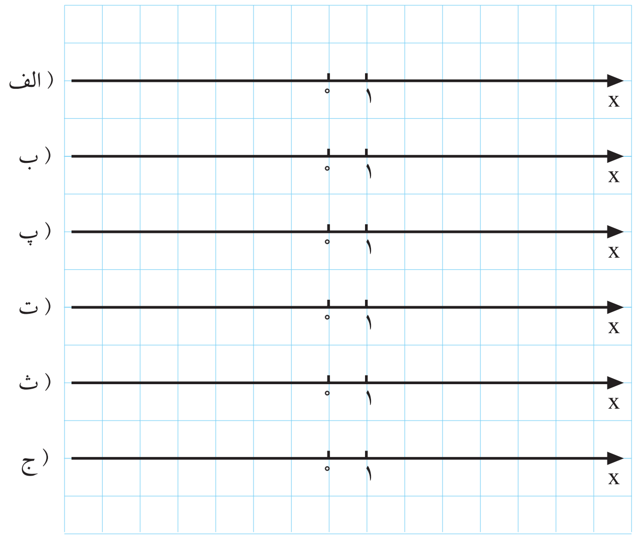
ب) $۳x + ۱ < ۷$

پ) $x^{۲} \leq ۰$

ت) $۲x - ۱ < ۰$

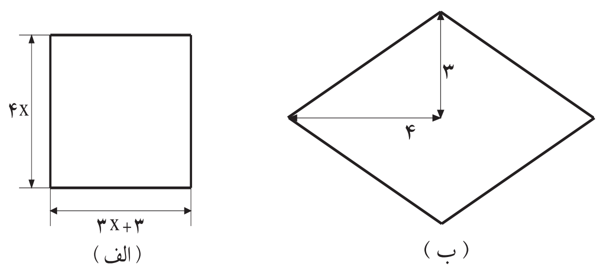
ث) $x^{۲} + ۱ < ۵$

ج) $(x-۱)(x+۲) < ۰$



شکل ۴۰ــ۱

۶) x در چه بازه‌ای باشد تا مساحت شکل (الف) از مساحت شکل (ب) بیشتر باشد؟ (شکل ۴۱ــ۱).



شکل ۴۱ــ۱

۷) می‌خواهیم با استفاده از ۲۷۰۰۰ گرم آلومینیوم با چگالی (جرم واحد حجم) ۲/۷، ورق آلومینیوم بسازیم. درصورتی که ضخامت ورق‌های لازم حداقل ۲ میلی‌متر و حداکثر ۱۰ میلی‌متر باشد، بازه‌ی مساحت ورق‌هایی که می‌توان ساخت تعیین کنید.

۸) هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به صورت بازه بنویسید.

الف) $۳x - ۱ < ۱۱$

ب) $۲ - ۳x \leq ۱۴$

پ) $x^{۲} \leq ۱۶$

۲ـ۲ـ۱ـ عملیات روی بازه‌ها

فعالیت ۸ـ۱

بازه‌های $(۰,۲]$ و $[۱,۴]$ به ترتیب، با رنگ‌های آبی و قرمز، روی محور اعداد روبه‌رو نمایش داده شده‌اند (شکل ۴۲ـ۱).

شکل ۴۲ـ۱

۱) اشتراک این دو بازه را با نماد بازه بنویسید.

$(۰,۲]\cap[۱,۴]=$

۲) اجتماع این دو بازه را با نماد بازه بنویسید.

$(۰,۲]\cup[۱,۴]=$

۳) بازهٔ سمت راست تساوی زیر را بنویسید.

$[۱,۴]-(۰,۲]=$

۴) در جاهای خالی نمادهای مناسب بنویسید.

$[۱,۴] \quad (۰,۲]=(۰,۴]$

$(۰,۲] \quad [۱,۴]=(۰,۱)$

$(۰,۲] \quad [۱,۴]=[۱,۲]$

$(۰,۲] \quad [۱,۴]=(۰,۴]$

فعالیت ۹ـ۱

۱) یک محور اعداد افقی رسم کنید و آن را محور $t'ot$ بنامید.

۲) روی محور $t'ot$ ساعت‌های صفر تا ۲۴ را مشخص کنید.

فرض کنید بیشترین مصرف برق در شهر شما از ساعت ۱۸ تا ۲۳، و بیشترین مصرف آب در شهر شما از ساعت ۱۱ تا ۲۱ باشد.

۳) بازهٔ مصرف برق را روی محور $t'ot$ با رنگ قرمز مشخص کنید.

۴) بازهٔ مصرف آب را روی محور $t'ot$ با رنگ آبی مشخص کنید.

۵) در چه بازه‌ی زمانی مصرف **آب** و **برق**، بیشترین است؟ این بازه را روی شکل مشخص کنید و آن را با نماد بازه نیز بنویسید.

۶) در چه بازه‌ی زمانی میزان مصرف **آب** یا **برق**، بیشترین است؟ این بازه را روی شکل مشخص کنید و آن را با نماد بازه نیز نمایش دهید.

کار در کلاس ۴ــ۱

احمد در ساعت ۸ صبح در شهر تنکابن سوار اتوبوس شد. رضا در ساعت ۱۰ صبح در چالوس سوار همان اتوبوس شد. احمد ساعت ۱۵ :۱۳ در کرج پیاده شد. رضا در ساعت ۳۰ :۱۴ به تهران رسید (شکل ۴۳ــ۱).

۱) بازه‌ی زمانی را که احمد در اتوبوس بوده است، بنویسید. این بازه را A بنامید.

۲) بازه‌ی زمانی را که رضا در اتوبوس بوده است، بنویسید. این بازه را B بنامید.

۳) در چه بازه‌ی زمانی احمد و رضا هر دو در اتوبوس بوده‌اند؟

۴) در چه بازه‌ی زمانی احمد بدون رضا در اتوبوس بوده است؟

۵) در چه بازه‌ی زمانی رضا بدون احمد در اتوبوس بوده است؟

۶) پاسخ قسمت‌های (۳)، (۴) و (۵) را با استفاده از اعمال بازه‌ها (مجموعه‌ها) بنویسید.

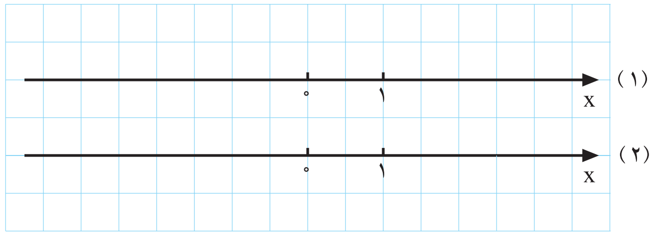
شکل ۴۳ــ۱

تمرین ۴ـــ۱

۱) مجموعه جواب نامعادله‌های

(۱) $۲x < ۳$

(۲) $۳ - ۴x \leq ۴$



شکل ۴۴ـــ۱

را، به‌ترتیب، با بازه‌های C و D نمایش دهید، سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید. (می‌توانید از محور اعداد کمک بگیرید.)

الف) بازه‌های C و D را به‌دست آورید. D= C=

ب) در چه بازه‌ای هر دو نامعادله برقرار است؟

پ) در چه بازه‌ای فقط نامعادله‌ی (۲) برقرار است؟

ت) در چه بازه‌ای فقط نامعادله‌ی (۱) برقرار است؟

ث) در چه بازه‌ای حداقل یکی از دو نامعادله برقرار است؟

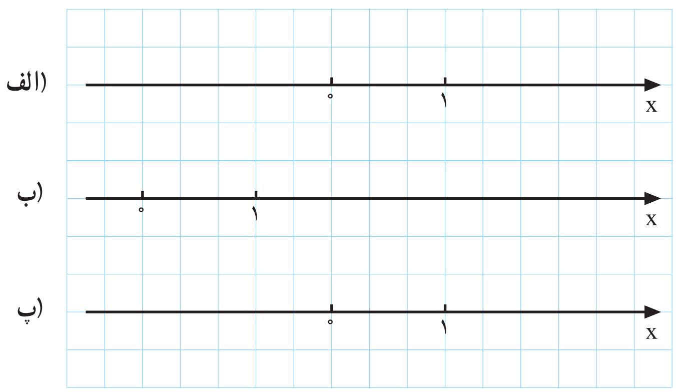
ج) در چه بازه‌ای نامعادله‌ی (۱) برقرار نیست؟

۲) اجتماع و اشتراک هر جفت از بازه‌های زیر را تعیین کنید. (راهنمایی : از محور اعداد کمک بگیرید.)

الف) $[۰,۲]\ ,\ [۰,۱)$

ب) $[-۱,۳)\ ,\ (۰,۴]$

پ) $[-۲,۱]\ ,\ [۱,۳)$



شکل ۴۵ـــ۱

۳) اگر $A=[-۱,۲]$ و $B=(۰,۳]$ بازه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $A\cup B$ ب) $A\cap B$ پ) $A-B$ ت) $B-A$

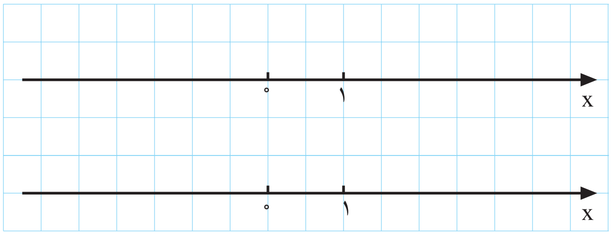
۴) اگر داشته باشیم :

$A=\{x\in\mathbb{R} : x>۱\}$

$B=\{x\in\mathbb{R} : x\leq ۴\}$

الف) این مجموعه‌ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

ب) مجموعه‌های $A-B$ و $B-A$ را روی محور اعداد نمایش دهید.



شکل ۴۶ـ۱

پ) $A\cap B$ کدام بازه است؟

الف) $(۱,۴)$

ب) $[۱,۴)$

پ) $(۱,۴]$

ت) $[۱,۴]$

ت) $A\cup B$ کدام بازه است؟

الف) $(۱,۴]$

ب) $\mathbb{R}$

پ) $[۴,+\infty)$

ت) $(-\infty,۱)$

دهه‌ی ریاضیات

هر سال از اول آبان ماه تا دهم آبان ماه ***دهه‌ی ریاضیات*** نام دارد.

آزمون پایانی (۲)

۱ــ هریک از مجموعه‌های زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

$A=\{x\in\mathbb{R}:-۲\leq x<۴\}$

$B=\left\{x\in\mathbb{R}:\frac{۱}{۲}<x\leq\frac{۳}{۵}\right\}$

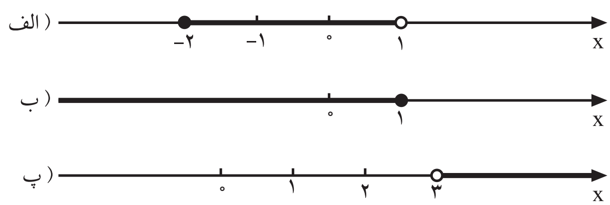
۲ــ هریک از بازه‌های زیر را به‌صورت مجموعه بنویسید و روی محور اعداد نیز نمایش دهید.

الف) $[-۴,۵]$

ب) $(-\frac{۳}{۲},\frac{۷}{۲})$

پ) $[-۱,\frac{۵}{۲})$

۳ــ بازه‌ی مشخص شده روی هر محور را بنویسید.



۴ــ شکل‌های روبه‌رو داده شده‌اند. حدود x را چنان بیابید که محیط شکل (الف) از محیط شکل (پ) بیشتر و از محیط شکل (ب) کمتر باشد (شکل ۴۷ــ۱).

۵ــ هریک از بازه‌های $(۲,+\infty)$، $(-\infty,۳)$، $[۲,+\infty)$ و $(-\infty,۳]$ با کدام یک از مجموعه‌های زیر برابرند؟

$A=\{x\in\mathbb{R}:x\geq ۲\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}:x<۳\}$

$C=\{x\in\mathbb{R}:x\leq ۳\}$, $D=\{x\in\mathbb{R}:x>۲\}$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

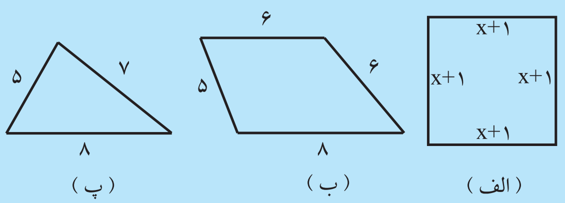
A=

B=

الف)

ب)

پ)



شکل ۴۷ــ۱

A=

B=

C=

D=

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۶ــ هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به‌صورت مجموعه و بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نشان دهید.

الف) $-۲x+۵>۰$

ب) $\frac{x+۱}{۳}>\frac{۱}{۲}$

پ) $\frac{x+۲}{۲}-\frac{x}{۳}<۰$

ت) $۴x^{۲}<۹$

۷ــ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $۳x-۶<۰$ را A و مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $-۲x+۱\leq ۰$ را با B نشان دهید. سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) مجموعه‌های A و B را با نماد بازه بنویسید.

ب) اشتراک بازه‌های به‌دست آمده را تعیین کنید.

پ) اجتماع بازه‌های به‌دست آمده را تعیین کنید.

۸ــ اجتماع و اشتراک هر جفت از بازه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $(۲,+\infty)\ ,\ [-۲,۴]$

ب) $[-۳,۵]\ ,\ [۱,۶)$

پ) $(-\infty,۱)\ ,\ (۲,+\infty)$

بخش اول

فصل سوم

تابع

هدف کلی

تعمیق مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ تابع را تعریف کند.

۲ــ تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد.

۳ــ تابع را از روی نمودار تشخیص دهد.

۴ــ دامنه‌ی تابع را تعیین کند.

۵ــ برد تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.

۶ــ نمودار تابع‌های مثلثاتی $\sin x$ و $\cos x$ را رسم کند.

پیش‌آزمون (۳)

۱ــ کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟

الف) $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳)\}$

ب) $g=\{(۱,۲),(۳,۲),(۵,۲)\}$

پ) $h=\{(-۱,۲),(-۲,۳),(-۳,۴),(۵,۱)\}$

۲ــ کدام یک از شکل‌های روبه‌رو نمایش یک تابع است؟ (شکل ۴۸ــ۱).

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x^۳, & x\geq ۰ \\ -x^۲, & x<۰ \end{cases}$$

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) مقدارهای $f(-۲)$ ، $f(۳)$ و $f(۰)$ را حساب کنید.

۴ــ اگر $f(-۱)=۰$ ، $f(-۲)=-۱$ ، $f(-۳)=-۲$ و $f(۰)=-۱$ ، تابع f را به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

۵ــ تابع f به‌صورت زیر داده شده است.

$$f=\{(-۱,۰),(۲,۳),(۱,-۱),(۳,۲)\}$$

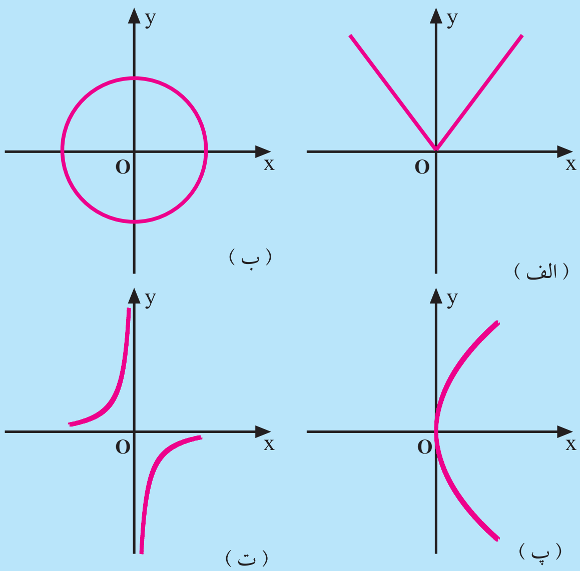
مطلوب است تعیین $f(-۱)$ ، $f(۲)$ و $f(۳)$.

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^۲+x+۱$ داده شده است. مطلوب است محاسبه‌ی :

$$f(۲)\ ,f(-x),\ f(۳x)$$

$$f(\sqrt{x}),\ f(x-۱)$$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل۴۸ــ۱

۷ــ تابع $f(x)=2\sin x$ و نقطه‌ی $m\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{6}\\ a+2\end{matrix}\right.$ داده شده است. مقدار a را چنان بیابید که این نقطه روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد.

۸ــ تابع $y=a\sin x+b\cos x$ داده شده است. مقدار a و b را طوری تعیین کنید که نمودار این تابع از دو نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{2}\\ 2\end{matrix}\right.$ بگذرد.

۹ــ کدام یک از رابطه‌های زیر ضابطه‌ی یک تابع است؟

الف) $2x+y=7$

ب) $x+y^2-2=0$

پ) $y+2x^2-x=1$

۱۰ــ اطلاعات جدول زیر را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید. آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

x	۳	۴	۵	۶	۷
y	۲	۵	۱-	۲	۲

۱۱ــ مقدار هریک از تابع‌های زیر را به‌ازای xهای مشخص شده تعیین کنید (شکل ۴۹ــ۱).

الف) $f(x)=-2x^2+x+3,\ x=-1,\frac{1}{4},2$

ب) $g(x)=\frac{3x}{x-2},x=-1,\frac{1}{2},3$

پ) $h(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6}),x=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\pi.$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

الف)

x	-1	$\frac{1}{4}$	2
f(x)			

ب)

x	-1	$\frac{1}{2}$	3
g(x)			

پ)

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	π
h(x)			

شکل ۴۹ــ۱

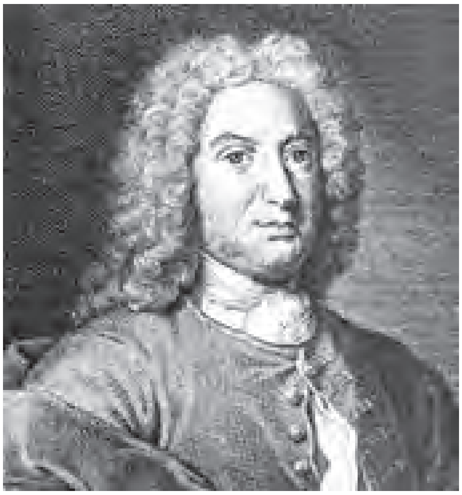
خواندنی

ظاهراً واژه‌ی تابع[۱] را اولین بار لایب نیتز[۲]، در سال ۱۶۹۴ به‌عنوان کمیتی وابسته به یک نمودار به‌کار برده است. در سال ۱۷۱۸ یوهان برنولی[۳] یک تابع را به‌صورت عبارت‌هایی متشکل از چند ثابت و یک متغیر درنظر گرفت. بعداً در همین قرن اویلر[۴] تابع را به‌عنوان معادله‌ای تشکیل یافته از ثابت‌ها و متغیرها بررسی کرد. اویلر به‌طور وسیعی از نماد بسیار پراهمیت $f(x)$ استفاده می‌کرد.

تعریف تابع که تا به امروز مورد استفاده قرار می‌گیرد توسط دیریکله[۵] (۱۸۵۹ـ۱۸۰۵) فرمول‌بندی شده است. او می‌گوید : اگر دو متغیر x و y چنان به‌هم مربوط باشند که برای هر مقدار x **فقط یک مقدار** y به‌دست آید آنگاه y تابعی از x نامیده می‌شود. او x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته نامید، مقادیر y به مقادیری که به x نسبت داده می‌شود وابسته است. او مقادیر x را **دامنه‌ی تابع** و مقادیر y متناظر با آن‌ها را **برد تابع** نامید.

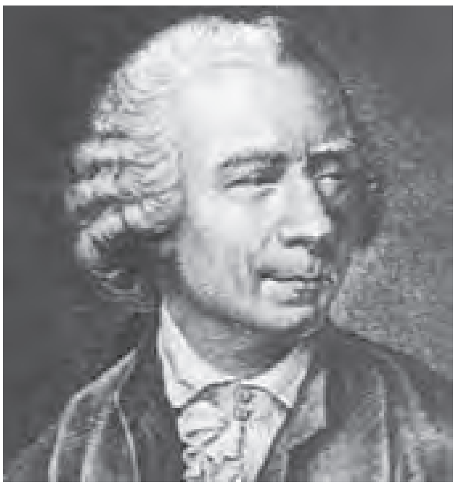
پس از بیان مفهوم مجموعه، تابع با مجموعه‌ای از **زوج‌های مرتب**[۶] نیز بیان شد. [۲]

گاتفرید لایب نیتز (۱۷۱۶ـ ۱۶۴۶)



یوهان برنولی(۱۷۴۸ـ ۱۶۶۷)

گوستاو دیریکله (۱۸۵۹ـ ۱۸۰۵)



اویلر(۱۷۸۳ـ ۱۷۰۷)

۱) Function　۲) Leibnitz　۳) Johann Bernoulli

۴) Euler　۵) Dirichlet　۶) Ordered pairs

۳ــ۱ــ تابع

یکی از مفاهیم مهم در ریاضیات، مفهوم تابع است. در اکثر امور روزمره با تابع سر و کار داریم. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص نمودن تابع با ضابطه، با جدول و با نمودار، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱ــ۳ــ۱ــ تابع با ضابطه: برای تغییر ولتاژ (اختلاف پتانسیل) از ترانسفورمر استفاده می‌شود.

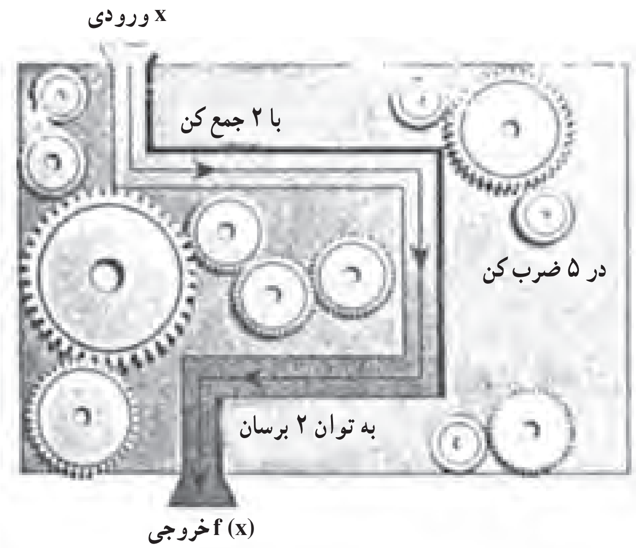
ارتباط بین $V_۱$ و $V_۲$ با رابطه‌ی (۱) بیان می‌شود که در آن a عددی ثابت است. رابطه‌ی (۱) نشان می‌دهد که ولتاژ خروجی **تابع** ولتاژ ورودی است. رابطه‌ی (۱) را **ضابطه‌ی** این تابع می‌گویند. در رابطه‌ی (۱) ثابت a به نوع ترانسفورمر بستگی دارد. با داشتن مقدار ولتاژ ورودی ($V_۱$) و مقدار ولتاژ خروجی ($V_۲$) می‌توان a را به‌دست آورد.

مثلاً، اگر $a=۰/۰۵$ و $V_۱$ مساوی ۲۳۰ ولت باشد داریم :

$$V_۲=aV_۱ \Rightarrow V_۲=۰/۰۵\times ۲۳۰=۱۱/۵ \text{ ولت}$$

و اگر $V_۲$ مساوی ۱۰ ولت باشد آنگاه :

$$۱۰=۰/۰۵\times V_۱ \Rightarrow V_۱=\frac{۱۰}{۰/۰۵}=۲۰۰ \text{ ولت}$$



شکل ۵۰ــ۱

ولتاژ ورودی $V_۱ \Rightarrow \boxed{\text{ترانسفورمر}} \Rightarrow V_۲$ ولتاژ خروجی

$$V_۲=aV_۱ \qquad (۱)$$

کار در کلاس ۵ــ۱

۱) جدول ۱ــ۱ برای یک ترانسفورمر داده شده است.

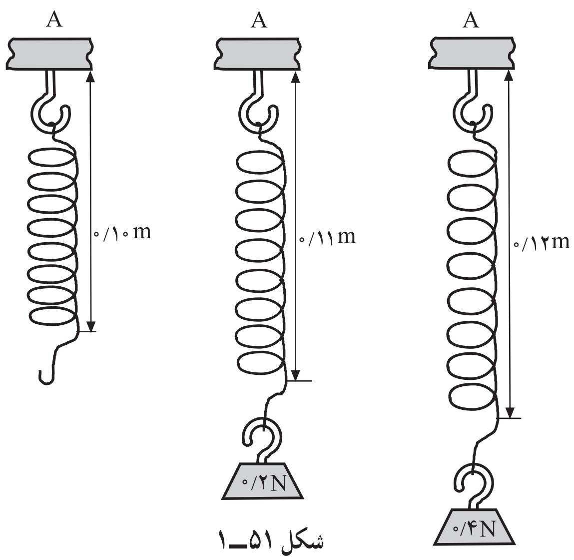
الف) با استفاده از جدول، عدد ثابت a را، از رابطه‌ی (۱)، به‌دست آورید.

ب) با استفاده از قسمت (الف) جدول را کامل کنید.

جدول ۱ــ۱

$V_۱$	۱۹۰	۲۰۰	۲۲۰		۲۴۰
$V_۲$	۱۹			۲۳	۲۴

۲) یک سَرِ فنری به طول ۰/۱۰ متر به نقطه‌ی A بسته شده است (شکل ۵۱ــ۱). با آویختن وزنه‌های متفاوت به انتهای فنر، طول فنر مطابق جدول ۲ــ۱، تغییر کرده است. وزن وزنه را با W و طول فنر را با L نشان می‌دهیم.



شکل ۵۱ــ۱

الف) با توجه به شکل ۵۱ـ۱ یا جدول ۲ـ۱، ملاحظه می‌کنید که L تابع W است. آیا ضابطه‌ی این تابع به‌صورت روبه‌رو است؟ تحقیق کنید.

ب) با توجه به این ضابطه، جدول ۲ـ۱ را کامل کنید.

جدول ۲ـ۱

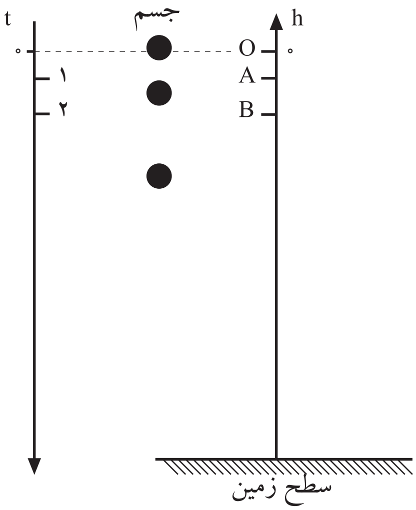
W	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۰/۹	۱
L	۰/۱۰	۰/۱۱	۰/۱۲		۰/۱۴		۰/۱۵

$$L = ۰/۱۰ + ۰/۰۵W$$

۳) گلوله‌ای از ارتفاع ۱۲۵ متری رها می‌شود (سقوط آزاد) (شکل ۵۲ـ۱). می‌دانید اگر فاصله‌ی یک نقطه از سطح زمین را با h و لحظه‌ی رسیدن به آن نقطه را با t نشان دهیم، رابطه‌ی زیر بین h و t برقرار است.

$$h = -\frac{۱}{۲}gt^{۲}$$

در این رابطه نقطه‌ی آغاز حرکت را مبدأ مختصات گرفته‌ایم $(t = ۰, h = ۰)$ و $g \cong ۱۰\frac{m}{s^{۲}}$ است.



شکل ۵۲ـ۱

جدول ۳ـ۱ مکان جسم را در لحظه‌های متفاوت نشان می‌دهد. شکل ۵۲ـ۱ نیز راهنمای جدول ۳ـ۱ است.

الف) جدول و شکل را کامل کنید.

ب) گلوله پس از چند **ثانیه** به سطح زمین برخورد می‌کند؟

پ) در چه لحظه‌ای فاصله‌ی گلوله از نقطه‌ی رها شده ۸۰ متر است؟

جدول ۳ـ۱

نقطه	t	h
O	۰	۰
A	۱	۵-
B	۲	۲۰-
C	۳	
D	۴	
E	۵	۱۲۵-

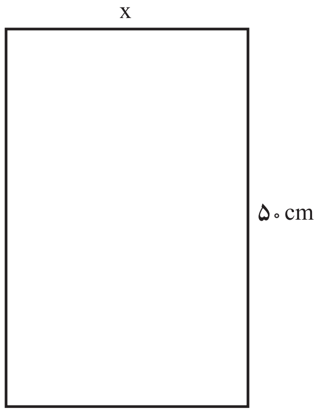
تمرین ۵ ــ ۱

۱) شکل ۵۳ ــ ۱ یک ورق آلومینیوم به شکل مستطیل، به طول ۵۰ سانتی‌متر و عرض x سانتی‌متر را نشان می‌دهد. واضح است که مساحت و محیط این ورق تابعی از متغیر x است.

الف) اگر S(x) مساحت این ورق باشد فرمول S(x) را بنویسید.

ب) اگر p(x) محیط این ورق باشد فرمول p(x) را بنویسید.

پ) با توجه به این که x اندازه‌ی عرض یک مستطیل است، حدود تغییرات x را تعیین کنید.



شکل ۵۳ ــ ۱

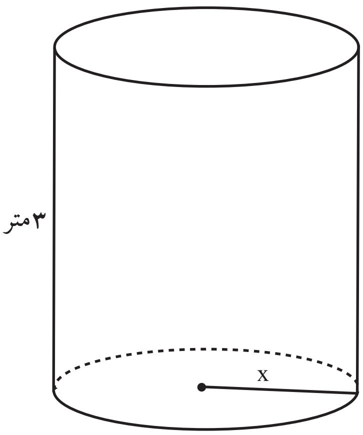
۲) نرخ کرایه‌ی نوعی اتومبیل، برای هر کیلومتر طی مسافت، ۱۵۰ ریال، به اضافه‌ی ورودی ثابت ۴۰/۰۰۰ ریال است. کرایه‌ی اتومبیل تابعی از x، یعنی مسافت طی شده، برحسب کیلومتر، است. ضابطه‌ی این تابع را بنویسید (شکل ۵۴ ــ ۱).


شکل ۵۴ ــ ۱

۳) می‌دانید که سطح جانبی و حجم استوانه به شعاع قاعده و ارتفاع آن بستگی دارد. فرض کنید ارتفاع استوانه‌ای ۳ متر و شعاع قاعده‌ی آن x متر باشد (شکل ۵۵ ــ ۱).

الف) اگر S(x) سطح جانبی این استوانه باشد ضابطه‌ی S(x) را بنویسید.

ب) اگر V(x) حجم این استوانه باشد فرمول V(x) را بنویسید.



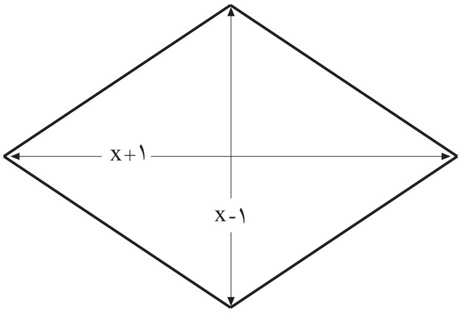
شکل ۵۵ ــ ۱

۴) قطرهای یک لوزی به ترتیب $x+۱$ و $x-۱$ متر هستند (شکل ۵۶ــ۱).

الف) اگر f(x) مساحت این لوزی باشد ضابطه‌ی f(x) را بنویسید.

ب) با توجه به شکل روبه‌رو، حدود تغییرات x را تعیین کنید.

پ) نمودارتابع $y=f(x)$ را رسم کنید.



شکل ۵۶ ــ ۱

۲ــ۳ــ۱ــ تابع با جدول: می‌دانید که دمای بدن بیمار، با توجه به وضع روحی و جسمی او، به زمان بستگی دارد. جدول ۴ــ۱ دمای بدن بیماری را در ساعت‌های معین نشان می‌دهد.

آیا رابطه‌ای برای بیان دمای بدن (θ) این بیمار در لحظه‌های مختلف (t) وجود دارد؟ چرا؟ به عبارت دیگر، θ تابعی از t است، آیا این تابع ضابطه دارد؟

این مثال، نمونه‌ای از یک تابع است که با جدول مشخص شده و ضابطه ندارد (این تابع را با مثال فنر و وزنه مقایسه کنید).

جدول ۵ــ۱ دمای هوای شهری را در ساعت‌های مختلف یک روز نشان می‌دهد.

الف) آیا می‌توانید بگویید دمای هوای این شهر در ساعت ۲۰ یا ۲۳ چقدر بوده است؟

ب) آیا می‌توانید رابطه‌ی بین دما و زمان را با یک فرمول بیان کنید؟ چرا؟

ج) آیا دمای این شهر در یک لحظه می‌تواند دو عدد متفاوت باشد؟

جدول ۴ــ۱

t	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲
θ	۳۸/۵	۳۹	۳۹/۱	۳۹/۴	۳۹	۳۹/۸	۴۰

جدول ۵ــ۱

t	۵	۷	۹	۱۱	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸
θ	۱۲	۱۴	۲۱/۵	۲۸	۳۰/۵	۳۴/۵	۳۱	۲۷/۵

کار در کلاس ۶ــ۱

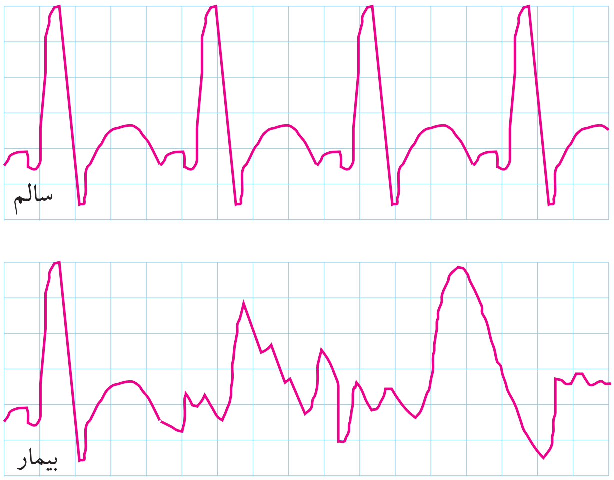
معلم گرامی

چنانچه به تفصیل در کتاب راهنمای معلم ریاضی(۳) پودمانی آمده است دانش‌آموزان را به گروه‌های چند نفری تقسیم کنید سپس با نظارت خود، کار در کلاس‌ها و فعالیت‌ها را توسط گروه‌ها انجام دهید.

هر گروه با همفکری اعضای خود حداقل دو تابع که با جدول قابل بیان است پیدا کند. (ممکن است گروه‌های متفاوت تابع‌های یکسان به‌دست آورند.) چه نتیجه‌ای از این کار گروهی عاید شد؟

۳ــ۳ــ۱ــ تابع با نمودار: حتماً دیده‌اید که ادارات، وزارتخانه‌ها و نهادهای مختلف برای نشان دادن نتایج فعالیت‌های خود از نمودار استفاده می‌کنند. نمونه‌ای از تابع‌ها که با نمودار نشان داده می‌شوند، عبارت‌اند از :

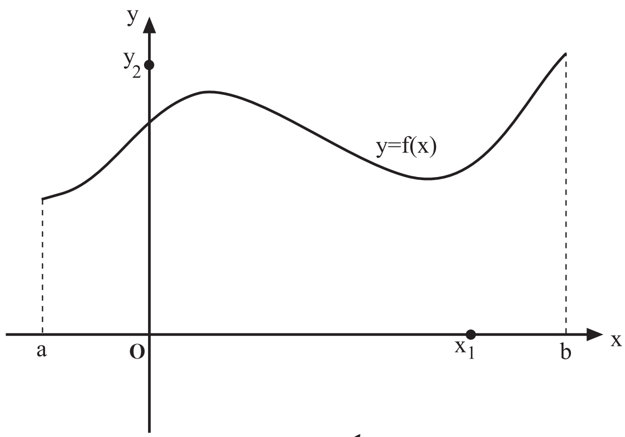
نمودار مربوط به تولید گندم (برنج، سیب‌زمینی، نفت، گاز و…) در مدتی معین. مثلاً، ضربان قلب تابعی از زمان است و پزشک از روی نمودار به سادگی می‌تواند قلب سالم و ناسالم را مشخص کند (شکل ۵۷ــ۱). این کار غالباً با نگاه به ضابطه‌ی تابع، عملی نیست!



شکل ۵۷ــ۱

در شکل ۵۸ــ۱ نمودار تابع $y = f(x)$ را ملاحظه می‌کنید.

> ویژگی اصلی تابع، که نمودار آن نیز باید این ویژگی را داشته باشد، آن است که به ازای هر x از دامنه‌ی تابع فقط یک y حاصل شود. یعنی، هر خط موازی محور yها نمودار $y = f(x)$ را **حداکثر در یک نقطه** قطع کند.



شکل ۵۸ــ۱

آیا در مورد نمودار شکل ۵۸ــ۱ این ویژگی برقرار است؟

توضیح دهید که $f(x_1)$ چگونه به‌دست می‌آید.

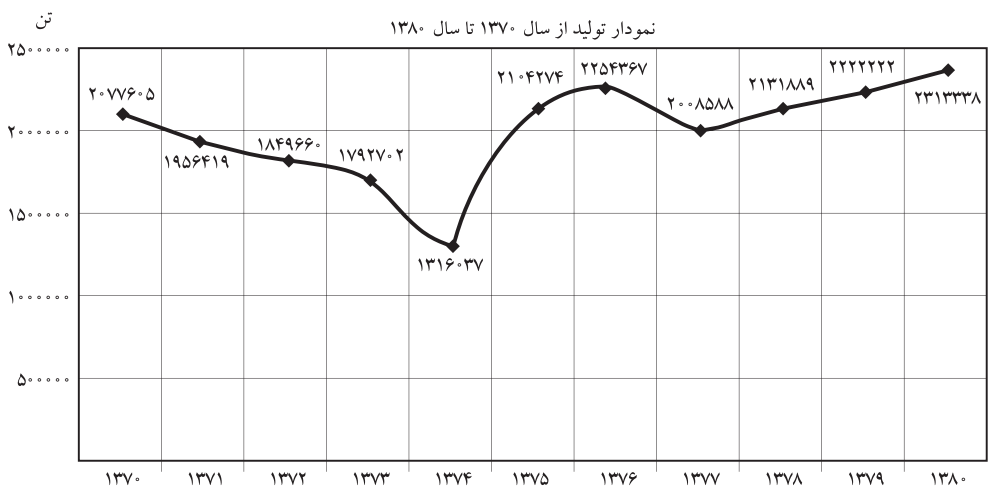
نحوه‌ی به‌دست آوردن x_2 را، به‌طوری که $y_2 = f(x_2)$، شرح دهید.

کمترین و بیشترین مقدار y در چه نقاطی اتفاق می‌افتد؟

آیا همیشه همین‌طور است؟ مثال بیاورید.

ذوب آهن اصفهان

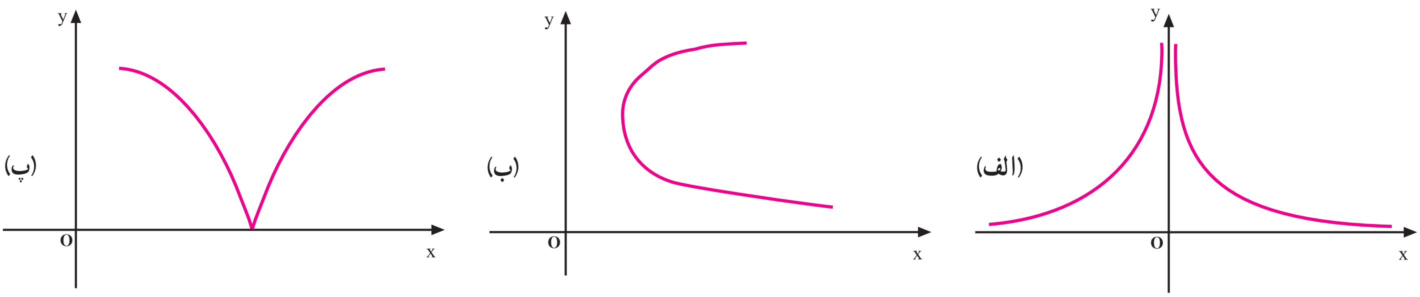
نمودار تولید از سال ۱۳۷۰ تا سال ۱۳۸۰



کار در کلاس ۷ــ۱

از نمودارهای مقابل، کدام معرّف یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۵۹ ــ۱).

شما نیز چند نمودارکه معرف تابع باشند رسم کنید.

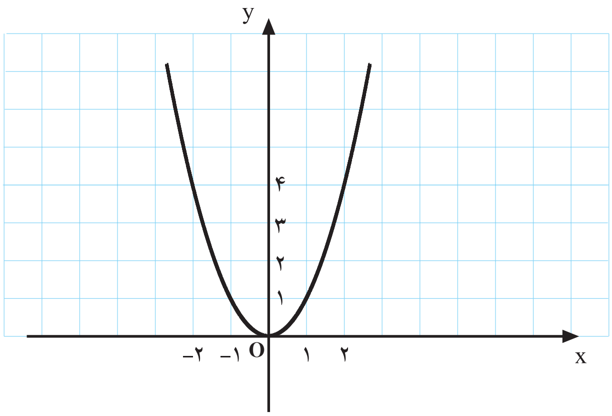


شکل ۵۹ ــ۱

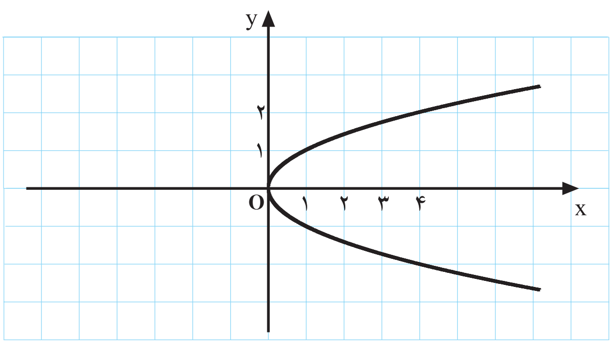
۴ــ۳ــ۱ــ تعریف تابع: اگر x و y چنان به هم مربوط باشند که برای هر مقدار x فقط یک مقدار برای y به‌دست آید، y را تابع x می‌نامیم. طبق این تعریف تنها مقدار متناظر با x را با f(x) نشان می‌دهند و این وابستگی را چنین می‌نویسند :

(بخوانید : y مساوی اف اِیکس است) $y = f(x)$

و منظور آن است که «y تابعی از x است». معمولاً x را متغیر مستقل و y را تابعِ x می‌نامند. باید توجه داشت که f(x) معمولاً یک عبارت جبری است که مقدار y را به ازای x تعیین می‌کند. f(x) را **فرمول** یا **ضابطه‌ی** تابع نامند. از نماد f(x) معلوم می‌شود که متغیر، x و تابع، f است.

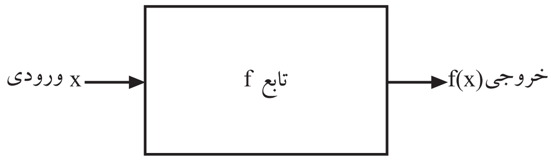


شکل ۶۰ ــ۱ــ نمودار $y = x^2$. این نمودار یک تابع مشخص می‌کند.



شکل ۶۱ ــ۱ــ نمودار $y^2 = x$.این نمودار یک تابع مشخص نمی‌کند. چرا؟

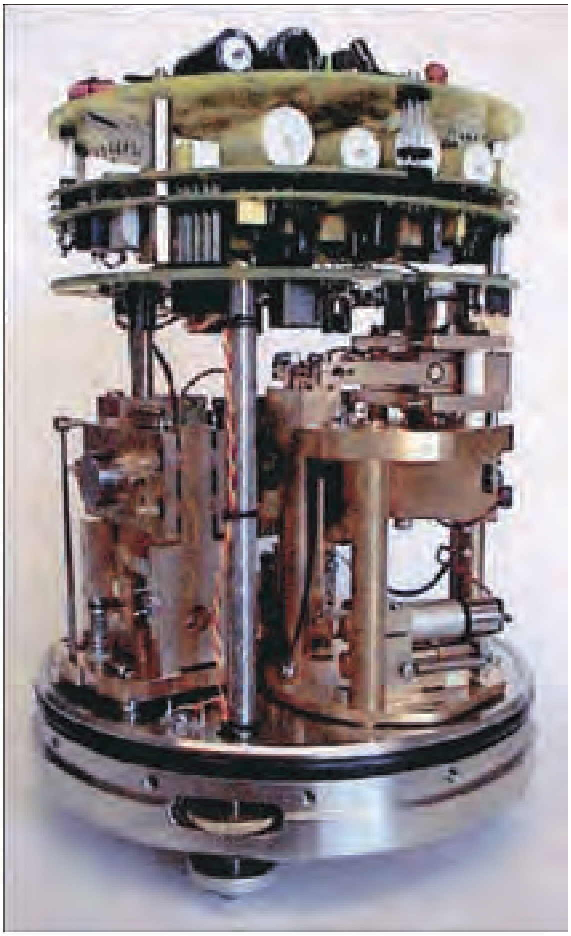
نکته‌ی ۱: در مسائل مختلف ممکن است برحسب ضرورت متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود. مثلاً، $h(t)=-\frac{۱}{۲}gt^{۲}$ که در آن t متغیر است و h تابع.



شکل ۶۲ـــ۱

نکته‌ی ۲: همان‌طور که می‌دانید تابع‌های زیادی وجود دارند که دارای ضابطه نیستند. مثلِ تابع دمای هوا در لحظه‌های مختلف روز.

نکته‌ی ۳: همچنین می‌دانید که دستگاه‌هایی وجود دارند که با تغییر یک متغیر، نمودار تغییرات تابع را ثبت می‌کنند. برای چنین تابع‌هایی نیز ممکن است نتوانیم ضابطه‌ای تعیین کنیم (مثلاً دستگاه زلزله نگار) (شکل ۶۳ ـــ۱).



شکل ۶۳ـــ۱

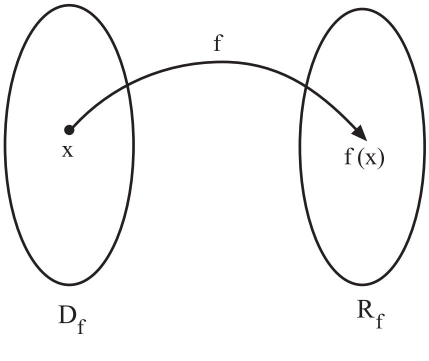
> در تابع f مجموعه‌ی مقادیر x را **دامنه‌ی تابع** f (D_f) و مجموعه‌ی مقادیر y را **برد تابع** f (R_f) می‌نامند.

در مثال فنر، دامنه و برد تابع مربوط به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$D_f=\{۰,۰/۲,۰/۴,۰/۶,۰/۸,۰/۹,۱\}$$

$$R_f=\{۰/۱۰,۰/۱۱,۰/۱۲,۰/۱۳,۰/۱۴,۰/۱۵\}$$

در حقیقت f دستگاهی است که x را به‌عنوان **ورودی** دریافت می‌کند و f(x) را به‌عنوان **خروجی** تحویل می‌دهد (شکل ۶۴ ـــ۱).



شکل ۶۴ـــ۱

به این ترتیب تابع f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از **زوج‌های مرتب**، یعنی، ((x,f(x)) نشان داد.

در مثال فنر، تابع مربوط را می‌توان با مجموعه‌ی زوج‌های مرتب زیر نیز نمایش داد.

$$f=\{(۰,۰/۱۰),(۰/۲,۰/۱۱),(۰/۴,۰/۱۲),(۰/۶,۰/۱۳)$$
$$(۰/۸\ ,۰/۱۴),(۰/۹\ ,۰/۱۴۵),(۰/۱,۰/۱۵\}.$$

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نوشت:

$$f=\{(x,f(x)):x\in D_f\},$$

$$R_f=\{f(x):x\in D_f\}.$$

تابع‌ها را می‌توان به چهار شکل مختلف یعنی فرمول (ضابطه)، جدول، مجموعه‌ی زوج‌های مرتب و نمودار، نشان داد. در هر مورد از شکلی که مناسب‌تر است استفاده کنید و بدانید که هر چهار شکل نمایش تابع معتبر است.

کار در کلاس ۸ـ۱

۱) فرض کنید، $f(x)=۶x-۲$ و $D_f=\{-۱,-\frac{۱}{۲},۰,۱,۲\}$.

الف) f را با جدول مشخص کنید (جدول ۶ـ۱).

ب) R_f را بنویسید.

ج) f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

راهنمایی: $f(x)$ را به ازای xهای متعلق به D_f حساب کنید.

۲) دامنه و برد تابع‌های f و g را بنویسید و مقدار تابع را در نقطه‌ای که مشخص شده، از روی شکل ۶۵ـ۱، معین کنید.

$D_f=$

$R_f=$

$f(۳)=$

$D_g=$

$R_g=$

$g(۲)=$

۳) تابع f با نمودار شکل ۶۶ـ۱ مشخص شده است.

الف) D_f و R_f را بنویسید.

ب) با توجه به نمودار $f(۱)$ و $f(۵)$ را بنویسید.

پ) اگر $f(x)=۹$ مقدار x چیست؟

ت) اگر $f(x)=۴$ مقدار x چیست؟

ث) کمترین مقدار تابع دربازه‌ی $[۱,۱۰]$ چیست؟

ج) بیشترین مقدار تابع دربازه‌ی $[۱,۱۰]$ چیست؟

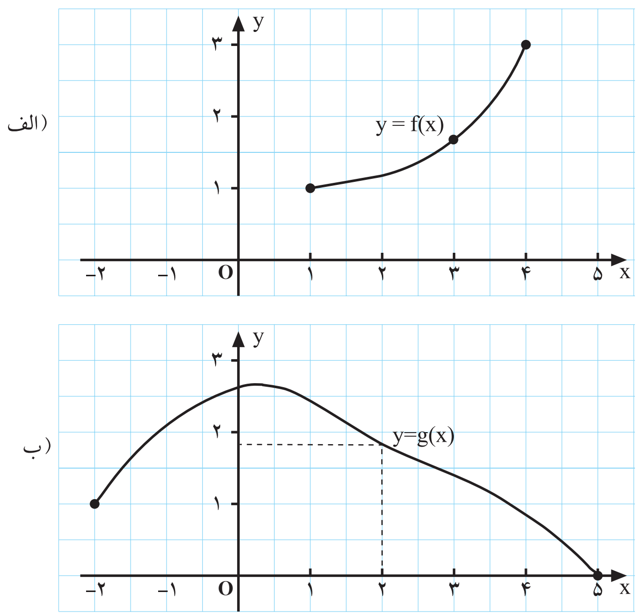
در این کتاب با تابع‌هایی سروکار داریم که به ازای هر x از دامنه‌ی آن‌ها $f(x)$ عددی حقیقی است. به عبارت دیگر، $R_f \subseteq \mathbb{R}$. در این صورت تابع f را یک **تابع حقیقی** می‌گویند.

جدول ۶ـ۱

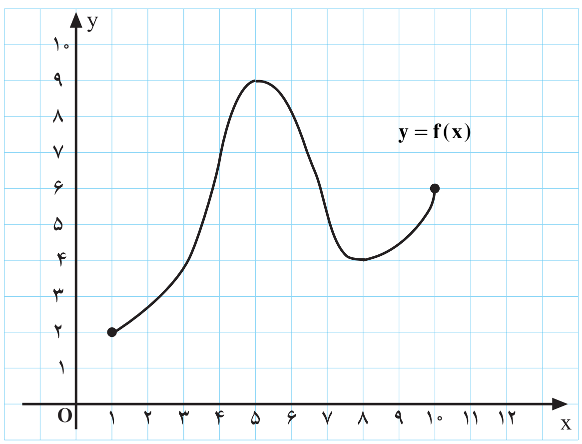
x	-۱	
f(x)	-۸	

$R_f=\{-۸,$

$f=\{(-۱,-۸),$



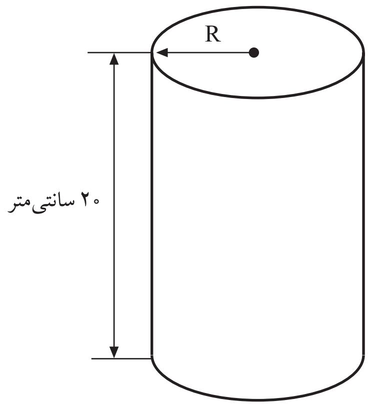
شکل ۶۵ـ۱



شکل ۶۶ـ۱

تمرین ۶ــ۱

۱) ارتفاع استوانه‌ای ۲۰ سانتی‌متر است ($h = ۲۰cm$) (شکل ۶۷ ــ۱). می‌دانید که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی R از رابطه‌ی $V = \pi R^۲ h$ حساب می‌شود. اگر R بین ۸ تا ۱۲ سانتی‌متر تغییر کند حجم این استوانه بین چه مقادیری تغییر می‌کند؟



شکل ۶۷ ــ۱

۲) فرض کنید $h(x) = x^۲$ و $t(x) = x$ و دامنه‌ی هر دو تابع بازه‌ی $[۰,۱]$ باشد.

الف) نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید ؛ (شکل ۶۸ ــ۱) ؛

ب) برد تابع h را تعیین کنید ؛

$R_h =$

پ) برد تابع t چیست؟

$R_t =$

ت) آیا دو تابع h و t برابرند؟ چرا؟

شکل ۶۸ ــ۱

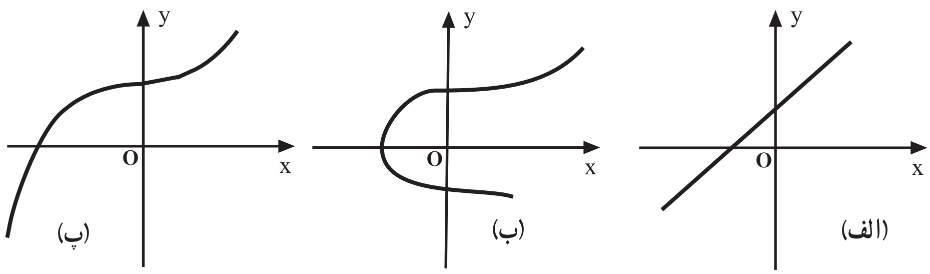
تساوی دو تابع: دو تابع وقتی با هم برابرند که دامنه‌ی یکسان داشته باشند و به ازای هر عضو از دامنه مقدار دو تابع برابر باشند.

۳) کدام نمودار مربوط به یک تابع است؟ توضیح دهید (شکل ۶۹ ــ ۱).

الف)

ب)

پ)



شکل ۶۹ ــ ۱

۴) نشان دهید که هیچ‌یک از رابطه‌های زیر، بین x و y، یک تابع مشخص نمی‌کنند.

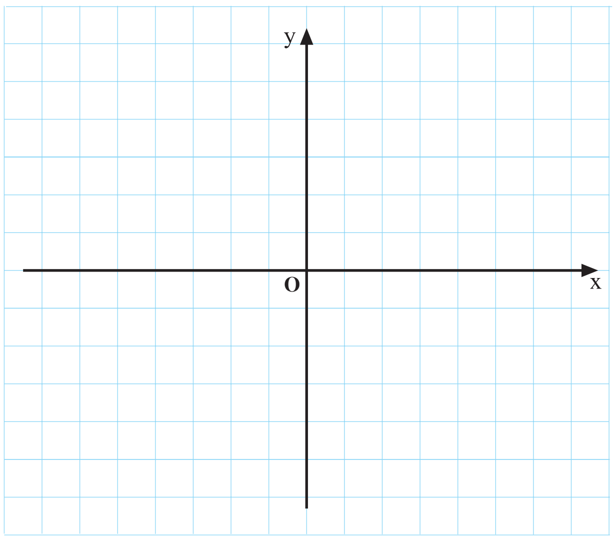
الف) $x+y^{۲}=۴$

ب) $|y|=x+۱$

پ) $y^{۲}=x$

۵) تابع $y=x^{۲}-۱$ مفروض است.

الف) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۷۰ ــ ۱).



شکل ۷۰ ــ ۱

ب) آیا نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}۳\\۸\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع است؟

پ) اگر نقطه‌ی $B\left|\begin{matrix}۱\\b\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع باشد b چیست؟

ت) عدد a را چنان تعیین کنید که نقطه‌ی $C\left|\begin{matrix}a\\-۱\end{matrix}\right.$ روی نمودار تابع فوق باشد.

ث) آیا نقطه‌ی $D\left|\begin{matrix}\sqrt{۳}\\۱\end{matrix}\right.$ روی نمودار این تابع قرار دارد؟

۶) فرض کنید $f(x)=x^{۲}-۲x$. جدول ۷ــ۱ را کامل کنید و بعد نمودار $y=f(x)$ را در دفتر خود رسم کنید.

جدول ۷ــ۱

x	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳
f(x)						

۷) تابع f به صورت زیر تعریف شده است. جدول ۸ ــ ۱ را کامل و سپس نمودار تابع را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۲x-۱, & x<۱\\ x^{۲}, & x\geq ۱\end{cases}$$

جدول ۸ــ۱

x	f(x)
−۱	
۰	
۱	
۲	
۳	

۸) در زیر چند تابع با ضابطه داده شده‌اند، مقدار آن‌ها را در نقاط مشخص شده حساب کنید.

الف) $f(x)=x^{۲}-x+\frac{۱}{۲}$ ، $x=۰,\frac{\pi}{۲}$

ب) $g(x)=۳x^{۲}-x$ ، $x=-۱,۱$

پ) $h(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ ، $x=-۲,۰/۵$

$f(۰)=\quad , \quad f(\frac{\pi}{۲})=$

$g(-۱)=\quad , \quad g(۱)=$

$h(-۲)=\quad , \quad h(۰/۵)=$

۹) تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۲}-x$ تعریف شده است. مقادیر زیر را حساب کنید. (h عددی حقیقی است.)

$f(۳)\ ,\ f(۳+h)\ ,\ f(۳+h)-f(۳)$

$f(۳)=$

$f(۳+h)=$

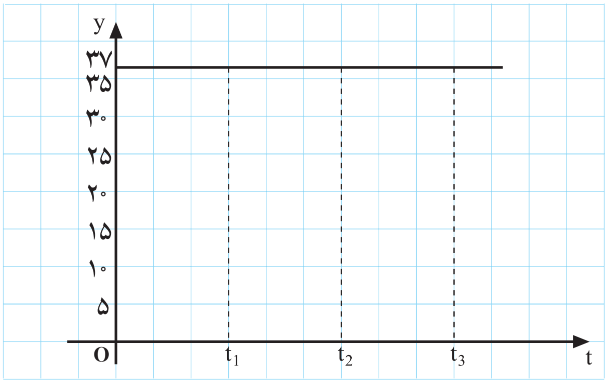
$f(۳+h)-f(۳)=$

۵ــ۳ــ۱ــ چند تابع ویژه

ـــ *تابع ثابت:* دمای بدن یک انسان سالم همواره چند درجه‌ی سلسیوس(سانتی‌گراد) است؟ اگر f(t) دمای بدن این شخص در زمان t باشد داریم :

$f(t)=۳۷,$

این تابع که به ازای هر t دارای مقدار ثابت ۳۷ است **تابع ثابت** نامیده می‌شود. نمودار این تابع را در شکل ۷۱ــ۱ ملاحظه می‌کنید.



شکل ۷۱ــ۱

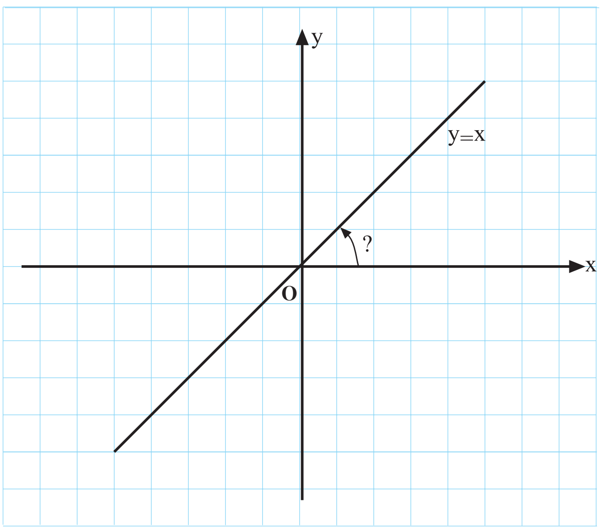
شما نیز چند تابع ثابت مثال بزنید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

> اگر به ازای هر x از دامنه‌ی تابع f، $f(x)=c$ که $c\in\mathbb{R}$ ، f را تابع ثابت گویند.

ـــ *تابع همانی:* یک شیء در فاصله‌ی x جلوی آینه‌ای تخت قرار دارد. فاصله‌ی تصویر این شیء تا آینه چقدر است؟ (شکل ۷۲ــ۱). اگر f(x) فاصله‌ی شیء تا آینه باشد.

$f(x)=x$

این نمونه‌ای از یک **تابع همانی** است.

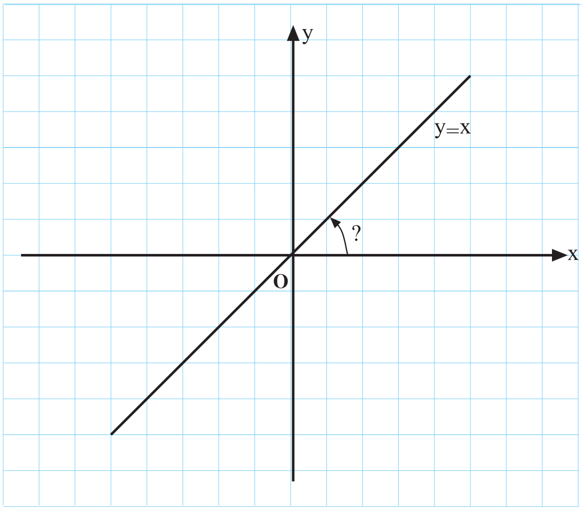


شکل ۷۲ــ۱

> اگر به ازای هر x از دامنه‌ی f، $f(x)=x$ ، f را تابع همانی گویند.

نمودار تابع همانی را در شکل ۷۳ــ۱ می‌بینید. زاویه‌ی نمودار تابع همانی با محور ox چند درجه است؟

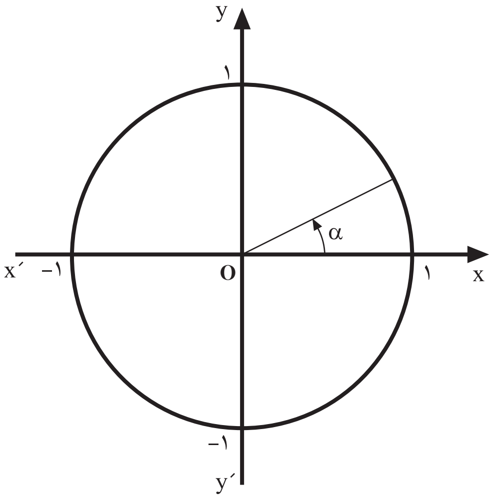
در حالت کلی،نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم دستگاه مختصات است.



شکل ۷۳ــ۱

ــ *تابع‌های مثلثاتی:*

در شکل ۷۴ــ۱ دایره‌ی مثلثاتی رسم شده و زاویه‌ی α مشخص شده است.



شکل ۷۴ــ۱

الف) این دایره‌ی مثلثاتی چه ویژگی‌هایی دارد؟

ب) نقطه‌های مربوط به $\pi+\alpha$ و $۲\pi+\alpha$ را روی این دایره مشخص کنید.

پ) مقدار $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ را به ترتیب، روی محور $y'oy$ و محور $x'ox$ مشخص کنید.

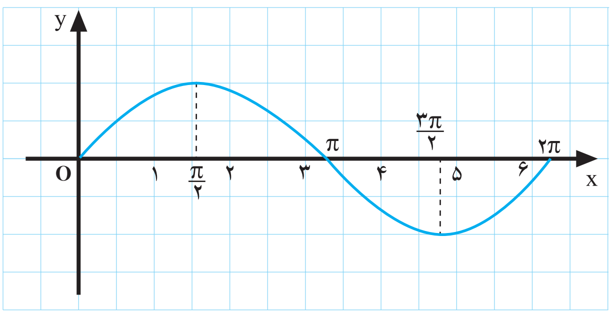
ت) وقتی α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ (یعنی ۹۰°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

ث) وقتی α از $\frac{\pi}{۲}$ تا π (یعنی ۱۸۰°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

ج) وقتی α از ۰ تا ۱۸۰° تغییر می‌کند $\cos\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

چ) وقتی α از $\frac{\pi}{۲}$ تا $\frac{۳\pi}{۲}$ (یعنی ۲۷۰°) تغییر می‌کند $\sin\alpha$ چگونه تغییر می‌کند؟

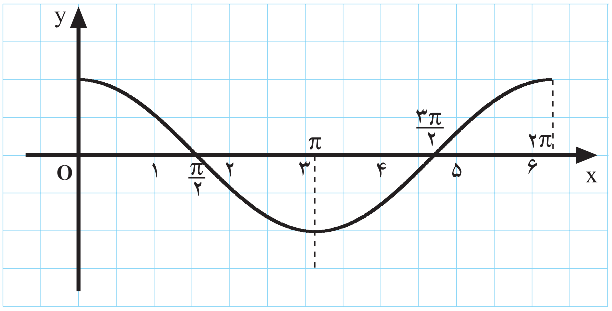
ح) با توجه به آنچه در قسمت‌های قبل ملاحظه شد، نمودار تابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم شده‌اند(شکل‌های ۷۵ــ۱ و ۷۶ــ۱).



شکل ۷۵ــ۱ــ نمودار تابع $y=\sin x$

خ) با توجه به این که برای هر α، $\sin(\alpha+۲\pi)=\sin\alpha$، نمودار $y=\sin x$ را در بازه‌ی $[۲\pi,۴\pi]$ رسم کنید.

د) با توجه به این که برای هر α ، $\cos(\alpha+۲\pi)=\cos\alpha$ ، نمودار $y=\cos x$ را در بازه‌ی $[۲\pi,۴\pi]$ رسم کنید.



شکل ۷۶ــ۱ــ نمودار تابع $y=\cos x$

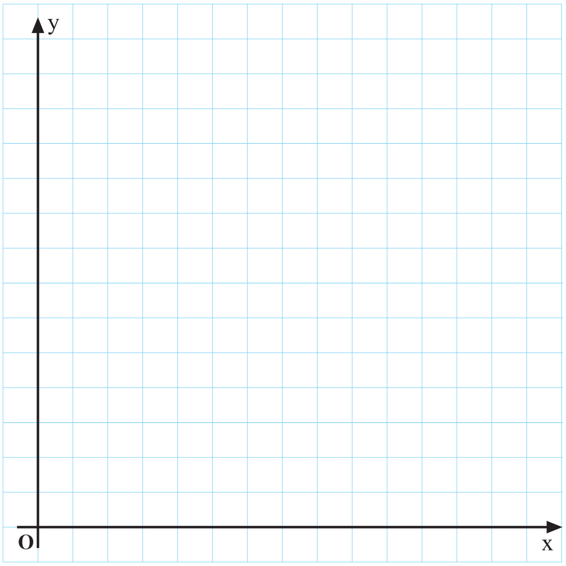
تمرین ۷ــ۱

۱) تابع $y=f(x)$ چنین تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x, & ۰<x\leq ۵ \\ ۲x, & ۵<x\leq ۷ \\ \frac{۳}{۲}x, & ۷<x\leq ۱۰ \end{cases}$$

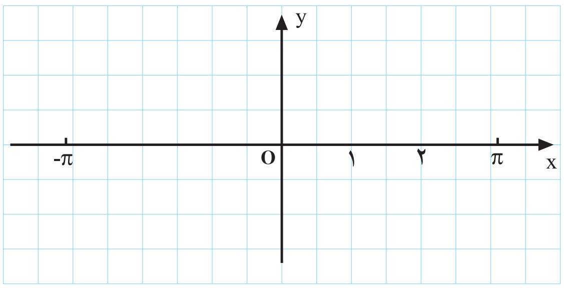
الف) دامنه‌ی این تابع را بنویسید ؛

ب) نمودار این تابع را رسم کنید (شکل ۷۷ــ۱).



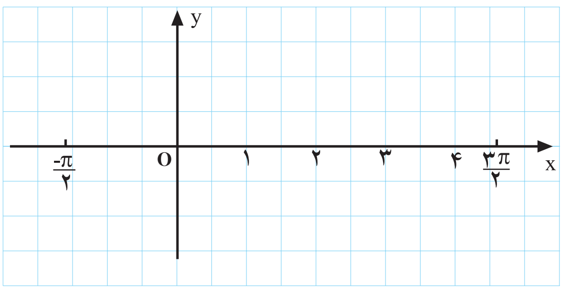
شکل ۷۷ــ۱

۲) نمودار تابع $y=\sin x$ را در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم کنید (شکل۷۸ــ۱).



شکل ۷۸ــ۱

۳) نمودار تـابـع $y=\cos x$ را در بازه‌ی $\left[-\frac{\pi}{۲},۳\frac{\pi}{۲}\right]$ رسم کنید (شکل۷۹ــ۱).



شکل ۷۹ــ۱

آزمون پایانی (۳)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x-۱$ و $D_f=\{۰,۱,۵\}$ است.

الف) این تابع را با مجموعه زوج‌های مرتب نمایش دهید.

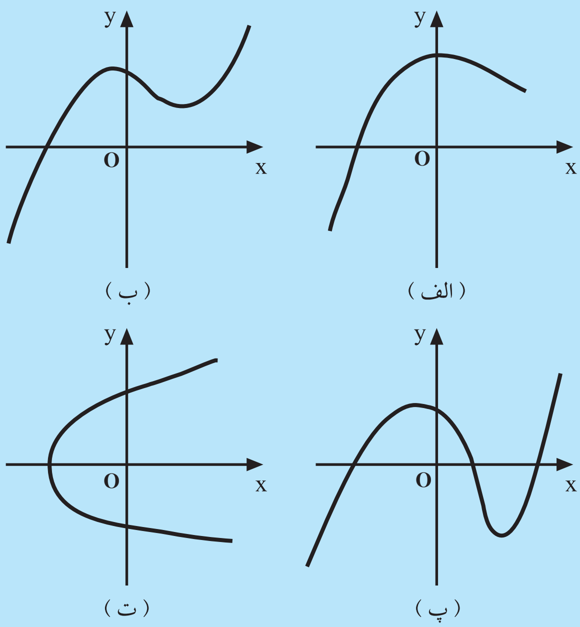
ب) این تابع را با جدول نمایش دهید.

پ) نمودار این تابع را تعیین کنید.

۲ــ تابع مربوط به دمای محل سکونت خود را در ساعت‌های ۶، ۱۰، ۱۴، ۱۸ و ۲۲ مشخص کنید. آیا می‌توانید برای این تابع ضابطه به‌دست آورید؟

۳ــ کدام یک از نمودارهای شکل ۸۰ــ۱ یک تابع را مشخص می‌کند؟

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۸۰ــ۱

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

ابوجعفر محمدبن موسی خوارزمی از نوابغ دنیا و مفاخر ایران و اسلام است. وی در قرن دوم هجری به دنیا آمد و در حدود سال **۲۳۲** هجری زندگی را بدرود گفت. معروف‌ترین اثر خوارزمی کتاب جبر و مقابله است که یکی از مشهورترین و رایج‌ترین کتاب‌های علمی در دنیا بوده است. واژه جبر نخستین بار در کتاب المختصر فی حساب الجبر و المقابله تألیف محمدبن موسی خوارزمی به کار رفت و پس از آشنایی اروپاییان با این کتاب به زبان‌های دیگر راه یافت. این واژه (الجبر) از ریشه جَبَرَ در عربی گرفته شده است که به معنای شکسته‌بندی است. خوارزمی آن را بر عمل افزودن جمله‌های مساوی بر دو سوی یک معادله، برای حذف جمله‌های منفی اطلاق می‌کند. واژه مقابله نیز در کتاب خوارزمی به معنای حذف مقدار مساوی از دو طرف معادله است. از نظر خوارزمی جبر، روش بیان عملیات جبری بود. در آن زمان از نمادهایی مانند x و y استفاده نمی‌شد و به جای آن واژه‌هایی مخصوص به کار می‌بردند و مسأله و روش حل آن را با واژه‌ها شرح می‌دادند. واژه‌های جبری خوارزمی عبارت بودند از شیء (مقدار مجهول یا x)، مال (توان دوم مقدار مجهول یا $x^۲$) و عدد یا درهم نیز با مقدار معلوم متناظر بود.

خوارزمی، دو کتاب نیز درباره‌ی اسطرلاب نوشت. یکی عمل الاسطرلاب که درباره‌ی چگونگی ساختن اسطرلاب بود و دیگری العمل بالاسطرلاب که درباره چگونگی به کار بردن آن بود. کتاب الرخامه درباره ساعت آفتابی افقی و تعیین اوقات نمازها از دیگر آثار او بود. او گفته «تصمیم دارم که اگر عمرم کفاف دهد، تمام تاریخ این دوره را ثبت کنم، چون نوشتن تاریخ خیلی مهم‌تر از کارهای دیگر است». پس از ترجمه‌ی آثار خوارزمی به لاتین بزرگ‌ترین تأثیر را داشته‌اند. نام خوارزمی مرادف شد با هر کتابی که درباره‌ی حساب جدید نوشته می‌شد و اصطلاح الگوریتم که در زبان‌های فرانسوی و انگلیسی به معنی روش و قوانین محاسبه است از نام «الخوارزمی» گرفته شده است. کتاب جبر و مقابله خوارزمی توسط شادروان دکتر غلامحسین مصاحب به فارسی برگردانده شده است.

بخش اول

فصل چهارم

دامنه‌ی تابع‌های حقیقی

هدف کلی

تعیین دامنه‌ی تابع‌هایی که برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ دامنه‌ی تابع‌های چندجمله‌ای را تعیین کند.

۲ــ دامنه‌ی تابع‌های رادیکالی را مشخص کند.

۳ــ دامنه‌ی تابع‌های کسری را تعیین کند.

۴ــ دامنه‌ی تابع‌های مربوط به مدل ریاضی مسائل را تعیین کند.

پیش‌آزمون (۴)

۱ــ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف) $۲x-۵$

ب) $-۳x+۶$

پ) $(x-۲)(۳+x)$

ت) $x^{۲}-۴$

ث) $-x^{۲}-۲x+۳$

ج) $x^{۲}+x+۱$

چ) $\frac{x+۱}{x-۳}$

ح) $\frac{x^{۲}+۱}{x^{۲}-x-۲}$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $-۲x+۳>۰$

ب) $x^{۲}-x-۲>۰$

پ) $\frac{x+۲}{x+۱}<۰$

ت) $\frac{x}{x-۱}<۲$

ث) $x^{۲}-۴<۰$

۳ــ هریک از عبارت‌های زیر به ازای چه مقدارهایی از x معین (تعریف شده) می‌باشند؟

الف) $\frac{۱}{x-۲}$

ب) $\sqrt{۲-x}$

پ) $\frac{۲}{x^{۲}-x-۲}$

ت) $\sqrt{x^{۲}-x-۶}$

۴ــ دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

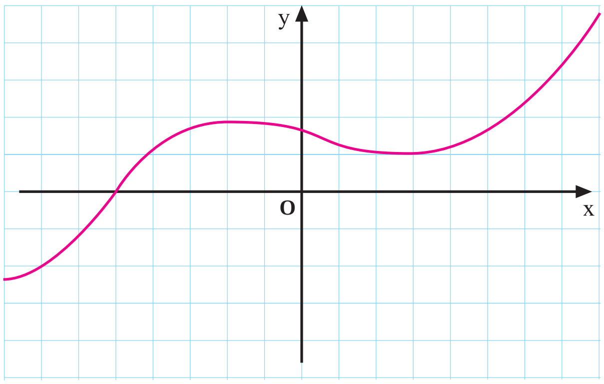
الف) $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$

ب) $g(x)=\sqrt{۴-x^{۲}}$

پ) $h(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۲}}$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۴ــ۱ــ دامنه‌ی تابع‌های حقیقی



اگر دامنه‌ی یک تابع حقیقی، مثلاً تابع f ، مشخص نشده باشد، دامنه‌ی f مجموعه‌ی تمام عددهای حقیقی x است که به ازای آن‌ها f(x) تعریف شده حقیقی است. معمولاً اگر f یک تابع حقیقی باشد می‌نویسند :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to f(x)$$

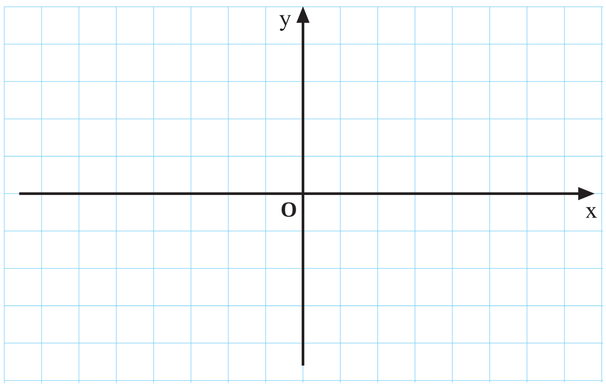
در این قسمت در مورد پیدا کردن دامنه‌ی تابع‌های حقیقی مطالبی را با هم بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱۰ــ۱

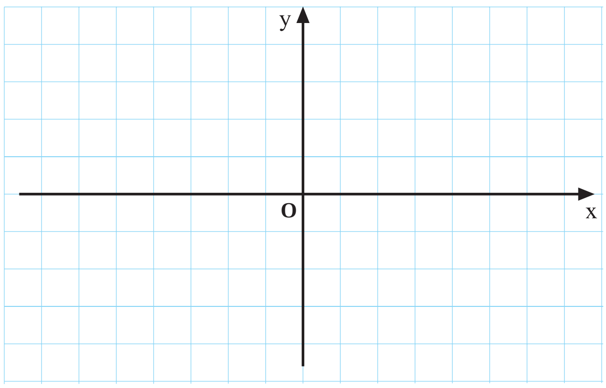
فرض کنید $f(x)=۲x+۱$

۱) نمودار $y = f(x)$ را رسم کنید (شکل ۸۱ــ۱).

۲) دامنه‌ی این تابع را بنویسید.



شکل ۸۱ــ۱



شکل ۸۲ــ۱

۳) اگر $g(x)=x^۲-۱$ ، نمودار $y = g(x)$ را رسم کنید و دامنه‌ی تابع g را بنویسید (شکل ۸۲ــ۱).

۴) اگر تابع p با ضابطه‌ی زیر تعریف شود (یعنی p یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی n باشد) :

$$p(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + a_۰$$

دامنه‌ی p را بنویسید.

دامنه‌ی هر تابع چند جمله‌ای، مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، است.

کار در کلاس ۹ـ۱

محل پاسخ به سؤالات کار در کلاس

الف) فرض کنید

$$g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to\frac{۱}{۲x-۱}$$

۱) تابع g به ازای چه مقداری از x تعریف نشده است؟

۲) دامنه‌ی تابع g را بنویسید.

۳) اگر $h(x)=\frac{۱}{x^{۲}+۵x+۶}$، معین کنید عبارت $x^{۲}+۵x+۶$ به ازای چه مقادیری از x صفر می‌شود، سپس دامنه‌ی h را بنویسید.

۴) اگر p(x) یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n باشد و $A=\{x\in\mathbb{R}|p(x)=۰\}$ دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۱}{p(x)}$ را بنویسید.

ب) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x(۳x+۲)}$.

۱) عبارت $x(۳x+۲)$ را تعیین علامت کنید.

۲) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

پ) فرض کنید $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۲}-x}$.

۱) آیا f(x) به ازای هر عدد حقیقی x تعریف شده است؟

۲) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

ت) دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را بنویسید.

۱) $f(x)=\sin x$

۲) $g(x)=\cos x$

۳) $t(x)=\sin x-\cos x$

محل پاسخ به سؤالات کار در کلاس

ث) فرض کنید

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to\frac{۱}{\sqrt{x^۲+۵x+۶}}$$

۱) عبارت $x^۲+۵x+۶$ به ازای چه مقادیری از x صفر می‌شود؟

۲) عبارت $x^۲+۵x+۶$ به ازای چه مقادیری از x مثبت است؟

۳) دامنه‌ی تابع f را تعیین کنید.

ج) فرض کنید $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $h(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۱}$

۱) دامنه‌ی تابع h را تعیین کنید.

۲) دانش‌آموزی برای تعیین دامنه‌ی h چنین عمل کرده است؛

$$h(x)=\frac{x-۱}{x^۲-۱}=\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)}$$
$$=\frac{۱}{x+۱}$$

با توجه به این که اگر $x+۱=۰$ آنگاه $x=-۱$ پس دامنه‌ی تابع h برابر است با $\mathbb{R}-\{-۱\}$، آیا استدلال این دانش‌آموز درست است؟ چرا؟

چ) فرض کنید

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$
$$x\to\tan x$$

۱) با توجه به این که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، دامنه‌ی این تابع را تعیین کنید.

۲) با روشی مشابه دامنه‌ی تابع $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ را تعیین کنید.

۱ــ۴ــ۱ــ مثال‌های حل شده

۱ــ دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{۲}{x^۲-۴}$ را تعیین کنید.

حل ۱: مقدار xهایی که مخرج کسر را صفر می‌کند تعیین می‌کنیم.

$$x^۲-۴=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=۲ \quad \text{یا} \quad x=-۲$$

بنابراین،

$$D_f=\mathbb{R}-\{-۲,۲\}.$$

۲ــ دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x+۲}}$ را تعیین کنید.

حل ۲: عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد، ضمناً مخرج کسر زیر رادیکال نیز نباید صفر باشد.

$$x+۲=۰ \;\Rightarrow\; x=-۲$$

$$x-۱=۰ \;\Rightarrow\; x=۱$$

جدول ۹ــ۱

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
$\frac{x-۱}{x+۲}$		+	تعریف نشده	−	۰	+	

$$D_g=(-\infty,-۲)\cup[۱,+\infty)$$

۳ــ دامنه‌ی تابع $h(x)=\frac{x+۳}{x^۲-۹}$ را تعیین کنید.

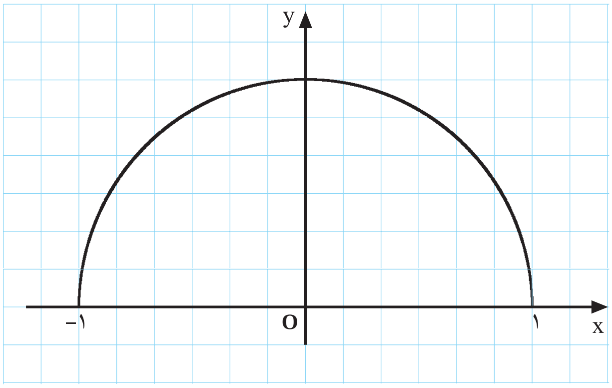
حل ۳: مقدارهایی از x را که مخرج کسر را صفر می‌کنند به‌دست می‌آوریم.

$$x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=۳ \quad \text{یا} \quad x=-۳$$

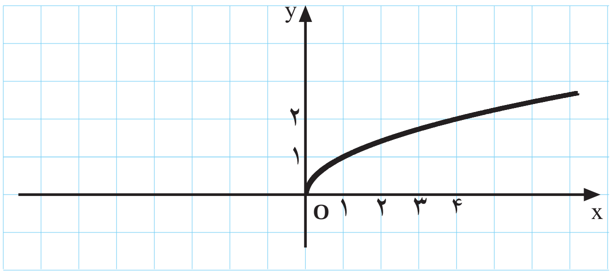
بنابراین،

$$D_h=\mathbb{R}-\{-۳,۳\}.$$

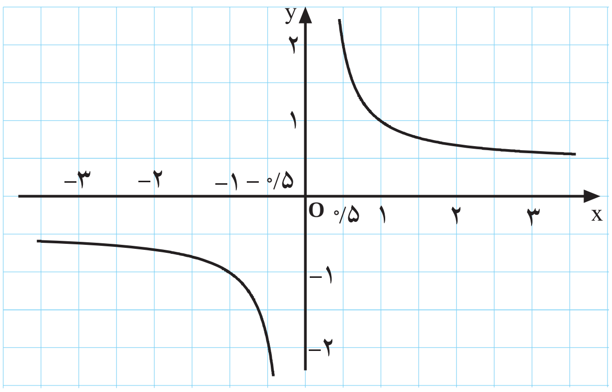
۴ــ در روبه‌رو نمودار چند تابع رسم شده است و دامنه‌ی آنها نیز نوشته شده است.



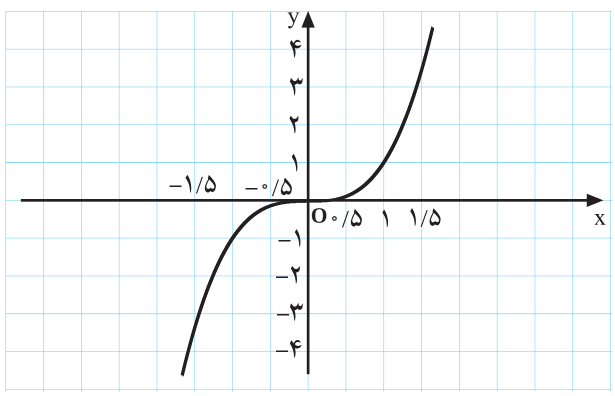
شکل ۸۳ــ۱ــ نمودار $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ $D_f=[-۱,۱]$



شکل ۸۴ــ۱ــ نمودار $f(x)=\sqrt{x}$ ، $D_f=[۰,\infty)$



شکل ۸۵ــ۱ــ نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$



شکل ۸۶ــ۱ــ نمودار $f(x)=x^۳$ ، $D_f=\mathbb{R}$

تمرین ۸ــ۱

۱) دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to\frac{۲x+۱}{x^۲-۴}$

ب) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to\sqrt{۲x-x^۲}$

پ) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to\frac{x+۲}{x^۲+۲x+۱}$

ت) $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\to\sqrt{\frac{۱}{x-۱}}$

۲) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است.

$$f(x)=۲^x$$

الف) جدول ۱۰ــ۱ را کامل کنید.

جدول ۱۰ــ۱

x	−۱	۰	۱	۲	۳	۴
f(x)						

ب) با توجه به جدول ۱۰ــ۱ نمودار تابع f را در دفتر خود رسم کنید.

پ) با توجه به نموداری که رسم کردید تقریبی از $۲^{\sqrt{۲}}$ به‌دست آورید.

ت) با توجه به نمودار، x را چنان تعیین کنید که $۲^x=۵$.

ث) دامنه‌ی این تابع را مشخص کنید.

۳) دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

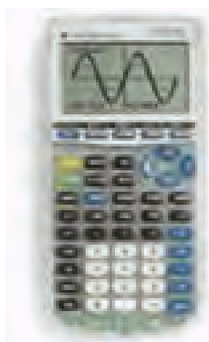
الف) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\rightsquigarrow\frac{۱}{x^۲+۱}$

ب) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\rightsquigarrow\frac{x-۱}{x^۲+۱}$

پ) $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\rightsquigarrow\sqrt{\frac{x}{x-۱}}$

ت) $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\rightsquigarrow\sqrt{\frac{x}{x^۲+۱}}$

۴) فرض کنید $f(x)=x-\sin x$ و $g(x)=\cos x+x$. دامنه‌ی این تابع‌ها را تعیین کنید، سپس مقادیر زیر را حساب کنید.



الف) $f(۰)+g(۰)=$

ب) $f(\frac{\pi}{۲})+g(\frac{\pi}{۲})=$

پ) $f(\frac{\pi}{۴})-g(\frac{\pi}{۴})=$

ت) $f(۱)+g(۱)=$

ث) $g(۲)-f(۲)=$

توجه: در تمرین بالا x باید رادیان درنظر گرفته شود، هنگام استفاده از ماشین حساب به این مطلب توجه کنید. ضمناً، عددπ را تقریباً ۳/۱۴ منظور کنید.

آزمون پایانی (۴)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f(x)=۲x^۲-۵x+۱$

ب) $f(x)=\frac{x^۲+۱}{۲x-۱}$

پ) $f(x)=\frac{۱}{x^۲-x-۲}$

ت) $f(x)=\sqrt{(x-۳)(x+۱)}$

ث) $f(x)=\sqrt{\frac{x^۲}{x-۱}}$

ج) $f(x)=\tan x$

چ) $f(x)=\sin ۲x$

۲ــ تابع f با جدول ۱۱ــ۱ مشخص شده است :

جدول ۱۱ــ۱

x	۱-	۰	۱	۲	۳	۴	۵
f(x)	۴	۳	۰	۳-	۵	۷	۱-

الف) این تابع را به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه و برد این تابع را مشخص کنید.

بخش اول

فصل پنجم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی

تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ـ چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند.

۲ـ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g ، ضابطه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بنویسد.

۳ـ دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین کند.

۴ـ از اعمال بر تابع‌ها در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش‌آزمون (۵)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ـ اگر $f(x)=۲x$ و دامنه‌ی f مجموعه $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید :

الف) $f(۲)\times f(۳)$

ب) $f(۲)+f(۳)$

پ) آیا تساوی $f(۲)\times f(۳)=f(۶)$ درست است؟

۲ـ اگر $f(x)=x^۲+x-۲$ و $g(x)=۲-۲x$ ، حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید :

الف) $f(۲)+g(۲)$

ب) $f(۲)-g(۲)$

پ) $f(۲)\times g(۲)$

ت) $\frac{f(۲)}{g(۲)}$

۳ـ دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=۵-۳x$ و $g(x)=۲x+۶$ داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر :

الف) $f(۴)+g(۴)$

ب) $f(x)+g(x)$

پ) $f(۲)-g(۲)$

ت) $f(x)-g(x)$

ث) $f(\frac{۱}{۲})\times g(\frac{۱}{۲})$

ج) $f(x)\times g(x)$

چ) $\frac{f(۳)}{g(۳)}$

۴ـ اگر $f(x)=۲x^۲-x+۳$ و $g(x)=x^۲+x-۱$ ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f+g$

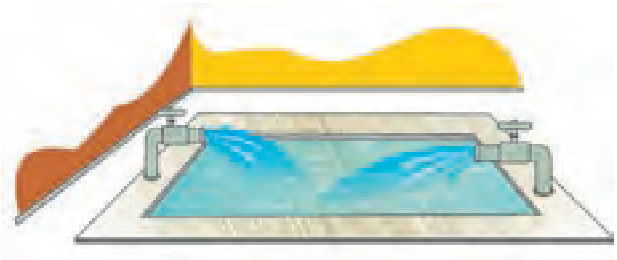
ب) $f-g$

پ) $f\times g$

ت) $\frac{f}{g}$

۵ـ۱ـ عملیات روی تابع‌ها

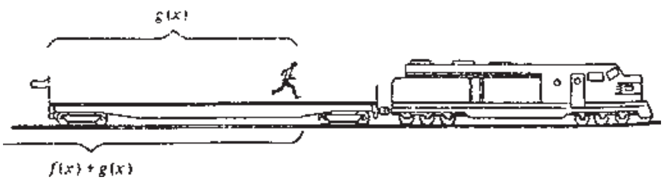
اگر f و g دو تابع حقیقی باشند به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک آنها f(x) و g(x) دو عدد حقیقی هستند. بنابراین، می‌توان روی آنها چهار عمل اصلی را انجام داد.



شکل ۸۷ـ۱

۱) یک استخر دارای دو شیر آب است (شکل۸۷ـ۱). شیر اول در هر ثانیه ۲ لیتر و شیر دوم در هر ثانیه ۳ لیتر آب وارد استخر می‌کند. اگر این دو شیر با هم آب وارد استخر کنند در هر ثانیه چند لیتر آب وارد استخر می‌شود؟

اگر f(t) مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر اول (برحسب لیتر) و g(t) مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر دوم باشد، پس از t ثانیه $f(t)+g(t)$ لیتر آب وارد استخر می‌شود. بنابر آنچه گفته شد : لیتر $f(t)=۲t$ ، لیتر $g(t)=۳t$ پس، توسط دو شیر، در t ثانیه، لیتر $f(t)+g(t)=۲t+۳t=۵t$ آب وارد استخر می‌شود.



شکل ۸۸ـ۱

۲) شخصی، مطابق شکل ۸۸ـ۱، روی واگن کفی یک قطار می‌دود و در هر ثانیه به‌طور متوسط ۵/۵ متر طی می‌کند. اگر قطار در هر ساعت به‌طور متوسط ۹۰ کیلومتر (در هر ثانیه ۲۵ متر) طی کند، این شخص در هر ثانیه چند متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود؟

مطابق شکل۸۸ـ۱، واضح است که $g(x)=۵/۵x$ و $f(x)=۲۵x$. بنابراین،این شخص در هر ثانیه به اندازه‌ی ۳۰/۵ متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود $(f(۱)+g(۱)=۲۵+۵/۵=۳۰/۵)$.

اگر h(x) فاصله‌ی این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد، داریم :

$$h(x)=f(x)+g(x)=۲۵x+۵/۵x=۳۰/۵x$$

تابع h را مجموع دو تابع f و g می‌گویند و می‌نویسند :

$$h = f + g$$

زیرا، برای هر x، $h(x) = f(x) + g(x)$.

تابع $f + g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ تعریف می‌شود.

مثال‌های حل شده در مورد مجموع، تفاضل و ضرب دو تابع.

اگـــر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x + 1$

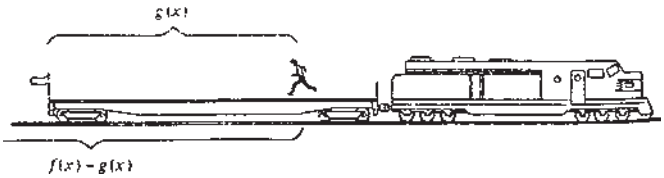
آنگاه، اگر $h = f + g$ داریم :

$$h(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 2x) + (2x + 1)$$
$$= x^2 + 1$$

اگر این شخص خلاف جهت حرکت قطار بدود، در هر ثانیه چقدر از مبدأ دور می‌شود؟ (شکل ۸۹ــ۱)

$$f(1) - g(1) = 25 - 5/5 = 19/5 \quad \text{متر}$$

اگر d(x) فاصله این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد داریم :



شکل ۸۹ ــ ۱

$$d(x) = f(x) - g(x)$$

تابع d را با $f - g$ نشان می‌دهند.

تابع $f - g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ تعریف می‌شود.

اگر $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$ و $g(x) = 2x^2 - x + 2$ ضابطه‌ی تابع $h = f - g$ را بنویسید.

حل: با توجه به تعریف داریم :

$$h(x) = f(x) - g(x)$$
$$= (2x^2 + 5x - 3) - (2x^2 - x + 2) = 6x - 5$$

به همین ترتیب می‌توان حاصل‌ضرب دو تابع f و g را نیز تعریف کرد.

تابع $f \times g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ تعریف می‌شود.

فرض کنید $f(x) = x + 1$ اندازه‌ی عرض یک مستطیل و $g(x) = 2x + 3$ اندازه‌ی طول این مستطیل باشد. اگر مساحت این مستطیل را با s(x) نمایش دهیم، ضابطه‌ی s(x) را بنویسید.

حل: واضح است که

$$s(x) = f(x) \times g(x) = (x + 1)(2x + 3)$$

بنابراین،

$$s(x) = 2x^2 + 5x + 3$$

در حقیقت، $s = f \times g$.

تابع $\frac{f}{g}$ را نیز، برای تمام xهایی که $g(x) \neq ۰$، می‌توان تعریف کرد.

در حقیقت،

$$D_{\frac{f}{g}} = \left(D_f \cap D_g\right) - \{x : g(x) = ۰\}$$

تابع $\frac{f}{g}$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g که $g(x) \neq ۰$، با ضابطه‌ی $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود.

به مثال روبه‌رو توجه کنید.

مثال:

اگر $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ۳x - ۲$، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید و $(\frac{f}{g})(\frac{۵}{۳})$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به تعریف $\frac{f}{g}$ داریم :

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^۲ + ۱}{۳x - ۲} \quad (x \neq \frac{۲}{۳})$$

$$\frac{f}{g}(\frac{۵}{۳}) = \frac{(\frac{۵}{۳})^۲ + ۱}{۳(\frac{۵}{۳}) - ۲} = \frac{\frac{۲۵}{۹} + ۱}{۵ - ۲} = \frac{۳۴}{۲۷}$$

تمرین ۹ــ۱

۱ــ فرض کنید $f(x) = x^۲ - ۱$ و $g(x) = x + ۱$.

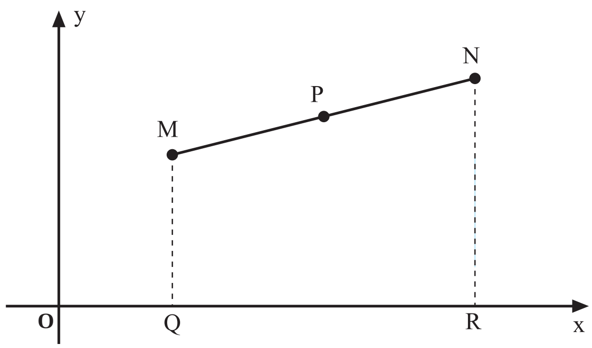
الف) ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های $f + g$، $f - g$ و $f \times g$ را بنویسید.

ب) مقدارهای $(f + g)(۰)$، $(f - g)(۱)$، $(f \times g)(۲)$ و $(\frac{f}{g})(۴)$ را حساب کنید.

۲ــ فرض کنید $M\left|\begin{matrix} t-۱ \\ t+۱ \end{matrix}\right.$ و $N\left|\begin{matrix} t+۱ \\ t+۳ \end{matrix}\right.$ و نقطه‌ی P وسط پاره‌خط MN باشد.

الف) مطابق شکل ۹۰ــ۱، مختصات نقاط R و Q را بنویسید.

ب) اگر مساحت ذوزنقه MQRN را با s(t) نشان دهیم، ضابطه‌ی تابع s را بنویسید.



شکل ۹۰ــ۱

آزمون پایانی (۵)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ مقدار آبی که در هر ثانیه، برحسب لیتر، از فواره‌ی A وارد یک استخر می‌شود از دستور $f(t)=۲t$ و مقدار آبی که در هر ثانیه از فواره‌ی B وارد این استخر می‌شود از دستور $g(t)=۵t$ محاسبه می‌شود.

الف) مقدار آبی که در هر ثانیه از هر دو فواره‌ی A و B وارد استخر می‌شود از کدام دستور می‌توان محاسبه کرد؟

ب) در ۵ ثانیه چقدر آب وارد استخر می‌شود؟

پ) اگر حجم استخر ۳۵۰۰۰ لیتر باشد دو فواره‌ی A و B در چه مدت این استخر را پر می‌کنند؟

۲ــ مختصات نقطه‌های متغیر M و N چنین است :

$M\begin{vmatrix} t-۱ \\ t^{۲}+۱ \end{vmatrix}$ و $N\begin{vmatrix} t^{۲}-۱ \\ t+۱ \end{vmatrix}$

طول پاره‌خط MN را برحسب t به‌دست آورید.

بخش اول

فصل ششم

ترکیب دو تابع

هدف کلی

آموزش مفهوم ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ ضابطه‌ی fog و gof را با داشتن ضابطه‌ی f و g بنویسد.

۲ــ مقدار تابع‌های fog و gof را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند.

۳ــ مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

پیش آزمون (۶)

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون

۱ــ اگر $f(x)=x^۲+۴$ و $g(x)=۳x-۱$ مطلوب است محاسبه‌ی :

الف) $g(۱)$ و $f(g(۱))$

ب) $f(۳)$ و $g(f(۳))$

پ) $f(g(۴))$ و $g(f(۲))$

۲ــ اگر $f(x)=۳x$ و $g(x)=\frac{۱}{۳}x$ ضابطه‌ی fog و gof را بنویسید.

۳ــ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۱}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ تعیین کنید :

الف) $f(g(x))$

ب) $g(f(x))$

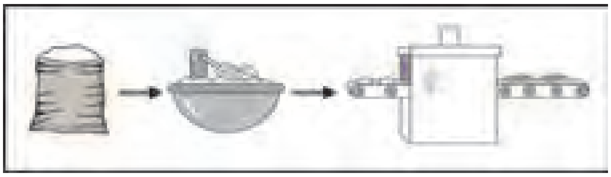
۴ــ اگر $f(x)=۱-x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x}$ تعیین کنید :

الف) D_f و R_f

ب) D_g و R_g

پ) D_{gof} و D_{fog}

۶ــ۱ــ ترکیب دو تابع

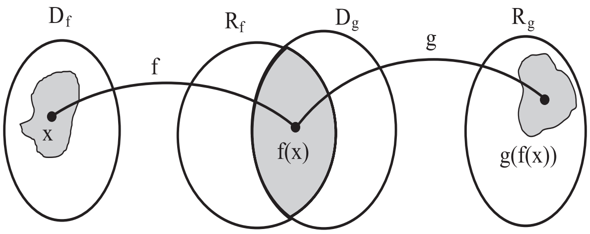


فرض کنید f و g دو تابع حقیقی باشند به‌طوری که اشتراک برد تابع f، یعنی R_f ، و دامنه‌ی تابع g، یعنی D_g ، تهی نباشد. یعنی،

$$R_f \cap D_g \neq \varnothing$$

ترکیب تابع g با f را با gof نشان می‌دهند و با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌کنند :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



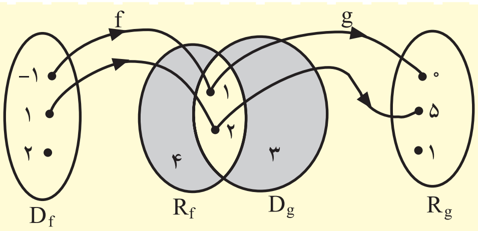
شکل ۹۱ــ۱

شکل ۹۱ــ۱ نشان می‌دهد که تابع gof فقط به‌ازای xهایی قابل تعریف است که f(x) به دامنه‌ی تابع g تعلق داشته باشد.

۱ــ۶ــ۱ــ مثال‌های حل شده

۱) فرض کنید $f = \{(۱,۲),(-۱,۱),(۲,۴)\}$ و $g = \{(۱,۰),(۲,۵),(۳,۱)\}$ با توجه به شکل ۹۲ــ۱ دامنه و برد gof نوشته شده‌اند.

$$D_{gof} = \{۱,-۱\}, \quad R_{gof} = \{۰,۵\}$$



شکل ۹۲ــ۱

۲) فرض کنید $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ، ضابطه‌ی gof را بنویسید.

حل ۲: با توجه به این که برای هر عدد حقیقی x، $f(x) = x^۲ + ۱ > ۰$ داریم

$$(gof)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)}$$
$$= \sqrt{x^۲ + ۱}.$$

۳) فرض کنید $f(x) = x - ۱$ و $g(x) = \frac{۱}{x}$ ، ضابطه‌ی fog را بنویسید.

حل ۳:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = f(\frac{۱}{x}) = \frac{۱}{x} - ۱$$
$$= \frac{۱ - x}{x}.$$

تمرین ۱۰ــ۱

۱ــ اگر $f(x)=x^۲+۲x$ آن‌گاه $f(۱)$ ، $f(۲)$ ، $f(t)$ ، $f(۲t+۱)$ ، $f(t^۲)$ و $f(\sqrt{t})$ را تعیین کنید.

۲ــ فرض کنید $f(x)=x+۲$ و $g(x)=x^۲$. مقدار $(gof)(۱)$ و $(fog)(۱)$ را حساب کنید. آیا $fog=gof$ ؟

۳ــ ضابطه‌ی fog و gof را درهریک از حالات زیر حساب کنید.

الف) $f(x)=۲x,\quad g(x)=۱-۳x$

ب) $f(x)=x^۲,\quad g(x)=x+۱$

پ) $f(x)=x^۳,\quad g(x)=x^۲$

ت) $f(x)=x^۲\ ,\quad g(x)=\sqrt{x}$

۴ــ فرض کنید I تابع همانی با ضابطه‌ی $I(x)=x$ باشد. اگر f تابع دلخواهی باشد Iof و foI چه تابعی هستند؟

۵ــ فرض کنید $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}$. ضابطه‌ی fog و gof را تعیین کنید.

۶ــ فرض کنید $f(x)=x^۲+۱$ و $g(x)=\sqrt{x-۱}$. ضابطه‌ی gof و fog را تعیین کنید.

۷ــ فرض کنید $f^۲=fof$ و $f^n=\overbrace{fofo...of}^{\text{n تا f}}$. ضابطه‌ی f^n را در هریک از حالات زیر تعیین کنید. (تمرین (الف) برای راهنمایی حل شده است.)

الف) $f(x)=x+۱\Rightarrow f^۲(x)=f(f(x))$

$$=f(x)+۱=x+۱+۱=x+۲$$

$$f^۳(x)=f(f^۲(x))=f^۲(x)+۱$$

$$=(x+۲)+۱=x+۳\Rightarrow f^n(x)=x+n.$$

ب) $f(x)=۲x$

پ) $f(x)=x^۲.$

۲ــ۶ــ۱ــ بازی و ریاضی

۱) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی، یعنی $W=N\cup\{۰\}$ ، به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$f(n)=(\text{یکان عدد } n^۲),\quad (n\in W)$$

مقدارهای $f^۲(n)=(fof)(n)$ را به‌دست آورید (برای n دلخواه).

برای کمک به شما مقدار $f^۲$ برای چند عدد در روبه‌رو حساب شده است. دیده می‌شود که مقدارهای $f^۲(x)$ متعلق به مجموعه‌ی زیر است :

$$A=\{۰,۱,۵,۶\}.$$

آیا هر عدد دلخواه n متعلق به W اختیار شود $(fof)(n)\in A$ (چرا؟)

$$۳۴۵\xrightarrow{f}۵\xrightarrow{f}۵\Rightarrow f^۲(۳۴۵)=۵$$

$$۲۹۷\xrightarrow{f}۹\xrightarrow{f}۱$$

$$۳۴۰\xrightarrow{f}۰\xrightarrow{f}۰$$

$$۲۲۸\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{f}۶$$

$$۱۶\xrightarrow{f}۶\xrightarrow{f}۶$$

$$۱۲\xrightarrow{f}۴\xrightarrow{f}۶$$

$$۲۳\xrightarrow{f}۹\xrightarrow{f}۱$$

$$۷۱\xrightarrow{f}۱\xrightarrow{f}۱$$

$$۵۴\xrightarrow{f}۶\xrightarrow{f}۶$$

$$۹\xrightarrow{f}۱\xrightarrow{f}۱$$

۲) تابع f بر مجموعه‌ی عددهای حسابی به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$f(n) = (\text{یکان } n)^{۲}, \quad (n \in W)$$

آیا به‌ازای هر عدد n از W، $f^{۳}(n) = (fofof)(n)$ به مجموعه‌ی زیر تعلق دارد؟ چرا؟

$$B = \{۰, ۱, ۲۵, ۳۶\}$$

در مقابل $f^{۳}(n)$ برای چند n حساب شده است.

۲۵۲ $\xrightarrow{f}$ ۴ $\xrightarrow{f}$ ۱۶ $\xrightarrow{f}$ ۳۶ $\Rightarrow f^{۳}(۲۵۲) = ۳۶$

۱۰۰ $\xrightarrow{f}$ ۰ $\xrightarrow{f}$ ۰ $\xrightarrow{f}$ ۰

۴۵ $\xrightarrow{f}$ ۲۵ $\xrightarrow{f}$ ۲۵ $\xrightarrow{f}$ ۲۵

۱۷ $\xrightarrow{f}$ ۴۹ $\xrightarrow{f}$ ۸۱ $\xrightarrow{f}$ ۱

۹۳ $\xrightarrow{f}$ ۹ $\xrightarrow{f}$ ۸۱ $\xrightarrow{f}$ ۱

۱۴۶ $\xrightarrow{f}$ ۳۶ $\xrightarrow{f}$ ۳۶ $\xrightarrow{f}$ ۳۶

۲۱ $\xrightarrow{f}$ ۱ $\xrightarrow{f}$ ۱ $\xrightarrow{f}$ ۱

۷۴ $\xrightarrow{f}$ ۱۶ $\xrightarrow{f}$ ۳۶ $\xrightarrow{f}$ ۳۶

۹۸ $\xrightarrow{f}$ ۶۴ $\xrightarrow{f}$ ۱۶ $\xrightarrow{f}$ ۳۶

۱۰۹ $\xrightarrow{f}$ ۸۱ $\xrightarrow{f}$ ۱ $\xrightarrow{f}$ ۱

۳) فرض کنید $n = ۲۸۴۵۷۶$ ؛ در رابطه با این عدد سه عدد دیگر می‌توان نوشت :

$R = ۶ =$ (تعداد رقم‌های عدد n)

$Z = ۴ =$ (تعداد رقم‌های زوج n)

$F = ۲ =$ (تعداد رقم‌های فرد n)

اینک تابع f را بر مجموعه‌ی عددهای طبیعی چنین تعریف می‌کنیم :

$$f(n) = \overline{RZF}$$

(یعنی f(n) عددحاصل از کنار هم گذاشتن سه عدد R ، Z و F است.)

بنابراین، $f(۲۸۴۵۷۶) = ۶۴۲$. $f^{۲}$ ، $f^{۳}$ و ... را حساب کنید تا وقتی که به عدد ثابتی برسید. این عدد ثابت چیست؟

حالا به مثال‌های روبه‌رو توجه کنید.

آیا برای هر عدد طبیعی n، اگر فرایند بالا را روی آن انجام دهیم، درنهایت به عدد ۳۱۲ می‌رسیم؟ [۱۱]

امتحان کنید!

۲۸۴۵۷۶ $\xrightarrow{f}$ ۶۴۲ $\xrightarrow{f}$ ۳۳۰ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲

۲۴۹ $\xrightarrow{f}$ ۳۲۱ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲

۲۰۱۳۸۹۷۳۲۵۶۴ $\xrightarrow{f}$ ۱۲۶۶ $\xrightarrow{f}$ ۴۳۱ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲

۲۵ $\xrightarrow{f}$ ۲۱۱ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲

۹ $\xrightarrow{f}$ ۱۰۱ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲

۸۸ $\xrightarrow{f}$ ۲۲۰ $\xrightarrow{f}$ ۳۳۰ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲

۲ $\xrightarrow{f}$ ۱۱۰ $\xrightarrow{f}$ ۳۱۲

آزمون پایانی (۶)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ اگر $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ آن‌گاه $f(2)$ ، $f(\frac{1}{2})$ ، $f(\sqrt{3})$ ، $f(\frac{1}{x})$ و $(fof)(x)$ را تعیین کنید.

۲ــ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ و $g(x)=\sqrt{2-x}$ باشد حساب کنید :

الف) $f(g(2))$ و $g(f(1))$

ب) $f(g(x))$ و $g(f(x))$

پ) آیا برای هر x، $g(f(x))=f(g(x))$ ؟

۳ــ فرض کنید $f(x)=x^2+5x$ و $g(x)=\frac{1}{x-1}$.

الف) D_f و R_g را تعیین کنید.

ب) D_{fog} را حساب کنید.

پ) $(fog)(x)$ را بنویسید.

۴ــ اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\sin x$ کدام‌یک از مقدارهای $(fog)(\frac{\pi}{6})$ و $(gof)(3)$ را می‌توان تعیین کرد؟ چرا؟

۵ــ فرض کنید :

$$f(x)=\frac{1}{x} \quad \text{و} \quad (x\neq 0)$$

اگر n عددی طبیعی باشد $f^n(x)$ را تعیین کنید.

تمرین‌های تکمیلی بخش اول

۱ــ نقطه‌های نظیر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را روی یک محور اعداد حقیقی مشخص کنید (روش انجام کار را شرح دهید).

۲ــ الف) نقطه‌های $A(۳,۴)$ و $B(۱,۲)$ و $C(۵,۲)$ را در یک دستگاه مختصات قائم مشخص کنید.

ب) نوع مثلث ABC را تعیین کنید.

پ) مختصات نقطه‌ی A'، وسط ضلع BC، را به‌دست آورید.

ت) طول میانه‌ی AA' از این مثلث را حساب کنید.

۳ــ مقدارهای a و b را چنان بیابید که دو نقطه‌ی $M(b-۱,۱-a)$ و $M'(a+۲,۳b)$ نسبت به محور xها قرینه‌ی یکدیگر باشند. سپس مختصات این دو نقطه را حساب کنید.

۴ــ آیا نقطه‌ی $A(۲m-۱,m)$ می‌تواند بر نقطه $B(۲,-۳)$ منطبق باشد؟ چرا؟

۵ــ هریک از نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب آن‌ها را به‌صورت مجموعه و نماد بازه بنویسید و روی محور اعداد نیز نشان دهید.

الف) $۱<-۲x+۳<۹$

ب) $\frac{x+۲}{۳}>\frac{۱-x}{۲}$

۶ــ اگر $A=[-۳,۴]$ و $B=[۲,۵]$ باشد، بازه‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $A\cap B$

ب) $A\cup B$

پ) $A-B$

۷ــ ولتاژ ورودی یک ترانسفورمر ۲۳۰ ولت و ولتاژ خروجی آن ۱۱/۵ ولت است. ثابت این ترانسفورمر را تعیین کنید.

۸ــ کدام مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $\{(۲,۵),(۳,-۱),(۴,۶),(-۲,۲)\}$

ب) $\{(-۱,۳),(۲,۴),(۳,۲),(-۲,۷),(۲,۶)\}$

۹ــ کدام، ضابطه‌ی یک تابع است؟

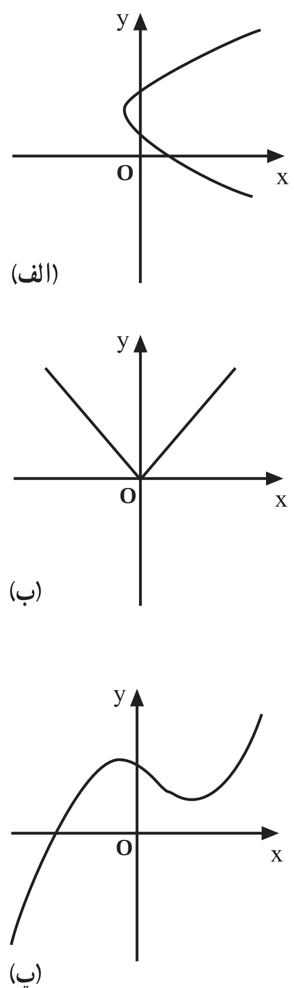
الف) $y+x^۲-۴=۰$

ب) $y^۲+x-۴=۰$

پ) $|y|=x+۳$

ت) $y=|x|-۲$

۱۰ــ کدام شکل، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند؟ (شکل ۹۳ــ۱).



شکل ۹۳ــ۱

۱۱ــ تابع $y=-x^{۲}+۴x$ داده شده است.

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) آیا نقطه‌ی $A(۲,۴)$ روی این نمودار است؟

پ) مقدار m را چنان بیابید که نقطه‌ی $(۲m,۱)$ روی نمودار این تابع باشد.

۱۲ــ اگر $f(x)=ax^{۲}+۳x-a$ باشد، مقدار a را چنان بیابید که $f(۲)=۸$ باشد.

۱۳ــ نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۴})$ و $x\in[۰,۲\pi]$

ب) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$ و $x\in[۰,۲\pi]$

۱۴ــ دامنه‌ی هریک از تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $y=-۲x^{۲}+x$

ب) $y=\frac{۳x}{x^{۲}-۱}$

پ) $y=\sin ۲x$

ت) $y=\sqrt{۵x+x^{۲}}$

۱۵ــ اگر $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$ و $g(x)=x^{۲}-۱$ باشد:

الف) ضابطه‌ی $(f\times g)(x)$

ب) ضابطه‌ی $(gof)(x)$

پ) $f(۲)\times g(۲)$

ت) $g\left(f(۲\sqrt{۲})\right)$

ث) $f(۳)\times g(\frac{۱}{۳})$

را تعیین کنید.

۱۶ــ اگر $f(x)=\sqrt{۲x}$ و $g(x)=x^{۲}-۱$ باشد، ضابطه‌ی $(gof)(x)$ را تعیین کنید.

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

ابوالوفا محمد ابن محمدابن یحیی ابن اسماعیل ابن عباس بوزجانی، یکی از مفاخر علمی ایران و از بزرگ‌ترین ریاضیدانان و منجمان دوره‌ی اسلامی است به گفته ابن ندیم در روز چهارشنبه، اول ماه رمضان سال ۳۲۸ هـ.ق در شهر بوزجان متولد شد. بوزگان، پوزگان یا پوچگان، شهر قدیمی در خراسان بود که ویرانه‌های آن در حدود هجده کیلومتری شرق شهر تربت‌جام به یادگار مانده است. ابوالوفا در حدود سال ۳۴۸ هـ.ق زادگاهش را به خاطر کسب علم و دانش و عرضه توانایی‌های علمی و فکری خود، ترک و به طرف بغداد حرکت کرد. او در بغداد با شرکت در محافل علمی توانایی خود را در محاسبات ریاضی به سرعت نشان داد. ره‌آورد این تلاش‌ها و سخت‌کوشی‌ها، انتخاب او برای دیوانی و ثبت و محاسبات مالی حکومت بود. ابوالوفا علاوه بر فعالیت‌های یاد شده، به پژوهش‌های نجومی و ستاره‌شناسی نیز مشغول بود. دانشمندان، هنرمندان و ریاضی‌دانان عصر خود به او لقب مهندس داده بودند. مهندس به معنای ماهرترین و مطلع‌ترین هندسه‌دان بود.

ابوالوفا در به‌دست آوردن وترها مطالب بسیار سودمندی دارد. تألیف‌های فراوانی در زمینه‌های حساب هندسه، مثلثات و نجوم داشته است. نبوغ بوزجانی به عنوان یک مهندس این بوده است که مطالب مهم و پیچیده را به شکلی ساده و قابل فهم در اختیار دیگران قرار می‌داد.

ابوالوفا درباره حساب عملی، با عنوان «کتاب فی مایحتاج‌الیه الکتاب و العمال من علم الحساب» از شهرت گسترده‌ای برخوردار گردید. او همه‌ی اعداد و محاسبات را تنها با کلمات بیان کرده است. این کتاب که ترجمه فارسی نام عربی کتاب «آنچه از علم حساب که کاتبان و کاسبان را به کار آید» می‌باشد از جهت تاریخ حساب اهمیت فراوانی دارد و محاسبات مربوطه به چهار عمل اصلی اعداد و همچنین کسرها و محاسبه مساحت مثلث‌ها و مربع‌ها محاسبه مالیات را شامل می‌شود.

کتاب درسی عملی دیگر ابوالوفا «کتاب فی مایحتاج الیه الصانع من الاعمال الهندسه» است که شامل ترسیم‌های مسطح ساده و ترسیم چند وجهی‌های منتظم و نیمه منتظمی که در کره‌ای مفروض شده‌اند و مطالب سودمندی برای کار معماران و صنعتگران دیده می‌شود. همچنین درباره‌ی ترکیب و تجزیه‌ی مربع‌ها وکنار هم گذاشتن آن‌ها که ظاهراً از مسائلی بوده است که غالباً مسلمانان در کارهای معماری و خصوصاً در تزیین ساختمان‌ها به آن‌ها برمی‌خورده‌اند مطالبی آمده است.

کتاب نجومی بزرگ ابوالوفا، به نام «المجسطی» یا «کتاب الکامل»، دقیقاً از «مجسطی» بطلمیوس تبعیت می‌کند. کتاب درباره علم مثلثات است. دستورهای مهم مثلثات، چه در مثلثات مسطح و چه در مثلثات کروی ثابت شده و حل مسائل آن را به صورت ساده درآورد و قضیه مماس‌ها را در حل مثلث‌های قائم‌الزاویه کروی به‌کار برد. یکی از نخستین برهان‌های قضیه‌ی کلی جیب‌ها (سینوس‌ها)، که در حل مثلث‌های غیر قائم‌الزاویه به‌کاربرده می‌شد، نیز از ابوالوفا سرچشمه گرفته است. در کارهای مهم بوزجانی در توسعه علم مثلثات، مخصوصاً بهبود جداول مثلثاتی و روش‌های حل مثلثات کروی، تردیدی نیست. در تدوین جدول‌های جدید سینوس، با استفاده از روش درونیابی خودش، سینوس ۳۰ دقیقه را با دقت بیشتری محاسبه کرد. به افتخار ابوالوفا، بر دهانه‌ی آتشفشانی در ماه نیز نام او را نهاده‌اند. بیرونی در چند قسمت از آثار خود، از بوزجانی نام برده و نوشته است که ابوالوفا در محاسبات نجومی خود، میزان انحراف محور زمین را محاسبه و آن را مساوی ۳۵ (دقیقه) و ۲۳ (درجه) دانسته و از محل رصدهای او در شهر بغداد و ناحیه باب‌التبن نیز یاد کرده است. و نیز در جای دیگر نوشته است که بوزجانی به محاسبه‌ی ادوار (روزهای گذشته از مبدأ یک تاریخ خاص) بر اساس رصدهای بطلمیوس اقدام کرده است. نکته‌ی بسیار مهم و جالب در زمینه‌ی حساب کاربردی و آثار بوزجانی، رشد و تحول مفهوم عدد است. او با وارد کردن اعداد منفی به حساب، کار بزرگ و مهمی انجام داده است. این مهندس نابغه برای محاسبه ذهنی حاصل ضرب دو عدد دو رقمی که رقم‌های دهگان آن یکسان باشد، دستوری بیان کرده است.

بخش دوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

درک مفهوم حد و به‌کارگیری آن در تعیین پیوستگی تابع‌ها.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	حد	۲۰ساعت
دوم	پیوستگی	۸ ساعت
سوم	تعمیم حد	۸ ساعت

بخش دوم

فصل اول

حد

هدف کلی

درک مفهوم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقدارهای یک تابع به یک عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به $+\infty$ یا به $-\infty$ تعریف کند.

۲ــ حدّ تابع را تعریف کند.

۳ــ حدّ چپ و حدّ راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند.

۴ــ حدّ چپ و حدّ راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند.

۵ــ حدّ چپ و حدّ راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.

۶ــ حدّ تابع‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها، وقتی $x \to a$ به صفر میل می‌کنند را به دست آورد.

۷ــ قضیه فشردگی را در تعیین حد بعضی از تابع‌ها به کار برد.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ عددهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، $\frac{۴}{۵}$، ... روی محور اعداد مشخص شده‌اند (شکل ۱ــ۲).

الف) این عددها مرتباً به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این عددها از کدام سَمت (راست، چپ یا هر دو) به آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۲ــ عددهای $\frac{۲}{۱}$، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۳}{۲}$، $\frac{۲}{۳}$، $\frac{۴}{۳}$، $\frac{۳}{۴}$، ... را روی محور مشخص کنید (شکل ۲ــ۲).

الف) این عددها به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این عددها از کدام سَمت به آن عدد نزدیک می‌شوند؟

۳ــ می‌خواهیم $s=۱+۳+۳^۲+\cdots+۳^۹+۳^{۱۰}$ را حساب کنیم. در مقابل $-s$ و $۳s$ در دو ردیف زیر هم نوشته شده‌اند.

الف) عددهای هر ستون را با هم جمع کنید و زیر خط بنویسید.

ب) مقدار s را تعیین کنید.

۴ــ به روش سؤال ۳، مقدار

$$s=۱+r+r^۲+\cdots+r^n$$

را به‌دست آورید.

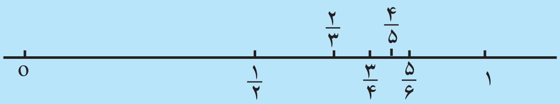
۵ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۲ \\ ۶-x & x>۲ \end{cases}$$

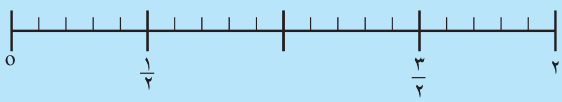
این تابع در $x=۲$ تعریف نشده است (شکل ۳ــ۲).

اگر $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... ، x_n به ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند، عددهای $f(x_۱)$، ...، $f(x_n)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون



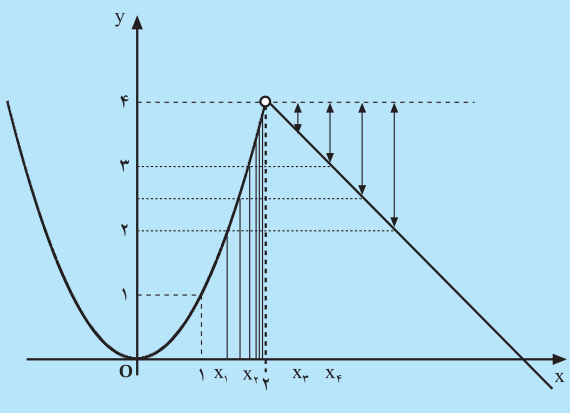
شکل ۱ــ۲



شکل ۲ــ۲

$$-s=-۱-۳-۳^۲-\cdots-۳^۹-۳^{۱۰}$$

$$۳s=\quad ۳+۳^۲+\cdots+۳^۹+۳^{۱۰}+۳^{۱۱}$$



شکل ۳ــ۲

مقدمه

فرض کنید اتومبیلی در نقطه‌ی $A(۰,۲)$ ایستاده است. چراغ راهنما سبز می‌شود و اتومبیل با سرعت روبه افزایش برروی یک خط راست حرکت می‌کند. شکل ۴ـ۲ در صفحه‌ی بعد را ملاحظه کنید.

$$y=\frac{۱}{۴}t^{۲}+۲ \qquad (۱)$$

رابطه‌ی (۱) محل اتومبیل را، نسبت به زمان، در هر لحظه مشخص می‌کند. طبق این رابطه در آغاز حرکت $(t=۰)$ فاصله‌ی اتومبیل تا مبدأ مختصات ۲ متر است. یعنی، $y_A=۲m$ و $t_A=۰$. اتومبیل دوثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی B، به فاصله‌ی ۳ متر از مبدأ می‌رسد. $y_B=۳m$ و $t_B=۲s$. اتومبیل چهار ثانیه پس از حرکت به نقطه‌ی C، به فاصله‌ی ۶ متر از مبدأ می‌رسد. $y_C=۶m$ و $t_C=۴s$.

با استفاده از معادله‌ی (۱) جدول مکان ــ زمان ۱ــ۲ را خواهیم داشت.

جدول ۱ــ۲

نقطه	A	B	C	D	E
t	۰	۲	۴	۶	۸
y	۲	۳	۶	۱۱	۱۸

نمودار y نسبت به تغییرات t نیز در صفحه مقابل رسم شده است.

طبق تعریف، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را به‌دست آوریم، باید اندازه‌ی جابه‌جایی را به مدّت حرکت تقسیم کنیم. یعنی،

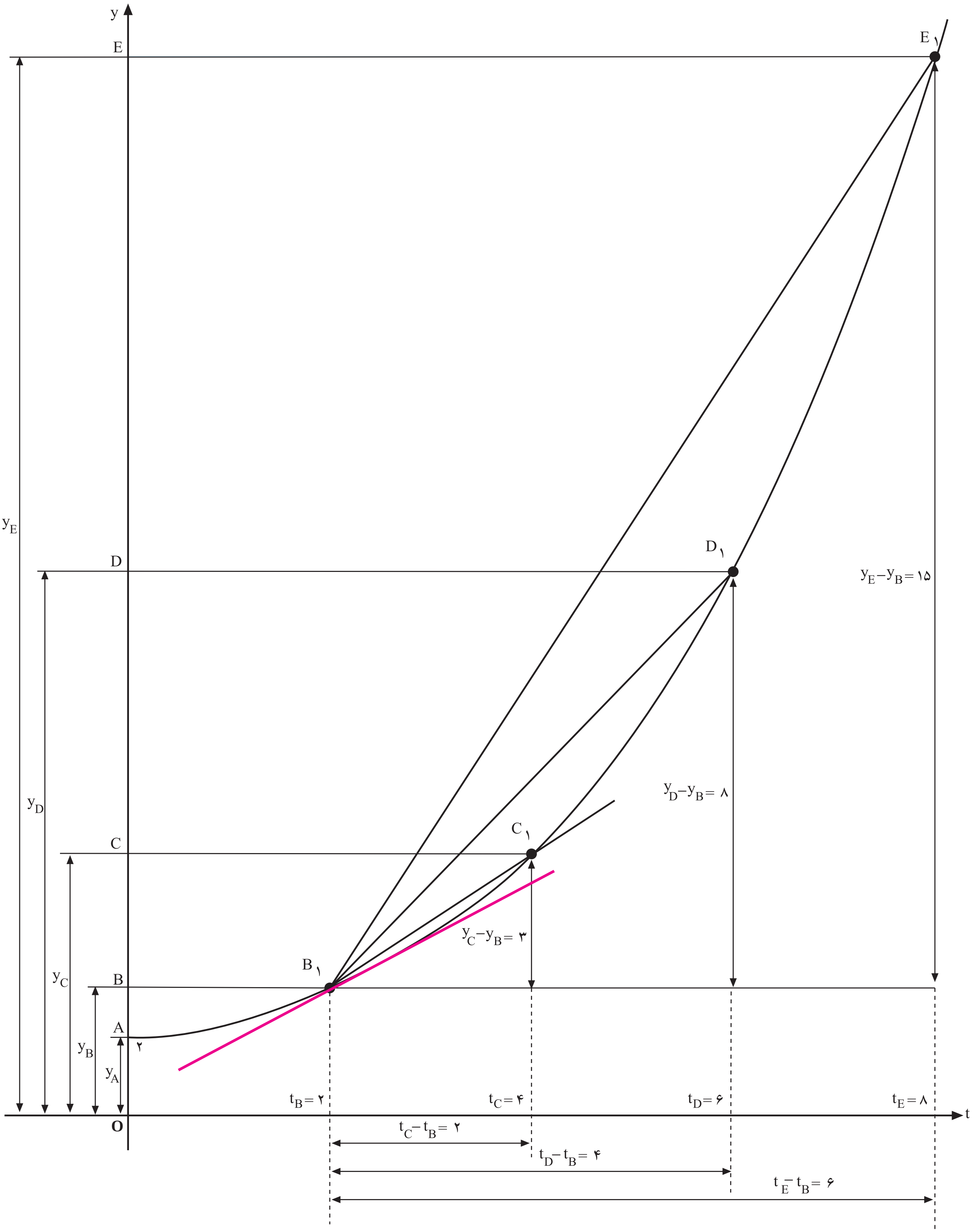
$$\text{سرعت متوسط}=\frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی}}{\text{مدت حرکت}}$$

طبق این تعریف، سرعت متوسط اتومبیل در مدتی که از B به E رفته است، از رابطه‌ی روبه‌رو به دست می‌آید.

$$\text{سرعت متوسط از B به E}=\frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا E}}{\text{مدت حرکت از B به E}}$$

$$=\frac{y_E-y_B}{t_E-t_B}=\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$=\frac{۱۸-۳}{۸-۲}=\frac{۱۵}{۶}\frac{m}{s}$$



y
E ۱
E
D ۱
D
C ۱
C
B ۱
B
A
۲
O
t
y_E
y_D
y_C
y_B
y_A
$y_E - y_B = ۱۵$
$y_D - y_B = ۸$
$y_C - y_B = ۳$
$t_B = ۲$
$t_C = ۴$
$t_D = ۶$
$t_E = ۸$
$t_C - t_B = ۲$
$t_D - t_B = ۴$
$t_E - t_B = ۶$

شکل ۴ــ۲

می‌دانید که طبق تعریف، شیب خط B_1E_1 نیز از تقسیم $\Delta y = y_E - y_B$ بر $\Delta t = t_E - t_B$ به‌دست می‌آید (طبق تعریف و شکل ۴ــ۲).

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = B_1E_1 \text{ شیب خط } = \frac{۱۸-۳}{۸-۲} = \frac{۱۵}{۶}$$

اگر مدت حرکت را کم کنیم یعنی زمان $\Delta t = t_E - t_B$ را کمتر کنیم مسافتی که اتومبیل طی می‌کند یعنی، $\Delta y = y_E - y_B$ نیز کوتاه‌تر می‌شود.

لذا، اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدت کوتاه‌تر، یعنی در مدتی که اتومبیل از B به D رفته است، به دست آوریم، طبق تعریف و شکل ۴ــ۲، داریم :

$$\text{سرعت متوسط از B به D} = \frac{\text{اندازه‌ی جابه‌جایی از B تا D}}{\text{مدت حرکت از B به D}}$$

$$= \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B} = \frac{۱۱-۳}{۶-۲} = ۲\,\frac{m}{s}$$

ضمناً، شیب خط B_1D_1 چنین حساب می‌شود :

$$B_1D_1 \text{ شیب خط } = \frac{y_D - y_B}{t_D - t_B}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{۱۱-۳}{۶-۲} = ۲$$

اگر مدت حرکت را باز هم کم‌تر کنیم، یعنی اگر $\Delta t = t_D - t_B$ را باز هم کوچک کنیم، مسافتی که اتومبیل طی می‌کند، یعنی $\Delta y = y_D - y_B$ نیز باز هم کوتاه‌تر می‌شود.

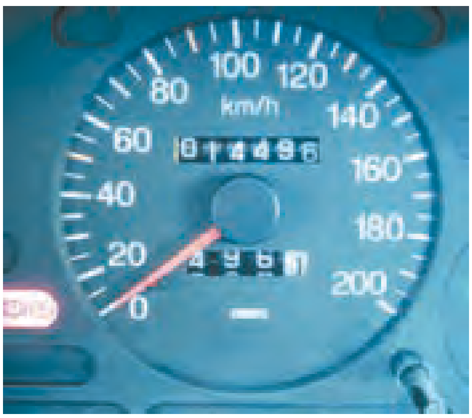
حال اگر بخواهیم سرعت متوسط اتومبیل را در مدتی که از B به C رفته است حساب کنیم باید بنویسیم :

$$\text{سرعت متوسط اتومبیل از B به C} = \frac{y_C - y_B}{t_C - t_B} = \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

$$= B_1C_1 \text{ شیب خط } = \frac{۶-۳}{۴-۲}$$

$$= \frac{۳}{۲}.$$

وقتی شما در اتومبیل در حال حرکت نشسته‌اید و می‌خواهید سرعت اتومبیل را بدانید، به کیلومترشمار نگاه می‌کنید. مدتی طول می‌کشد تا چشم شما کیلومترشمار را ببیند و حاصل دیدن به مغز شما منتقل شود. این مدت، مدت بسیار کوتاهی است، ولی اتومبیل در این مدت بسیار کوتاه به اندازه‌ی بسیار کم جابه‌جا شده است، حاصل تقسیم این جابه‌جایی کوتاه به آن مدت کوتاه، سرعت لحظه‌ای اتومبیل است که شما روی صفحه‌ی کیلومتر شمار مشاهده می‌کنید. این سرعت می‌تواند سرعت موتورسیکلت، سرعت اتومبیل، سرعت هواپیما یا سرعت فضاپیما باشد که عدد بسیار بزرگی است.



شکل ۵ــ۲

تاکنون، به موضوع مورد بحث کاملاً به عنوان یک پدیده‌ی موجود در زندگی نگاه کردیم. حالا به این مطلب از دید ریاضی می‌نگریم.

به نموداری که با استفاده از جدول ۱ــ۲ رسم شده است نگاه کنید. شیب خط B_1E_1 از تقسیم Δy بر Δt مربوط به‌دست می‌آید. اگر Δt را کوچک‌تر کنیم خط بعدی، یعنی خط B_1D_1 را می‌توانیم رسم کنیم. اگر Δt را باز هم کوچک و کوچک‌تر کنیم درحد خط قاطع به خط مماس بر منحنی در نقطه B_1 تبدیل می‌شود.

با توجه به آنچه گفته شد، شیب خط مماس بر منحنی در B_1 با سرعت لحظه‌ای در B_1 برابر است. لذا، گفته می‌شود :

سرعت لحظه‌ای، حدّ سرعت متوسط است وقتی Δt به صفر میل می‌کند.

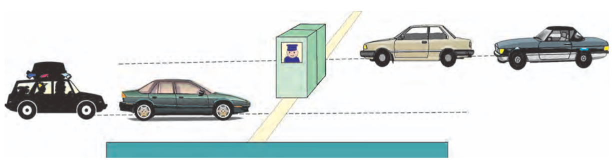
در نمودار رسم شده ما می‌خواستیم شیب خط مماس را در نقطه‌ی B_1 تعیین کنیم، لذا، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی B_1 رسم کردیم و بر نقطه‌ی B_1 تأکید نمودیم. اگر می‌خواستیم شیب خط مماس در نقطه‌ی C_1 را به‌دست آوریم، خط‌های قاطع را از نقطه‌ی C_1 رسم می‌کردیم و سرعت (لحظه‌ای) در نقطه‌ی C_1 را به‌دست می‌آوردیم.

شکل ۶ــ۲

۱ــ۲ــ حد

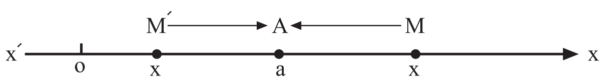
حد یکی از مفهوم‌های اساسی و مهم ریاضیات است. مفهوم‌هایی چون پیوستگی، مشتق و ... در رابطه‌ی نزدیک با مفهوم حد هستند.

در این فصل، سعی می‌کنیم با بیان مثال‌هایی، تا حدودی مفهوم ریاضی حد را روشن کنیم.



۱ــ۱ــ۲ــ میل کردن یک متغیر به یک عدد ثابت:

فرض کنید دو متحرک M و M' روی محور اعداد به سمت نقطه‌ی معین A از یک شهر در حرکت هستند. فاصله‌ی بین این متحرک‌ها و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر می‌شود ؛ به عبارت دیگر، x متحرک M (یا متحرک M') مرتباً به عدد a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (شکل ۷ــ۲).



شکل ۷ــ۲

تعریف ۱: متغیر x به عدد ثابت a میل می‌کند، و می‌نویسیم $x \to a$، در صورتی که فاصله‌ی بین متحرک M و نقطه‌ی A مرتباً کم و کم‌تر شود. جدول ۲ـ۲ میل کردن متغیر x را به عدد ۳ نشان می‌دهد.

اگر مجدداً به محور بالا توجه کنید ملاحظه می‌کنید که متحرک M' از چپ و متحرک M از راست به A نزدیک می‌شوند.

تعریف ۲: اگر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x - a > ۰$) گوییم x از راست به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^+$.

تعریف ۳: اگر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a میل کند (یعنی، همیشه $x - a < ۰$) گوییم x از چپ به a میل می‌کند و می‌نویسیم $x \to a^-$.

اینک فرض کنید که دو متحرک M و M' از نقطهٔ A دور می‌شوند.

تعریف ۴: متغیر x به $+\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان فاصله‌ی متحرک M را تا نقطه‌ی A از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر کرد، و می‌نویسیم: $x \to +\infty$.

تعریف ۵: متغیر x به $-\infty$ میل می‌کند در صورتی که بتوان x را از هر عدد منفی دلخواه انتخاب شده کوچک‌تر کرد.

نکته: به سادگی می‌توان ملاحظه کرد که وقتی $x \to -\infty$ آنگاه $(-x) \to +\infty$.

جدول‌های ۳ـ۲ و ۴ـ۲ میل کردن متغیر x را به $+\infty$ یا $-\infty$ نشان می‌دهند.

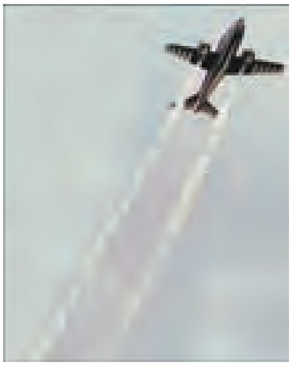
کار در کلاس ۱ـ۲

با توجه به جدول‌های ۵ـ۲ تا ۷ـ۲ بنویسید که x به چه عددی میل می‌کند.

جدول ۲ـ۲

$x \to ۳^-$ $x \to ۳^+$

x	...	۰	۱/۵	۲	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	...	۳	...	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱	۳/۵	۴	...



شکل ۸ـ۲

جدول ۳ـ۲

x	...	۱	۱۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	$۱۰^۸$	$۱۰^{۱۰}$	$۱۰^{۱۰۰}$	...

$x \longrightarrow +\infty$

جدول ۴ـ۲

x	...	$-۱۰^{۱۰۰}$	$-۱۰^{۱۰}$	$-۱۰^۸$	$-۱۰^۴$	-۱۰۰۰	-۱۰	-۱	...

$x \longrightarrow -\infty$

جدول ۵ـ۲

x	...	۰	۰/۵	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	...	۱	...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱	۱/۵	۲	...

$x \longrightarrow$

جدول ۶ـ۲

x	...	۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	...	۲

$x \longrightarrow$

جدول ۷ـ۲

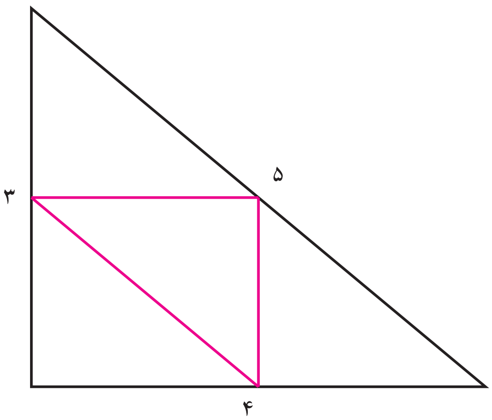
x	−۱	...	−۰/۹۹۹	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۷	−۰/۵	۰	...

$x \longrightarrow$

قبل از پرداختن به حد تابع‌ها، با چند فعالیت مفهوم حد را روشن می‌کنیم.

فعالیت ۱ــ۲

در شکل ۹ــ۲ یک مثلث قائم‌الزاویه را، با اضلاع ۴،۳ و ۵ واحد ملاحظه می‌کنید. اندازه‌ی وتر این مثلث را x_0 می‌نامیم. بنابراین، $x_0 = ۵$.

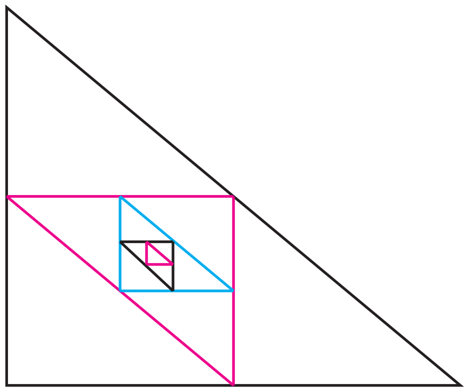


شکل ۹ــ۲

۱) اندازه‌ی محیط این مثلث را P_0 می‌نامیم. واضح است که : $P_0 = ۳+۴+۵=۱۲$

۲) مطابق شکل، وسط اضلاع به‌هم وصل شده‌اند تا مثلث قرمز رنگ ایجاد شود. اندازه‌ی وتر مثلث جدید را x_1 می‌نامیم.

اندازه‌ی x_1 چقدر است؟ $x_1 = ?$


شکل ۱۰ــ۲

۳) اندازه‌ی محیط مثلث جدید را P_1 می‌نامیم. اندازه‌ی P_1 چقدر است؟ $P_1 = ?$

اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم به شکل ۱۰ــ۲ می‌رسیم.

۴) اندازه‌ی وترها و محیط مثلث‌های بعدی را بنویسید.

$x_2 = \cdots \qquad x_3 = \cdots \qquad x_4 = \cdots$

$P_2 = \cdots \qquad P_3 = \cdots \qquad P_4 = \cdots$

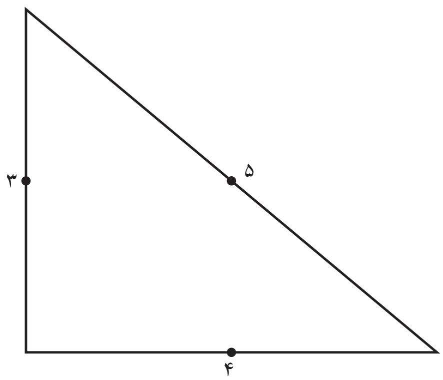
۵) اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را باز هم ادامه دهیم، اندازه‌ی وتر مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۶)اندازه‌ی محیط مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

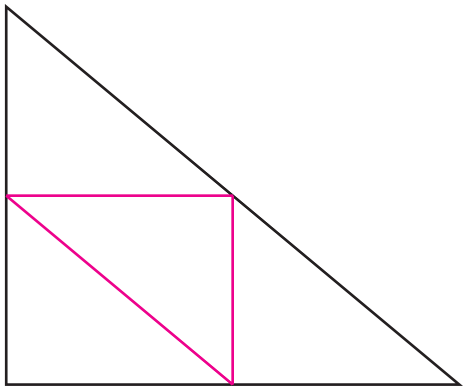
کار در کلاس ۲ــ۲

در شکل ۱۱ــ۲ یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۴،۳ و ۵ واحد ملاحظه می‌کنید. اندازه‌ی وتر این مثلث $x_0 = ۵$ و مساحت آن برابر است با

$$S_0 = \frac{۳\times۴}{۲}=۶$$



شکل ۱۱ــ۲



شکل ۱۲ــ۲

۱) وسط ضلع‌های مثلث را به‌هم وصل کرده‌ایم (شکل ۱۲ــ۲).

۲) اندازه‌ی وتر مثلث جدید را x_1 بنامید. اندازه‌ی x_1 چقدر است؟

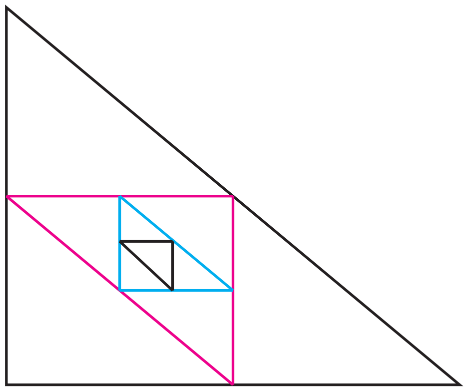
$x_1 = ?$

۳) مثلث اولیه به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟
... مثلث.

۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

۵) اندازه‌ی مساحت مثلث کوچک وسط را S_1 بنامید.

$S_1 = ?$



شکل ۱۳ــ۲

۶) همانند فعالیت ۱ــ۲، عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهید (۳ بار دیگر) (شکل ۱۳ــ۲).

۷) اندازه‌ی وتر و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.

$x_2 = \cdots \qquad x_3 = \cdots$

$S_2 = \cdots \qquad S_3 = \cdots$

$x_4 = \cdots$

$S_4 = \cdots$

۸) اندازه‌ی وتر مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کنند؟

۹) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۱۰) آیا درست است که بنویسیم :

$S_n \to 0$

$x_n \to 0$

مثال: اگر $0 < r < 1$ ثابت کنید

$$1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}.$$

حل: سعی می‌کنیم به‌طور شهودی این تساوی را اثبات کنیم :

مربع ABCD به ضلع واحد را درنظر بگیرید. مثلث‌های ADE و ABS متشابه‌اند. چرا؟ (شکل ۱۴ــ۲)

نسبت تشابه آن‌ها را می‌نویسیم :

$$\frac{AD}{DE}=\frac{BS}{AB}\Rightarrow\frac{1}{1-r}=\frac{BS}{1}$$

بنابراین، $BS=\frac{1}{1-r}$ و $CS=\frac{1}{1-r}-1=\frac{r}{1-r}$.

پاره‌خط CF را مساوی r انتخاب می‌کنیم $FS=CS-r=\frac{r^2}{1-r}$ است. از F پاره‌خط FF' را به موازات CE رسم می‌کنیم. بنابر قضیه‌ی تالس، در مثلث SCE ، داریم :

$$\frac{FF'}{CE}=\frac{FS}{CS}$$

در نتیجه،

$$\frac{FF'}{r}=\frac{\frac{r^2}{1-r}}{\frac{r}{1-r}}\Rightarrow FF'=r^2$$

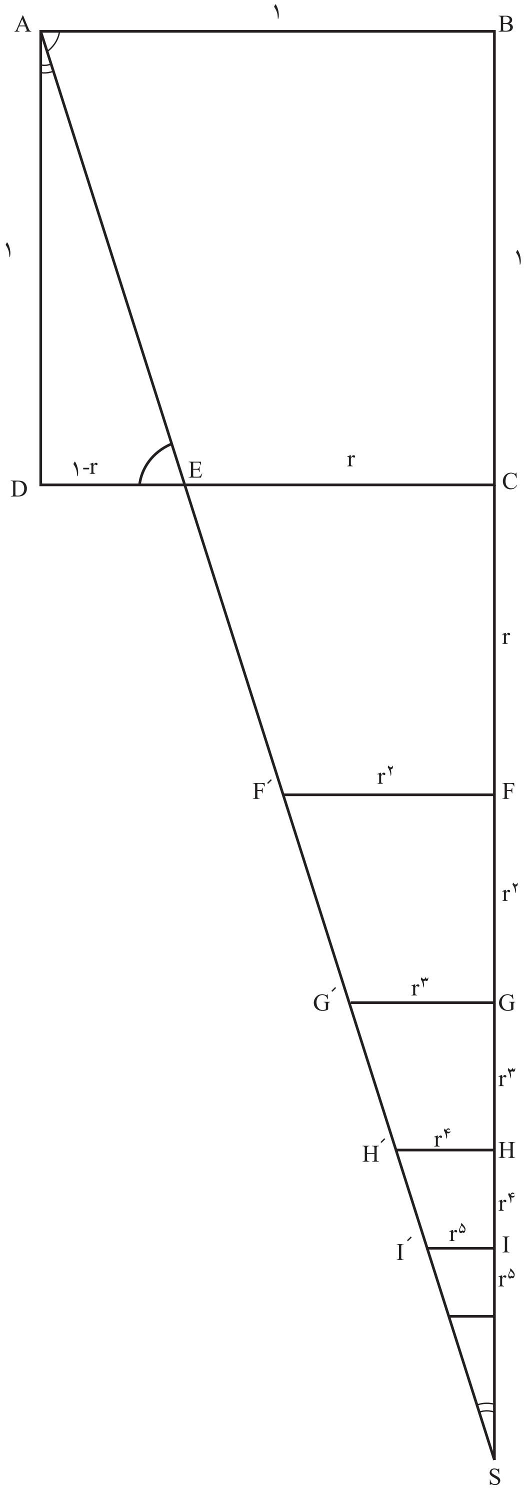
به همین ترتیب، اگر $FG=r^2$ انتخاب شود، خواهیم داشت : $GG'=r^3$ و ...

بنابراین، $BS=1+r+r^2+r^3+\cdots$ (*)

یعنی،اگر $0<r<1$ آن‌گاه $1+r+r^2+r^3+\cdots=\frac{1}{1-r}$

بدیهی است که در این حالت، $r^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ ، یعنی وقتی توان r به $+\infty$ میل می‌کند r^n به صفر میل می‌کند.

از رابطه‌ی (*) نتیجه‌های زیر به‌دست می‌آید که آن‌ها را در فعالیت بعدی مورد استفاده قرار خواهیم داد.



شکل ۱۴ــ۲

نتیجه‌ی ۱: اگر $r=\frac{۱}{۲}$ آن‌گاه

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۱۶}+\cdots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲$$

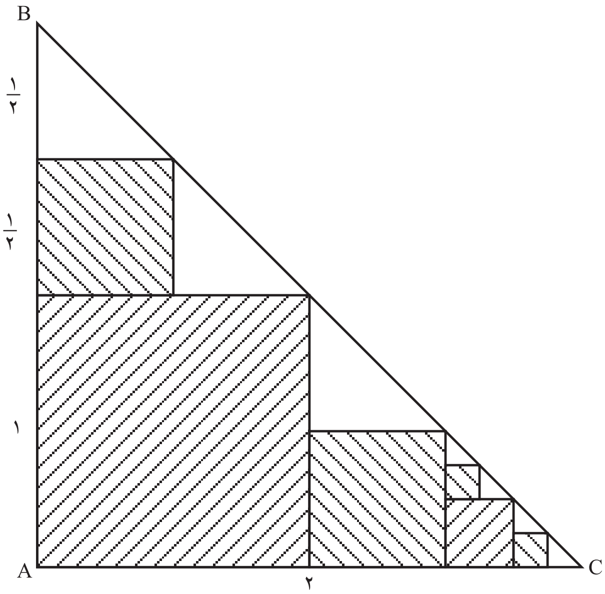
نتیجه‌ی ۲: اگر $r=\frac{۱}{۳}$ آن‌گاه

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۲۷}+\cdots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}=۱/۵$$

فعالیت ۲ــ۲

مثلث قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین ABC ، به‌طول ساق **۲** واحد، رسم شده است. از وسط هر ساق عمودی خارج شده تا یک مربع و دو مثلث ایجاد شود.

مجدداً از وسط هر ساق مثلث‌های جدید، عمودی خارج شده تا مربع و مثلث‌های جدید ایجاد شود (شکل ۱۵ــ۲).



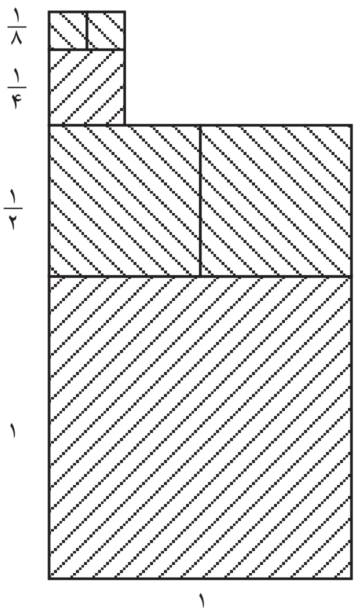
شکل ۱۵ــ۲

۱) شما نیز دو بار دیگر، مشابه آنچه روی یکی از مثلث‌های کوچک صورت گرفته، این کار را انجام دهید.

می‌خواهیم مجموع مساحت‌های تمام **مربع‌های سایه زده** شده را حساب کنیم.

برای این منظور کارهای زیر را انجام دهید.

الف) شکل ۱۶ــ۲ را کامل کنید. (در این شکل مربع‌های سایه زده شده به طرز مفیدی روی هم قرار گرفته‌اند.)



شکل ۱۶ــ۲

ب) به کمک شکل، و نتیجه‌ی ۱ مثال فوق ، سعی کنید عددی که طول مستطیل حاصل به آن نزدیک می‌شود را به دست آورید.

پ) مساحت شکل حاصل به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۲) مجموع مساحت‌های مربع‌های سایه زده شده چه ارتباطی با مساحت مثلث ABC دارد؟

۳) فقط با توجه به شکل **۱۵ــ۲** مساحت کل قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید. راهنمایی : نشان دهید که مساحت کل موردنظر برابر است با ۲ .

۴) مساحت کلّ قسمت‌های **سایه‌زده نشده** به چه عددی نزدیک می‌شود؟

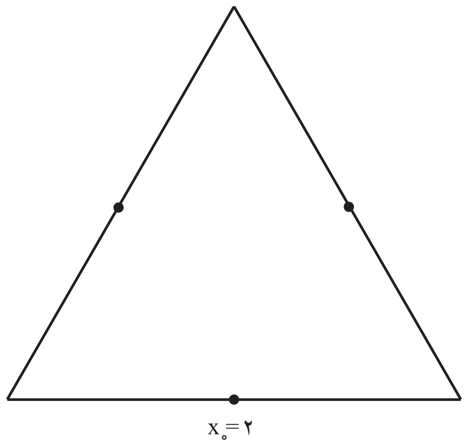
تمرین ۱ــ۲

در شکل ۱۷ــ۲، مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع $x_۰ = ۲$ رسم شده است. مساحت این مثلث $S_۰ = \sqrt{۳}$ است. چرا؟

۱) وسط ضلع‌های مثلث را به‌هم وصل کنید.

۲) اندازه‌ی ضلع مثلث جدید را $x_۱$ بنامید.

$x_۱ = \cdots$



شکل ۱۷ــ۲

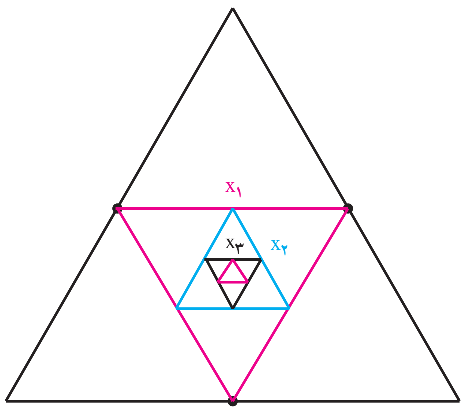
۳) مثلث به چند مثلث کوچک تقسیم شده است؟ ... مثلث.

۴) آیا مساحت این مثلث‌ها برابرند؟ چرا؟

۵) مساحت مثلث وسط را $S_۱$ بنامید.

این عمل را مطابق شکل ۱۸ــ۲ ادامه داده‌ایم.

۶) اندازه‌ی ضلع‌ها و مساحت مثلث‌های جدید را بنویسید.



شکل ۱۸ــ۲

$x_۲ = \cdots \qquad x_۳ = \cdots \qquad x_۴ = \frac{۱}{۸}$

$S_۲ = \cdots \qquad S_۳ = \cdots \qquad S_۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۲۵۶}$

۷) اندازه‌ی ضلع‌های مثلث‌ها به چه عددی میل می‌کند؟

۸) اندازه‌ی مساحت مثلث‌ها به چه عددی نزدیک می‌شود؟

آیا درست است که بنویسیم؟

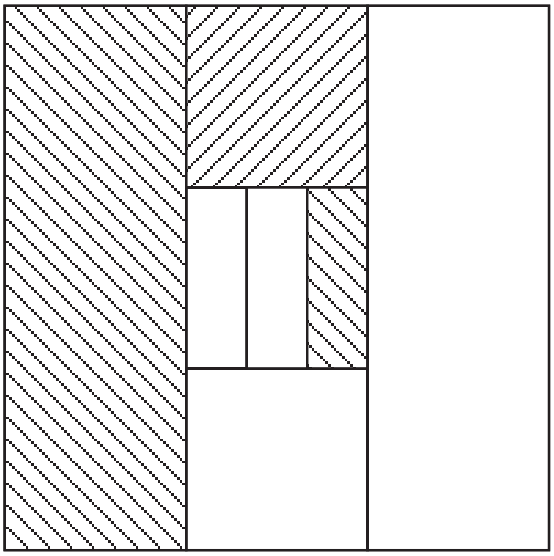
$S_n \to ۰$

$x_n \to ۰$

بازی با حد

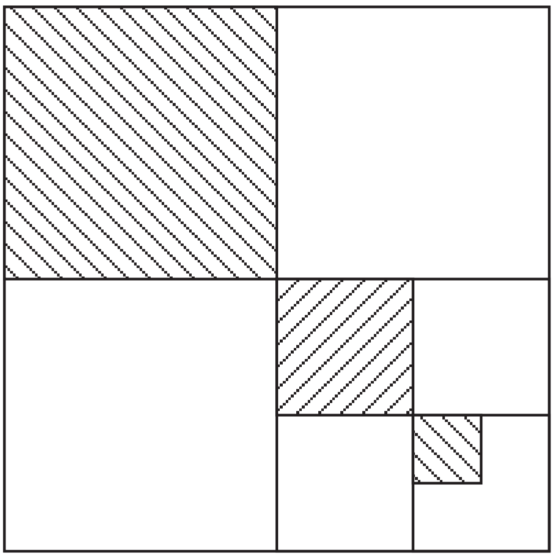
۱) در شکل ۱۹ــ۲ مربعی به ضلع واحد رسم شده است. با توجه به نحوه‌ی سایه زدن قسمت‌هایی از شکل، دوبار دیگر، مستطیل مجاور آخرین مستطیل سایه زده شده را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید و یک قسمت را سایه بزنید (این که کدام قسمت را سایه بزنید مهم است!)

فرض کنید عمل سایه زدن قسمت‌ها مرتباً ادامه پیدا کند. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



شکل ۱۹ــ۲

۲) در شکل ۲۰ــ ۲ نیز مربعی به ضلع واحد رسم شده است. مطابق شکل، دوبار دیگر مربع مقابل آخرین مربع سایه زده شده را به چهار مربع کوچک‌تر تقسیم و یک قسمت را سایه بزنید. مساحت تمام قسمت‌های سایه زده شده را حساب کنید.



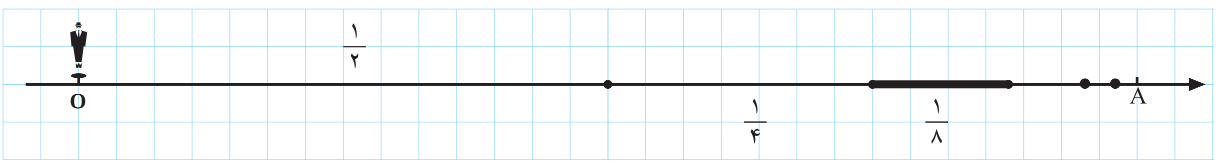
شکل ۲۰ــ۲

فعالیت ۳ــ۲

یک مثال تاریخی از حد

مسئله‌ی زنون: متحرکی از نقطه‌ی O، روی یک خط مستقیم، شروع به حرکت می‌کند و قصد دارد به نقطه‌ی A، به فاصله‌ی واحد از O، برسد. این متحرک هربار مسیری به **طول نصف فاصله‌اش تا نقطه‌ی A** را طی می‌کند و بعد کمی استراحت می‌نماید! (شکل ۲۱ــ۲)

۱) مسافتی را که این متحرک هربار طی می‌کند، x فرض کنید و سه مقدار دیگر x را، با توجه به شکل ۲۱ــ۲ بنویسید.



شکل ۲۱ــ۲

۲) آیا این متحرک به نقطه‌ی A می‌رسد؟ چرا؟

۳) فرض کنید f(x) فاصله‌ی این متحرک تا نقطه‌ی O باشد. جدول ۸ــ۲ را کامل کنید.

۴) با توجه به جدول ۸ــ۲، وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، مقدارهای f(x) به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۵) در این مثال، آیا x مساوی صفر می‌شود؟

۶) آیا هیچ یک از مقدارهای f(x) مساوی یک هست؟

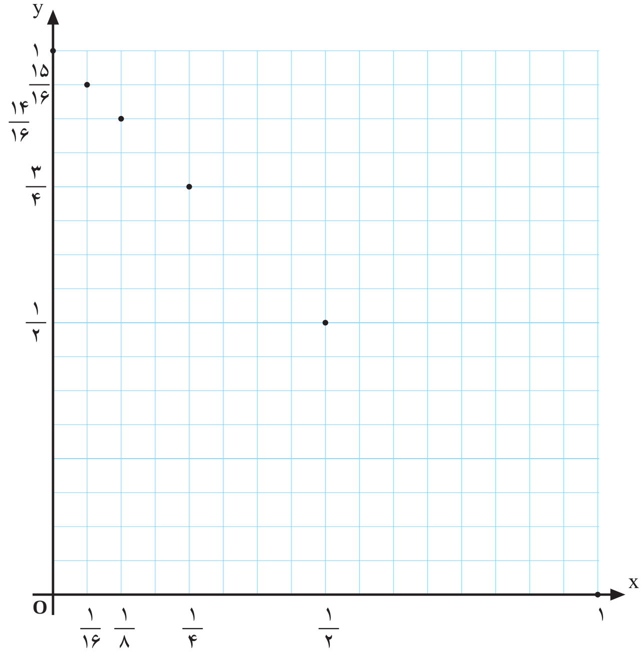
در این مثال، f(x) هرگز مساوی یک نمی‌شود ولی هرچه بخواهیم به یک نزدیک می‌شود، البته به شرطی که x را به اندازه‌ی کافی به صفر نزدیک کنیم. ریاضی‌دان‌ها، این مطلب را با نماد ریاضی زیر نمایش می‌دهند.

$$\lim_{x \to ۰} f(x) = ۱$$

(بخوانید : حد f(x) وقتی x به صفر میل می‌کند مساوی یک است)[۱]

جدول ۸ــ۲

x	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	...
f(x)	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$		$\frac{۱۵}{۱۶}$	...



شکل ۲۲ــ۲ــ نمودار **y = f(x)**

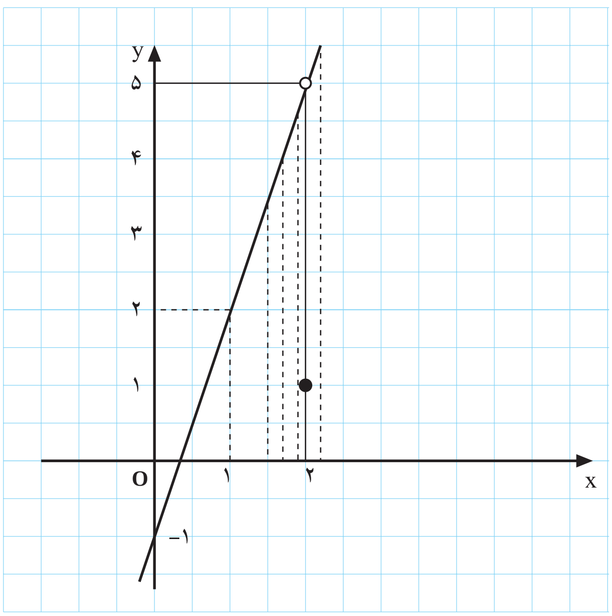
۲ــ۱ــ۲ــ حد تابع: در مطالعه‌ی تابع‌ها، مثلاً با ضابطه‌ی y = f(x) ، در بسیاری از موارد، لازم است بدانیم وقتی x به عدد معینی، مثلاً a میل می‌کند، f(x) چگونه تغییر می‌کند، و آیا مقدارهای f(x) به عدد مشخصی میل می‌کند یا نه؟ در این بخش به این موضوع می‌پردازیم.

فعالیت ۴ــ۲

تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x - ۱ & , \quad x \neq ۲ \\ ۱ & , \quad x = ۲ \end{cases}$$

نمودار این تابع نیز در شکل ۲۳ــ۲ رسم شده است.



شکل ۲۳ــ۲

۱ــ lim سه حرف اول واژه‌ی limit به معنی حدّ است.

۱) مقدارهای f(x) را برای xهایی که در جدول مقابل داده شده‌اند محاسبه و جدول ۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۹ــ۲

x	…	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	…	۲	…	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	…
f(x)=۳x-۱	…	۲				۴/۹۷	…	?	…	۵/۰۳			۸	…

۲) در این جدول x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) وقتی x به عدد ۲ میل کند، مقدار f(x) ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۴) وقتی x نقطه‌های روی نمودار به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، f(x) یا y این نقطه‌ها به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

پاسخ :
۲)
۳)
۴)

همان‌طور که می‌بینید f(x)ها به عدد ۵ نزدیک می‌شوند.

در این حالت می‌گوییم :

حد f(x) وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند مساوی ۵ است

و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۵$

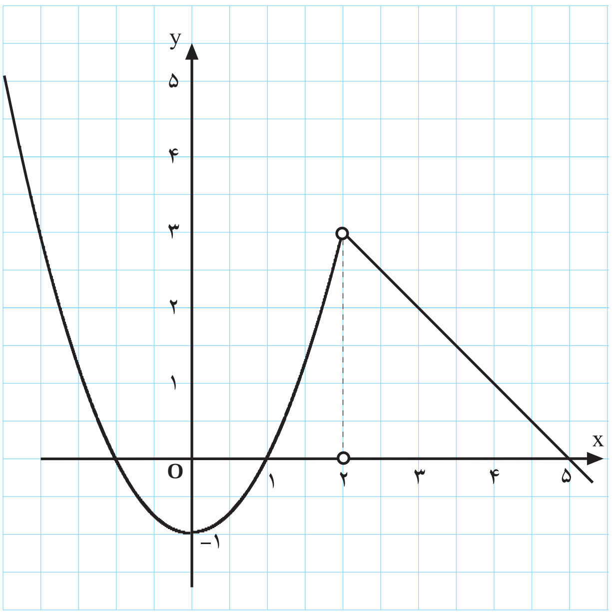
۵) آیا با تغییر مقدار f(۲)، مقدار حد f(x)، وقتی $x \to ۲$، تغییر پیدا می‌کند؟

فعالیت ۵ــ۲

تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ - ۱ \quad , \quad x < ۲ \\ ۵ - x \quad , \quad x > ۲ \end{cases}$$

تعریف شده و نمودار آن نیز در شکل ۲۴ــ۲ رسم شده است.



شکل ۲۴ــ۲

۱) با توجه به ضابطه‌ی f جدول ۱۰ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۰ــ۲

x	…	۱	۱/۵	۱/۷	۱/۹	۱/۹۹	…	۲	…	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	…
f(x)							…		…					

۲) با میل کردن x به عدد ۲، مقدارهای f(x) چگونه تغییر می‌کنند؟ آیا به عدد مشخصی میل می‌کنند؟

۳) آیا رابطه‌ی روبه‌رو درست است؟ $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۳$ (*)

۴) به کمک نمودار تابع، حد تابع f را وقتی $x \to ۲$ بررسی کنید.

۵) آیا نمودار هم درستی رابطه (*) را نشان می‌دهد؟

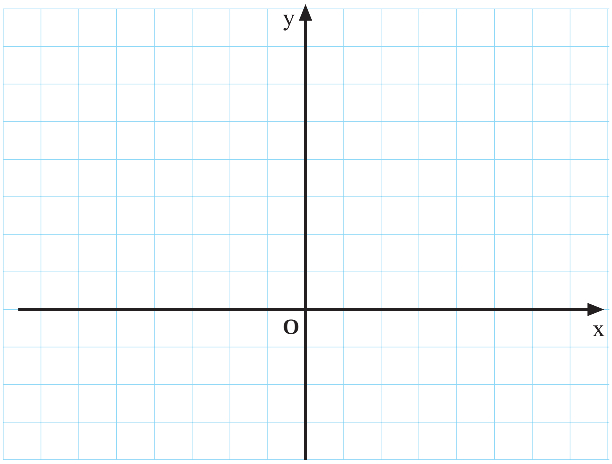
پاسخ :
۲)
۳)
۴)
۵)

کار در کلاس ۳ـ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases}۲x+۶ \quad , \quad x<-۱ \\ ۳-x \quad , \quad x>-۱\end{cases}$$

۱) نمودار $y=f(x)$ را در شکل (۲۵ـ۲) رسم کنید.



شکل ۲۵ـ۲

۲) حد $f(x)$ را وقتی $x\to -۱$ به‌دست آورید.

۳) با تشکیل جدول تغییرات x، جدول ۱۱ـ۲، برای مقدارهایی که به عدد ۱ـ میل می‌کنند، حد تابع را، وقتی $x\to -۱$ ، به دست آورید.

جدول ۱۱ـ۲

x	... ۱- ...
f(x)	

۴) آیا نمودار و جدول هر دو، نشان می‌دهند که :

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=۴$$

۳ـ۱ـ۲ـ تعریف حد تابع: تابع f را که در همسایگی I از عدد a (یعنی در یک بازه‌ی باز I شامل عدد a) تعریف شده است (مگر احتمالاً در a) درنظر می‌گیریم. گوییم حد تابع f، وقتی متغیر x به عدد a میل می‌کند، برابر عدد L است درصورتی که بتوانیم $f(x)$ را هرچه بخواهیم به L نزدیک کنیم، به شرط آن که x را به قدر کافی به عدد a نزدیک کرده باشیم. این مطلب با نماد ریاضی زیر نمایش داده می‌شود :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

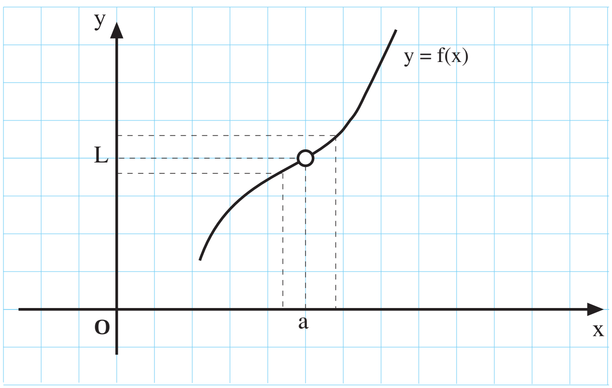
مثلاً، با توجه به آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم :

$$\lim_{x\to ۲}(۳x-۱)=۵$$

ضمناً، از آنچه تاکنون بررسی کرده‌ایم به نکته‌های زیر پی می‌بریم.

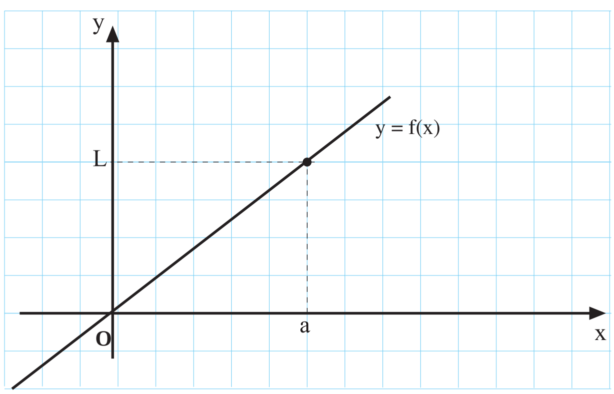
نکته‌ی ۱: وجود حد تابع f، وقتی $x\to a$ ، به معین بودن یا نبودن تابع در نقطه‌ی $x=a$ بستگی ندارد. لذا، حالت‌های زیر قابل تشخیص است :

الف) تابع f، وقتی $x\to a$ ، حد دارد ولی f در a تعریف نشده است (شکل ۲۶ـ۲).



شکل ۲۶ـ۲

ب) تابع f، وقتی $x\to a$ ، حد دارد و f در a تعریف شده است (شکل‌های ۲۷ـ۲ و ۲۸ـ۲ـ الف).

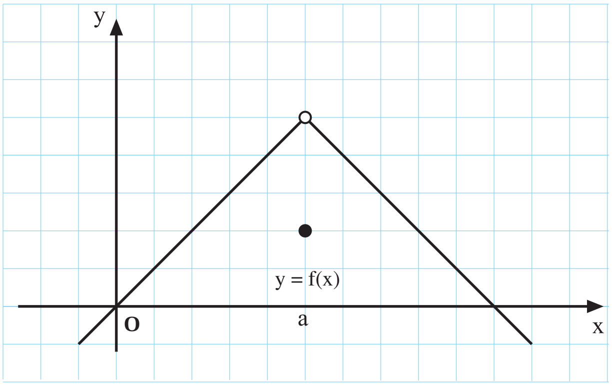


شکل ۲۷ـ۲

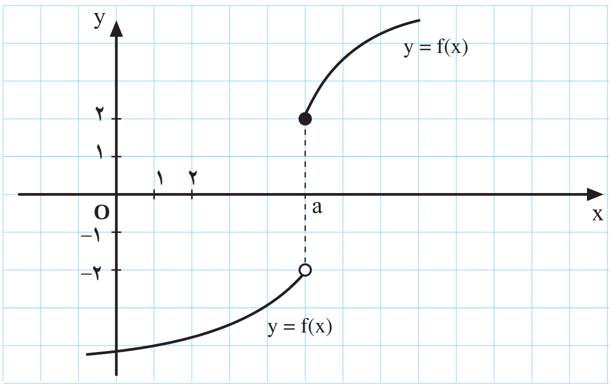
پ) تابع f، وقتی $x \to a$، حد ندارد. (شکل ۲۸ـ۲ـب).

نکته‌ی ۲: اگر تابع f، وقتی $x \to a$ دارای حد L باشد آنگاه حد $f(x)-L$، وقتی $x \to a$، مساوی صفر است و بالعکس.

نکته‌ی ۳: اگر تابع f، وقتی $x \to a$، دارای حد L باشد حد f وقتی $x \to a^-$ یا $x \to a^+$ نیز وجود دارد و مساوی L است.



(الف)



(ب)

شکل ۲۸ـ۲

تمرین ۲ـ۲

۱ـ با توجه به شکل ۲۸ـ ۲ـ ب به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) حد $f(x)$ وقتی $x \to a^+$ چیست؟

ب) حد $f(x)$ وقتی $x \to a^-$ چیست؟

پ) آیا $f(x)$، وقتی $x \to a$، حد دارد؟

۲ـ تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = ۳x^۲ - ۱$ تعریف شده است. در مورد حد این تابع، وقتی $x \to ۱$، تحقیق کنید (جدول ۱۲ـ۲).

جدول ۱۲ـ۲

x	
f(x)	

۳ـ تابع $g: \mathbb{R} - \{-۱\} \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$g(x) = x^۳ + ۱ \, , \quad x \neq -۱$$

در رفتار این تابع (یعنی حد داشتن یا نداشتن) وقتی $x \to -۱$ تحقیق کنید (جدول ۱۳ـ۲).

جدول ۱۳ـ۲

x	
g(x)	

۴ــ تابع $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف شده است.

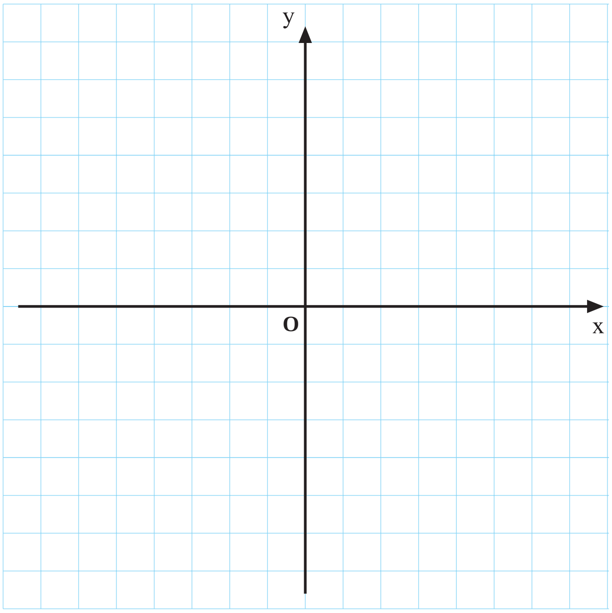
$$h(x)=\begin{cases} x^{۲}, & x \le -۲ \\ ۲-x, & x > -۲ \end{cases}$$

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to -۲} h(x)$ را حساب کنید.

ب) آیا مقداری که به‌دست آورده‌اید با $h(-۲)$ برابر است؟

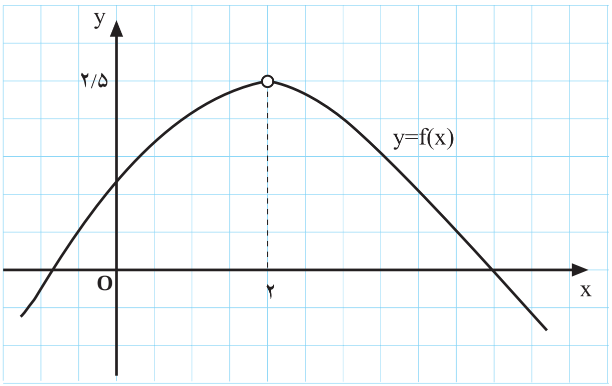
پ) نمودار تابع h رادر دستگاه مختصات روبه‌رو رسم کنید.

ث) نتایج بالا با شکل هم‌خوانی دارند؟



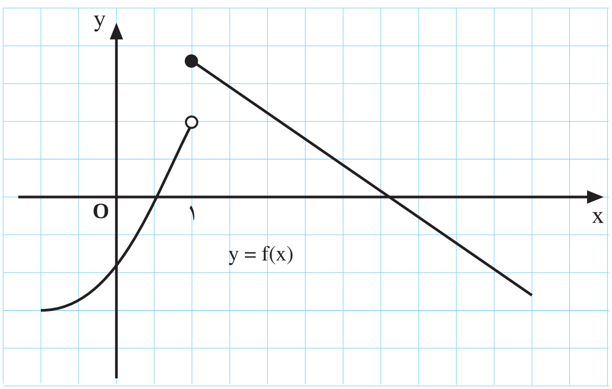
شکل ۲۹ــ۲

۵ــ با توجه به نمودار شکل ۳۰ــ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را تعیین کنید.



شکل ۳۰ــ۲

۶ــ با توجه به نمودار شکل ۳۱ــ۲ آیا $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ وجود دارد؟



شکل ۳۱ــ۲

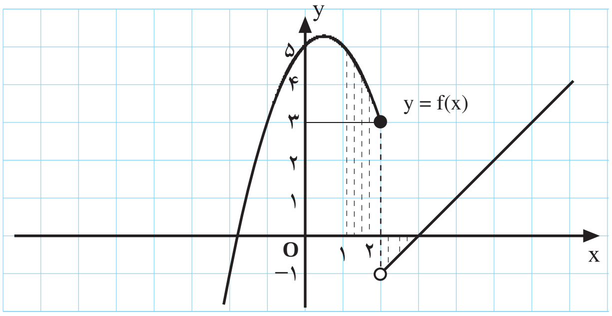
۴ــ۱ــ۲ــ حد چپ و حد راست یک تابع: معمولاً

برای تعیین حد بعضی از تابع‌ها، مانند $\frac{|x|}{x}$ در $x=۰$ ، باید حد چپ و حد راست آن‌ها را مورد بررسی قرار داد.

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases} ۵+x-x^{۲}, & x\leq ۲ \\ x-۳, & x>۲ \end{cases}$$

نمودار $y=f(x)$ نیز در شکل ۳۲ــ۲ رسم شده است.



شکل ۳۲ــ۲

جدول ۱۴ــ۲ مقدارهای $f(x)$ را وقتی $x\to ۲^{-}$ نشان می‌دهد.

جدول ۱۴ــ۲

x	…	۱	۱/۵	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	…	۲
$f(x)=۵+x-x^{۲}$	…	۵	۴/۲۵	۳/۵۶	۳/۰۹	۳/۰۲۹۹	…	?

با توجه به جدول ۱۴ــ۲، و y نقطه‌ها نتیجه می‌گیریم :

$\boxed{\text{حد } f(x) \text{ وقتی } x\to ۲^{-} \text{ برابر با ۳ است.}}$

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم :

$$\lim_{x\to ۲^{-}} f(x)=۳$$

جدول ۱۵ــ۲ نیز مقدارهای $f(x)$ را، وقتی $x\to ۲^{+}$ ، نشان می‌دهد.

جدول ۱۵ــ۲

x	۲	…	۲/۰۱	۲/۱	۲/۳	۲/۵	۳	…
$f(x)=x-۳$		…	−۰/۹۹	−۰/۹	−۰/۷	−۰/۵	۰	…

با توجه به جدول ۱۵ــ۲، و y نقطه‌های روی نمودار، نتیجه می‌گیریم :

$\boxed{\text{حد } f(x) \text{ وقتی } x\to ۲^{+} \text{ برابر با } -۱ \text{ است.}}$

این مطلب را با نماد ریاضی زیر نشان می‌دهیم :

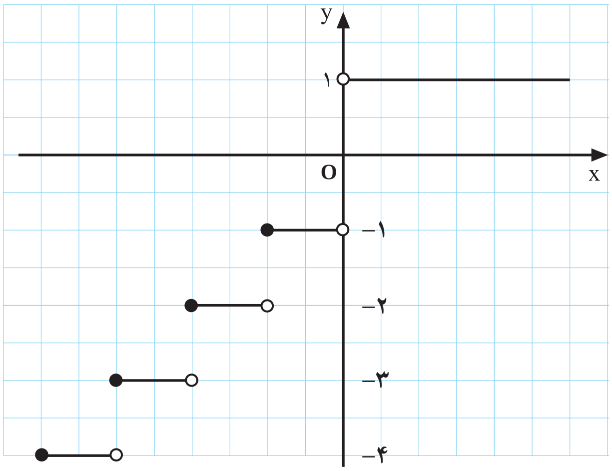
$$\lim_{x\to ۲^{+}} f(x)=-۱$$

با توجه به این که حد چپ و حد راست تابع f وقتی $x\to ۲$ برابر نیستند نتیجه می‌گیریم که تابع f، وقتی $x\to ۲$ ، حد ندارد.

فعالیت ۶ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده و قسمتی از نمودار آن نیز رسم شده است.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$$



شکل ۳۳ــ۲

۱) با توجه به نمودار این تابع (شکل ۳۳ــ۲)، حدس می‌زنید وقتی $x\to 0^-$ مقدارهای تابع به چه عددی میل می‌کنند؟

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=?$$

۲) با توجه به تعریف تابع قدرمطلق، وقتی $x>0$ مقدار $f(x)$ چیست؟

۳) حد $f(x)$، وقتی $x\to 0^+$، چیست؟

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=?$$

۴) با توجه به مرحله‌های ۱ و ۳، وقتی $x\to 0$، آیا مقدارهای $f(x)$ به یک عدد مشخص میل می‌کنند؟

۵) آیا این تابع، وقتی $x\to 0$، حد دارد؟ چرا؟

> اگر حد چپ و حد راست یک تابع در یک نقطه متفاوت باشند آن تابع در آن نقطه حد ندارد.

۶) با توجه به نمودار این تابع می‌توانید بگویید این تابع در چه نقاطی حد ندارد؟

تمرین ۳ــ۲

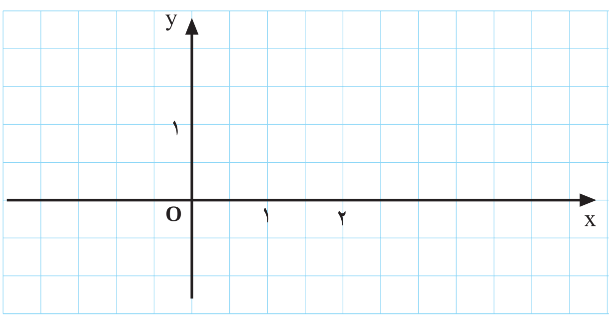
۱ــ تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\ge 1\\ 0, & x<1\end{cases}$$

الف) نمودار $y=f(x)$ را در بازه‌ی $[0,2]$ رسم کنید (شکل ۳۴ــ۲).

ب) مطلوب است محاسبه‌ی $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

پ) آیا تابع f، وقتی $x\to 1$، حد دارد؟

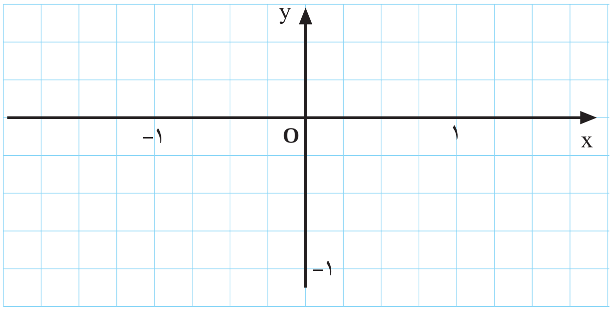


شکل ۳۴ــ۲

۲ــ تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است. در رفتار این تابع وقتی $x \to ۰$ تحقیق کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۰ \quad , & x>۰ \\ \dfrac{x}{|x|} \quad , & x<۰ \end{cases}$$

(**راهنمایی:** نمودار تابع را در $(-۱\ ,\ ۱)-\{۰\}$ رسم کنید (شکل ۳۵ــ۲)).

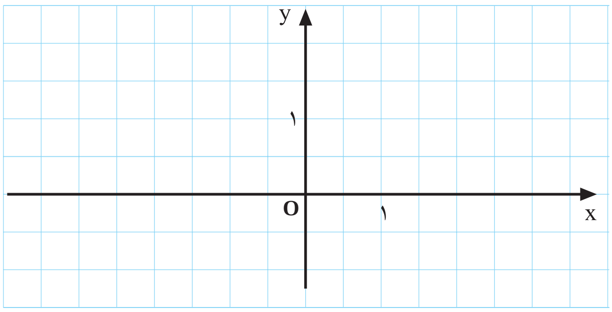


شکل ۳۵ــ۲

۳ــ فرض کنید تابع f به‌صورت زیر تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱ \quad , & x>۰ \\ x-a \quad , & x<۰ \end{cases}$$

مقدار a را طوری تعیین کنید که $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود داشته باشد. سپس مقدار این حد را بنویسید و نمودار تابع را رسم کنید (شکل ۳۶ــ۲).



شکل ۳۶ــ۲

فعالیت ۷ــ۲

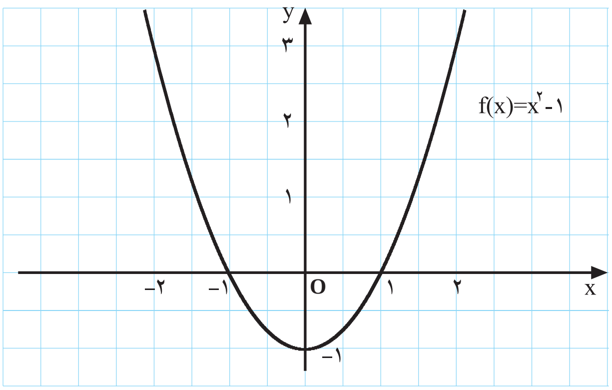
تابع $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲-۴x+۳}$ را درنظر بگیرید.

۱) حد تابع $f(x)=x^۲-۱$ را، وقتی $x \to ۱$، تعیین کنید (شکل ۳۷ــ۲).

۲) حد تابع $g(x)=x^۲-۴x+۳$ را، وقتی $x \to ۱$، به‌دست آورید (شکل ۳۸ــ۲).

۳) حد تابع $q(x)=\dfrac{x^۲-۱}{x^۲-۴x+۳}$، وقتی $x \to ۱$، به چه صورتی درمی‌آید؟

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x^۲-۴x+۳}=\cdots$$



شکل ۳۷ــ۲

۴) آیا می‌توان این حد را با استفاده از مطالبی که تاکنون گفته شده است حساب کرد؟

۵) صورت و مخرج تابع کسری $\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴x+۳}$ ، یعنی $f(x)=x^{۲}-۱$ و $g(x)=x^{۲}-۴x+۳$ ، را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه کنید.

$$x^{۲}-۱=(x-۱)(\qquad)$$

$$x^{۲}-۴x+۳=(x-۱)(\qquad)$$

۶) با توجه به این که وقتی $x\to ۱$ همواره $x\neq ۱$ ، یعنی $x-۱\neq ۰$ ، تابع $q(x)$ را ساده کنید.

$$q(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}-۴x+۳}=\frac{(x-۱)(\qquad)}{(x-۱)(\qquad)}$$

$=$ ------------

۷) آیا $q(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$ ؟

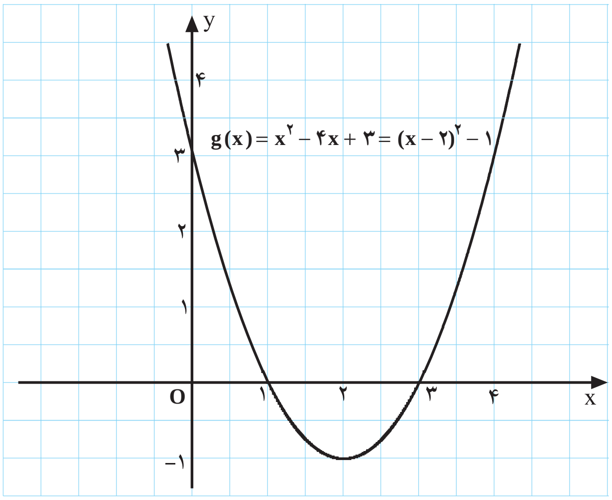
۸) حد تابع $q(x)=\frac{x+۱}{x-۳}$ را، وقتی $x\to ۱$ ، حساب کنید(شکل ۳۹ــ۲).

۹) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۱} q(x)=-۱$ درست است؟

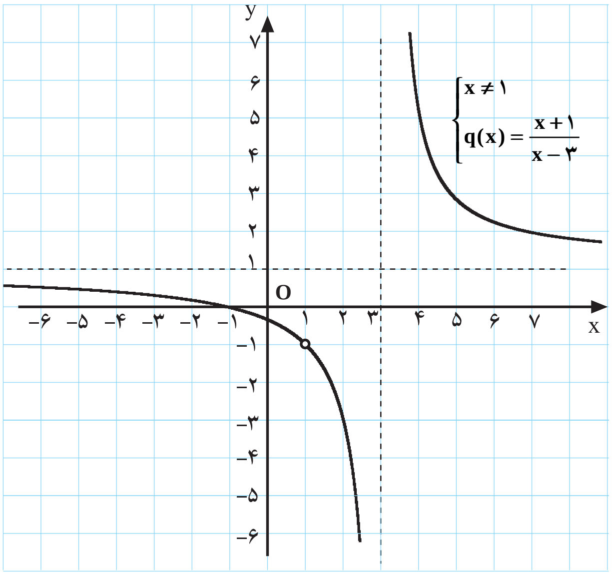
به‌طورکلی اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ آنگاه حد $q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ ، وقتی $x\to a$ ، به صورت $\frac{۰}{۰}$ درمی‌آید و نمی‌توان مقدار آن را به کمک مطالبی که تاکنون گفته شده است محاسبه کرد. برای محاسبه‌ی مقدار این حد، با توجه به نوع تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ باید روش مناسبی اختیار کرد.

مطالب ذیل، وقتی که $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای باشند، مفید است.

۵ــ۱ــ۲ــ بخش‌پذیری چندجمله‌ای‌ها بر $x-a$: اگر $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_۱x+a_۰$ و به ازای $x=a$ داشته باشیم $f(a)=۰$ آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است. از این ویژگی می‌توان برای تجزیه‌ی چندجمله‌ای‌ها استفاده کرد.



شکل۳۸ــ۲



شکل۳۹ــ۲

فعالیت ۸ ــ ۲

چندجمله‌ای $f(x)=2x^2-5x+2$ را درنظر می‌گیریم.

$$\begin{array}{l|l} & x-2 \\ \hline 2x^2-5x+2 & \end{array}$$

۱) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

۲) آیا $f(x)$ بر $(x-2)$ بخش‌پذیر است؟ چرا؟

۳) خارج قسمت تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به‌دست آورید.

۴) به کمک تقسیم بالا، چندجمله‌ای $f(x)$ را به حاصل‌ضرب عوامل تجزیه کنید.

$$2x^2-5x+2=(x-2)\,(\qquad\qquad)$$

تمرین ۴ ــ ۲

۱) تقسیم‌های روبه‌رو را انجام دهید.

الف) $-2x^3+5x^2+8x-20 \;\Big|\; \underline{x+2}$

ب) $3x^4+2x^2-5 \;\Big|\; \underline{x-1}$

پ) $3x^2+5x+\frac{7}{4} \;\Big|\; \underline{x+\frac{1}{2}}$

۲) مقدار a را چنان تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x)=ax^3+(a+1)x^2-18$ بر $(x-3)$ بخش‌پذیر باشد.

روش هورنر

برای به‌دست آوردن خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم یک چندجمله‌ای بر $(x-a)$ روشی ساده وجود دارد که به **روش هورنر** مشهور است. با ذکر دو مثال این روش را توضیح می‌دهیم :

مثال ۱: برای انجام تقسیم

$$2x^3-3x^2+5x+10\div(x+1)$$

به صورت زیر عمل می‌کنیم.

۱) چندجمله‌ای را به‌صورت استاندارد می‌نویسیم.

۲) ضریب‌های چندجمله‌ای را به ترتیب از چپ به راست می‌نویسیم.

(اگر توانی از x نباشد ضریب آن را صفر منظور می‌کنیم.)

۳) ریشه‌ی $(x+۱)=۰$ ، یعنی صفر مقسوم‌علیه را به‌دست می‌آوریم.

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

۴) مقدار ریشه را در جدولی به‌صورت جدول ۱۶ــ۲ می‌نویسیم.

جدول ۱۶ــ۲

		۲	۳-	۵	۱۰
۱-	+	۰			
		۲			

۵) عدد صفر را زیر ضریب بزرگ‌ترین درجه می‌نویسیم و با آن جمع می‌کنیم.

۶) بقیه‌ی عملیات را مطابق جدول ۱۷ــ۲ انجام می‌دهیم.

جدول ۱۷ــ۲

		۲	۳-	۵	۱۰
۱-	+	۰	$(-۱)\times ۲$	$(-۱)\times(-۵)$	$(-۱)\times ۱۰$
		۲	۵-	۱۰	۰

۷) با استفاده از اعداد جدول ۱۷ــ۲ خارج قسمت تقسیم را می‌نویسیم.

$$۲x^۳-۳x^۲+۵x+۱۰=(x+۱)(۲x^۲-۵x+۱۰)$$

مثال ۲: تقسیم $x^۴-۴x^۲+۲x-۴$ بر $(x-۲)$ را به روش هورنر انجام دهید. سپس خارج قسمت تقسیم را بنویسید.

حل۲

جدول ۱۸ــ۲

	۱	۰	۴-	۲	۴-
۲	۰ +	۲	۴	۰	۴
	۱	۲	۰	۲	۰

$$\text{خارج قسمت}=x^۳+۲x^۲+۲$$

مثال ۳: حد تابع $q(x)=\frac{۳x^۲+x-۴}{x^۲+x-۲}$ را، وقتی $x\to ۱$ ، تعیین کنید.

حل۳ : چون صورت و مخرج کسر مساوی $q(x)$، به ازای $x=۱$ صفر می‌شوند، پس چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج بر $(x-۱)$ بخش‌پذیرند. با استفاده از بخش‌پذیری داریم :

$$۳x^۲+x-۴=(x-۱)(۳x+۴)$$

$$x^۲+x-۲=(x-۱)(x+۲)$$

بنابراین، با توجه به این‌که $x\neq ۱$ ،

$$q(x)=\frac{۳x^۲+x-۴}{x^۲+x-۲}=\frac{(x-۱)(۳x+۴)}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۳x+۴}{x+۲}$$

لذا،

$$\lim_{x\to ۱} q(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x+۴}{x+۲}=\frac{\lim_{x\to ۱}(۳x+۴)}{\lim_{x\to ۱}(x+۲)}=\frac{۳+۴}{۱+۲}=\frac{۷}{۳}.$$

فعالیت ۹ـ۲

تابع $q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3x^3+4x^2-5x-2}{x^4+2x^2+13x+2}$ را در نظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(-2)$ و $g(-2)$ را به‌دست آورید.

۲) حد $q(x)$، وقتی $x \to -2$ ، به چه صورت درمی‌آید؟

۳) به کمک بخش‌پذیری صورت و مخرج کسر مساوی $q(x)$ را تجزیه و بعد ساده کنید.

۴) آیا $q(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{x^3+2x^2+6x+1}$ ؟

۵) اینک حد $q(x)$ را، وقتی $x \to -2$ ، حساب کنید.

۶ـ۱ـ۲ـ قضیّه‌ی فشردگی: اگر به ازای هر x از بازه‌ی I، که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، داشته باشیم :

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad \text{آنگاه} \quad \lim_{x\to a} g(x)=\lim_{x\to a} h(x)=L$$

مثال ۱: ثابت کنید $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$

حل: می‌دانیم که همواره $-1 \le \sin x \le 1$ ، پس، اگر x عددی مثبت باشد داریم :

$$-\frac{1}{x} \le \frac{\sin x}{x} \le \frac{1}{x}$$

امّا، $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$. بنابراین، طبق نامساوی‌های بالا و قضیه‌ی فشردگی

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی $(x \ne 0)$ ، $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ را در نظر بگیرید. جدول ۱۹ـ۲ تغییرات این تابع را وقتی $x \to 0$ نشان می‌دهد.

تمرین ۵ ـ۲

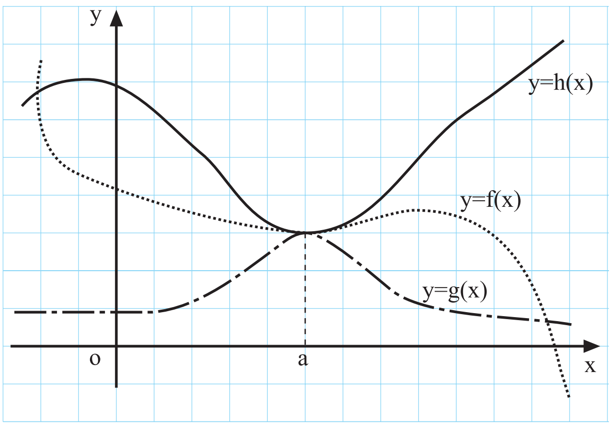
هریک از حدهای زیر را با استفاده از بخش‌پذیری حساب کنید.

الف) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$

ب) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{x^3+2x}$

پ) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{(x+2)^3}$

ت) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$



شکل ۴۰ـ۲

جدول ۱۹ـ۲

x	...	$-\frac{\pi}{30}$	$-\frac{\pi}{180}$	$-\frac{\pi}{9000}$	... ۰ ...	$\frac{\pi}{9000}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{30}$	...
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	...	۰/۹۹۸۱۷۳	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۹۹۹۹۸	تعریف‌نشده	۰/۹۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۱۷۳	...

به طوری که ملاحظه می‌شود، وقتی $x \to 0$ ، $\frac{\sin x}{x}$ به‌عدد یک میل می‌کند. یعنی، جدول ۱۹ـ۲ نشان می‌دهد که

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

نتیجه‌ی ۱: $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

زیرا، با توجه به این که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، داریم :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

نتیجه‌ی ۲: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{x} = m$ و $\lim_{x \to 0} \frac{\tan mx}{x} = m$ ، که در آن‌ها m عددی حقیقی و مخالف صفر است.

زیرا، می‌توان نوشت :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \to 0} m.\frac{\sin mx}{mx}$$

با فرض $mx = y$ ، واضح است که وقتی $x \to 0$ ، $y = mx \to 0$ ، بنابراین :

$$\lim_{x \to 0} m \frac{\sin mx}{mx} = \lim_{y \to 0} m.\frac{\sin y}{y} = m.1 = m$$

به همین ترتیب،

$$\lim_{x \to 0} m \frac{\tan mx}{mx} = \lim_{y \to 0} m.\frac{\tan y}{y} = m.1 = m$$

مثال‌ها (در رابطه با نتیجه‌ی ۲)

الف) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x}$ را تعیین کنید.

حل: می‌توان نوشت :

$$\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}$$

ب) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{x}$ را حساب کنید.

حل: داریم :

$$\frac{\tan 5x}{x} = 5 \frac{\tan 5x}{5x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\tan 5x}{x} = 5$$

پ) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{3x}{2}}{x}$ را حساب کنید.

حل: داریم :

$$\frac{\tan \frac{3}{2}x}{x} = \frac{3}{2} \frac{\tan \frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}$$

بنابراین، با فرض $\frac{3}{2}x = t$ داریم :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan \frac{3}{2}x}{x} = \frac{3}{2} \lim_{t \to 0} \frac{\tan t}{t} = \frac{3}{2}.$$

محل حل تمرین

تمرین ۶ـ۲

۱ـ حدهای زیر را حساب کنید. (مستقیماً از نتیجه‌های ۱ و ۲ استفاده کنید.)

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin ۵x}{x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin ۳x}{۲x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin^{۲} x}{x^{۲}}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan \pi x}{x}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan \sqrt{۲}x}{۳x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan x \sin x}{x^{۲}}$

۲ـ نشان دهید که اگر n و m اعداد حقیقی غیر صفر باشندآن‌گاه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

۳ـ اگر m و n اعداد حقیقی غیر صفر باشند حد زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\tan mx}{nx}$$

۴ـ با استفاده از تمرین‌های ۲ و ۳ مقدار حدهای زیر را بنویسید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan ۲x}{\sqrt{۳}x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sin \sqrt{۵}x}{۳x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\tan ۲x \sin ۳x}{۶x^{۲}}$

ت) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{۲}}$

آزمون پایانی (۱)

۱ــ در شکل ۴۱ــ۲ مربعی به ضلع ۴ سانتی‌متر رسم شده است. وسط ضلع‌های مجاور مربع نیز به هم وصل شده‌اند. پاسخ دهید :

الف) مساحت مربع $A'B'C'D'$ چقدر است؟

ب) مساحت قسمت سایه زده شده (مثلث $A'BB'$) چقدر است؟

۲ــ مجدداً وسط ضلع‌های مربع $A'B'C'D'$ شکل مسئله‌ی قبل را به هم وصل کرده‌ایم و مطابق شکل ۴۲ــ۲ یک گوشه‌ی آن را سایه زده‌ایم و این کار را روی مربع جدید تکرار کرده‌ایم و… با توجه به این مطلب، مجموع زیر را حساب کنید.

$$۲+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\cdots=$$

این مجموع با مساحت قسمت‌های سایه زده شده چه رابطه‌ای دارد؟

۳ــ فرض کنید :

$$f(x)=\begin{cases} a-x^{۲} & , \quad x>۱ \\ x^{۲} & , \quad x<۱ \end{cases}$$

اگر تابع f در $x=۱$ حد داشته باشد، مقدار a برابر چیست؟

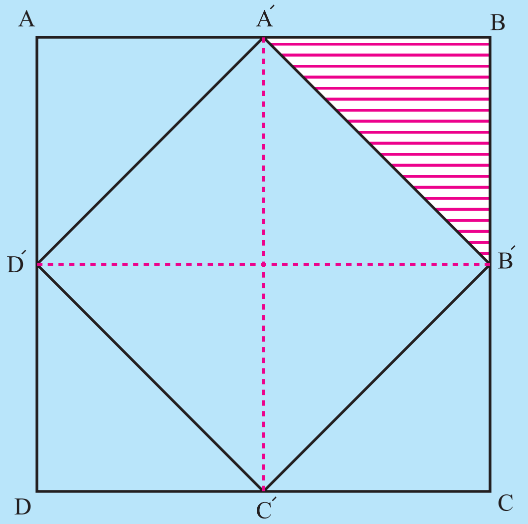
۴ــ فرض کنید :

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & , \quad x>۲ \\ ۳ & , \quad x=۲ \\ x-۱ & , \quad x<۲ \end{cases}$$

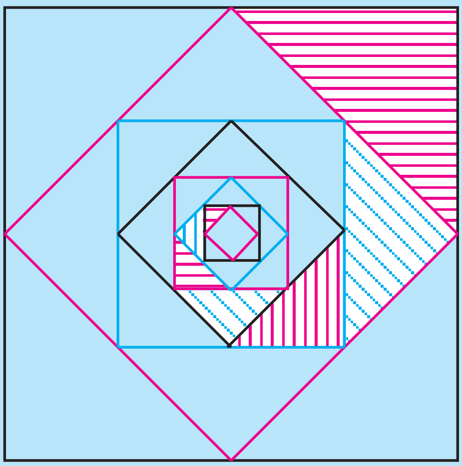
حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)+f(۲)+\lim_{x\to ۲^+} f(x)$$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی



شکل ۴۱ــ۲



شکل ۴۲ــ۲

بخش دوم

فصل دوم

پیوستگی

هدف کلی

شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ تابع پیوسته را تعریف کند.

۲ــ با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های موردنظر حساب کند.

۳ــ نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند.

۴ــ مسائل پیوستگی را به‌طور نسبی حل کند.

پیش‌آزمون (۲)

۱ــ واژه‌هایی که زیر آن‌ها خط کشیده شده است به چه معنی هستند؟

الف) راه‌آهن ایران از آذربایجان غربی به راه‌آهن اروپا پیوسته است.

ب) گرمای آب رادیاتور ماشین به‌طور ناپیوسته خنک می‌شود.

پ) کامپیوتر مسائل گسسته را مورد بررسی قرار می‌دهد.

ت) یک منحنی بدون بریدگی یا گسستگی، پیوسته است.

ث) واژه‌های وصل، فصل، متصل و منفصل به چه معنا هستند؟

۲ــ ویژگی عمده‌ی یک تابع چیست؟

۳ــ تابع f به صورت زیرتعریف می‌شود :

$$f(x)=\begin{cases}۱ & x>۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x<۰\end{cases}$$

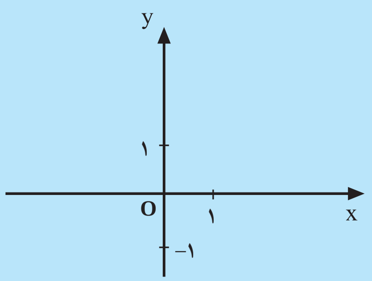
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) نمودار این تابع در چه نقطه‌ای گسستگی دارد؟

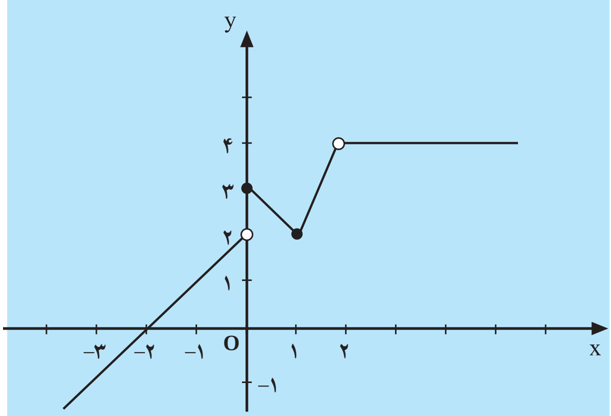
پ) نمودار این تابع از چند قسمت تشکیل شده است؟

۴ــ نمودار تابع f با ضابطه‌ی
$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & x<۰\\ ۳-x & ۰\le x<۱\\ ۲x & ۱\le x<۲\\ ۴ & x>۲\end{cases}$$
، (شکل ۴۴ــ۲)، در چه نقاطی بریدگی دارد؟

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۴۳ــ۲



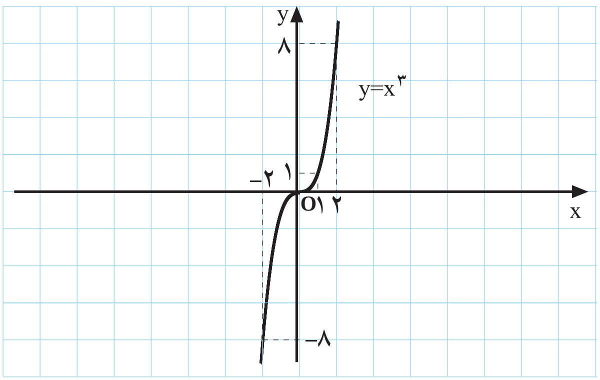
شکل ۴۴ــ۲

۲ـ۲ــ پیوستگی

پیوستگی تابع رابطه‌ی بسیار نزدیکی با مفهوم حد تابع دارد.

ابتدا پیوستگی تابع را در یک نقطه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=x^{۳}$ و نمودار آن را در شکل ۴۵ــ۲ درنظر می‌گیریم. این تابع برای تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، یعنی $D_f=\mathbb{R}$. بنابراین، برای هر $a\in\mathbb{R}$ نقطه‌ی $A(a,f(a))$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. ضمناً همان‌طور که ملاحظه می‌شود این نمودار در هیچ نقطه‌ای بریدگی ندارد. به عبارت دیگر، منحنی $y=f(x)$ **یک‌تکه (یا پیوسته)** است. لذا، تابع $y=x^{۳}$ را **پیوسته** نامیم.



شکل ۴۵ــ۲

به‌طور کلی، اگر نمودار یک تابع در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریفش **بریدگی نداشته باشد پیوسته است.**

اکنون مقدار تابع f و حد آن را در یک نقطه، مثلاً، $x=۱$، به‌دست می‌آوریم:

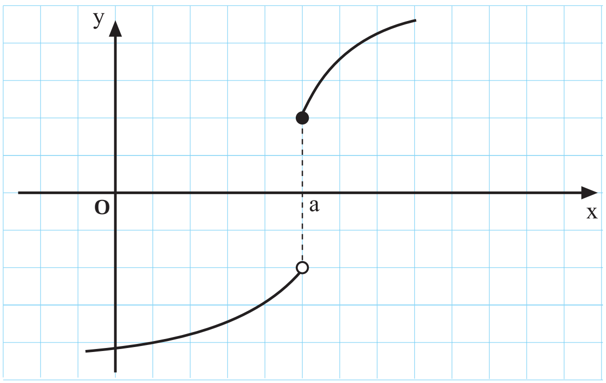
$$f(۱)=۱^{۳}=۱,\quad \lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(x^{۳})=۱^{۳}=۱$$

به‌طوری که دیده می‌شود در این مثال $\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)=۱$.

این ویژگی در هر نقطه‌ی دیگر نیز برقرار است. به‌طور مثال:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=f(۲)=۲^{۳}=۸$$

$$\lim_{x\to -۱} f(x)=f(-۱)=(-۱)^{۳}=-۱$$



نمودار یک تابع ناپیوسته

شکل ۴۶ــ۲

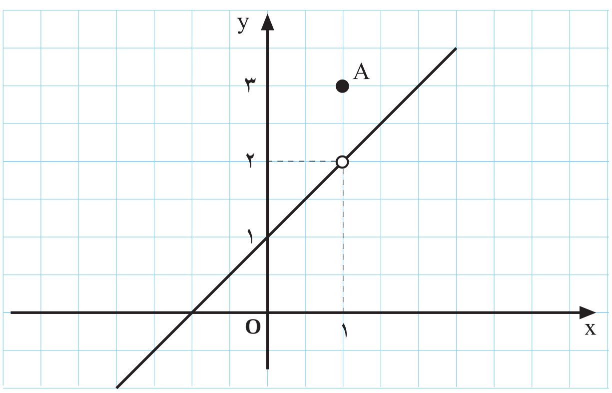
مثال ۲: تابع f با ضابطه‌ی

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱}, & x\neq ۱\\ ۳, & x=۱\end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم. دامنه‌ی این تابع $D_f=\mathbb{R}$ و با توجه به اتحاد مزدوج، برای هر $x\neq ۱$، یا $(x-۱)\neq ۰$ داریم:

$$f(x)=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=x+۱$$

یعنی، $f(x)=\begin{cases}x+۱, & x\neq ۱\\ ۳, & x=۱\end{cases}$. نمودار این تابع را در شکل ۴۷ــ۲ ملاحظه می‌کنید. دیده می‌شود که این نمودار در $x=۱$ دارای **گسستگی (ناپیوستگی)** است. ضمناً، با توجه به ضابطه‌ی



شکل ۴۷ــ۲

تابع داریم :

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = \lim_{x\to ۱}(x+۱) = ۲$$

امّا، مقدار حد با مقدار $f(۱)$ برابر نیست و همین باعث گسستگی در نمودار تابع شده است. اگر $f(۱)$ را به‌جای ۳ عدد ۲ تعریف کنیم تابع در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته خواهد شد.

با توجه به آنچه توضیح داده شد تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱ : تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ **پیوسته** گوییم، هرگاه :

۱) تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد ؛

۲) وقتی $x\to a$ تابع f حد داشته باشد ؛

۳) حد تابع f وقتی $x\to a$ با مقدار تابع در a برابر باشد.

یعنی،

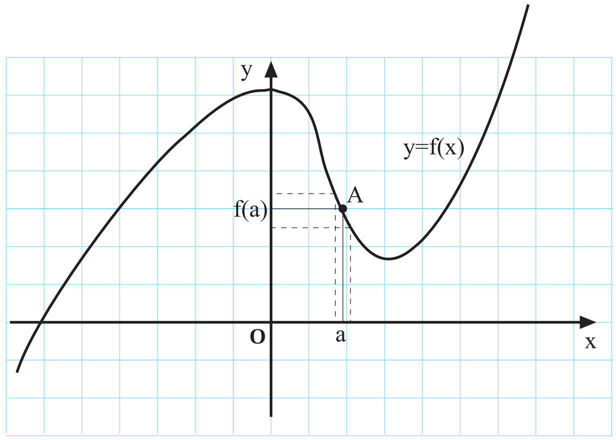
$$(*) \qquad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

نکته‌ی ۱ : رابطه‌ی (*) سه شرط (۱)، (۲) و (۳) را داراست. چرا؟

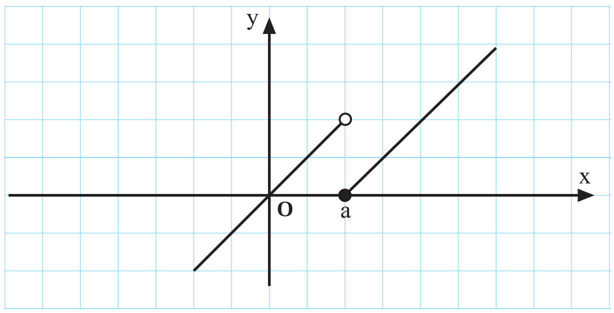
تعریف ۲ : اگر f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد گوییم f پیوسته است. اگر $D_f=[a,b]$ برای پیوستگی f در a کافی است داشته باشیم $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ (**پیوستگی از راست** در a) و برای پیوستگی در b کافی است داشته باشیم $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$ (**پیوستگی از چپ** در b) (شکل ۴۹ـ۲).

نکته‌ی ۲ : اگر تابع f پیوسته باشد و $a\in D_f$ ، اولاً f در a حد دارد، ثانیاً این حد مساوی $f(a)$ است. پس، برای به‌دست آوردن حد f، وقتی $x\to a$ ، کافی است در ضابطه‌ی تابع f به‌جای متغیر مقدار a را قرار دهید.

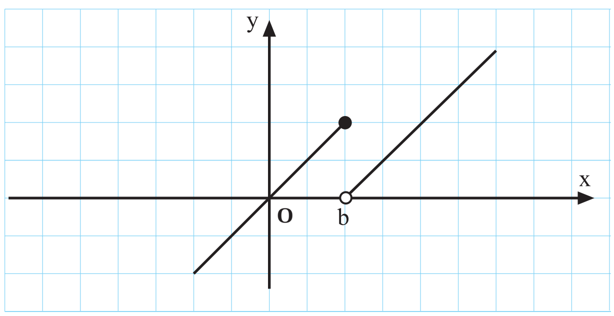
۱ـ۲ـ۲ـ قضیه‌های پیوستگی: همان‌طور که تاکنون متوجه شده‌اید تعیین حد تابع به‌وسیله‌ی جدول یا رسم نمودار دارای مشکلاتی است. امّا برای تابع‌هایی که پیوسته هستند مقدار حد، وقتی x به نقطه‌ای از دامنه‌ی تعریف میل می‌کند، به‌سادگی به‌دست می‌آید. لذا، شناختن تابع‌های پیوسته در این مورد کمک شایانی می‌کند.



شکل ۴۸ـ۲



(الف)



(ب)

شکل ۴۹ـ۲

در زیر چند قضیه در مورد تابع‌های پیوسته بیان می‌کنیم. اثبات این قضیه‌ها با توجه به تعریف یک تابع پیوسته آسان است ولی هدف ما استفاده و به‌کار بردن این قضیه‌ها می‌باشد.

قضیّه‌ی ۱: فرض کنید $a_{\circ}$ ، $a_{۱}$ ، ...، a_n عددهای حقیقی باشند. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_{\circ}\ ,\quad x\in\mathbb{R}$$

که یک **تابع چندجمله‌ای** نامیده می‌شود، بر $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۱)

۱) اگر c یک عدد ثابت باشد تابع ثابت $f(x)=c$ پیوسته است. درنتیجه، مثلاً می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to ۱}۲=۲,\quad \lim_{x\to -۱}\sqrt{۳}=\sqrt{۳},\quad \lim_{x\to a}c=c.$$

۲) تابع $f(x)=۲x+۱$ پیوسته است، لذا در هر نقطه حد دارد. مثلاً،

$$\lim_{x\to -۱}(۲x+۱)=۲(-۱)+۱=-۱,$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۳}}(۲x+۱)=۲\sqrt{۳}+۱.$$

۳) اگر n عددی طبیعی باشد و $f(x)=x^n$ این تابع پیوسته است. لذا، مثلاً، داریم:

$$\lim_{x\to -۲}x^۳=(-۲)^۳=-۸,\quad \lim_{x\to -۱}x^۵=(-۱)^۵=-۱.$$

۴) رابطه‌های زیر نیز از پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای نتیجه می‌شوند.

$$\lim_{x\to ۳}(۲x^۳-x^۲+۷x-۵)=۲(۳)^۳-(۳)^۲+۷(۳)-۵$$
$$=۵۴-۹+۲۱-۵=۶۱$$

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}}(۲x^۴-x^۲+۵)=۲(\sqrt{۲})^۴-(\sqrt{۲})^۲+۵$$
$$=۸-۲+۵=۱۱.$$

قضیّه‌ی ۲: تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

قضیّه‌ی ۳: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع‌های $f+g$ و $f-g$ نیز در $x=a$ پیوسته‌اند.

نکته: قضیه‌ی ۳ برای هر تعداد با پایان (متناهی) تابع پیوسته برقرار است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌های ۲ و ۳)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin x=\sin\frac{\pi}{۲}=۱$$

$$\lim_{x\to\circ}\cos x=\cos\circ=۱$$

با توجه به پیوستگی حاصل‌جمع دو تابع پیوسته می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to\pi}(\cos x+\sin x)=\cos\pi+\sin\pi=-۱+\circ=-۱$$

$$\lim_{x\to\pi}(\cos x+x)=\cos\pi+(\pi)=-۱+\pi$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(\cos^۲x-۲\sin x)=(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲-۲\sin(\frac{\pi}{۴})$$
$$=\frac{۱}{۲}-۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱}{۲}-\sqrt{۲}$$

قضیّه‌ی ۴: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع $(fg)(x)=f(x).g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

نکته: قضیه‌ی ۴ برای تعدادی با پایان (متناهی) تابع پیوسته برقرار است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۴)

۱) با استفاده از پیوستگی حاصل‌ضرب دو تابع پیوسته، می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند :

الف) $f(x)=x\sin x$ ب) $g(x)=x^2\cos x$

۲) با توجه به قضیه‌ها می‌توان نوشت :

الف) $\lim\limits_{x\to 0}(2x^2-8x+1)\sin x=(0-0+1)\sin 0$

$$=1\times 0=0$$

ب) $\lim\limits_{x\to 3}\left[(2x+1)(x^2-4)(x+3)\right]$

$$=(2\times 3+1)(3^2-4)(3+3)$$

$$=7\times 5\times 6=210$$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\cos x(1+\sin x)=(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

$$=\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$$

قضیّه‌ی ۵: اگر تابع‌های f و g در $x=a$ پیوسته باشند تابع با ضابطه‌ی $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$، به شرط آن‌که $g(a)\neq 0$، پیوسته است.

مثال ۱: تابع $f(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$، وقتی $k\in Z$ و $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$ پیوسته است.

مثال ۲: تابع $f(x)=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$، وقتی $k\in Z$ و $x\neq k\pi$، پیوسته است.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۵)

۱) تابع‌های زیر بر $\mathbb{R}$ پیوسته‌اند (زیرا، تابع‌هایی که در مخرج کسرها قرار دارند پیوسته و همواره غیرصفرند و تابع‌هایی که در صورت کسرها قرار دارند پیوسته‌اند) :

الف) $f(x)=\frac{2x^2-1}{1+x^2}$

ب) $g(x)=\frac{x^2-8x-3}{2+\sin x}$

پ) $h(x)=\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$

۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های مثال بالا، می‌توان نوشت :

الف) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-1}{1+x^2}=\frac{2(-1)^2-1}{1+(-1)^2}=\frac{2-1}{1+1}=\frac{1}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-8x-3}{2+\sin x}=\frac{0^2-8\times 0-3}{2+\sin 0}=\frac{-3}{2}=-1/5$

پ) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}=\frac{\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos^2\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}\times 1}{1+0}=\frac{\pi}{2}$

قضیّه‌ی ۶: اگر تابع f در a و تابع g در f(a) پیوسته باشد تابع gof در a پیوسته است.

۲ــ۲ــ۲ــ مسائل پیوستگی: دراین‌جا مثال‌هایی از پیوستگی تابع‌ها، می‌آوریم. نحوه‌ی حل این مثال‌ها می‌تواند نمونه‌ای برای حل مسائل مشابه باشد.

مثال‌ها

۱) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}1-x, & x<2\\ x^2-5, & x\geq 2\end{cases}$$

آیا تابع f در $x=2$ پیوسته است؟

۲) تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}-2x+6\ , & x>2\\ |2x-2|\ , & x<2\end{cases}$ داده شده است. f(۲) را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=2$ پیوسته باشد.

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیرتعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}2x-b, & x\leq 2\\ x^3-2, & x>2\end{cases}$$

عدد b را چنان تعیین کنید که تابع f در نقطه‌ی $x=2$ پیوسته باشد. جواب خود را امتحان کنید.

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۶)

۱) با توجه به پیوستگی تابع‌های چندجمله‌ای و تابع‌های sinx و cosx، می‌توان گفت که تابع‌های زیر پیوسته‌اند :

الف) $\sin(x-\frac{\pi}{2})$ ب) $\cos x^2$ پ) $\cos(2x+\pi)$

۲) با توجه به پیوستگی تابع‌های بالا داریم :

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\sin(x-\frac{\pi}{2})=\sin(0-\frac{\pi}{2})=-1$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x^2=\cos 0^2=\cos 0=1$

پ) $\lim\limits_{x\to \pi}\cos(2x+\pi)=\cos 3\pi=-1$

حل ۱: اولاً $f(2)=2^2-5=-1$ ، ثانیاً، با توجه به پیوسته بودن هر تابع چندجمله‌ای،

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(1-x)=1-2=-1$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2-5)=2^2-5=-1$$

بنابراین، $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-1$ و تابع f در $x=2$ پیوسته است.

حل ۲: داریم : $\lim\limits_{x\to 2^+}-2x+6=2$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}|2x-2|=2$.

بنابراین، کافی است تعریف کنیم :

$$f(2)=2.$$

حل ۳: صرف‌نظر از تعریف این تابع، چون هر تابع چندجمله‌ای پیوسته است، داریم :

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^-}(2x-b)=2\times 2-b=4-b$$

$$\lim_{x\to 2^+}f(x)=\lim_{x\to 2^+}x^3-2=2^3-2=6$$

بنابراین، باید داشته باشیم :

$$4-b=6\quad\Rightarrow\quad b=-2$$

واضح است که به‌ازای $b=-2$ داریم :

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=4-(-2)=6=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)$$

یعنی تابع f در $x=2$ پیوسته است.

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$$f(x)=\begin{cases}۳x+۲ & x<-۱\\ x^۲-c & x>-۱\end{cases}$$

هرگاه تابع f در $x=-۱$ پیوسته باشد f(−۱) و c را بیابید.

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر تعریف شده است :

$$f(x)=\begin{cases}۲x-a & x<۲\\ ۵ & x=۲\\ x^۲+b & x>۲\end{cases}$$

عددهای a و b را چنان تعیین کنید که تابع f در $x=۲$ پیوسته باشد.

حل ۴: کافی است c را چنان تعیین کنیم که تابع f در −۱ حد داشته باشد و بعد f(−۱) را مقدار این حد تعریف کنیم.

$$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=۳(-۱)+۲=-۱$$

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=(-۱)^۲-c=۱-c$$

بنابراین، باید داشته باشیم :

$$۱-c=-۱ \Rightarrow c=۲ \Rightarrow f(-۱)=-۱$$

حل ۵: اولاً، $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=۲\times ۲-a=۴-a$. ثانیاً، $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲^۲+b=۴+b$. بنابراین، باید داشته باشیم :

$$۴-a=۵ \Rightarrow a=-۱$$

$$۴+b=۵ \Rightarrow b=۱$$

پیوستگی تابع f را در $x=۲$ ، با توجه به مقدارهایی که برای a و b به‌دست آمد، امتحان کنید.

تمرین ۷ــ۲

۱ــ پیوستگی یا ناپیوستگی هریک از تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^۲+۳x-۱ , & x\geq ۱\\ ۴-x^۲ , & x<۱\end{cases}$ (در $x=۱$)

ب) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{۲}x , & x>۲\\ x^۲-۲x , & x\leq ۲\end{cases}$ (در $x=۲$)

پ) $f(x)=\begin{cases}x^۲ , & x\leq ۰\\ -x^۲ , & x>۰\end{cases}$ (در $x=۰$)

ت) $f(x)=\begin{cases}|x-۲| , & x\neq ۲\\ ۱ , & x=۲\end{cases}$ (در $x=۲$)

ث) $f(x)=\begin{cases}x-۱ , & x>-۱\\ -۲ , & x=-۱\\ ۲x , & x<-۱\end{cases}$ (در $x=-۱$)

۲ــ اگر $f(x)=\begin{cases}x+۲ , & x<۱\\ a-۲x , & x>۱\end{cases}$ ، مقدار a و f(۱) چقدر باشد تا این تابع در $x=۱$ پیوسته باشد؟

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

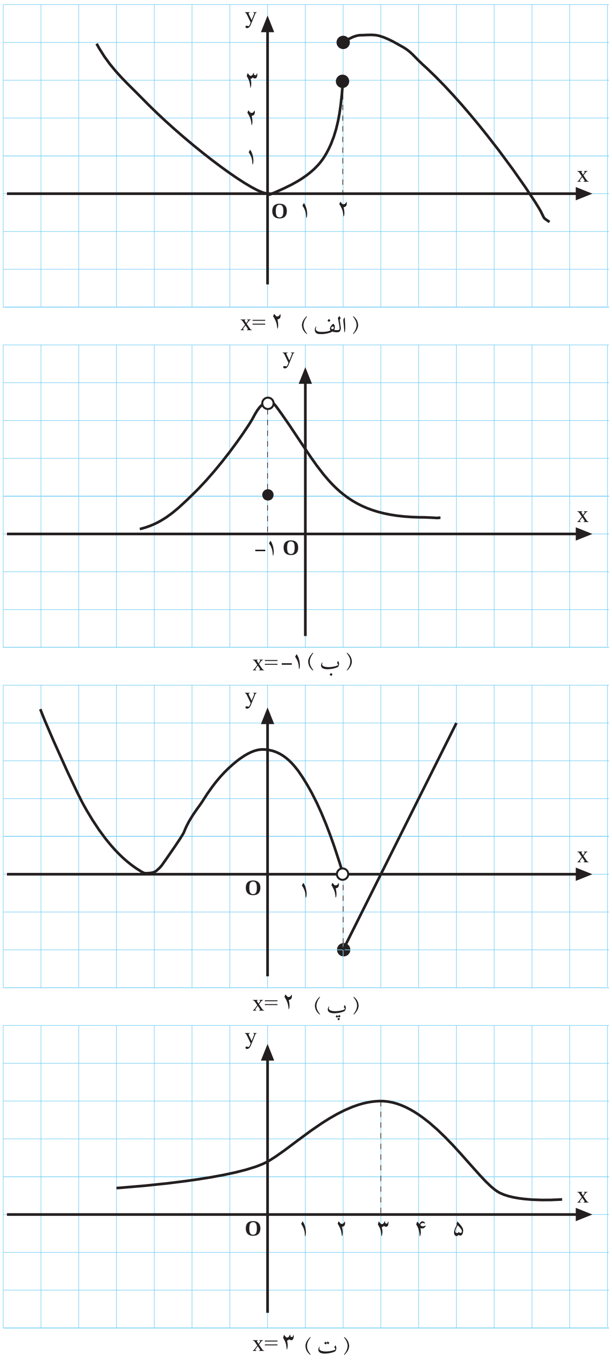
$$f(x)=\begin{cases}x^۲+۲a , & x>-۲\\ ۴ , & x=-۲\\ ۳x-۲b , & x<-۲\end{cases}$$

عددهای a و b را طوری تعیین کنید که تابع f در $x=-۲$ پیوسته باشد.

۴ــ آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در نقطه‌ی $x=۰$ پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳}+۲ \quad , & x>۰ \\ -x^{۲}+۱ \quad , & x\leq ۰ \end{cases}$$

۵ــ با توجه به نمودارهای تابع‌های شکل ۵۰ــ۲، پیوستگی راست، پیوستگی چپ، و درنتیجه، پیوستگی در نقطه‌های مشخص شده را تعیین کنید.



شکل ۵۰ــ۲

آزمون پایانی (۲)

۱ــ مجموعه‌ی نقطه‌هایی را که در آن‌ها تابع زیر پیوسته است، تعیین کنید.

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x+1}$$

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x+1}{x^2+x-2}$ در چه نقطه‌هایی ناپیوسته است؟

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|2-x|}{x-2}$ داده شده است. f(۲) را چنان تعریف کنید که در $x=2$ از چپ پیوسته باشد.

۴ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^3-5x+4}{x^2-3x+2}$ داده شده است، f(۱) را چنان تعریف کنید که تابع f در $x=1$ پیوسته باشد.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

بخش دوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به $+\infty$ (یا $-\infty$) میل می‌کند. همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ حد در بینهایت را تعریف کند.

۲ــ حد بینهایت برای یک تابع را تعریف کند.

پیش‌آزمون (۳)

۱ـ فرض کنید $f(x)=\frac{۱}{x-۲}$. اگر x برابر عددهای $۲+۱$ ، $۲+\frac{۱}{۲}$ ، ... یا $۲+\frac{۱}{n}$ باشد مقدار f(x)، ۱، ۲، ...، یا n خواهد شد. مثلاً :

$$f(۲+\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲+\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{\frac{۱}{n}}=n$$

با توجه به شکل ۵۱ـ۲ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود $۲+\frac{۱}{n}$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود؟ در چنین حالتی برای $f(۲+\frac{۱}{n})$ چه اتفاقی می‌افتد؟

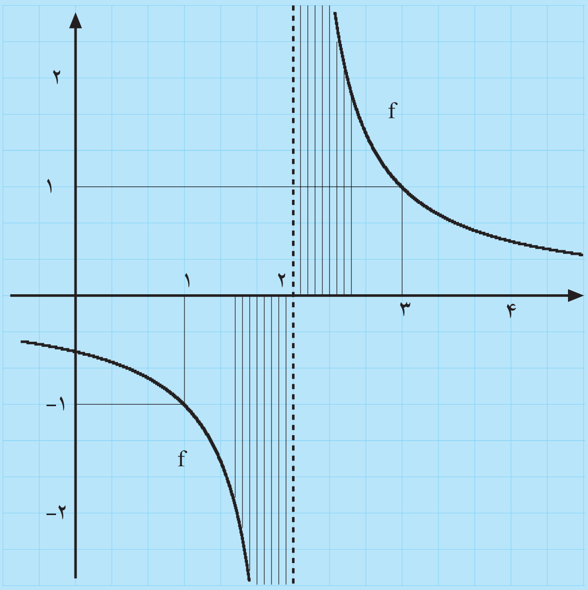
۲ـ اگر در سؤال ۱، x به‌صورت $۲-\frac{۱}{n}$ و با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک شود $f(۲-\frac{۱}{n})$ چه وضعیتی دارد؟ توجه کنید که :

$$f(۲-\frac{۱}{n})=\frac{۱}{(۲-\frac{۱}{n})-۲}=\frac{۱}{-\frac{۱}{n}}=-n$$

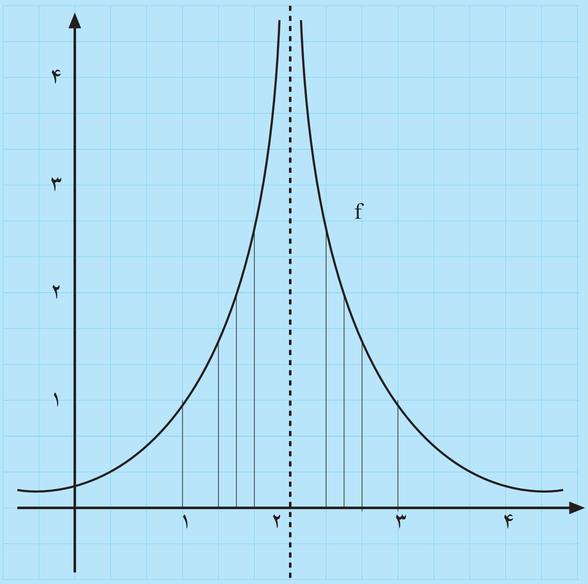
۳ـ اگر $f(x)=\frac{۱}{(x-۲)^۲}$ و متغیر x به‌صورت $۲+\frac{۱}{n}$ یا $۲-\frac{۱}{n}$ ، با افزایش n، به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر شوند وضعیت f(x) چگونه خواهد بود؟ (راهنمایی : نشان دهید که $f(۲-\frac{۱}{n})=f(۲+\frac{۱}{n})=n^۲$) (شکل ۵۲ـ۲).

۴ـ فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}$ و x عددهای ۱، ۴، ۹، ۱۶، ...، $n^۲$ را اختیار کند، مقدار f(x) چه عددهایی خواهد بود؟ وقتی n بزرگ و بزرگ‌تر شود f(x) چگونه تغییر می‌کند؟ نمودار $y=\sqrt{x}$ را در $[۰ , +\infty)$ رسم کنید و رفتار این تابع را، وقتی x بزرگ می‌شود، ملاحظه کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



شکل ۵۱ـ۲



شکل ۵۲ـ۲

۳ــ۲ــ تعمیم حد

تاکنون در حدهایی که مورد بررسی قرار داده‌ایم، عدد a و عدد L هر دو، عدد حقیقی بوده‌اند. در این قسمت می‌خواهیم ببینیم اگر a یا L بینهایت شوند چگونه باید عمل کرد.

فعالیت ۱۰ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{x^2}\,(x\neq 0)$، را درنظر بگیرید.
(به مثال روبه‌رو نیز توجه کنید.)

۱) جدول ۲۰ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۰ــ۲

x	...	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	...	۰	...	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	...
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	...	۴								۴	...

۲) در جدول ۲۰ــ۲، x به چه عددی میل می‌کند؟

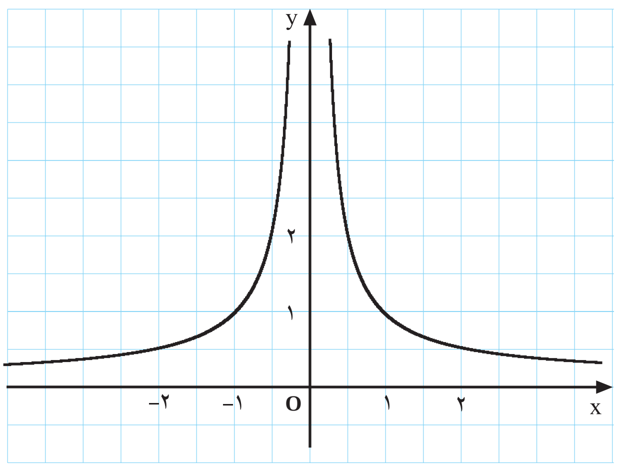
۳) با نزدیک شدن x به صفر، f(x)ها چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت که اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک باشد، f(x) می‌تواند از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر شود؟

۵) با توجه به آنچه در مورد $+\infty$ می‌دانید، درست است که بگوییم حد f(x)، وقتی $x\to 0$، $+\infty$ است؟

۶) آیا درست است که بنویسیم؟ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$

۷) نمودار $y=f(x)$ در شکل ۵۳ــ۲ رسم شده است آیا از این نمودار هم معلوم می‌شود که وقتی x به عدد صفر میل می‌کند f(x) به $+\infty$ میل می‌کند؟



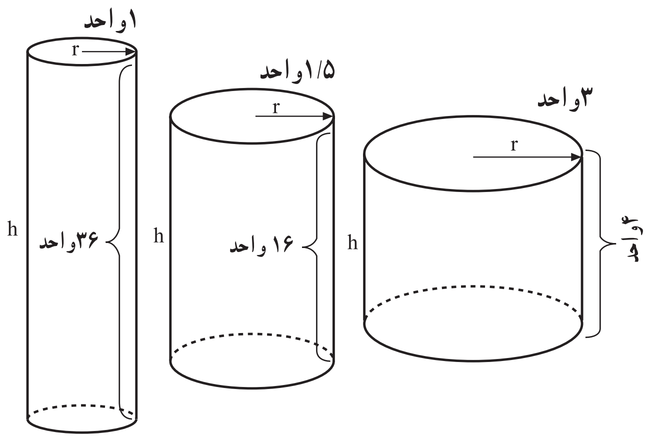
شکل ۵۳ــ۲

۸) آیا درست است که بگوییم :

> $\frac{1}{x^2}$ را هرچه بخواهیم می‌توانیم بزرگ کنیم به شرط آن‌که x را به‌قدر کافی به صفر نزدیک کنیم.

مثال: فرض کنید استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع h داریم که حجم آن عدد ثابت ۱۰۸ است. یعنی $\pi r^2h=108\Rightarrow r^2h\simeq 36$

واضح است که با تغییر شعاع، ارتفاع استوانه تغییر خواهد کرد. شکل ۵۴ــ۲ این بستگی را نشان می‌دهد.



شکل ۵۴ــ۲

فعالیت ۱۱ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}(x\neq ۰)$ ، را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۱ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۱ــ۲

x	...	−۰/۲	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	...	۰	...	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	...
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...			−۱۰۰						۱۰۰۰			...

۲) در جدول ۲۱ــ۲ متغیر x به چه عددی میل می‌کند؟

۳) با نزدیک شدن x به عدد صفر مقدارهای f(x) چگونه تغییر می‌کنند؟

۴) آیا می‌توان گفت وقتی x از چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود f(x) به $-\infty$ میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{۱}{x}=\cdots$$

۵) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

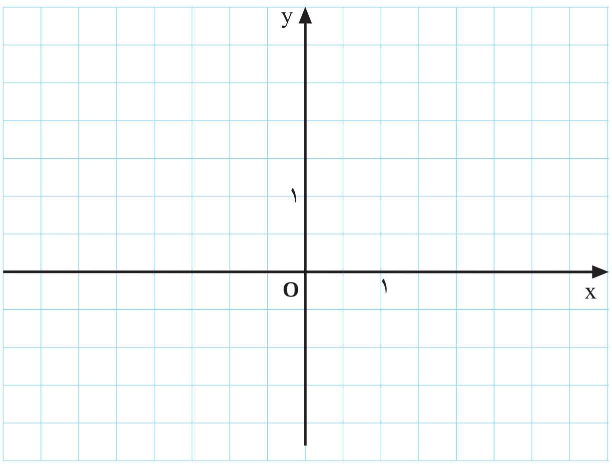
$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}=+\infty$$

۶) جدول ۲۲ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۲ــ۲

x	−۲	−۱	$-\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲
f(x)					تعریف نشده				

۷) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در دستگاه شکل ۵۵ــ۲ رسم کنید.



شکل ۵۵ــ۲

۸) به کمک نمودار $f(x)=\frac{۱}{x}$ رفتار این تابع را، وقتی $x\to ۰$ ، بررسی کنید.

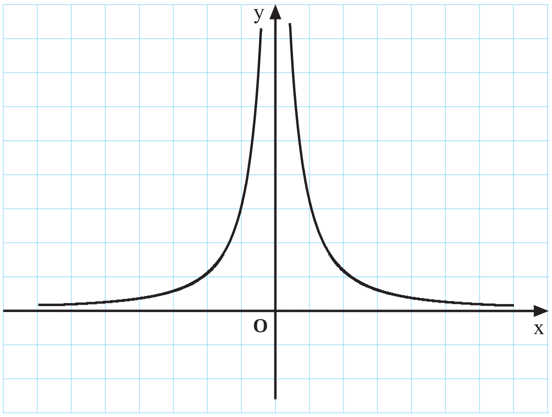
۹) آیا نمودار نیز درستی نتایج مرحله‌های ۵ و ۶ را تأیید می‌کند؟

۱۰) آیا تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، وقتی $x\to ۰$ حد دارد؟ چرا؟

> تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ ، وقتی $x\to ۰$ ، حد ندارد.

۱ـ۳ـ۲ـ تعریف (حدّ بینهایت): فرض کنید تابع f دربازه‌ی باز I که شامل عدد a است، مگر احتمالاً در a، تعریف شده باشد.

الف) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $+\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد بزرگی، بزرگ‌تر کنیم، به شرط آن‌که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.



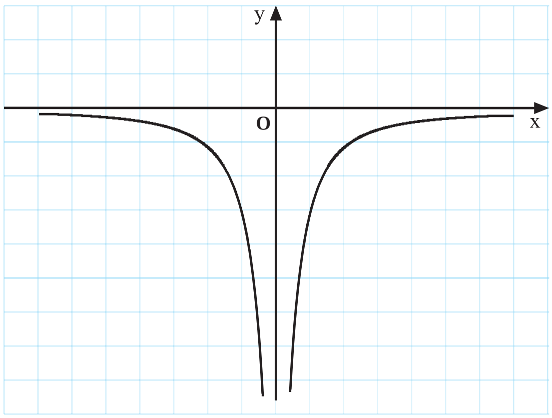
شکل ۵۶ـ۲

ب) حد تابع f، وقتی $x \to a$ ، $-\infty$ است هرگاه بتوانیم f(x) را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچک‌تر کنیم، به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

مثلاً،

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty$$ (شکل ۵۶ـ۲)

$$\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2}=-\infty$$ (شکل ۵۷ـ۲)



شکل ۵۷ـ۲

مثال‌ها

۱. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=+\infty$$

حل ۱: فرض کنید $X = x-1$ واضح است که $x \to 1$ معادل است با $X \to 0$ بنابراین،

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\lim_{X\to 0}\frac{1}{X^2}=+\infty$$

۲. نشان دهید که

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{-4}{(2x+1)^2}=-\infty$$

حل ۲: می‌دانیم که $2x+1=2(x+\frac{1}{2})$ و $x \to \frac{-1}{2}$ معادل است با $X = x+\frac{1}{2} \to 0$ بنابراین،

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{-4}{(2x+1)^2}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{-4}{4(x+\frac{1}{2})^2}=$$

$$\lim_{X\to 0}\frac{-1}{X^2}=-\infty$$

تمرین ۸ــ۲

حدهای زیر را بررسی کنید، در صورت وجود حد نامتناهی، آن حد را تعیین کنید.

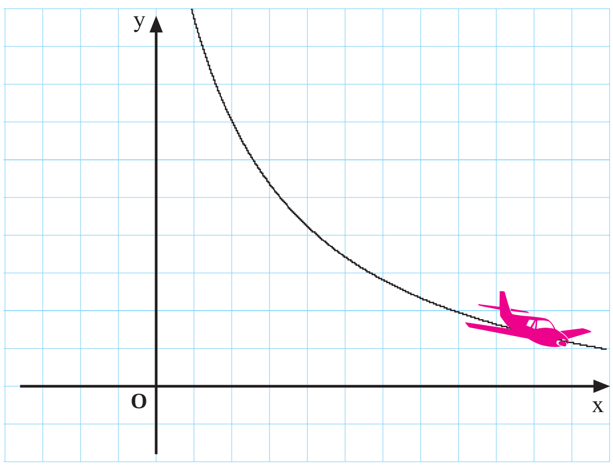
الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{-۱}{(x-۲)^۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۳}} \dfrac{۹}{(۱-۳x)^۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۴} \dfrac{-۱}{x-۴}$

ت) $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} \dfrac{۱}{۲x+۱}$

۲ــ۳ــ۲ــ حد در بینهایت: اینک می‌خواهیم مفهوم حد یک تابع را، وقتی $x\to +\infty$ یا $x\to -\infty$، بررسی کنیم.



شکل ۵۸ــ۲

فعالیت ۱۲ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی زیر را درنظر می‌گیریم :

$$f(x)=\frac{۱}{x},\quad x\neq ۰$$

می‌خواهیم رفتار این تابع را وقتی $x\to +\infty$ بررسی کنیم.

۱) جدول ۲۳ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۳ــ۲

x	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...						...

۲) در جدول ۲۳ــ۲ متغیر x چگونه تغییر کرده است؟

۳) وقتی x به $+\infty$ میل می‌کند، f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $+\infty$ ، f(x) به صفر میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$(*) \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

۶) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(۰,+\infty)$ رسم کنید.

۷) با استفاده از نمودار $y=\frac{۱}{x}$ حد $\frac{۱}{x}$ را وقتی $x\to+\infty$ بررسی کنید.

۸) آیا نمودار هم تساوی رابطه‌ی(*) را تأیید می‌کند؟

کار در کلاس ۴ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{۱}{x}, (x\neq ۰)$ را درنظر می‌گیریم.

۱) جدول ۲۴ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۴ــ۲

x	...	-۱۰۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰۰	-۱۰۰۰۰	-۱۰۰۰	-۱۰۰	-۱۰
$f(x)=\frac{۱}{x}$	...						

۲) در جدول ۲۴ــ۲ متغیر x چگونه تغییر می‌کند؟

۳) آیا x به $-\infty$ میل می‌کند؟

۴) با میل کردن x به $-\infty$ ، $f(x)$ چگونه تغییر کرده است؟

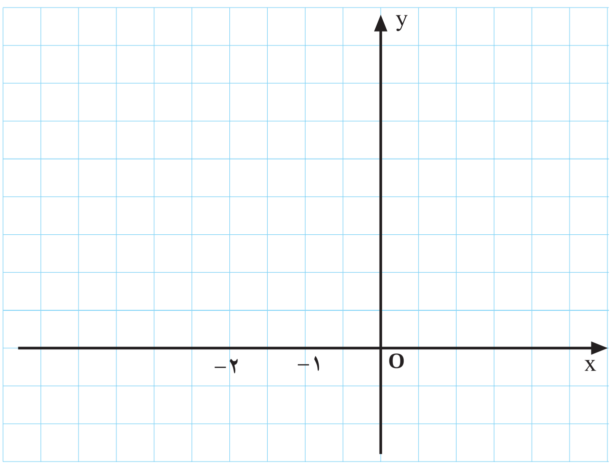
۵) آیا $f(x)$ به صفر میل کرده است؟

۶) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x} = ۰$$

۷) نمودار $y=\frac{۱}{x}$ را در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ و در شکل ۵۹ــ۲ رسم کنید.

۸) آیا نمودار هم نشان می‌دهد وقتی $x\to-\infty$ ، $f(x)$ به صفر میل می‌کند؟



شکل ۵۹ــ۲

بنابراین آنچه مورد بررسی قرار گرفت :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{۱}{x} = ۰ = \lim_{x\to-\infty} \frac{۱}{x}}$$

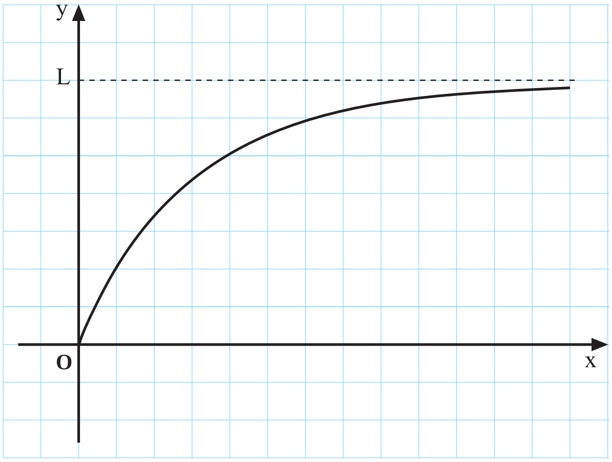
۳ــ۳ــ۲ــ تعریف (حد در بینهایت)

الف) حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x > a$ تعریف شده باشد. گوییم حد $f(x)$ وقتی $x \to +\infty$ مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم $f(x)$ را هر چه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را به قدر کافی بزرگ اختیار کرده باشیم.

ب) حد یک تابع وقتی $x \to -\infty$:

فرض کنید تابع f برای $x < a$ تعریف شده باشد. گوییم حد $f(x)$، وقتی $x \to -\infty$ ، مساوی عدد حقیقی L است در صورتی که بتوانیم $f(x)$ را هرچه‌قدر بخواهیم به L نزدیک کنیم به شرط آن‌که x را از هر عدد منفی با قدر مطلق بزرگ، کوچکتر کنیم (شکل ۶۰ــ۲).



شکل ۶۰ــ۲

مثلاً،

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

لذا، اگر قرار دهیم $t=\frac{۱}{x}$ آن‌گاه (جدول‌های ۲۵ــ۲ و ۲۶ــ۲ ملاحظه شوند)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^+} t=۰$$

همچنین،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=\lim_{t\to ۰^-} t=۰$$

از این مطلب می‌توان استفاده کرد و بسیاری از حدهای کسری را حساب کرد.

جدول ۲۵ــ۲

x	$t=\frac{۱}{x}$
۱	۱
۱۰	۰/۱
۱۰۰	۰/۰۱
۱۰۰۰	۰/۰۰۱
۱۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۱
۱۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۱

$x \longrightarrow +\infty$
$t \longrightarrow ۰^+$

جدول ۲۶ــ۲

x	$t=\frac{۱}{x}$
-۱	-۱
-۱۰	$-۰/۱$
-۱۰۰	$-۰/۰۱$
-۱۰۰۰	$-۰/۰۰۱$
-۱۰۰۰۰	$-۰/۰۰۰۱$
-۱۰۰۰۰۰۰	$-۰/۰۰۰۰۰۱$
$-۱۰^{۱۰}$	$-۱۰^{-۱۰}$

$x \longrightarrow -\infty$
$t \longrightarrow ۰^-$

الف) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{۳+۴x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(۲-\frac{۱}{x})}{x(\frac{۳}{x}+۴)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲-\frac{۱}{x}}{\frac{۳}{x}+۴}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{۲-t}{۳t+۴}=\frac{۲-۰}{۰+۴}=\frac{۱}{۲}$$

ب) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{x^۳+۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x}}{۱+\frac{۱}{x^۳}}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{t}{۱+t^۳}$$

$$=\frac{۰}{۱+۰}=۰$$

پ) ممکن است حد یک تابع وقتی $x \to +\infty$ و یا $x \to -\infty$ عددی حقیقی نباشد بلکه $+\infty$ یا $-\infty$ باشد. به فعالیت زیر توجه کنید.

فعالیت ۱۳ــ۲

تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۵$ را درنظر می‌گیریم.

۱) مقدارهای $f(x)$ را، برای xهایی که در جدول (۲۷ــ۱) داده شده است، محاسبه کنید و در جدول بنویسید.

جدول ۲۷ــ۲

x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...
$f(x)=۲x+۵$	...									۲۰۰۰۰۵	...

۲) هنگامی که متغیر x به قدر کافی بزرگ اختیار شود مقدار $f(x)$ چگونه است؟

۳) آیا با میل کردن x به $+\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا با میل کردن x به $-\infty$، $f(x)$ هم به $-\infty$ میل می‌کند؟

۵) آیا رابطه‌های زیر صحیح است؟

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x+۵)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}(۲x+۵)=-\infty$$

کار در کلاس ۵ــ۲

فعالیت ۱۳ــ۲ را برای تابع $f(x)=-۳x+۵$ تکرار کنید.

فعالیت ۱۴ــ۲

تابع $f(x)=۲x^۲+۱۰$ را درنظر بگیرید.

۱) جدول ۲۸ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۸ــ۲

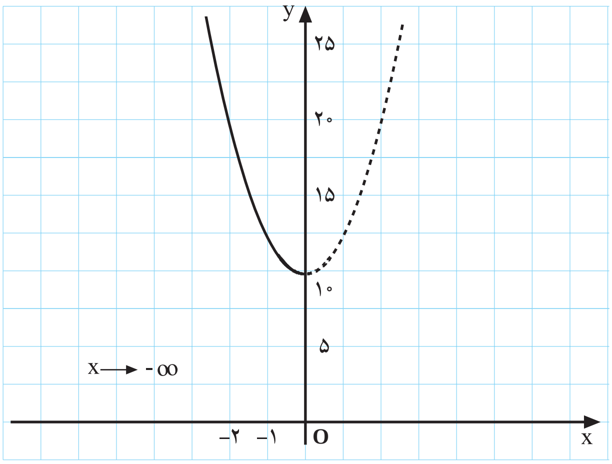
x	...	−۱۰۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰	−۱۰	...
$f(x)=۲x^۲+۱۰$	...						...

۲) وقتی $x \to -\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

۳) آیا وقتی $x \to -\infty$، $f(x)$ به $+\infty$ میل می‌کند؟

۴) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (۲x^۲ + ۱۰) = +\infty$$



شکل ۶۱ــ۲

۵) جدول ۲۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۲۹ــ۲

x	...	−۱۰	۰	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	...
$f(x) = ۲x^۲ + ۱۰$	...				۲۰۰۱۰		...

۶) وقتی $x \to +\infty$ مقدارهای $f(x)$ چگونه تغییر می‌کنند؟

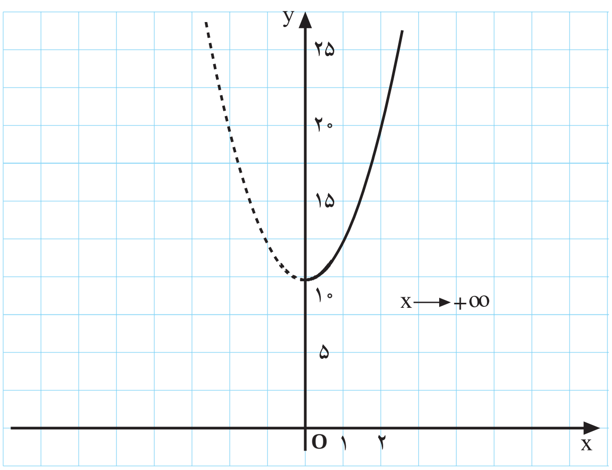
۷) آیا رابطه‌ی زیر درست است؟

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (۲x^۲ + ۱۰) = +\infty$$

۸) آیا درست است که بنویسیم؟

$$\lim_{x \to \pm\infty} (۲x^۲ + ۱۰) = +\infty$$

(منظور از $x \to \pm\infty$ آن است که x به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.)



شکل ۶۲ــ۲

با توجه به فعالیت‌های ۱۲ـ۲، ۱۳ـ۲ و ۱۴ـ۲ می‌توان نشان داد که اگر m یک عدد صحیح مثبت و a عددی حقیقی و غیرصفر باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to+\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty \ , & a>۰ \\ -\infty \ , & a<۰ \end{cases}$$

(این حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

و همچنین

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^m} = ۰ \qquad (a\in\mathbb{R})$$

(وقتی $x\to+\infty$، حکم برای هر عدد حقیقی مثبت m نیز برقرار است).

ضمناً، اگر m عدد مثبت زوج باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} +\infty \ , & a>۰ \\ -\infty \ , & a<۰ \end{cases}$$

ولی اگر m عدد مثبت فرد باشد داریم :

$$\lim_{x\to-\infty} ax^m = \begin{cases} -\infty \ , & a>۰ \\ +\infty \ , & a<۰ \end{cases}$$

واضح است که

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^{۰} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a}{x^{۰}} = a$$

از مطالب بالا برای تعیین حد عبارت‌های کسری که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای هستند استفاده می‌شود.

در زیر، مثال‌هایی در این مورد ملاحظه می‌کنید.

مثال‌های حل شده

الف) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{۲x^۵ - x + ۷}{x^۳ - ۲x^۲ + ۳x} = ?$

حل: در صورت و مخرج کسر از جمله‌ی با بزرگ‌ترین درجه فاکتور می‌گیریم :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۵ - x + ۷}{x^۳ - ۲x^۲ + ۳x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۲x^۵(۱ - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{x^۴} + \frac{۷}{۲}\cdot\frac{۱}{x^۵})}{x^۳(۱ - \frac{۲}{x} + \frac{۳}{x^۲})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (۲x^۲) = +\infty$$

ب) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^۴ - ۷x^۲ + ۱}{x - ۳x^۲} = ?$

حل:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^۴ - ۷x^۲ + ۱}{x - ۳x^۲} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^۴(۱ - \frac{۷}{x^۲} + \frac{۱}{x^۴})}{-۳x^۲(-\frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{x} + ۱)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{۱}{۳}x^۲ = -\infty$$

پ) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^۲ - x^۵ + x}{۱ + x^۷ - x^۳} = ?$

حل: مانند دو مثال قبل عمل می‌کنیم :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^۲ - x^۵ + x}{۱ + x^۷ - x^۳} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x^۵(-\frac{۱}{x^۳} + ۱ - \frac{۱}{x^۴})}{x^۷(\frac{۱}{x^۷} + ۱ - \frac{۱}{x^۴})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-۱}{x^۲} = ۰$$

ت) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{۳x^۵ - x^۴ + x^۲ + ۳}{۲ - ۲x^۵ + x^۴ - x^۲} = ?$

حل:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x^۵ - x^۴ + x^۲ + ۳}{۲ - ۲x^۵ + x^۴ - x^۲} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۳x^۵(۱ - \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{x} + \frac{۱}{۳}\cdot\frac{۱}{x^۳} + \frac{۱}{x^۵})}{-۲x^۵(-\frac{۱}{x^۵} + ۱ - \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{x} + \frac{۱}{۲}\cdot\frac{۱}{x^۳})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} (-\frac{۳}{۲}) = -\frac{۳}{۲} = -۱/۵$$

ث) عدد a را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - ax^۲ + ۱}{۲x^۲ + ۱} = ۳$$

حل:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x - ax^۲ + ۱}{۲x^۲ + ۱} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{۱}{x} - a + \frac{۱}{x^۲}}{۲ + \frac{۱}{x^۲}} = -\frac{a}{۲}$$

پس باید $\frac{-a}{۲} = ۳$ و یا $a = -۶$.

تمرین ۹ـ۲

۱) حدهای زیر را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x^2+5x+1}{x+2}$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-3x-2}{5x^2+2}$

پ) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+x-3}{3x^2+7x-1}$

ت) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x+5}{-\frac{1}{2}x+6}$

ث) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+1}{x-2x^3}$

ج) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-x^2+1)$

۲) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{x^m+x^2+1}{x^2+3x-1}$ داده شده است. عدد m را چنان بیابید که :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=2$$

(**راهنمایی:** عبارت‌های صورت و مخرج کسر مساوی f(x) را بر x^2 تقسیم کنید.)

۳) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است.

$f(x)=\frac{ax^2+3x^2-1}{x^2-2x+4}$ مقدار a را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-4$$

۴) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$f(x)=\frac{x^2-3x+7}{x^m+x^2-3}$ حدود m را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

۵) تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است :

$f(x)=\frac{x^n-2x^{n-1}+5}{x^3-2x^2+7x+1}$ حدود n را طوری تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

۶) فرض کنید $f(x)=\frac{3x^m+1}{x^2+x+1}$. m را چنان تعیین کنید که

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

پ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ اگر $f(x)=\frac{x^{2}-2x-3}{x^{2}-9}$ در $x=3$ پیوسته باشد، مقدار $f(3)$ را به‌دست آورید.

۲ــ اگر m عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^{m}+x+1}{x^{2}+2}=+\infty$، کمترین مقدار m چیست؟

۳ــ اگر n عددی طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^{n}-3x+14}{x^{3}+6}=0$ ، بیشترین مقدار n چیست؟

۴ــ اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x^{n}+2x^{2}+1}{ax^{3}+2}=2$ ، مقدار n و a را به‌دست آورید.

۵ــ اگر به ازای مقدارهای بزرگ x، $\frac{4x^{2}+3x+1}{8x^{2}+1}\le f(x)\le\frac{x+2}{2x-1}$ ، مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ را به‌دست آورید.

۶ــ اگر $f(x)=2ax^{3}+x-a+20$ بر $(x+2)$ بخش‌پذیر باشد، مقدار $f(0)$ برابر چیست؟

۷ــ اگر $f(x)=\frac{x}{x+1}$ مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(f(x))}{2x+1}$ را به‌دست آورید.

تمرین‌های تکمیلی بخش دوم

۱)تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}۳+۲x, & x\geq ۱\\ x+۴, & x<۱\end{cases}$

داده شده است.

الف) با توجه به ضابطه‌ی f جدول زیر را کامل کنید.

x	۰/۸	۰/۹	۰/۹۹	... ۱ ...	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)							

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را با استفاده از جدول به دست آورید و درستی آن را بررسی کنید.

۲) حد راست و حد چپ تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۴x^۲-۹}{۲x-۳}, & x\neq \dfrac{۳}{۲}\\ ۲x+۴, & x=\dfrac{۳}{۲}\end{cases}$ را وقتی $x\to\dfrac{۳}{۲}$ به دست آورید. آیا $\lim\limits_{x\to\frac{۳}{۲}} f(x)$ وجود دارد؟

۳) تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$f(x)=\begin{cases}x^۲+\dfrac{۱}{x}, & x\geq\dfrac{۱}{۲}\\ ۲-x-x^۲, & x<\dfrac{۱}{۲}\end{cases}$ داده شده است.

پیوستگی این تابع را در نقطه‌ی $x=\dfrac{۱}{۲}$ بررسی کنید.

۴) مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax+۴, & x<-۲\\ \dfrac{۲}{x}+b, & x>-۲\\ ۶, & x=-۲\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=-۲$ پیوسته باشد.

۵) حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۲^+} \dfrac{-۱}{(x+۲)^۲}$

ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{۳x+۲}{۱-۲x}$

پ) $\lim\limits_{x\to -۱} \dfrac{x^۲+۲x+۱}{x^۳+۴x^۲+۵x+۲}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۵} \dfrac{\sqrt{۲x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}$

ث) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}} (\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x)$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin ۳x\sin x}{۲x^۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\tan ۳x\sin^۲ ۲x}{۵x^۳}$

ح) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos\frac{x}{۲}}{\pi-x}$

بخش سوم

مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها.

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل	زمان
اول	مشتق	۸ ساعت
دوم	کاربرد مشتق (۱)	۱۰ ساعت

بخش سوم

فصل اول

مشتق

هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به‌دست آوردن مشتق تابع‌های متداول

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند.

۲ــ به کمک تعریف حد، مشتق تابع‌های ساده را حساب کند.

۳ــ قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق تابع‌های دیگر به کار برد.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ فرض کنید تابع با ضابطه $f(x)=۲x+۳$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

الف) $f(x+\Delta x)$ را حساب کنید.

ب) $f(x+\Delta x)-f(x)$ را به‌دست آورید.

پ) عبارت $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

ت) $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ را حساب کنید.

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)=x^{۳}$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است.

الف) اگر تغییر x برابر Δx باشد تغییر y را حساب کنید.

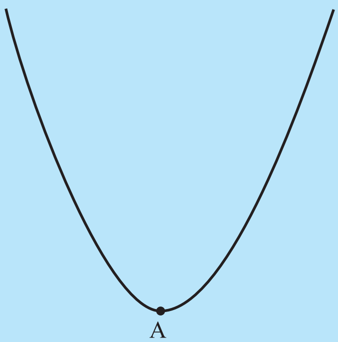
ب) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

پ) مقدار $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را به‌دست آورید.

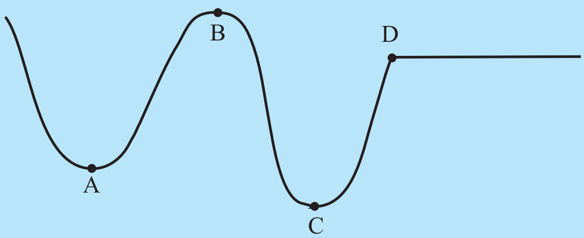
۳ــ در هر یک از منحنی‌های (الف) تا (پ) از شکل

۱ــ۳ نقاطی از منحنی را که در آن‌ها مماس بر منحنی وجود ندارد مشخص کنید.

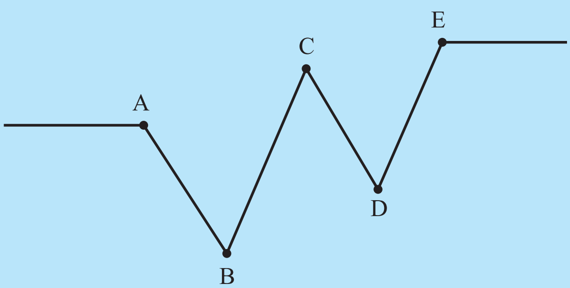
محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۱ــ۳

۱ـ۳ـ مشتق

جهت پرداختن به مطالب این فصل، نمونه‌ای از مسائل را که توسط مشتق حل می‌شوند بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۱ـ۳

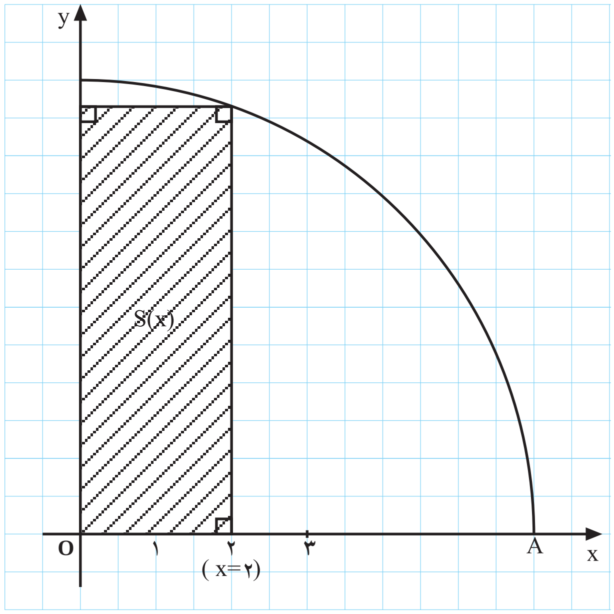
شکل ۲ـ۳ یک ورق فلزی ربع دایره به شعاع ۶ سانتی‌متر را نشان می‌دهد. می‌خواهیم نقطه‌ای به فاصله‌ی x از O انتخاب کنیم به طوری که مساحت مستطیل حاصل، یعنی S(x)، بیشترین مقدار را داشته باشد.

کارهای زیر را انجام دهید شاید به نتیجه برسید!

۱ـ دو نقطه با xهای ۲ و ۳ روی پاره‌خط OA انتخاب شده است. بـه کمک شکـل‌هـای ۲ ـ۳ و ۳ ـ۳، مساحت مستطیل‌های ایجاد شده را حساب کنید و در جدول ۱ـ۳ بنویسید.

۲ـ شما نیز حداقل سه نقطه‌ی دیگر روی پاره‌خط OA انتخاب کنید و مساحت مستطیل‌های به‌دست آمده را در جدول ۱ـ۳ بنویسید. (می‌توانید از ماشین حساب نیز کمک بگیرید.)

۳ـ با استفاده از جدول ۱ـ۳ درباره‌ی تغییرات تابع S(x) چه می‌توان گفت؟ آیا به این ترتیب به جواب می‌رسید؟



شکل ۲ـ۳

جدول ۱ـ۳

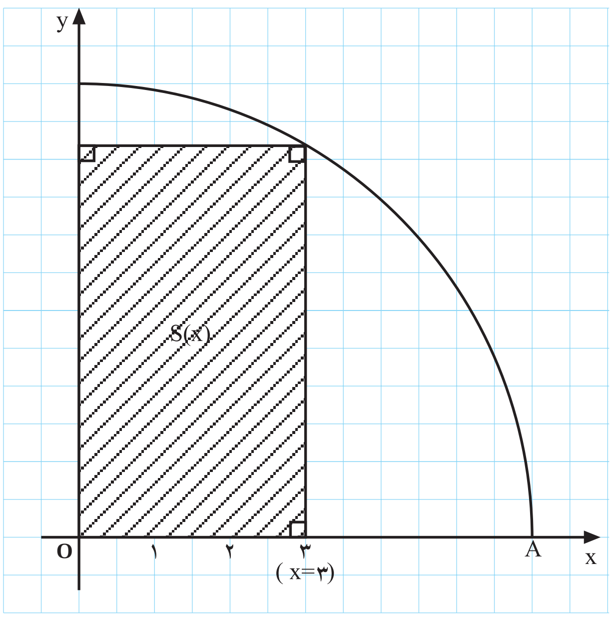
x	S(x)
۲	
۳	

آیا مقدار S(x) با افزایش x، افزایش می‌یابد؟ (S(x) افزایشی) صعودی است؟)

در چه بازه‌ای S(x) با افزایش x، کاهش می‌یابد؟ (S(x) کاهشی) نزولی است.)

بیشترین مقدار (ماکسیمم) S(x) چقدر است؟ و به ازای چه مقداری از x حاصل می‌شود؟

در این فصل به کمک مشتق به این سؤال‌ها پاسخ خواهیم داد.



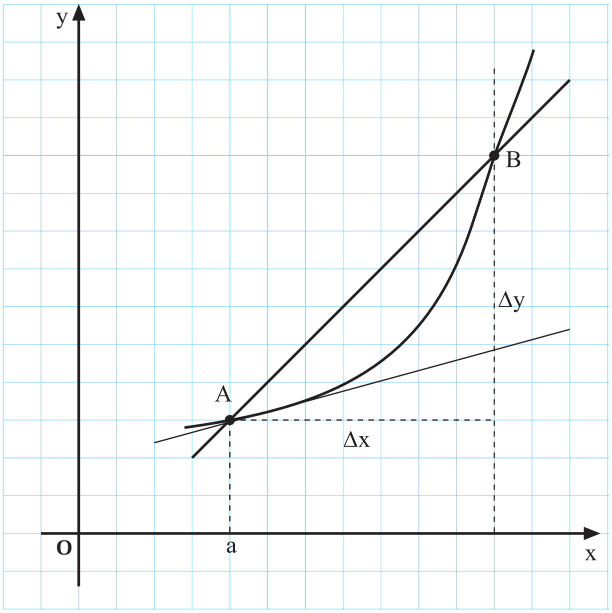
شکل ۳ـ۳

در ابتدای بخش‌دوم (صفحه‌ی ۸۱) ملاحظه کردید که شیب خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} a \\ f(a)\end{matrix}\right.$ برابر است با

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

در واقع، اگر این حد وجود داشته باشد همان مشتق تابع f در $x=a$ است (شکل ۴ــ۳).

در حالت کلی تعریف زیر را داریم.



شکل ۴ــ۳

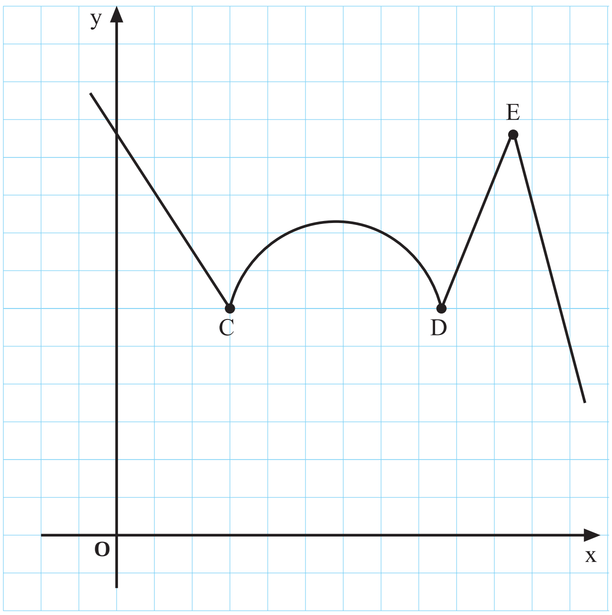
تعریف: مشتق تابع f در $x=a$ برابر است با

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a)$$

به شرط آن که این حد وجود داشته باشد. اگر $y=f(x)$، مقدار مشتق در a را با $y'(a)$ نیز نشان می‌دهند.

نکته: شکل ۵ــ۳ نشان می‌دهد که ممکن است مشتق در برخی از نقاط یک منحنی وجود نداشته باشد، این مطلب از عدم وجود خط مماس در این نقاط نتیجه می‌شود.

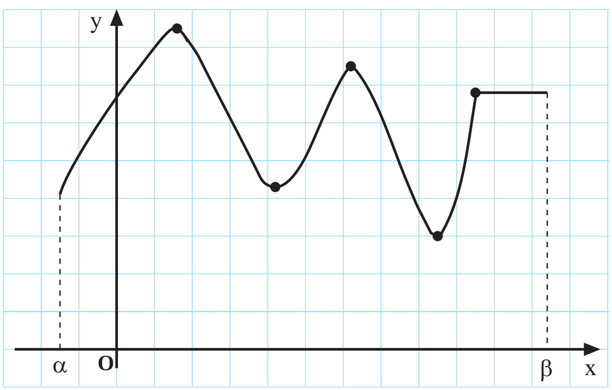
با استفاده از مفهوم مشتق می‌توان نتیجه گرفت که برای شکل ۵ــ۳ مشتق در نقاط D ،C و E وجود ندارد. چرا؟



شکل ۵ــ۳

به نظر شما، در رابطه با رسم نمودار یک تابع، مشتق چه نقشی می‌تواند داشته باشد؟

به کمک ویژگی‌های مشتق یک تابع می‌توان نمودار آن تابع را با دقت بیشتری رسم کرد. به عبارت دیگر، می‌توان دقیقاً مشخص کرد که نمودار در چه ناحیه‌هایی صعودی، نزولی یا ثابت است و تحدّب (کوژی) و تقعّر (کاوی) آن به چه سمتی است و در چه نقاطی ماکسیمم یا مینیمم می‌شود (شکل ۶ــ۳).



شکل ۶ــ۳

۱ــ۱ــ۳ــ محاسبه‌ی مشتق به کمک تعریف: برای محاسبه‌ی مشتق یک تابع می‌توان از تعریف مشتق به صورت‌های مختلف استفاده کرد. در زیر به سه صورت این کار انجام شده است.

$$(۱)\quad f'(a)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

در فرمول (۱) اگر قرار دهیم $\Delta x = h$ ، به دست می‌آوریم :

$$(۲)\quad f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر قراردهیم $\Delta x = x-a$ در این صورت، $\Delta x \to ۰$ معادل $x\to a$ است و $a+\Delta x = x$. بنابراین، (۱) به صورت زیر درمی‌آید :

$$(۳)\quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

برای محاسبه‌ی مشتق، با استفاده از تعریف، از یکی از فرمول‌های بالا استفاده کنید، این فرمول‌ها روش‌های تعیین مشتق تابع f را در a نشان می‌دهند.

مثال‌های نمونه

(کاربرد فرمول (۱))

$$y=f(x)=x^۲+۱\ ,\ a=۱$$

$$f(a)=f(۱)=۲\ ,\ f(۱+\Delta x)=(۱+\Delta x)^۲+۱$$

$$=۲+۲\Delta x+(\Delta x)^۲$$

$$f(۱+\Delta x)-f(۱)=۲\Delta x+(\Delta x)^۲$$

$$f'(۱)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(۱+\Delta x)-f(۱)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}(۲+\Delta x)=۲$$

(کاربرد فرمول (۲))

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left[(۱+h)^۲+۱\right]-۲}{h}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{۲+۲h+h^۲-۱}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲+h)=۲$$

(کاربرد فرمول (۳))

$$f'(۱)=\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲+۱)-۲}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}(x+۱)=۲$$

تعریف: اگر $f'(a)$ وجود داشته باشد گوییم f در a مشتق دارد. اگر برای هر x از دامنه‌ی f، $f'(x)$ وجود داشته باشد گوییم f در دامنه‌اش **مشتق‌پذیر** است.

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ f'(x)&=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ f'(a)&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\end{aligned}}$$

۲ــ۱ــ۳ــ برخی فرمول‌های مشتق: هدف اصلی این فصل استفاده از مشتق برای حل مسائل مربوط به مشتق است (به برخی از این مسائل در ابتدای فصل اشاره شد). لذا، اثبات فرمول‌های مشتق موردنظر نیست. معهذا، برای آن که تعریف مشتق به کار گرفته شود و فرمول آن، برای مواقع لازم، مورد استفاده قرار گیرد، مشتق چند تابع ساده، به کمک تعریف، در مقابل به دست آمده است.

الف) $f(x)=c$ مقدار ثابت

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{c-c}{h}=۰$$

مشتق تابع ثابت در هر نقطه صفر است.

ب) $f(x)=Ax+B$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{[A(x+h)+B]-(Ax+B)}{h}=A$$

اگر $y=Ax+B$ آنگاه $y'=A$.

کار در کلاس ۱_۳

مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورید.

۱) $f(x) = x^{۲}$

۲) $f(x) = x^{۳}$.

با توجه به نتایج به‌دست آمده می‌توان برای هر عدد طبیعی n نوشت :

$$\boxed{\text{اگر } f(x) = x^{n} \quad \text{آنگاه} \quad f'(x) = nx^{n-۱}}$$

۳_۱_۳_ تعبیر هندسی مشتق: همان‌طور که قبلاً گفته شد، در صورتی که $f'(a)$ وجود داشته باشد ضریب زاویه‌ی خط مماس در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} a \\ f(a) \end{matrix}\right.$ برابر $f'(a)$ است.

بنابراین، مماس برنمودار $y = \alpha x + \beta$ در هر نقطه از این خط همین خط است! چرا؟ (شکل ۷_۳).

زیرا، $y' = \alpha$ و معادله‌ی خطی که از $A\left|\begin{matrix} a \\ y(a) \end{matrix}\right.$ با ضریب زاویه‌ی α می‌گذرد عبارت است از :

$$y - (\alpha a + \beta) = \alpha(x - a)$$

که پس از ساده‌کردن به معادله‌ی زیر می‌رسیم :

$$y = \alpha x + \beta$$

با توجه به مطلب بالا، در نمودارشکل ۸_۳ مماس بر نمودار در کدام نقاط **وجود ندارد**؟ چرا؟

نقاطی را که در آن‌ها مماس برنمودار وجود ندارد مشخص کنید.

دربازه‌ی $[-۲,۲]$ نمودار تابعی را رسم کنید که در هفت نقطه مشتق نداشته باشد.

تابع $y = |x|$ در چه نقطه‌ای مشتق ندارد؟ (شکل ۹_۳).

قضیه: اگر تابع f در نقطه‌ی $x = a$ مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

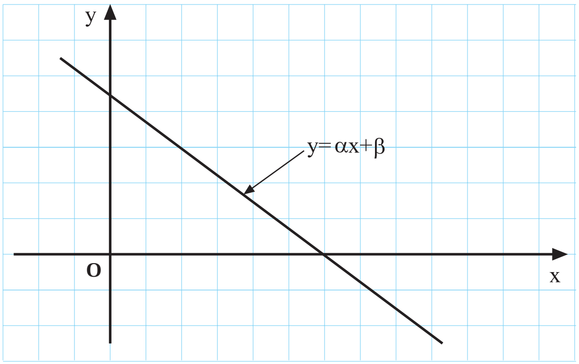
آیا این قضیه نیازی به اثبات دارد؟ توضیح دهید.

مثال‌های نمونه

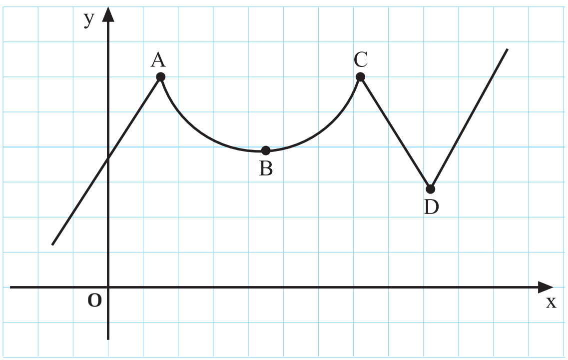
$$y = x^{۳} \Rightarrow y' = ۳x^{۲}$$

$$y = x^{۷} \Rightarrow y' = ۷x^{۶}$$

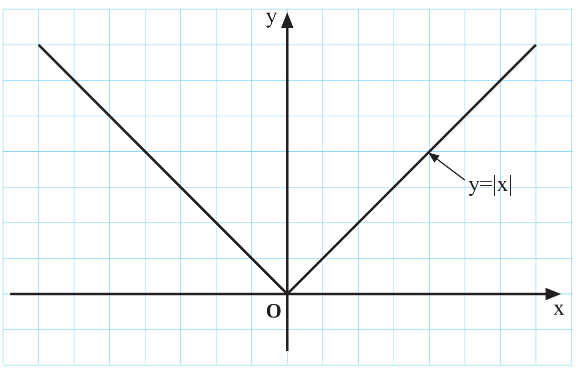
$$y = x^{۱۰۰} \Rightarrow y' = ۱۰۰x^{۹۹}$$



شکل ۷_۳



شکل ۸_۳



شکل ۹_۳

مطالعه‌ی آزاد

بازی با مشتق

منحنی کُخ: در شکل ۱۰ــ۳ پاره خطی به طــول ۶سانتی‌متر رسم شده است. این پاره‌خط به سه قسمت متساوی تقسیم شده و $\frac{۱}{۳}$ وسط آن برداشته شده و به جای آن دو پاره‌خط هم اندازه با آن، مطابق شکل ۱۱ــ۳ قرار داده شده است. این کار با چهار پاره‌خط شکل ۱۱ــ۳ تکرار شده است (شکل ۱۲ــ۳).

محیط شکل ۱۱ــ۳ چند سانتی‌متر است؟

شکل ۱۱ــ۳ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

شکل ۱۲ــ۳ از چند پاره‌خط تشکیل شده است؟

محیط شکل ۱۲ ــ۳ چند سانتی‌متر است؟

شکل ۱۲ــ۳ در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

روی شکل ۱۲ــ۳ عملی را که روی شکل‌های ۱۰ــ۳ و ۱۱ــ۳ انجام شده، انجام دهید.

شکل حاصل از چند پاره‌خط تشکیل می‌شود؟ محیط آن چند سانتی‌متر است؟

شکلی که به دست آورده‌اید در چند نقطه‌ی داخلی مشتق ندارد؟

اگر این عمل را مرتباً روی شکل‌های به‌دست آمده انجام دهید، **در نهایت به منحنی کخ** می‌رسید که نوعی **فِرَکتال** است. **هر جزء این منحنی مشابه کل آن است!**

آیا منحنی کخ پیوسته است؟

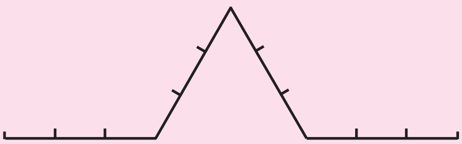
آیا منحنی کخ در نقطه‌ای دارای مشتق است؟

آیا منحنی کخ در سطحی محدود قرار دارد؟

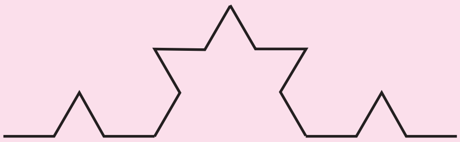
آیا محیط منحنی کخ متناهی است؟

اگر کارهای بالا را روی مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ سانتی‌متر انجام دهید در مرحله‌ی سوم به شکل ۱۳ــ۳ می‌رسید. این شکل در حد، **برفدانه‌ی کخ** نامیده می‌شود. [۱۰]

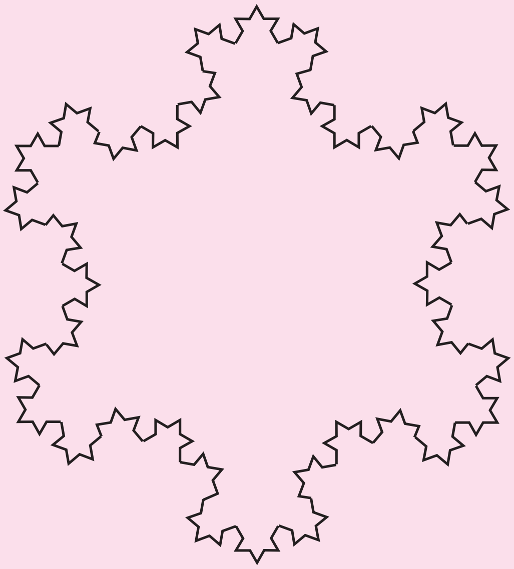
شکل ۱۰ــ۳



شکل ۱۱ــ۳



شکل ۱۲ــ۳



شکل ۱۳ــ۳

۴ــ۱ــ۳ــ قضیه‌های مشتق: اثبات قضیه‌های زیر به کمک تعریف مشتق ساده است ولی هدف، استفاده از این قضیه‌ها در حل مسائل است.

در مقابل، با استفاده از قضیه‌های زیر، مثال‌های نمونه‌ای حل شده است.

مثال‌های نمونه

قضیه‌ی ۱ (مشتق حاصل‌جمع دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند آنگاه :

$$(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$$

این قضیه برای تعداد با پایان تابع مشتق‌پذیر نیز برقرار است.

$$y = x^{۲}+x^{۳} \Rightarrow y' = ۲x+۳x^{۲}$$

$$y = x^{۳}-x^{۲}+x+۴ \Rightarrow y' = ۳x^{۲}-۲x+۱$$

قضیه‌ی ۲ (مشتق حاصل‌ضرب دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند آنگاه :

$$(f(x)\times g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

نتیجه: اگر k عددی ثابت باشد آنگاه :

$$(kf(x))' = kf'(x)$$

$$y = (x^{۲}+۱)(x^{۳}-x+۴)$$

$$y' = ۲x(x^{۳}-x+۴)+(x^{۲}+۱)(۳x^{۲}-۱)$$

$$y = ۸x^{۲} \Rightarrow y' = ۸\times ۲x = ۱۶x$$

قضیه ۳ (مشتق تقسیم دو تابع): اگر $f'(x)$ و $g'(x)$ وجود داشته باشند و $g(x)\neq ۰$ آنگاه :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^{۲}}$$

$$y = \frac{۲x-۵}{x+۱}$$

$$y' = \frac{۲(x+۱)-۱(۲x-۵)}{(x+۱)^{۲}} = \frac{۷}{(x+۱)^{۲}}$$

قضیه‌ی ۴ (مشتق تابع‌های مثلثاتی):

الف) اگر $y=\cos x$ آنگاه $y'=-\sin x$

ب) اگر $y=\sin x$ آنگاه $y'=\cos x$

پ) اگر $y=\tan x$ آنگاه $y'=۱+\tan^{۲}x$

ت) اگر $y=\cot x$ آنگاه $y'=-(۱+\cot^{۲}x)$

$$y=\sin x+\cos x,\ y'=\cos x-\sin x$$

$$y=۲\cos x-۳\sin x,\quad y'=-۲\sin x-۳\cos x$$

$$y=x^{۲}\sin x,\quad y'=۲x\sin x+x^{۲}\cos x$$

$$y=\tan x+x\cos x-\cot x,$$

$$y'=۱+\tan^{۲}x+\cos x-x\sin x+۱+\cot^{۲}x$$

قضیه‌ی ۵: فرض کنید u تابعی از x و f تابعی از u باشد و $u'(x)$ و $f'(u)$ وجود داشته باشند. اگر $y=f(u)$ آنگاه :

$$y' = u'(x)f'(u).$$

۱) $y=f(u)=u^{۳}\ ,\quad u=(x^{۲}+x-۱)$

$$y'(x)=u'(x)\times f'(u)=(۲x+۱)\times ۳u^{۲}$$

$$=(۲x+۱)\times ۳\times (x^{۲}+x-۱)^{۲}.$$

نتیجه‌ی ۱: اگر $y=u^{n}$ آنگاه $y'=nu'u^{n-۱}$.

نتیجه‌ی ۲: اگر $y=\sqrt{u}$ آنگاه $y'=\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$.

نتیجه‌ی ۳: اگر $y=\sqrt[m]{u^{n}}$ آنگاه $y=u^{\frac{n}{m}}$ و

$$y'=\frac{n}{m}u'u^{\frac{n}{m}-۱}$$

$$=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}.$$

کار در کلاس ۲ــ۳

با استفاده از فرمول‌های مشتق که در صفحه‌ی بعد ملاحظه می‌کنید، مشتق تابع‌های زیر را، در سمت چپ، بنویسید.

الف) $y=۳x^{۲}-\sqrt{۲}x+\dfrac{۲}{۷}$

ب) $y=(۳x-۱)(x+۲)$

پ) $y=x\sqrt{x}$

ت) $y=\cos x+x\sin x$

ث) $y=\sqrt[۵]{(۲x-۱)^{۲}}$

ج) $y=\cos(x+\dfrac{\pi}{۴})$

چ) $y=\sin(\dfrac{\pi}{۴}-۲x)$

ح) $y=\sin(۲x+۱)-\cos ۳x$

خ) $y=\dfrac{x+\cos x}{۲+\sin x}$

د) $y=\cot ۳x$

۲) $y=\sin^{۷} x$

$y'=۷\cos x\sin^{۶} x$

۳) $y=\sqrt{x}=x^{\frac{۱}{۲}} \Rightarrow y'=\dfrac{۱}{۲}x^{\frac{۱}{۲}-۱}$

$=\dfrac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}$

۴) $y=\sqrt{۲x^{۲}+x-۲}$

$y'=\dfrac{۴x+۱}{۲\sqrt{۲x^{۲}+x-۲}}$

۵) $y=\sqrt{۲+\sin x}$

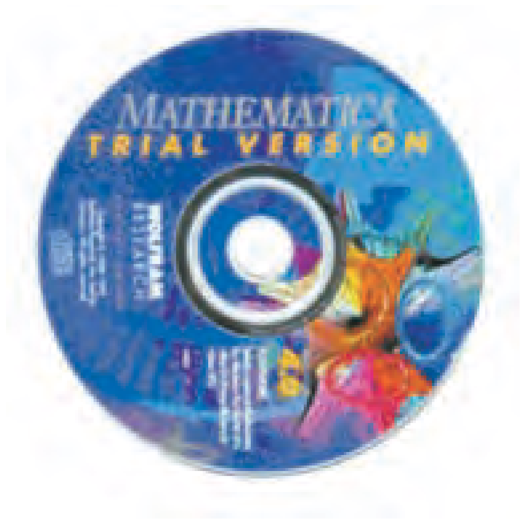
$y'=\dfrac{\cos x}{۲\sqrt{۲+\sin x}}$

۶) $y=\sqrt[۵]{x^{۳}+۷x-۲}$

$y'=\dfrac{۳x^{۲}+۷}{۵\sqrt[۵]{(x^{۳}+۷x-۲)^{۴}}}$

۷) $y=\sqrt[۳]{(۲x+۱)^{۲}} \Rightarrow y'=\dfrac{۲}{۳}\times ۲\times (۲x+۱)^{\frac{۲}{۳}-۱}.$

$=\dfrac{۴}{۳\sqrt[۳]{۲x+۱}}$



۵ـ۱ـ۳ـ جدول فرمول‌های مشتق: در زیر، جدول مربوط به فرمول‌های مشتقِ تابع‌هایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، آمده است. انتظار می‌رود با حل تمرین‌های متعدد این فرمول‌ها را به خاطر بسپارید. معهذا، چون هدف اصلی کاربرد این فرمول‌ها در حل مسائل است، به دبیران محترم توصیه می‌شود که در آزمون‌های مربوط به این فصل جدول را ،با مقیاس بزرگتری،در اختیار دانش‌آموزان قرار دهند.

تابع	مشتق تابع	مثال
$y=c$	$y'=۰$	$y=۴\Rightarrow y'=۰,\ \ y=۳\sqrt{۲}\Rightarrow y'=۰$
$y=ax+b$	$y'=a$	$y=-۶x+۷\Rightarrow y'=-۶,\ \ y=\frac{۱}{۲}x\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}$
$y=x^n, n\in R$	$y'=nx^{n-۱}$	$y=x^۳\Rightarrow y'=۳x^۲,\ \ y=x^۷\Rightarrow y'=۷x^۶$
$y=kf(x)$ و k ثابت	$y'=kf'(x)$	$y=۶x^۲\Rightarrow y'=۶\times ۲x=۱۲x$
$y=u\pm v$	$y'=u'\pm v'$	$y=x^۳+۲x^۲\Rightarrow y'=۳x^۲+۴x$
$y=u.v$	$y'=u'v+uv'$	$y=(x^۲+۱)(۲x^۳-x^۲+۱)$ $y'=۲x(۲x^۳-x^۲+۱)+(x^۲+۱)(۶x^۲-۲x)$
$y=\frac{u}{v}$	$y'=\frac{u'v-uv'}{v^۲}$	$y=\frac{۲x-۵}{x^۲+۱}\Rightarrow y'=\frac{۲(x^۲+۱)-۲x(۲x-۵)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{-۲x^۲+۱۰x+۲}{(x^۲+۱)^۲}$
$y=\sqrt{u}$	$y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$	$y=\sqrt{۵x}\Rightarrow y'=\frac{۵}{۲\sqrt{۵x}}$
$y=u^n$	$y'=nu'u^{n-۱}$	$y=(۳x^۲-۵)^۳\Rightarrow y'=۳(۶x)(۳x^۲-۵)^۲=۱۸x(۳x^۲-۵)^۲$
$y=\sqrt[m]{u^n}$	$y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y=\sqrt[۶]{(x^۲+x+۱)^۵}\Rightarrow y'=\frac{۵(۲x+۱)}{۶\sqrt[۶]{x^۲+x+۱}}$
$y=\sin u$	$y'=u'\cos u$	$y=\sin ۳x\Rightarrow y'=۳\cos ۳x$
$y=\cos u$	$y'=-u'\sin u$	$y=\cos\frac{۱}{۲}x\Rightarrow y'=-\frac{۱}{۲}\sin\frac{۱}{۲}x$
$y=\tan u$	$y'=u'(۱+\tan^۲ u)$	$y=\tan\frac{۱}{x}\Rightarrow y'=-\frac{۱}{x^۲}(۱+\tan^۲\frac{۱}{x})$
$y=\cot u$	$y'=-u'(۱+\cot^۲ u)$	$y=\cot(۱-۲x)\Rightarrow y'=۲(۱+\cot^۲(۱-۲x))$

تمرین ۱ــ۳

۱) مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از جدول مشتق بنویسید.

الف) $y=5x^3-3x^2+1$

ب) $y=x(3x^4+x)$

پ) $y=3\sin x\cos x$

ت) $y=\sqrt{3x-1}$

ث) $y=\sqrt[5]{(x^2+x)^3}$

ج) $y=\dfrac{2\cos x}{\sin x+2}$

چ) $y=\tan 3x+\sin\sqrt{x}$

ح) $y=(x^3-2x+1)^7$.

۲) اگر $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$، مقدار $f'(0)$ را به‌دست آورید.

۳) اگر $u=x^2-1$ و $y=5u^3$، حاصل y'_x را بنویسید.

۴) اگر $y=2u^2+5u-1$ و $u=\sqrt{x^2+4}$، y'_x را به‌دست آورید.

۵) مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $y=3x+5$

ب) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-x+\sqrt{2}$

پ) $y=4(x^3+2x-1)$

ت) $y=\dfrac{7x^2+6x-4}{9}$

ث) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{2\cos x+3}$

ج) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$

چ) $y=\tan^5\dfrac{x}{2}$

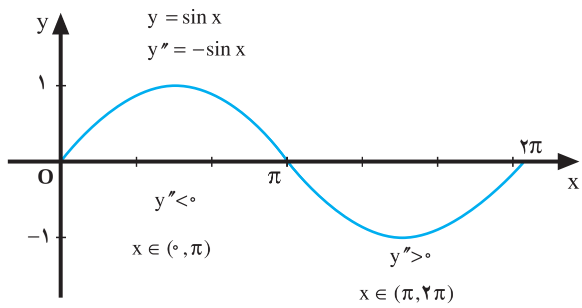
ح) $y=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

خ) $y=\sqrt[3]{1+\cos^4 x}$.

۶ــ۱ــ۳ــ مشتق دوم یک تابع: همان‌طور که مشتق یک تابع تعریف شد، می‌توان مشتقِ مشتق یک تابع را نیز تعریف کرد و آن را، در صورت وجود، حساب کرد. مشتق تابع f را با f' و مشتق تابع f' را با f'' نمایش می‌دهیم. در مثال‌های روبه‌رو، مشتق دوم (f'') برای چند تابع حساب شده است.

مشتق دوم یک تابع در رسم دقیق نمودار تابع‌ها کاربرد دارد .در زیر مثالی می‌آوریم، این مطلب در ۱ــ۳ــ۳ بیشتر بررسی می‌شود.

مثال: در زیر نمودار تابع $y=\sin x$ رسم شده است.



ملاحظه می‌شود که دربازه‌ی$(۰,\pi)$ گودی(تقعر) نمودار به طرف پایین است و$y''<۰$ و در $(\pi,۲\pi)$ گودی نمودار به‌طرف بالا است و$y''>۰$.

تمرین ۲ــ۳

مشتق دوم هریک از تابع‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $y=۲x^۲+۷x-۵$

ب) $y=-\frac{۱}{۴}x^۲+۶x-۴$

پ) $y=x^۳+۲x^۲-۵x+۲$

ت) $y=(x-۲)^۳$

ث) $y=\sin ۲x$

ج) $y=\cos x+\sin x$

ج) $y=\frac{x-۱}{x+۲}$.

مثال‌ها:

الف) $f(x)=۴x^۳-x^۲+۲\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=۱۲x^۲-۲x\\ f''(x)=۲۴x-۲\end{cases}$

ب) $f(x)=\sin x\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=\cos x\\ f''(x)=-\sin x\end{cases}$

پ) $f(x)=\frac{۱}{x}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=-\frac{۱}{x^۲}\\ f''(x)=\frac{۲}{x^۳}\end{cases}$

ت) $f(x)=\cos x\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=-\sin x\\ f''(x)=-\cos x\end{cases}$

ث) $f(x)=\tan x\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=۱+\tan^۲ x\\ f''(x)=۲\tan x(۱+\tan^۲ x)\end{cases}$

ج) $f(x)=\frac{۲}{x-۱}\Rightarrow\begin{cases}f'(x)=\frac{-۲}{(x-۱)^۲}\\ f''(x)=\frac{۴}{(x-۱)^۳}\end{cases}$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ تابع $f(x)=x^{2}-1$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است. مشتق این تابع را در $x=1$ حساب کنید.

۲ــ مشتق تابع $y=2x+3$ را در $x=1$، به کمک تعریف مشتق، حساب کنید.

۳ــ تابع $y=|x+2|$ در چه نقطه‌ای از نمودارش دارای خط مماس نیست؟

۴ــ فرض کنید $f(x)=|x|$ حساب کنید:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}.$$

از این تمرین چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۵ــ مشتق تابع‌های زیر را حساب کنید.

الف) $y=\cos x-\sin x$

ب) $y=x\sqrt[3]{x}$

پ) $y=\sqrt{\dfrac{1}{2+\cos x}}$

ت) $y=\sqrt[5]{(x^{2}+1)^{3}}$

ث) $y=\sin^{2}x+\cos^{2}x.$

۶ــ با توجه به ضابطه‌ی y مقدار y'' را حساب کنید.

الف) $y=\sqrt{x}$

ب) $y=\sin x$

پ) $y=\sqrt[3]{x^{2}}$

ت) $y=\cos x$

ث) $y=\tan x.$

با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

غیاث‌الدین جمشید بن مسعود بن محمود طبیب کاشانی، (غیاث‌الدین جمشید مسعود کاشانی) اگر چه فیزیکدان بود، ولی علاقه‌ی اصلیش متوجه ریاضیات و اخترشناسی بود. این ریاضیدان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. وی از نوابغ ریاضی قرن نهم محسوب می‌شود. در کتاب‌ها آمده است که این مرد بزرگ و با اراده در روزگاری می‌زیست که ایران، میدان تاخت و تاز و یورش مستبدانی همچون چنگیز، هلاکوخان و تیمور بود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در زمان تیموریان زندگی می‌کرد. زمانی که او در سن جوانی به کار تهیه جدول‌های محاسباتی نجوم مشغول بود، ایران در معرض ویرانی قرارداشت. هنگامی که در اوج خلاقیت ذهنی، برای راحتی کار با سایر منجمان، محاسبات دقیق نجومی را انجام می‌داد و ابزار اختراع می‌کرد، تیمور و پسرش شاهرخ با تجاوز خود به ایران، شهرها را یکی پس از دیگری به ویرانه تبدیل می‌ساختند. در آن موقعیت سخت امکان فعالیت‌ها و تحقیقات جدی برای او وجود نداشت. پسر شاهرخ یعنی الغ بیگ، که حاکم سمرقند بود، او را به رصدخانه دعوت کرد و وی از فرصت خوبی که پیش آمده بود، استقبال کرد. کاشی (کاشانی) برجسته‌ترین مقام را در میان کارکنان علمی «مدرسه» یعنی آموزشگاه الهیات و علم، که در سال ۷۹۹ به همت الغ بیگ بنیاد نهاده شده بود، داشت. تا هنگامی که الغ بیگ در سال ۸۲۸ به قتل رسید، سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی در خاور زمین بود. کاشی به سازماندهی رصدخانه کمک کرد و در زیج الغ بیگ همکاری نزدیک داشت. مشهورترین اثرش مفتاح الحساب (۸۰۶) می‌باشد که دایرة‌المعارف حساب مقدماتی است که صدها سال به عنوان کتاب راهنما به کار رفت. غیاث‌الدین نمونه عالم مسلمان بود. مسلمانی که نه تنها فهم دینی داشت، بلکه در اخلاق عملی و رفتار هم نمونه بود. در کارهای علمی ملاحظه‌ی هیچ کس را نداشت و انصاف، خصلت بزرگی بود که او در زندگی اجتماعی و علمی داشت. در مدرسه بزرگ سمرقند، نزدیک به پانصد طلبه علم از نقاط مختلف دور هم جمع شده بودند. الغ بیگ بیشتر وقت‌ها در کلاس‌های درس و مباحثه شرکت می‌کرد. برخی از روی ترس و حفظ منافع، گفتار غلطش را تأیید می‌کردند ولی غیاث‌الدین در این موارد هیچ ملاحظه‌ای از خودش نشان نمی‌داد و مصلحت اندیشی نمی‌کرد. در مقدمه کتاب «مفتاح‌الحساب» نوشته است «ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتاست و درود به بهترین آفریده‌ی او محمد (ص) که والاترین شفاعت‌کننده‌ی روز رستاخیز است و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمودند. اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آموزش و بخشش او، جمشید پسر مسعود، پسر محمود پزشک کاشی، ملقب به غیاث‌الدین که خدا روزگارش را نیکو گرداند ...

در این کتاب روش ریشه‌گیری از اعداد صحیح را شرح می‌دهد و نخستین روش منظم برای پرداختن به کسرهای دهدهی را به دست می‌دهد که احتمالاً در اشاعه کسرهای دهدهی در اروپا تأثیر داشته است. بزرگ‌ترین آثار ریاضی وی عبارت‌اند از رساله المحیطیه (۸۰۳) و رساله الوتر و الجیب.

در رساله محیطیه مقدار سینوس را تا هفده رقم اعشاری تعیین می‌کند و در اثر دوم مقدار سینوس ۱ را تا ده رقم صحیح شصتگانی حساب می‌کند. در ابتدای کتاب رساله محیطیه این‌طور نوشته است «ستایش خداوندی را سزا که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است و اندازه هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفریننده‌ی زمین و آسمان‌ها و قرار دهنده‌ی نور در تاریکی است و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایره‌ی رسالت و محیط اقطار راهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد»

جمشید کاشانی انسانی سختکوش، با هدف و منضبط و پر تلاش بود. عمر نسبتاً کوتاه و تعداد زیاد کتاب و تحقیقات او دلیل این ادعا است. جمشید کاشانی کتاب‌های زیادی در زمینه‌ی ریاضی کاربردی نوشته است که عموماً ارتباط نزدیکی با زندگی مردم و رفع مشکلات آنان داشته است. و همچنین تعداد زیادی ابزار نجومی برای محاسبات دقیق حرکت و وضعیت ستارگان ساخت که در روزگارش نظیر نداشت. روش او در حل عددی معادله‌ی تثلیت یکی از مهم‌ترین روش‌های جبر قرون وسطی است. از کارهای مهم کاشانی در نجوم تدوین زیج خاقانی است که در تکمیل نواقص زیج ایلخانی آن را تهیه کرد. وی در سال ۸۱۸ هـ. ق وسیله جدیدی برای رصد ستاره‌ها به نام طبق المناطق اختراع کرد و درباره‌ی چگونگی استفاده از آن و وسیله‌ی دیگری که پیش از آن ساخته بود (به نام لوح اتصالات) رساله جامع و مفیدی موسوم به نزهة الحدائق نوشت و از آثار دیگر او می‌توان به زیج تسهیلات و سلم السماء نیز اشاره کرد. این ریاضیدان بزرگ در سال ۸۳۲ هـ.ق در شهر سمرقند وفات یافت.

بخش سوم

فصل دوم

کاربردهای مشتق (۱)

هدف کلی

به‌کاربردن مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار یک تابع، تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع و به‌دست‌آورن نقطه‌های اکسترمم یک تابع

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ معادله‌ی خط مماس را در یک نقطه از نمودار یک تابع بنویسد.

۲ــ معادله‌ی خط قائم بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد.

۳ــ به کمک مشتق، صعودی یا نزولی‌بودن یک تابع را مشخص کند.

۴ــ رفتار یک تابع را در بازه‌های مختلف تعیین کند.

۵ــ نقطه‌های اکسترمم یک تابع را تعیین کند.

۶ــ با توجه به جدول رفتار تابع و نقاط اکسترمم، نمودار توابع درجه دوم و سوم را رسم کند.

پیش‌آزمون (۲)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ فرض کنید نقطه‌ی A روی نمودار تابع زیر باشد :

$y = f(x) = x^{۲} - x + ۱$

الف) اگر $x_A = ۱$ مقدار y_A را حساب کنید.

ب) مقدار $f'(۱)$ را به‌دست آورید.

پ) معادله‌ی خط (D) را بنویسید که از نقطه‌ی A بگذرد و شیب آن $f'(۱)$ باشد.

ت) نمودار $y = f(x)$ و خط (D) را رسم کنید.

ث) آیا خط (D) بر نمودار $y = f(x)$ مماس است؟

۲ــ فرض کنید $y = x^{۳}$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد.

الف) نمودار y را رسم کنید (از طریق نقطه‌یابی).

ب) دو نقطه‌ی A و B را روی نمودار این تابع چنان انتخاب کنید که $x_A < x_B$. با توجه به نمودار، رابطه‌ی بین y_A و y_B را بنویسید. بدون استفاده از نمودار ثابت کنید $y_A < y_B$.

ت) رفتار این تابع چگونه است؟ نام این تابع چیست؟

۳ــ فرض کنید $f(x) = x^{۳} - x$. علامت $f'(x)$ را در $\mathbb{R}$ تعیین کنید.

۴ــ اگر $f(x) = x^{۲} - ۲x + ۳$ مینیمم مقدار $f(x)$ را به‌دست آورید. توضیح دهید چگونه مینیمم را به‌دست آوردید. f' در x نقطه‌ی مینیمم چه مقداری دارد؟

۲ـ۳ـ کاربردهای مشتق (۱)

۱ـ۲ـ۳ـ تعیین معادله‌ی خط مماس و خط قائم:

یکی از کاربردهای مشتق، تعیین معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم در یک نقطه‌ی دلخواه از نمودار یک تابع است.

فعالیت ۲ـ۳

تابع $y=f(x)=4x^2-4x+2$ و نمودار آن،(شکل ۱۴ـ۳)، داده شده است. برای نوشتن معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم بر نمودار این تابع در نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix}1\\ f(1)\end{matrix}\right.$ ، کارهای زیر را انجام دهید.

۱ـ مقدار $f(1)$ را حساب کنید.

۲ـ مشتق y را به‌دست آورید.

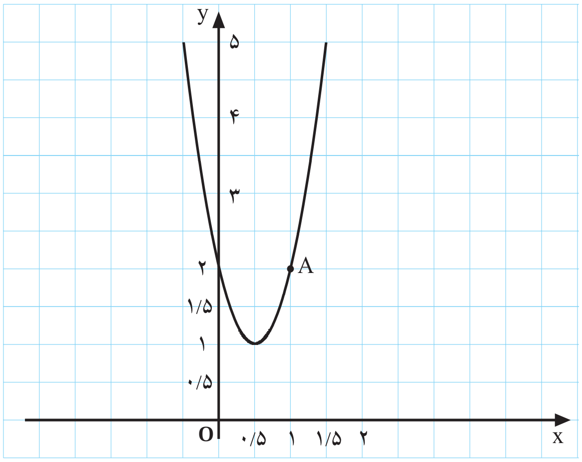
۳ـ مقدار $f'(1)$ را حساب کنید.

۴ـ معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی A می‌گذرد و شیب آن $f'(1)$ است، بنویسید.

۵ـ آیا $y=4x-2$ معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی A است؟

۶ـ با توجه به این که خط قائم بر منحنی در هر نقطه عمود بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه است، ابتدا شیب خط قائم و بعد معادله‌ی خط قائم بر نمودار فوق را در نقطه‌ی A بنویسید.

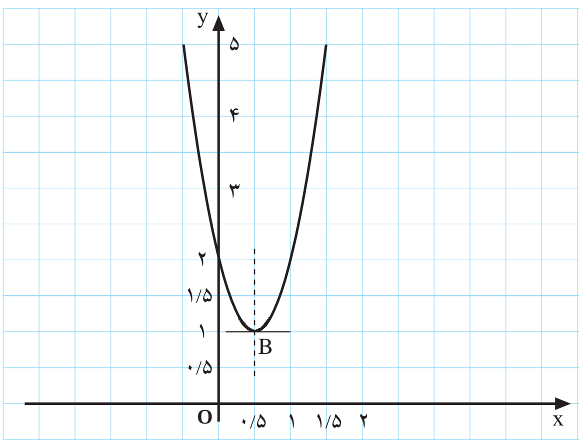
۷ـ خط مماس و خط قائم را در $x=1$ رسم کنید.



شکل ۱۴ـ۳

کار در کلاس ۳ـ۳

با انتخاب $B\left|\begin{matrix}\frac{1}{2}\\ f(\frac{1}{2})\end{matrix}\right.$ مراحل ۱ تا ۷ را تکرار کنید (شکل ۱۵ـ۳).



شکل ۱۵ـ۳

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر تابع $f(x)=-x^{۲}+۶x-۸$ در نقطه‌ی $x=-۱$ واقع بر منحنی را بنویسید.

حل ۱: به‌ازای $x=-۱$، داریم :

$$f(-۱)=-(-۱)^{۲}+۶(-۱)-۸=-۱۵$$

بنابراین، $(-۱,-۱۵)$ نقطه‌ی تماس منحنی است.

از طرفی :

$$f'(x)=-۲x+۶$$

پس، ضریب زاویه‌ی m به‌صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$m=f'(-۱)=-۲(-۱)+۶=۸$$

معادله‌ی خط مماس چنین است :

$$y-(-۱۵)=۸(x-(-۱))$$

$$y=۸x-۷$$

مثال ۲: معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y=\cos^{۲}x-\sin^{۲}x$، در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۶}$، واقع بر این تابع را بنویسید.

حل ۲: اگر $x=\frac{\pi}{۶}$،

$$y=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^{۲}-(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$y'=-۲\sin x\cos x-۲\sin x\cos x$$

$$=-۴\cos x\sin x$$

شیب خط مماس $=-۴(\frac{\sqrt{۳}}{۲})(\frac{۱}{۲})=-\sqrt{۳}$

شیب خط قائم $=-\frac{۱}{-\sqrt{۳}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$

معادله‌ی خط قائم $\quad y-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}(x-\frac{\pi}{۶})$

تمرین ۳ــ۳

۱) معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع‌های زیر را، در نقطه‌هایی که x آن‌ها داده شده است، بنویسید.

الف) $y=۲x^{۲}-x+۱,\quad x=۲$

ب) $y=x^{۲}+۲x+۲,\quad x=-۱$

پ) $y=\sin^{۲}x,\quad x=\pi$

ت) $y=\frac{x-۱}{x+۱},\quad x=-۲$

ث) $y=\tan x,\quad x=۰$

ج) $y=۲\sqrt{x},\quad x=۱.$

۲) نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌ی داده‌شده رسم کنید و معادله‌ی مماس در نقطه‌های داده شده را بنویسید. خط قائم را نیز رسم کنید.

الف) $y=\sin x,\quad x=۰,\quad -\pi\le x\le\pi$

ب) $y=\cos x,\quad x=۰,\quad -\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{۳\pi}{۲}.$

۲ــ۲ــ۳ــ رفتار تابع: مصرف آب یک مجتمع مسکونی، بین ساعت ۸ صبح تا ساعت ۲۰ از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند (x برحسب ساعت و f(x) برحسب مترمکعب است) :

$$f(x)=۲۸x-x^{۲}-۱۵۵,\quad x\in[۸,۲۰]$$

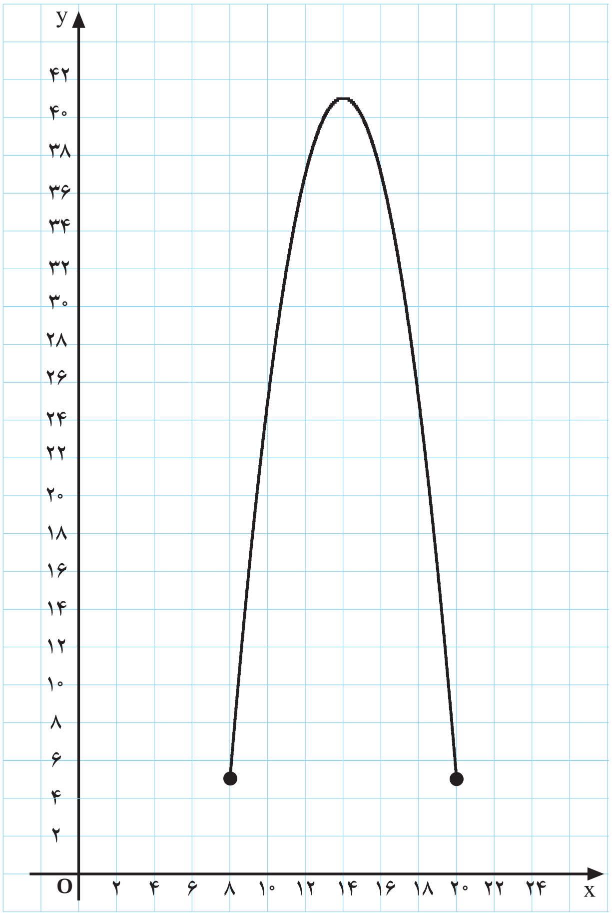
معین کنید در چه بازه‌ی زمانی مصرف آب در حال افزایش (صعود) و در چه بازه‌ی زمانی در حال کاهش (نزول) است؟

در چه زمانی مصرف آب حداکثر است؟ و این حداکثر چند مترمکعب است؟

حل: نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل ۱۶ــ۳ رسم شده است، البته با استفاده از جدول ۲ــ۳ زیر :

جدول ۲ــ۳

x	۸	۱۲	۱۶	۲۰
f(x)	۵	۳۷	۳۷	۵



شکل ۱۶ــ۳

با توجه به شکل ۱۶ــ۳ بگویید حداکثر مصرف آب در چه زمانی رخ می‌دهد؟

درست است، در ساعت ۱۴.

آیا بدون رسم شکل هم این عدد به‌دست می‌آید؟

$$f(۱۴)=?$$

عدد ۱۴ با اطلاعات قبلی چنین به‌دست می‌آید (امتحان کنید) :

$$f(x)=۲۸x-x^{۲}-۱۵۵=۴۱-(x-۱۴)^{۲}$$

واضح است که حداکثر f(x) مساوی ۴۱ و در $x=۱۴$ به‌دست می‌آید.

امّا، اگر قرار دهید $f'(x)=۰$ آنگاه :

$$f'(x)=۲۸-۲x=۰\Rightarrow x=۱۴$$

تابع f در بازه‌ی [۸,۱۴] صعودی و در بازه‌ی [۱۴,۲۰] نزولی است.

فعالیت ۳ـ۳

تابع $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ و نمودار آن، در شکل ۱۷ـ۳، داده شده است. می‌خواهیم رفتار این تابع را در بازه‌های $(0,+\infty)$ و $(-\infty,0)$ بررسی کنیم.

۱ــ دو مقدار $x_1=1$ و $x_2=1/5$ متعلق به بازه‌ی $(0,+\infty)$ را در نظر بگیرید. آیا، $x_1<x_2$ می‌باشد؟

۲ــ مقدارهای $f(x_1)$ و $f(x_2)$ را به‌دست آورید.

آیا $f(x_1)<f(x_2)$ می‌باشد؟

۳ــ قرار دهید $x_1=2$ و $x_2=2/5$

آیا $f(x_1)<f(x_2)$ می‌باشد؟

۴ــ دو عدد دلخواه x_1 و x_2 را در بازه‌ی $(0,+\infty)$ در نظر بگیرید. با تشکیل عبارت $f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{2}x_1^2-\frac{1}{2}x_2^2$ نشان دهید که:

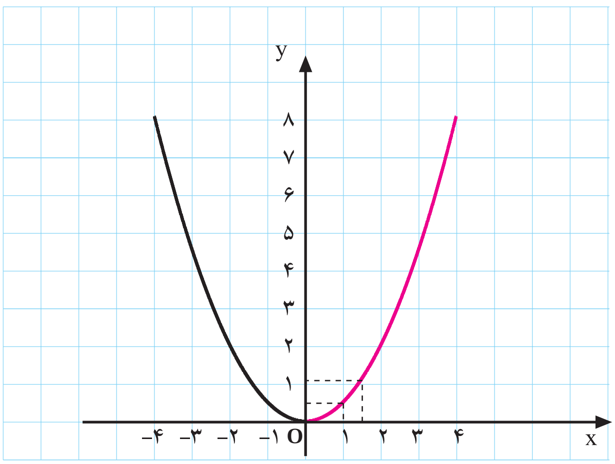
اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)<f(x_2)$ (✻)

۵ــ با توجه به (✻) اگر x_1 و x_2 دو عدد دلخواه متعلق به بازه‌ی $(0,+\infty)$ باشند علامت کسر زیر چیست؟

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

۶ــ با محاسبه‌ی y'، علامت y' را در $(0,+\infty)$ تعیین کنید.

با توجه به (✻) تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ را بر $(0,+\infty)$ **صعودی** گوییم.



شکل ۱۷ـ۳ــ نمودار $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

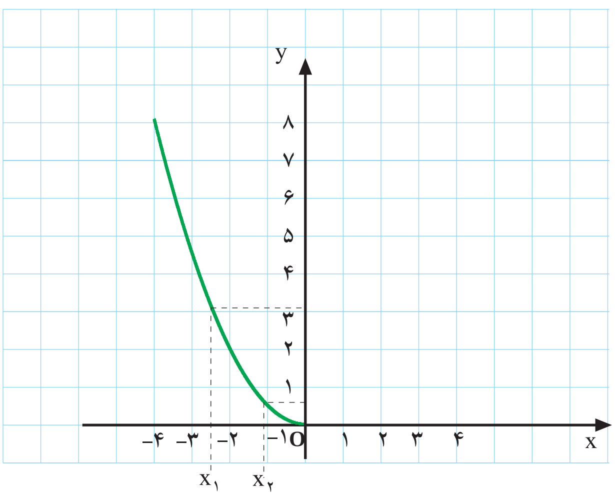
کار در کلاس ۴ـ۳

مشابه فعالیت ۳ـ۳ را در مورد تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ بر بازه‌ی $(-\infty,0)$ انجام دهید (شکل ۱۸ـ۳).

۱ــ با تشکیل عبارت $f(x_1)-f(x_2)$ نشان دهید که، به‌ازای هر x_1 و x_2 از $(-\infty,0)$،

اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)>f(x_2)$ (†)

۲ــ آیا رابطه‌ی (†) از روی شکل ۱۸ـ۳ به‌وضوح دیده می‌شود؟



شکل ۱۸ـ۳ــ نمودار $y=\frac{1}{2}x^2$ برای $x\leq 0$

۳ــ علامت عبارت زیر را در بازه‌ی $(-\infty,0)$ تعیین کنید.

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

۴ــ با محاسبه‌ی y'، علامت y' را در $(-\infty,0)$ تعیین کنید.

با توجه به (†) تابع $y=\frac{1}{2}x^2$ را بر $(-\infty,0)$ **نزولی** می‌نامیم.

فرض کنید I یک بازه و $y=f(x)$ یک تابع باشد و $I\subset D_f$.

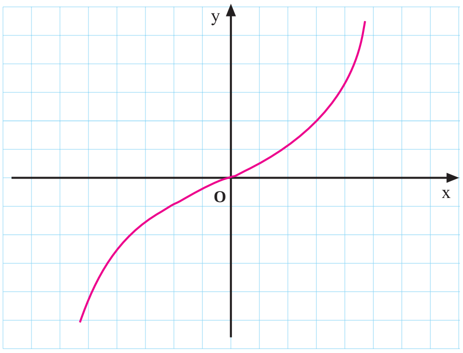
تعریف ۱. تابع f را بر I صعودی نامیم درصورتی که برای هر x_1 و x_2 متعلق به I، اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)\le f(x_2)$.

تعریف ۲. تابع f را بر I نزولی نامیم درصورتی که برای هر x_1 و x_2 متعلق به I، اگر $x_1<x_2$ آنگاه $f(x_1)\ge f(x_2)$.

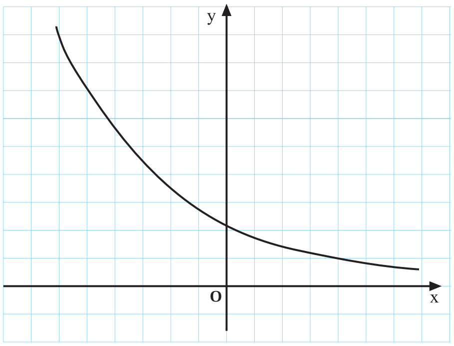
کار در کلاس ۵ــ۳

۱ــ با استفاده از تعریف صعودی یا نزولی بودن یک تابع معین کنید در شکل‌های ۲۱ــ۳ و ۲۲ــ۳ کدام تابع صعودی و کدام نزولی است؟

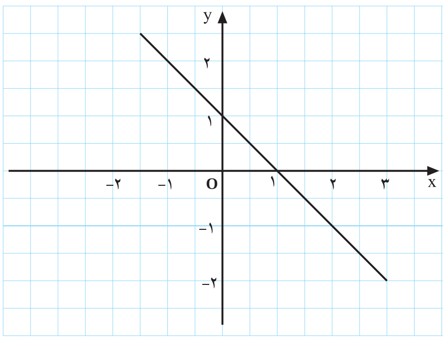
آیا با استفاده از مشتق این تابع‌ها هم می‌توان در مورد صعودی یا نزولی‌بودن آن‌ها نظر داد؟



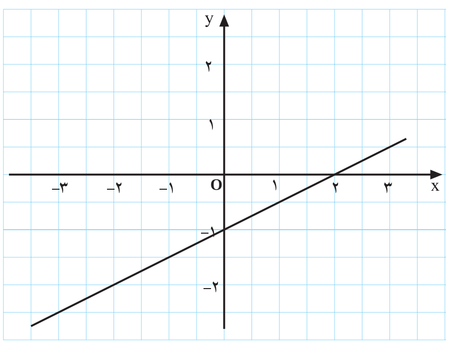
شکل ۱۹ــ۳ــ نمودار یک تابع صعودی



شکل ۲۰ــ۳ــ نمودار یک تابع نزولی



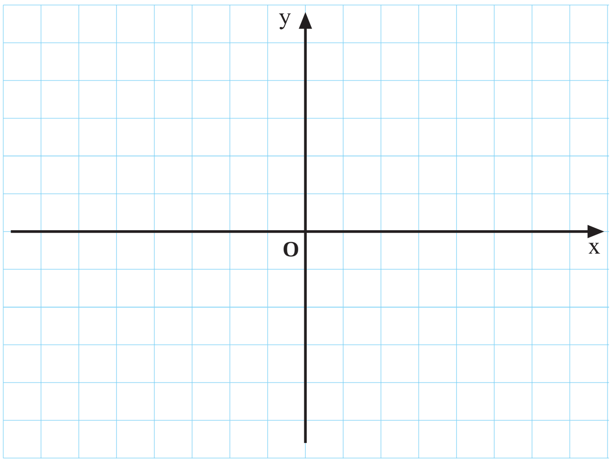
$y=1-x$
شکل ۲۱ــ۳



$y=\frac{1}{2}x-1$
شکل ۲۲ــ۳

تمرین ۴ــ۳

۱ــ تابع $y=x^{۳}$ داده شده است. در رفتار این تابع تحقیق کنید. (ابتدا نمودار این تابع را در شکل ۲۳ــ۳ رسم کنید.)

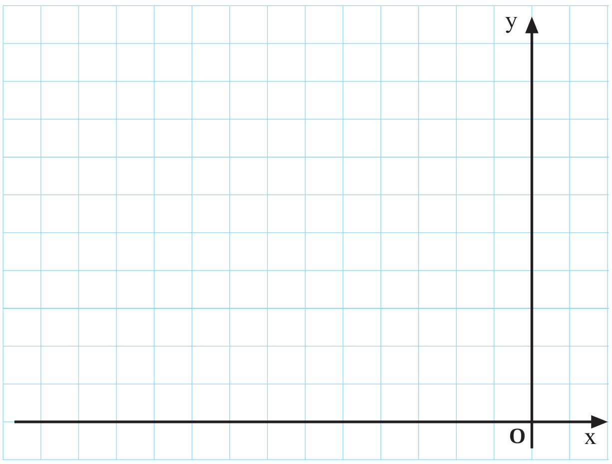


شکل ۲۳ــ۳

۲ــ تابع‌های زیر را در بازه‌ی $[-\infty,۰]$ و در شکل ۲۴ــ۳ رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها نزولی هستند.

الف) $f(x)=x^{۲}$

ب) $f(x)=x^{۴}$

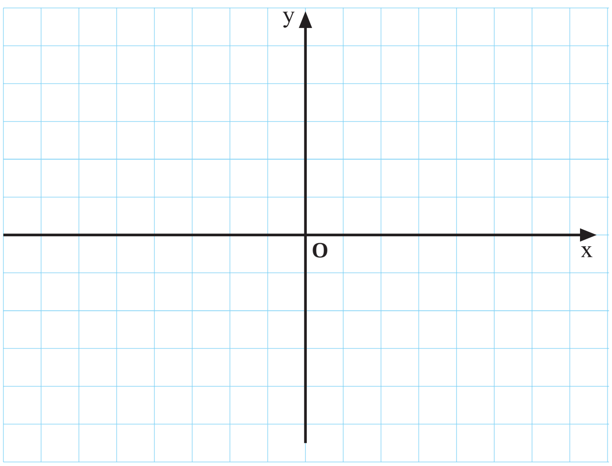


شکل ۲۴ــ۳

۳ــ نمودار تابع‌های زیر را در $\mathbb{R}$ در شکل ۲۵ــ۳، رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها صعودی هستند.

الف) $f(x)=x$

ب) $f(x)=x^{۵}$



شکل ۲۵ــ۳

۳ــ۲ــ۳ــ مشتق و رفتار تابع: با توجه به ویژگی یک تابع صعودی (یا نزولی)، درصورتی که این تابع در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق داشته باشد، می‌توان با استفاده از علامت مشتق در مورد صعودی یا نزولی‌بودن آن، بدون رسم نمودارش، نظر داد.

فرض کنید تابع $y=f(x)$ بر بازه‌ی I صعودی باشد. در این صورت، اگر x_1 و x_2 متعلق به I باشند :

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\geq 0$$

پس، با فرض $x_1=x$ و $x_2=x+h$ ، داریم :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geq 0$$

لذا، اگر تابع f در هر نقطه‌ی داخلی از I مشتق داشته باشد، داریم :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)\geq 0$$

به عکس، اگر برای هر نقطه‌ی داخلی x از بازه‌ی I داشته باشیم $f'(x)\geq 0$ ، آنگاه f بر I صعودی است.

لذا، قضیه‌ی زیر را داریم :

قضیّه‌ی ۱: فرض کنید تابع f بر بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی داخلی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x)\geq 0$ ، در این صورت تابع f بر I صعودی است.

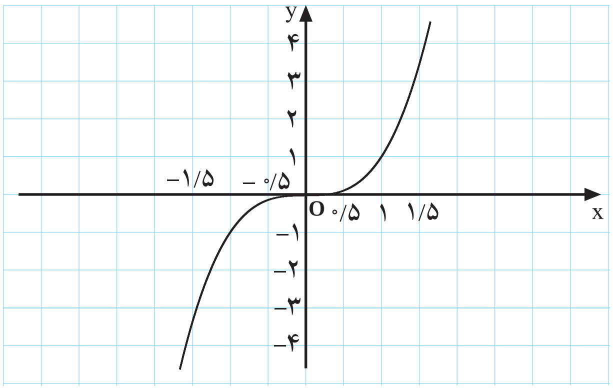
در ستون مقابل کاربرد این قضیه را، برای اثبات صعودی‌بودن چند تابع، ملاحظه می‌کنید.

مثال‌ها(در رابطه با قضیه‌ی ۱)

الف) $y=x^3,\ x\in\mathbb{R}$

$$y'=3x^2\geq 0,\ x\in\mathbb{R}$$

لذا، تابع $y=x^3$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است.

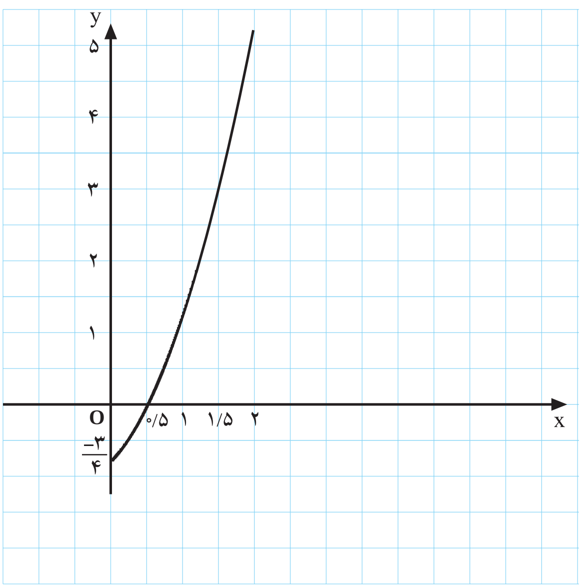


شکل ۲۶ــ۳ــ نمودار $y=x^3$

ب) $y=x^2+x-\frac{3}{4},\ (x\geq 0)$

$$y'=2x+1>0,(x\geq 0)$$

لذا، تابع $y=x^2+x-\frac{3}{4}$ بر $[0,+\infty)$ صعودی است (شکل ۲۷ــ۳).



شکل ۲۷ــ۳ــ نمودار $y=x^2+x-\frac{3}{4}$

به طریق مشابه داریم :

قضیّه‌ی ۲: اگر تابع f بر بازه‌ی I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی داخلی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \le ۰$ آنگاه تابع f بر I نزولی است.

قضیه‌های ۱ و ۲ در تعیین رفتار یک تابع (یعنی نزولی یا صعودی بودن آن) بسیار مفیدند.

در ستون مقابل، نزولی‌بودن چهار تابع، با استفاده از مشتق آن‌ها، نشان داده شده است.

تعریف ۳. تابع f را بر بازه‌ی I **یکنوا** گوییم درصورتی که f بر I صعودی یا نزولی باشد.

کار در کلاس ۶ــ۳

با استفاده از قضیه‌های ۱ و ۲ رفتار تابع‌های زیر را در بازه‌های مشخص شده تعیین کنید.

۱) $y = ۲x - ۱۰۰,\quad x \in (-\infty, +\infty)$

۲) $y = x^۲ - ۱۰x + ۸,\quad x \in (-\infty, ۰)$

۳) $y = \frac{۱}{x},\quad x \in (۰, +\infty)$

۴) $y = \frac{۱}{x},\quad x \in (-\infty, ۰)$

۵) $y = \tan x,\quad x \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$

۶) $y = \cos x,\quad x \in (۰, \pi)$

۷) $y = \cot x,\quad x \in (۰, \pi)$

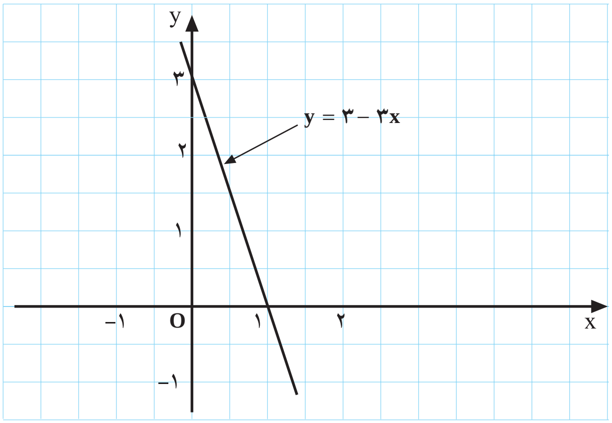
۸) $y = \cos x + x,\quad x \in \mathbb{R}$

مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۲)

الف) $y = ۳ - ۳x,\quad x \in \mathbb{R}$

$y' = -۳ < ۰$

بنابراین، تابع $y = ۳ - ۳x$ نزولی است (شکل۲۸ـ۳).



شکل ۲۸ـ۳ــ نمودار $y = ۳ - ۳x$

ب) $y = ۱ - x - x^۲,\quad x \in (۰, +\infty)$

$y' = -۱ - ۲x < ۰,\quad x \in (۰, +\infty)$

بنابراین، تابع $y = ۱ - x - x^۲$ بر $(۰, +\infty)$ نزولی است.

نمودار این تابع را رسم کنید و صحت نتیجه را بررسی کنید.

پ) $y = \frac{۱ - x}{x},\quad x \in (۰, +\infty)$

$y' = \frac{-۱(x) - ۱(۱ - x)}{x^۲} = \frac{-۱}{x^۲} < ۰,\quad (x > ۰)$

بنابراین، تابع $y = \frac{۱ - x}{x}$ بر $(۰, +\infty)$ نزولی است.

ت) $y = \sin x - x,\quad x \in \mathbb{R}$

$y' = \cos x - ۱ \le ۰,\quad x \in \mathbb{R}$

بنابراین، تابع $y = \sin x - x$ نزولی است.

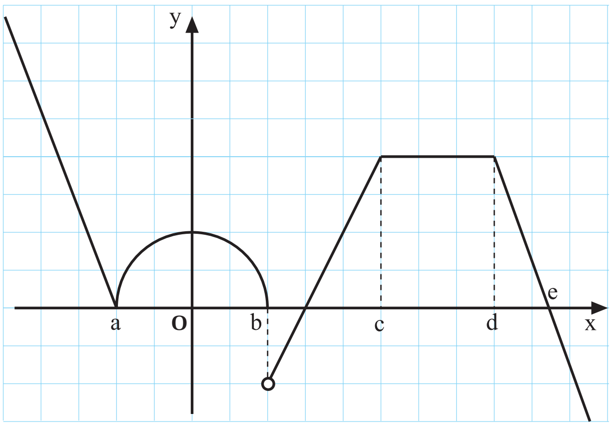
تمرین ۵ــ۳

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+۱, & x>۰ \\ ۲x-۱, & x\leq ۰ \end{cases}$$

۱ــ تابع f در روبه‌رو تعریف شده است. بازه‌هایی را که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است مشخص کنید. آیا f در $\mathbb{R}$ صعودی است؟ (نمودار f را رسم کنید.)

$$g(x)=\begin{cases} -۲x-۱, & x\geq ۰ \\ x^۲-۱, & x<۰ \end{cases}$$

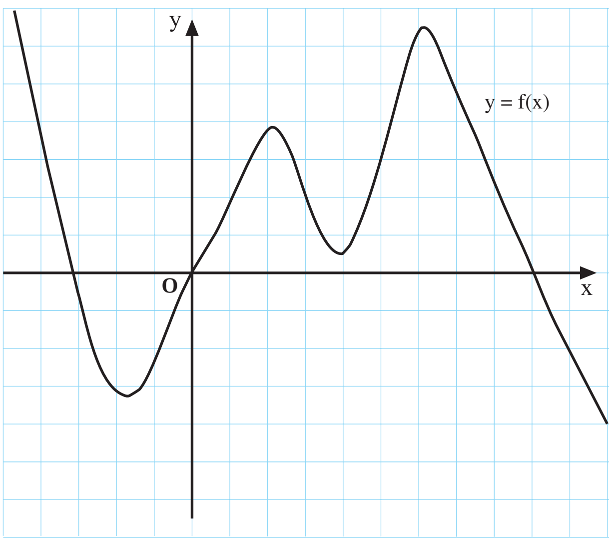
۲ــ تابع g در روبه‌رو تعریف شده است. ثابت کنید g بر $\mathbb{R}$ یکنواست. نمودار تابع g را رسم کنید. آیا نمودار هم همین نتیجه را می‌دهد؟



شکل ۲۹ــ۳ــ نمودار $y=h(x)$

۳ــ با توجه به نمودار تابع $y=h(x)$ (شکل ۲۹ــ۳) بازه‌های یکنوایی آن را تعیین کنید.

۴ــ تابع $y=\frac{۲x+a}{x+a-۲}$ داده شده است. حدود a را چنان تعیین کنید که $y'>۰$ باشد.



شکل ۳۰ــ۳

۴ــ۲ــ۳ــ تغییرات تابع: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین کردن قسمت‌هایی از دامنه‌ی تابع است که تابع در آن‌ها صعودی یا نزولی است. این مطلب در رسم دقیق‌تر نمودار تابع مفید است و باعث دقت و سرعت در رسم نمودار می‌شود. در شکل ۳۰ــ۳ بازه‌هایی را که تابع f در آن‌ها صعودی یا نزولی است مشخص کنید.

مثال: تابع $y=-2x^2+4x$ مفروض است، تغییرات این تابع را مورد بررسی قرار دهید.

حل: ابتدا y' را حساب می‌کنیم.

$$y'=-4x+4$$

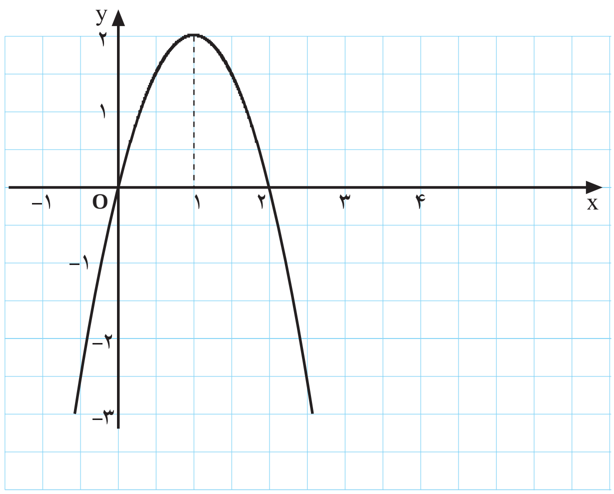
سپس y' را در جدول۳ــ۳ تعیین علامت می‌کنیم، برای این منظور قرار می‌دهیم $y'=0$.

$$y'=0 \Rightarrow -4x+4=0 \Rightarrow x=1$$

با توجه به آنچه در مورد تابع‌های یکنوا گفته شد، جدول تغییرات، (جدول۳ــ۳) و نمودار تابع در شکل ۳۱ــ۳ ملاحظه می‌شود. نمودار تابع، تنها به کمک جدول و نقاطی که نمودار محورها را قطع می‌کند، رسم شده است.

جدول ۳ــ۳

x	$-\infty$		۱		۲		$+\infty$
y'		+	۰	−		−	
y	$-\infty$	↗	۲	↘	۰	↘	$-\infty$



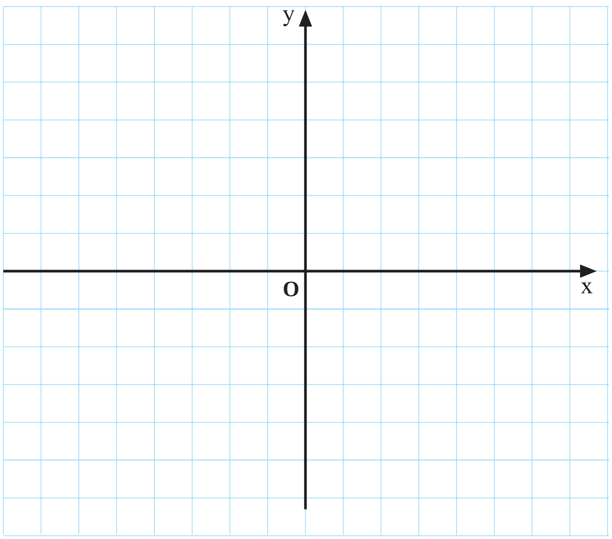
شکل ۳۱ــ۳

کار در کلاس ۷ــ۳

با توجه به مثال بالا، تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (از نمودار نیز می‌توانید استفاده کنید.) (شکل۳۲ــ۳).

الف) $y=x^2-4x+3$

ب) $y=2x-8x^3$.



شکل ۳۲ــ۳

تمرین ۶ــ۳

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار).

الف) $y=(x-3)^2$

ب) $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+1$

پ) $y=x(2-x)$

ت) $y=-x$

ث) $y=2$.

۵ــ۲ــ۳ــ نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع:

تابع: فرض کنید می‌خواهیم مستطیلی رسم کنیم که محیط آن ۸ سانتی‌متر و مساحت آن ماکسیمم باشد. مطابق شکل ۳۳ــ۳ اگر طول و عرض مستطیل را x و y بنامیم داریم :

$$۲(x+y)=۸$$

و یا

$$x+y=۴$$

و اگر مساحت مستطیل را با s(x) نمایش دهیم :

$$s(x)=xy=x(۴-x)=۴x-x^{۲}$$

در شکل ۳۴ــ۳ نمودار تابع s(x) را دربازه‌ی (۰,۴) و جدول تغییرات آن را در جدول ۴ــ۳ ملاحظه می‌کنید.

$$s'(x)=۴-۲x=۰\Rightarrow x=۲$$

$s(۲)=۸-۴=۴$ سانتی‌متر مربع

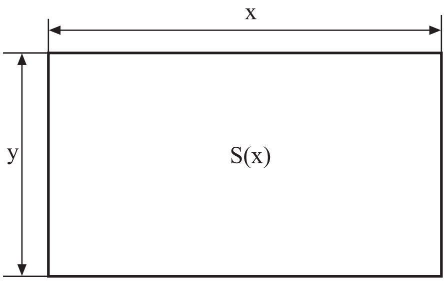
ملاحظه می‌کنید که تابع s(x) در (۰,۲) صعودی و در (۲,۴) نزولی است. ضمناً، مشتق آن در (۰,۲) مثبت و در (۲,۴) منفی است.

s(x) به ازای x = ۲ بیشترین مقدار را دارد و ماکسیمم آن ۴ است. این تابع در نقطه‌ی (۲,۴) دارای ماکسیمم نسبی است.

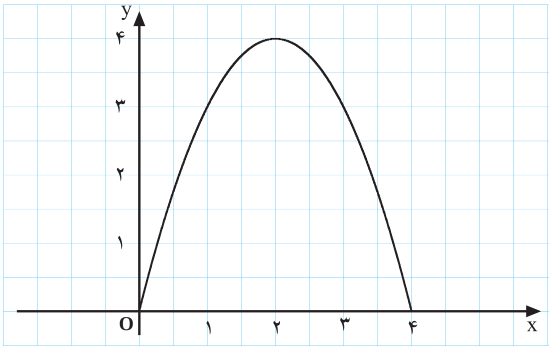
درشکل۳۵ــ۳ نمودار $y=x^{۲}-۴x+۱$ در $(-\infty,+\infty)$ رسم شده است و جدول تغییرات آن، جدول ۵ــ۳ نیز ملاحظه می‌شود. این تابع در $(-\infty,۲)$ نزولی و در $(۲,+\infty)$ صعودی است. لذا، در x = ۲ کمترین مقدار یعنی ۳ − را داراست.

جدول ۵ــ۳

x	$-\infty$		۰		۱		۲		۳		$+\infty$
y′		−		−		−	۰	+		+	
y	$+\infty$	↘	۱	↘	−۲	↘	−۳	↗	−۲	↗	$+\infty$



شکل ۳۳ــ۳



شکل ۳۴ــ۳ــ نمودار $s(x)=۴x-x^{۲}$ در بازه‌ی (۰,۴)

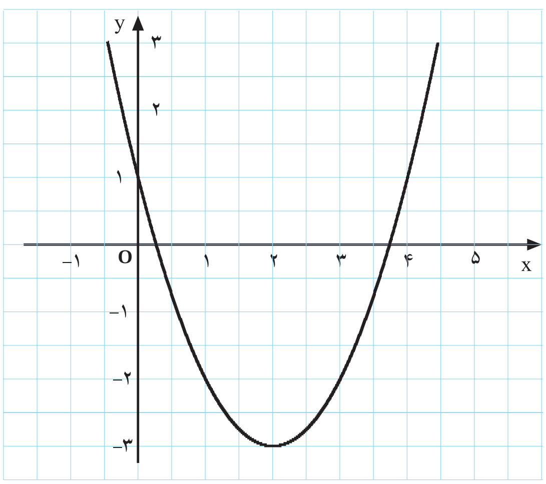
جدول ۴ــ۳

x	۰		۲		۴
s′(x)		+	۰	−	
s(x)	۰	↗	۴	↘	۰

$$y=x^{۲}-۴x+۱$$

$$y'=۲x-۴=۰\Rightarrow x=۲$$

$$y(۲)=-۳$$



شکل ۳۵ــ۳

تعریف ۴. گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_\circ, f(x_\circ))$ دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_\circ$، مانند $(a,b) \subset D_f$ باشد به قسمی که برای هر x از این بازه:

$$f(x_\circ) \leq f(x)$$

$f(x_\circ)$ را **اندازه‌ی مینیمم نسبی** نامیم.

تعریف ۵. گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_\circ, f(x_\circ))$ دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_\circ$، مانند $(a,b) \subset D_f$ باشد به قسمتی که برای هر x از این بازه:

$$f(x_\circ) \geq f(x)$$

$f(x_\circ)$ را **اندازه‌ی ماکسیمم نسبی** نامیم.

در شکل ۳۶ــ۳ نمودار $y = f(x)$ را ملاحظه می‌کنید که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.

تعریف ۶. نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط **اکسترمم** تابع نامند.

با توجه به آنچه در صفحه‌ی قبل گفته شد نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را، که در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق دارد، به طریق زیر حساب می‌کنیم.

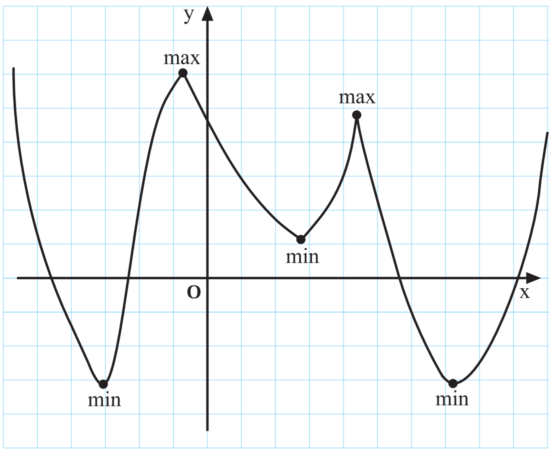
الف) y' را حساب می‌کنیم.

ب) ریشه‌های معادله‌ی $y' = \circ$ را به‌دست می‌آوریم.

پ) اگر y' در یک طرف یک ریشه مثبت (منفی) و در طرف دیگر آن منفی (مثبت) باشد تابع در آن نقطه ماکسیمم (مینیمم) نسبی است.

ت) در صورتی که y' در $x_\circ$ صفر باشد ولی در دو طرف $x_\circ$ دارای یک علامت باشد تابع در $x_\circ$ ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد. (به فعالیت ۴ــ۳ مراجعه کنید.)

در روبه‌رو دو مثال حل شده است.



شکل ۳۶ــ۳ــ نمودار $y = f(x)$

مثال‌ها:

۱) $y = x^۳ - x^۲ - ۵x + ۲$

$$y' = ۳x^۲ - ۲x - ۵$$

$$y' = \circ \Rightarrow ۳x^۲ - ۲x - ۵ = \circ \Rightarrow \begin{matrix} x_۱ = -۱ \\ x_۲ = \frac{۵}{۳} \end{matrix}$$

جدول ۶ــ۳

x	$-\infty$		-۲		-۱		$\frac{۵}{۳}$		۲		$+\infty$
y'		+	۱۱	+	۰	−	۰	+	۳		
y	$-\infty$	↗	۰	↗	۵	↘	$\frac{-۱۲۱}{۲۷}$	↗	-۴		$+\infty$

تابع $y = x^۳ - x^۲ - ۵x + ۳$ در $(-۱, ۵)$ ماکسیمم نسبی و در $(\frac{۵}{۳}, \frac{-۱۲۱}{۲۷})$ مینیمم نسبی دارد.

۲) $y = ۲x^۴ - x^۲ + ۱$

$$y' = ۸x^۳ - ۲x = ۲x(۴x^۲ - ۱)$$

$$y' = \circ \Rightarrow x = \circ \ , \ x = \pm\frac{۱}{۲}$$

جدول ۷ــ۳

x	$-\infty$		$\frac{-۱}{۲}$		۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		−	۰	+	۰	−	۰	+	
y	$+\infty$	↘	$\frac{۷}{۸}$	↗	۱	↘	$\frac{۷}{۸}$	↗	$+\infty$

لذا، تابع y در $(-\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۸})$ مینیمم نسبی، در $(\circ, ۱)$ ماکسیمم نسبی و در $(\frac{۱}{۲}, \frac{۷}{۸})$ مینیمم نسبی دارد.

فعالیت ۴ــ۳

تابع $y=(x-۱)^{۳}$ داده شده است.

۱ــ مشتق y را حساب کنید.

$y'=$

۲ــ ریشه‌های معادله‌ی $y'=۰$ را به دست آورید.

$y'=۰\Rightarrow$

۳ــ جدول تغییرات (جدول ۸ــ۳)، تابع را کامل کنید.

۴ــ آیا در نقطه‌ای که y' صفر می‌شود، y' تغییر علامت می‌دهد؟

۵ــ نمودار تابع را رسم کنید.

۶ــ علت این که تابع ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد چیست؟

جدول ۸ــ۳

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		
y	$-\infty$	$+\infty$

کار در کلاس ۸ــ۳

تابع $y=\frac{۲x-۱}{x+۲}$ داده شده است.

۱ــ y' را حساب کنید.

۲ــ y' را تعیین علامت کنید.

۳ــ آیا این تابع نقطه‌ی اکسترمم دارد؟ چرا؟

جدول ۹ــ۳

x	
y'	
y	

مثال ۱ : تابع f با ضابطه‌ی $y=ax^{۲}+bx+۳$ داده شده است، a و b را چنان بیابید که به ازای $x=۲$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی (-۱) باشد.

حل ۱ : اولاً مختصات نقطه‌ی اکسترمم $(۲,-۱)$ باید در ضابطه‌ی تابع صدق کند. پس :

$$-۱=۴a+۲b+۳\Rightarrow ۲a+b=-۲ \qquad (۱)$$

ثانیاً، باید $y'(۲)=۰$. بنابراین،

$$y'=۲ax+b\Rightarrow ۴a+b=۰ \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \begin{cases} ۲a+b=-۲ \\ ۴a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=۱}\ ,\ \boxed{b=-۴}$$

مثال ۲: در تابع $y=ax^{۲}+bx+c$ ضریب‌های a، b و c را چنان بیابید که نمودار تغییرات تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و به ازای $x=۱$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی ۴ باشد.

حل ۲: نقطه‌ی برخورد نمودار تغییرات تابع با محور عرض‌ها نقطه‌ی $(۰,۳)$ و نقطه‌ی اکسترمم این تابع $(۱,۴)$ است. بنابراین، نقطه‌ی $(۰,۳)$ روی نمودار تابع است:

$$(۰,۳) \Rightarrow \boxed{۳=c}$$

نقطه‌ی $(۱,۴)$ روی نمودار تابع است:

$$(۱,۴) \Rightarrow ۴=a+b+c \Rightarrow a+b=۱ \qquad (۳)$$

باید $y'(۱)=۰$:

$$y'=۲ax+b \Rightarrow ۲a+b=۰ \qquad (۴)$$

$$(۳) \text{ و } (۴) \Rightarrow \boxed{a=-۱} \;,\; \boxed{b=۲}$$

تمرین ۷ــ۳

۱ــ نقاط اکسترمم تابع‌های زیر را در بازه‌هایی که مشخص شده تعیین کنید.

الف) $y=\sin x, \quad x\in[۰,\pi]$

ب) $y=\cos x, \quad x\in\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$

پ) $y=x-۲x^{۲}, \quad x\in\mathbb{R}$

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=ax^{۳}+(a-۱)x^{۲}+۴x$ داده شده است. مقدار a را چنان بیابید که در $x=-۲$ تابع ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.

۳ــ اگر $y=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ ضریب‌های a، b، c و d را چنان تعیین کنید که برای $x=-۱$ تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی ۸ باشد و نمودار تابع محور xها را در نقطه‌ی $(۱,۰)$ و محور yها را در نقطه‌ی $(۰,۵)$ قطع کند.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱ــ معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع $y = x^{2} + 2x + 3$ را در $x = 1$ بنویسید.

۲ــ معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع $y = \cos^{2} x + 2$ را در $x = \frac{\pi}{2}$ بنویسید.

۳ــ صعودی یا نزولی بودن تابع‌های زیر را به کمک تعیین علامت مشتق تابع مشخص کنید.

الف) $y = 2 - x^{3}, \quad x \in \mathbb{R}$

ب) $y = x^{2} - 1 \ , \quad x \in [0, +\infty)$

۴ــ تغییرات تابع زیر را معین کنید. سپس نمودار آن را رسم نمایید.

$$y = x^{3} - 3x^{2} + 2$$

۵ــ نقاط اکسترمم تابع زیر را تعیین کنید.

$$y = x^{3} + x^{2} - x - 1$$

۶ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = ax^{3} + 2ax^{2} + 2x$ داده شده است. مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع در $x = -1$ دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی باشد.

منابع

1- Joshi, N. A. , Diwan, M. J. , Joshi, Vigay V. , Vaida, A. S. & Krishnann, S. (2000) Differential Equations and Calculus. Sheth Publishers PVT. LTD.

2- Barnett, Raymond A. (1979) College Algebra, Second Edition. McGraw - Hill Book Company.

3- Bradley Gerald L. and Smith Karl J. (1995) Single Variable Calculus. Prentice Hall, Inc.

4- Marsden Jerrold and Weinstein Alan (1980) Calculus 1, Springer- Verlag.

۵ــ روبرت الیس، دنی گولیک، (۱۳۷۳) **حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی**. ترجمه‌ی دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات پژوهش ۱۳۷۳

۶ــ بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضیات ۱ و ریاضیات ۲** : نظری (رشته‌های علوم تجربی ــ ریاضی و فیزیک ــ فنی و حرفه‌ای). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۷ــ رستمی، محمد هاشم و همکاران (۱۳۸۱)، **ریاضیات ۳** : نظری (رشته‌ی علوم تجربی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۸ــ گویا، زهرا و گویا، مریم (۱۳۸۰)، **ریاضی** : نظری (رشته‌های ادبیات و علوم انسانی ــ علوم و معارف اسلامی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۹ــ پاریاب، خلیل و همکاران (۱۳۸۰)، **ریاضی ۵** : فنی وحرفه‌ای (کلیه‌ی رشته‌های زمینه صنعت و رشته‌های کامپیوتر و ماشین‌های کشاورزی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش

۱۰ــ بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۷)، **ویژگی‌ها و تولید فرکتال‌ها**. بیست و نهمین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

۱۱ــ بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۹)، **استفاده از کامپیوتر در اثبات احکام ریاضی**. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۵۹ و ۶۰

۱۲ــ رستمی، محمدهاشم (۱۳۷۷)، **جبر پایه**، انتشارات مدرسه