۱ــ۱ــ۳ــ بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x-a$: اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد، وقتی $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی یکتایی مانند $q(x)$ و r به‌دست می‌آید.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\quad +a_1x+a_0$$

$$\begin{array}{r|l} \text{مقسوم}\ f(x) & x-a\ \text{مقسوم‌علیه} \\ \underline{L(x)} & q(x)\ \text{خارج‌قسمت} \\ \text{(باقی‌مانده)}\ r & \end{array}$$

در نتیجه به ازای هر x داریم:

$$f(x)=(x-a)q(x)+r\ ,r\in\mathbb{R}$$

مثال: باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم‌های مقابل را به دست آورید:

الف) $4x^2-7x+6\ .\ x-2$

حل: الف)

$$\begin{array}{r|l} 4x^2-7x+6 & x-2 \\ & \bigcirc+\square \end{array}$$

ابتدا $4x=\frac{4x^2}{x}=\bigcirc$ را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و حاصل را از مقسوم کم می‌کنیم؛ داریم؛

$$4x(x-2)=4x^2-8x$$

$$\begin{array}{r|l} 4x^2-7x+6 & x-2 \\ \underline{-\ 4x^2\quad 8x} & 4x+\square \\ x+6 & \\ \underline{-\ x\quad 2} & \\ 8 & \end{array}$$

سپس $1=\frac{x}{x}=\square$ را در مقسوم ضرب کرده و حاصل را از $x+6$ کم می‌کنیم؛ داریم:

$$\begin{array}{r|l} 4x^2-7x+6 & x-2 \\ \underline{-\ 4x^2\quad 8x} & 4x+1 \\ x+6 & \\ \underline{-\ x\quad 2} & \\ 8 & \end{array}$$

خارج قسمت $=4x+1$

باقی‌مانده $=8$

$$(4x+1)(x-2)+8=4x^2-7x+6$$

ب) $x^2+7x+12\ .\ x+4$

حل: ب) ابتدا $x=\frac{x^2}{x}=\bigcirc$ را در مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را از مقسوم کم می‌کنیم؛ داریم؛

$$\begin{array}{r|l} x^2+7x+12 & x+4 \\ & \bigcirc+\square \end{array}$$

$$x(x+4)=x^2+4x$$

$$\begin{array}{l|l} x^۲+۷x+۱۲ & x+۴ \\ \underline{-x^۲\pm ۴x} & x+\boxed{} \\ \quad ۳x+۱۲ & \end{array}$$

سپس $۳=\frac{۳x}{x}=\boxed{}$ را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و

$۳(x+۴)=۳x+۱۲$

حاصل را از $۳x+۱۲$ کم می‌کنیم ؛ داریم :

$$\begin{array}{l|l} x^۲+۷x+۱۲ & x+۴ \\ \underline{-x^۲\pm ۴x} & x+۳ \\ \quad ۳x+۱۲ & \\ \quad \underline{-۳x\pm ۱۲} & \\ \qquad ۰ & \end{array}$$

$g(x)=$ خارج قسمت $=x+۳$

$r=$ باقی‌مانده $=۰$

$x^۲+۷x+۱۲=(x+۴)(x+۳)+۰$

نکته: اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر $r=f(a)$ خواهد بود.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)=۴x^۲-۷x+۶$ بر $x-۲$ را به دست آورید.

مراحل حل: ریشه‌ی مقسوم علیه را به دست می‌آوریم :

$x-۲=۰\Rightarrow x=۲$

ـ $f(۲)$ یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم را حساب می‌کنیم :

$r=f(۲)=۴(۲)^۲-۷(۲)+۶\Rightarrow r=۸$

نکته: چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است هرگاه : $r=f(a)=۰$

از این خاصیت در تجزیه‌ی چند جمله‌ای‌ها استفاده می‌کنیم ؛ یعنی هرگاه $f(a)=۰$ باشد می‌توانیم بنویسیم :

$f(x)=(x-a)g(x)$

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد.

$f(x)=۳x^۲+۴x-۷m$

مراحل حل: ریشه‌ی مقسوم‌علیه را به دست می‌آوریم :

$x-۱=۰\Rightarrow x=۱$

ـ به ازای $x=1$ ، $f(1)$ را حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$x=1 \Rightarrow f(1)=3+4-7m=0$$

ـ با حل معادله مقدار m به دست می‌آید :

$$\Rightarrow 7-7m=0 \Rightarrow 7m=7 \Rightarrow m=1$$

نکته: در محاسبه‌ی حد $\lim\limits_{x\to a} q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ (f و g چند جمله‌ای‌اند) هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ باشد مقدار حد به صورت $\left(\frac{0}{0}\right)$ در می‌آید، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a} q(x)$ باید ابتدا عامل صفر کننده $(x-a)$ را از صورت و مخرج کسر حذف نمود و سپس حد را محاسبه کرد.

$$q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to a} q(x)=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}f_1(x)}{\cancel{(x-a)}g_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

مثال ۱: حد مقابل را به‌دست آورید :

$$\lim_{x\to 1} q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=?$$

مراحل حل: حد صورت کسر وقتی $x\to 1$ برابر است با :

$$\lim_{x\to 1} 2x^2+x-3=2(1)^2+1-3=0$$

ـ حد مخرج کسر در $x=1$ برابر است با :

$$\lim_{x\to 1} x^2+x-2=0$$

ـ چون صورت و مخرج کسر بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است، بنابراین داریم :

$$2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$$
$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

ـ برای رفع ابهام خواهیم داشت :

$$q(x)=\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2x+3}{x+2}$$

در نتیجه حد $q(x)$ وقتی $x\to 1$ را به دست می‌آوریم :

$$\lim_{x\to 1} q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{5}{3}$$

مثال ۲: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=?$$

حل: حد صورت و مخرج کسر وقتی $x \to ۲$ صفر می‌شود.

$$\lim_{x\to ۲} x^{۲} - ۵x + ۶ = \lim_{x\to ۲} x^{۲} - ۷x + ۱۰ = ۰$$

ــ صورت و مخرج کسر را به عاملی از $x-۲$ تبدیل می‌کنیم، بنابراین :

$$x^{۲} - ۵x + ۶ = (x-۲)(x-۳)$$

$$x^{۲} - ۷x + ۱۰ = (x-۲)(x-۵)$$

ــ برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم :

$$q(x) = \frac{x^{۲} - ۵x + ۶}{x^{۲} - ۷x + ۱۰} = \frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x-۵)} = \frac{x-۳}{x-۵}$$

ــ حد تابع وقتی $x \to ۲$ به دست می‌آید.

$$\lim_{x\to ۲} q(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۳}{x-۵} = \frac{۲-۳}{۲-۵} = \frac{-۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۳: حد تابع مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۷x^{۲} + ۵x - ۲}{۳x^{۲} + ۷x + ۴} = ?$$

ــ وقتی $x \to -۱$ حد صورت برابر است با :

$$\lim_{x\to -۱} ۷x^{۲} + ۵x - ۲ = ۷(-۱)^{۲} + ۵(-۱) - ۲ = ۰$$

ــ وقتی $x \to -۱$ حد مخرج کسر برابر است با :

$$\lim_{x\to -۱} ۳x^{۲} + ۷x + ۴ = ۳(-۱)^{۲} + ۷(-۱) + ۴ = ۰$$

ــ چون صورت و مخرج کسر به ازای $x = -۱$ برابر صفر گردید، پس هر یک از آن‌ها بر $x+۱$ بخش‌پذیرند، یعنی :

$$۷x^{۲} + ۵x - ۲ = (x+۱)(۷x-۲)$$

$$۳x^{۲} + ۷x + ۴ = (x+۱)(۳x+۴)$$

چون $x \to -۱$ بنابراین $x \neq -۱$ لذا داریم :

$$q(x) = \frac{۷x^{۲} + ۵x - ۲}{۳x^{۲} + ۷x + ۴} = \frac{(x+۱)(۷x-۲)}{(x+۱)(۳x+۴)} = \frac{۷x-۲}{۳x+۴}$$

حد تابع را وقتی به $x \to -۱$ به دست می‌آوریم :

$$\lim_{x\to -۱} q(x) = \lim_{x\to -۱} \frac{۷x-۲}{۳x+۴}$$

بنابراین خواهیم داشت :

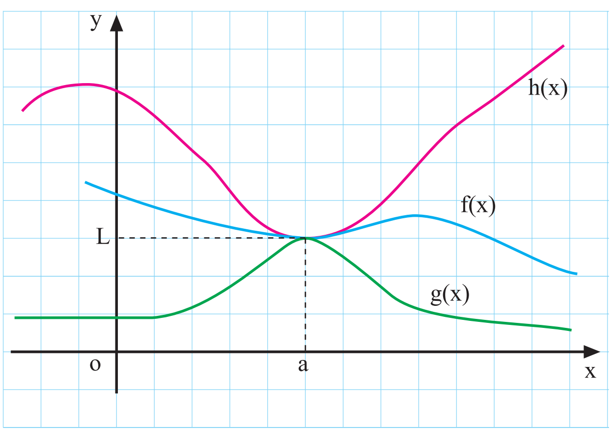
$$\lim_{x\to -۱} q(x) = \frac{-۷-۲}{-۳+۴} = \frac{-۹}{۱} = -۹$$

قضیه‌ی فشردگی: اگر به ازای هر x از بازه‌ی شامل a (به جز احتمالاً در $x = a$) داشته باشیم :

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

و $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



شکل ۱۴ــ۳

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=?$$

حل: cosx در محدوده‌ی دو عدد ۱− و ۱ قرار دارد، یعنی :

$$-۱\le \cos x\le ۱$$

ــ از طرفی $x\to+\infty$ ، پس $x>۰$ و $\frac{۱}{x}>۰$ بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{-۱}{x}\le\frac{\cos x}{x}\le\frac{۱}{x}$$

ــ از طرفی حد $\frac{۱}{x}$ و $\frac{-۱}{x}$ وقتی x به سمت $+\infty$ میل می‌کند برابر است با :

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{-۱}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

ــ طبق قضیه‌ی فشردگی حد تابع برابر است با :

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=۰$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳\sin x}{x^۳}=?$$

حل: می‌دانیم که $-۱\le\sin x\le ۱$ بنابراین داریم :

$$-۳\le ۳\sin x\le ۳$$

از طرفی وقتی x عددی مثبت باشد می‌توان نوشت :

$$\underbrace{-\frac{۳}{x^۳}}_{g(x)}\le\underbrace{\frac{۳\sin x}{x^۳}}_{f(x)}\le\underbrace{\frac{۳}{x^۳}}_{h(x)}$$

از طرفی $\lim_{x\to+\infty}\frac{-۱}{x^۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^۳}=۰$ بنابراین با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳\sin x}{x^۳}=۰$$

فعالیت ۷ــ۳

با استفاده از جدول‌های ۱۲ــ۳ و ۱۳ــ۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ــ وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از ۰ به عدد صفر میل می‌کند $(x\to۰^-)$ مقدار تابع به چه عددی میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to۰^-}f(x)=\square$$

جدول ۱۲ــ۳

x	$-\frac{\pi}{۳۰}$	$-\frac{\pi}{۱۸۰}$	$-\frac{\pi}{۹۰۰۰}$	۰
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	۰/۹۹۸۷۳	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۸	

۲ـ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ۰ به عدد صفر میل می‌کند مقدار تابع به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۱۳ـ۳

x	$\circ$	$\frac{\pi}{۹۰۰۰}$	$\frac{\pi}{۱۸۰}$	$\frac{\pi}{۳۰}$
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$		۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۷۳

$$\lim_{x\to \circ^+} f(x)=\square$$

با توجه به فعالیت ۷ـ۳ همواره داریم :

قضیه‌ی ۱ـ۳ـ (x برحسب رادیان است)

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\sin x}{x}=۱$$

مثال: حد روبه‌رو را حساب کنید.

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan x}{x}=?$$

با توجه به این که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ، داریم :

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to\circ}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to\circ}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to\circ}\frac{۱}{\cos x}$$

ـ در نتیجه مقدار حد برابر است با :

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan x}{x}=۱\times\frac{۱}{\cos\circ}=۱\times\frac{۱}{۱}=۱$$

مثال: حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan ۴x}{x}$$

حل: صورت و مخرج کسر را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم :

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan ۴x}{x}=\lim_{x\to\circ}۴.\frac{\tan ۴x}{۴x}$$

ـ با توجه به $\lim_{t\to\circ}\frac{\tan t}{t}=۱$ خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan ۴x}{x}=\lim_{t\to\circ}۴\frac{\tan t}{t}=۴\times۱=۴$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan\sqrt{۲}x}{۵x}$$

ـ صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم :

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan\sqrt{۲}x}{۵x}=\lim_{x\to\circ}\frac{\sqrt{۲}\times\tan\sqrt{۲}x}{۵\sqrt{۲}x}$$

ـ با فرض $\sqrt{۲}x=t$ حد برابر است با

$$\lim_{x\to\circ}\frac{\tan\sqrt{۲}x}{۵x}=\lim_{t\to\circ}\frac{\sqrt{۲}}{۵}.\frac{\tan t}{t}=\frac{\sqrt{۲}}{۵}.۱=\frac{\sqrt{۲}}{۵}$$

نتیجه:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin ax}=\frac{۱}{a} \text{ و } \lim_{x\to ۰}\frac{x}{\tan ax}=\frac{۱}{a}\ ,\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin ax}{x}=a\ ,\ \lim_{x\to ۰}\frac{\tan ax}{x}=a$$

مثال: حد روبه‌رو را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۳x}{۷x}$$

حل: صورت و مخرج را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\tan ۳x}{۷x}=\frac{۳\tan ۳x}{۷\times ۳x}$$

ـ با توجه به $\lim_{t\to ۰}\frac{\tan t}{t}=۱$ حد را به دست می‌آوریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۳x}{۷x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۳\tan ۳x}{۷\times ۳x}=\frac{۳}{۷}\times ۱=\frac{۳}{۷}$$

مثال: حد روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۳x}{\sin ۲x}=?$$

ـ چون $x\neq ۰$ است صورت کسر را در $\frac{۳}{۳x}$ و مخرج را $\frac{۲}{۲x}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\sin ۳x}{\sin ۲x}=\frac{۳.\frac{\sin ۳x}{۳x}}{۲.\frac{\sin ۲x}{۲x}}$$

ـ در نتیجه مقدار حد برابر است با :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۳\times\frac{\sin ۳x}{۳x}}{۲\times\frac{\sin ۲x}{۲x}}=\frac{۳\lim\frac{\sin ۳x}{۳x}}{۲\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{۲x}}=\frac{۳\times ۱}{۲\times ۱}=\frac{۳}{۲}$$

مثال: حد مقابل را محاسبه کنید :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲}{۱-\cos ۲x}$$

می‌دانیم که : $۱-\cos ۲x=۲\sin^۲ x$ ، بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲}{۱-\cos ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۲x^۲}{۲\sin^۲ x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}$$

ـ در نتیجه مقدار حد برابر است با :

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{x}{\sin x}=۱\times ۱=۱$$

آزمون پایانی (۱)

۱ــ اگر تابع f در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد (شکل ۱۵ــ۳) :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x>0\\ x & x\le 0\end{cases}$$

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)+\lim_{x\to 0^+} f(x)=?$$

۲ــ فرض کنید تابع f به صورت زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد :

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\neq 2\\ 2x & x=2\end{cases}$$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) $\lim_{x\to 2} f(x)$ را به‌دست آورید.

ج) در تساوی زیر a را بیابید.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=a.f(2)$$

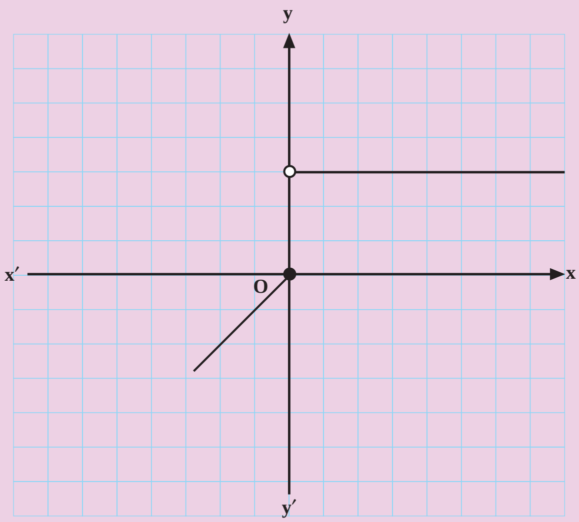
۳ــ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x\to 1}\dfrac{4x^3-5x^2+1}{x^2-1}$

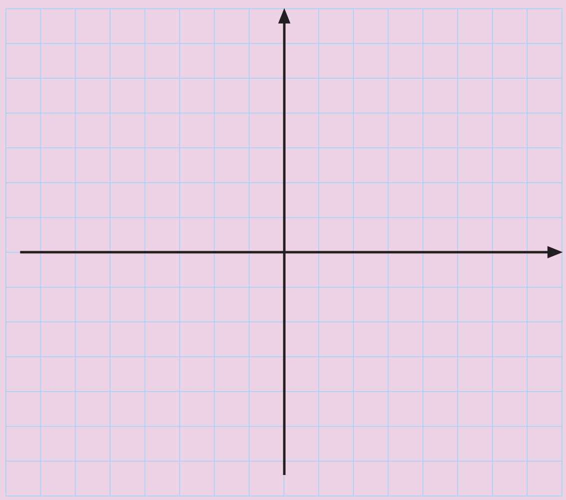
ب) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{(2x-\pi)}$

ج) $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)



شکل ۱۵ــ۳



شکل ۱۶ــ۳