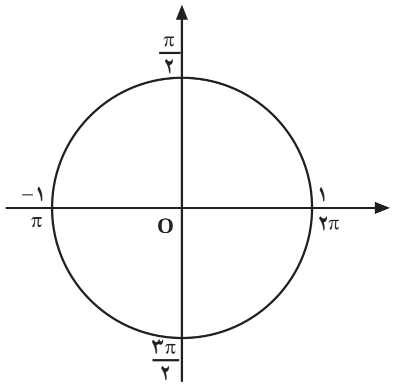
۴ــ وقتی $\sin x = ۰$ باشد، می‌خواهیم تمامی زوایایی را تعیین کنیم که مقدار سینوس آن‌ها صفر باشد. در شکل ۱۱۸ــ۲ مشخص کنید چه زوایایی دارای سینوس صفر می‌باشند؟



شکل ۱۱۸ــ۲

$\sin ۲\pi = ۰$ و $\sin \boxed{} = ۰$ و $\sin \boxed{} = ۰$

$\sin(۰^\circ + ۲\pi) = ?$

۵ ــ سینوس زوایای ۰، π، ۲π برابر صفر است. آیا سینوس زوایای ۳π ، ۴π ، ۵π و ... نیز صفر است؟ چرا؟

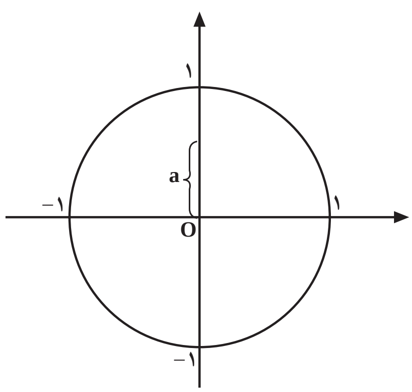
$\sin(\pi + ۳\pi) = ?$ و $\sin(\pi + ۲\pi) = ?$

$\sin(\pi + ۴\pi) = ?$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\sin x = ۰$ برابر است با : $x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

فعالیت ۲۰ــ۲

شکل ۱۱۹ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin x = a$ ، که $-۱ \leq a \leq ۱$ ، مراحل زیر را انجام دهید.

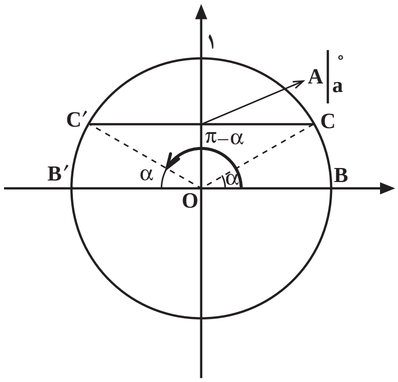


شکل ۱۱۹ــ۲

$x = ?$ و $-۱ \leq a \leq ۱$ و $\sin x = a$

۱ــ خط گذرا از نقطه‌ی $A(\circ,a)$ و موازی با محور کسینوس‌ها را رسم کنید. این خط، دایره‌ی مثلثاتی را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (شکل ۱۲۰ــ۲).

۲ــ نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم. سینوس دو زاویه‌ی α و $\pi-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟ (شکل ۱۲۰ــ۲).



شکل ۱۲۰ــ۲

$$\sin(\pi-\alpha)\ \boxed{}\ \sin\alpha$$

۳ــ اگر α یا $\pi-\alpha$ یک جواب معادله باشند آیا هرچند بار دور دایره گردش نماییم مقدار سینوس تغییر می‌کند؟

$\sin(\alpha+۲k\pi)=?$ و $k\in\mathbb{Z}$

$\sin((\pi-\alpha)+۲k\pi)=?$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از :

$$\sin x=a=\sin\alpha \ ،\ -۱\le a\le ۱$$

$$x=۲k\pi+\alpha \text{ یا } x=۲k\pi+(\pi-\alpha)\ ،k\in\mathbb{Z}$$

مثال: جواب‌های معادله‌ی مقابل را بیابید.

$$۲\sin^۲ x-\sin x=\circ$$

حل: از sinx فاکتور می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت :

$$\sin x(۲\sin x-۱)=\circ$$

ــ تک‌تک عوامل حاصل‌ضرب را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\underset{x=\circ}{\searrow}\circ \Rightarrow x=k\pi+\circ \Rightarrow \boxed{x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}}\\ ۲\sin x-۱=\circ\Rightarrow ۲\sin x=۱\Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\end{cases}$$

جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

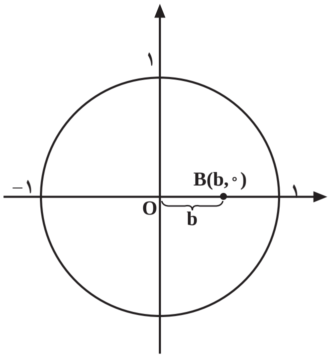
$$x=\frac{\pi}{۶}\ ,\ x=\pi-\frac{\pi}{۶}=۵\frac{\pi}{۶}$$

ــ جواب کلی معادله عبارت است از :

$$\Rightarrow \boxed{x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}} \text{ و } \boxed{x=۲k\pi+۵\frac{\pi}{۶}}$$

فعالیت ۲۱ــ۲

شکل ۱۲۱ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های کلی معادله‌ی مقابل :



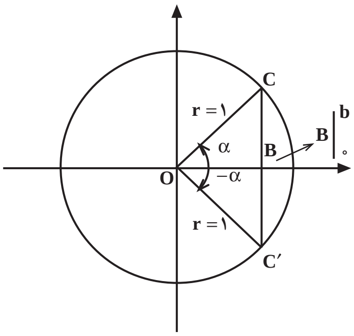
شکل ۱۲۱ــ۲

$\cos x = b \ ، -۱ \le b \le ۱$

مراحل زیر را انجام دهید.

ــ خط گذرا از نقطه‌ی $B(b,۰)$ و موازی با محور سینوس‌ها را رسم کنید. این خط دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی C و C' قطع می‌کند (شکل ۱۲۲ــ۲).

ــ نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم (شکل ۱۲۲ــ۲).



شکل ۱۲۲ــ۲

ــ دو زاویه‌ی ایجاد شده‌ی α و $-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟

$\cos(-\alpha) = \frac{OB}{r} \square \quad \cos\alpha = \frac{OB}{r}$

ــ آیا می‌توانیم رابطه‌ی مقابل را قبول کنیم؟

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ بلی ☐   خیر ☐

۳ــ اگر α و $-\alpha$ یک جواب معادله باشند و چندین بار زاویه دور دایره گردش کند $(۲k\pi)$ و بر روی α و $-\alpha$ قرار گیرد کسینوس برابر چه مقداری می‌باشد؟

$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha = \square$

$\cos(۲k\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \square$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از :

$\cos x = b = \cos\alpha \ , \ -۱ \le b \le ۱$

$x = ۲k\pi \pm \alpha \ , k \in \mathbb{Z}$

مثال: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی مقابل را پیدا کنید.

$\cos^۲ x - ۲\cos x + \frac{۳}{۴} = ۰$

حل:

ــ حاصل جمع دو عدد $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۳}{۲}$ برابر ۲ و ضربشان برابر $\frac{۳}{۴}$ است، پس :

$$(\cos x-\frac{۳}{۲})(\cos x-\frac{۱}{۲})=۰$$

با توجه به تغییرات cosx بین ۱− و ۱، جواب $\frac{۳}{۲}$ قابل قبول نیست.

ــ به ازای $\frac{۱}{۲}$ جواب قابل قبول، و زاویه‌ی x برابر است با :

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x-\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow \cancel{\cos x=\frac{۳}{۲}}\\ \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos\frac{\pi}{۳}\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{۳}}\end{cases}$$

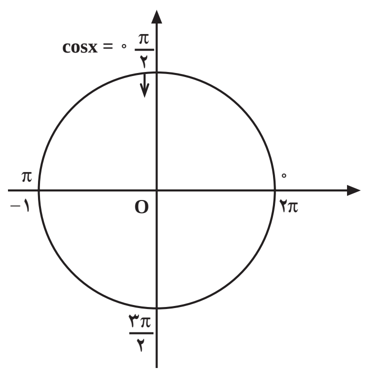
ــ با قرار دادن $\frac{\pi}{۳}$ در رابطه‌ی کلی جواب‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

$$x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳} \quad \text{و} \quad k\in\mathbb{Z}$$

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\cos x=۰$$

حل: با توجه به شکل ۱۲۳ــ۲ به ازای $\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=\frac{\pi}{۲}$ معادله‌ی cosx برابر صفر است.



شکل ۱۲۳ــ۲

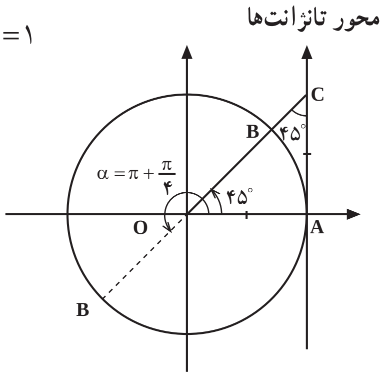
نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos x=۰$ عبارت است از : $x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

مثال: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\tan x=۱$$

ــ برای پیدا کردن تمامی زوایایی که مقدار تانژانت آن‌ها برابر با عدد ۱ می‌باشد مراحل زیر را انجام دهید.

۱ــ در شکل ۱۲۴ــ۲ بر روی محور تانژانت پاره‌خط AC



شکل ۱۲۴ــ۲

را به اندازه‌ی واحد جدا کنید. از C به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم مقدار تانژانت زاویه‌ی حاصل (۴۵) برابر با چیست؟

$\tan\frac{\pi}{۴} = \boxed{}$

۲ــ هرگاه نقطه‌ی B را به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت دهیم به نقطه‌ای مانند B' می‌رسیم. مقدار تانژانت زاویه‌ی $\pi + \frac{\pi}{۴}$ برابر چیست؟

$\tan(\pi + \frac{\pi}{۴}) = ?$

ــ هرگاه از B' به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت کنیم به نقطه‌ی B می‌رسیم. آیا مقدار تانژانت تغییر می‌کند؟

$\tan(۲\pi + \frac{\pi}{۴}) = ?$

ــ آیا رابطه‌ی مقابل صحیح است؟ چرا؟

$\tan(k\pi + \frac{\pi}{۴}) = ۱$ و $k \in \mathbb{Z}$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\tan x = m = \tan\alpha$ که $m \in \mathbb{R}$ برابر است با : $x = k\pi + \alpha \,,\, k \in \mathbb{Z}$

مثال‌های اضافی

مثال ۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$f(x) = \frac{x}{۲\sin x - ۱}$

الف) این تابع به ازای چه مقدار از x تعریف نمی‌شود؟

حل: به ازای ریشه‌های مخرج، تابع f تعریف نمی‌شود :

$۲\sin x - ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\sin x = ۱ \Rightarrow$

$\sin x = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶} \Rightarrow$

جواب‌های کلی عبارت است از :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + (\pi - \frac{\pi}{۶}) = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

ب) دامنه‌ی تابع f را به‌دست آورید.

$D_f = ?$

حل: دامنه‌ی f عبارت از کلیه‌ی اعداد حقیقی به جز ریشه‌ی مخرج است، پس :

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \middle| x \in \mathbb{R}, x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \text{ یا } x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \right\}$$

مثال ۲: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۳}-۹x}}$$

حل: تابع f به ازای xهایی که $x^{۳}-۹x>۰$ تعریف شده است. نامعادله اخیر به روش تعیین علامت حل می‌شود.

$$x^{۳}-۹x=x(x^{۲}-۹)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^{۲}-۹=۰\Rightarrow x^{۲}=۹\Rightarrow x=\pm ۳\end{cases}$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول **۲۸ــ۲** قرار داده و تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲۸ــ۲

x		−۳		۰		۳	
x	−		−	۰	+		+
$x^{۲}-۹$	+	۰	−		−	۰	+
$x^{۳}-۹x$	−	۰	+ جواب	۰	−	۰	+ جواب

ــ در نتیجه دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f=(-۳,۰)\quad(۳,+\infty)$$

مثال ۳: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲x+۱}{۳-۵x}}$$

الف) به‌ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف شده است؟

حل:

ــ با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال تابع f باید داشته باشیم :

$$\frac{۲x+۱}{۳-۵x}\geq ۰$$

ــ ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را به‌دست می‌آوریم :

$$۲x+۱=۰\Rightarrow ۲x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$۳-۵x=۰\Rightarrow ۳=۵x\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول **۲۹ــ۲** قرار داده تعیین علامت می‌کنیم.

ــ با توجه به نامعادله، تابع در $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۵}\right)$ تعریف شده است.

جدول ۲۹ــ۲

x		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۵}$	
$۲x+۱$	−	۰	+		+
$۳-۵x$	+		+	۰	−
$\frac{۲x+۱}{۳-۵x}$	−	۰	+ جواب	نامعین	−

ب) دامنه‌ی تابع f را پیدا کنید.

$$-\frac{۱}{۲}\leq x<\frac{۳}{۵}$$

حل:

با استفاده از جدول **۲۹ــ۲** دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{۱}{۲} \le x < \frac{۳}{۵}\right\} = \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵}\right)$$

مثال ۴ : تابع‌های f و g مفروض‌اند. مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = ۷x^۲ - ۵x, g(x) = ۲\sin x - ۳$$

۱) $f(۰) + g(۰) = ?$

ــ $f(۰)$ و $g(۰)$ را از ضابطه‌ی مربوط به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l} f(۰) = ۷(۰)^۲ - ۵(۰) = ۰ - ۰ = ۰ \\ g(۰) = ۲\sin ۰ - ۳ = ۰ - ۳ = -۳ \end{array}\right\} \Rightarrow f(۰) + g(۰) = -۳$$

۲) $f(۳) - g(\frac{\pi}{۶}) = ?$

ــ $f(۳)$ و $g(\frac{\pi}{۶})$ را از ضابطه‌ی مربوط به‌دست می‌آوریم و از هم کم می‌کنیم.

$$f(۳) = ۷(۳)^۲ - ۵(۳) = ۶۳ - ۱۵ = ۴۸$$

$$g(\frac{\pi}{۶}) = ۲\sin\frac{\pi}{۶} - ۳ = ۲ \times \frac{۱}{۲} - ۳ = ۱ - ۳ = -۲$$

$$\Rightarrow f(۳) - g(\frac{\pi}{۶}) = ۴۸ - (-۲) = ۵۰$$

مثال ۵ : دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x) = -۲\sin ۳x + ۵$$

حل : دامنه‌ی تابع شامل کلیه‌ی اعداد حقیقی است :

$$D_f = \mathbb{R}$$

ــ تغییرات تابع سینوس بین ۱- و ۱ است، بنابراین :

$$-۱ \le \sin ۳x \le ۱$$

ــ نامعادله را در عدد ۲- ضرب می‌کنیم، پس :

$$-۱ \times (-۲) \ge -۲ \times \sin ۳x \ge ۱ \times (-۲)$$

ــ چون نامعادله در عدد منفی ضرب شده است جهت نامعادله تغییر می‌کند.

$$+۲ \ge -۲\sin ۳x \ge -۲$$

به همه‌ی طرف‌های نامعادله عدد ۵ اضافه می‌کنیم.

$$۲ + ۵ \ge -۲\sin ۳x + ۵ \ge -۲ + ۵$$

ــ پس از ساده کردن برد تابع f برابر است با :

$$\Rightarrow ۷ \ge f(x) \ge ۳ \Rightarrow R_f = [۳, ۷]$$

مثال ۶: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\sqrt{3}\tan^2 x - \tan x = 0$$

حل: از tanx فاکتور می‌گیریم و هر یک از عوامل را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\tan x(\sqrt{3}\tan x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \end{cases}$$

ـ اولین جواب به ازای $\tan x = 0$ برابر با :

$$\tan x = 0 \Rightarrow x = 0$$

ـ دومین جواب به‌ازای $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر با :

$$\sqrt{3}\tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

ـ جواب‌های کلی معادله برابر است با :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \text{،} \ k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

۱ــ زوایــای $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ، $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ را بــرحسب درجــه بنویسید.

۲ــ نسبت‌های مثلثاتی ۳۰ و ۵۰ را برحسب رادیان بنویسید.

۳ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی آن را به‌دست آورید.

$$\cos^{۲} x - ۳\cos x + ۲ = ۰$$

۴ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی را به‌دست آورید.

$$\sin ۲x = ۰$$

۴ــ۵ــ۲ــ تساوی دو تابع

فعالیت ۲۲ــ۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند. جاهای خالی را در الف و ب تکمیل کنید.

$$f(x)=\sin^{۲}x+۳\ ,\ \ g(x)=-\cos^{۲}x+۴$$

الف) $D_f=\square$ و $D_g=\square$

ب) $R_f=\square$ و $R_g=\square$

ج) آیا می‌توان گفت: $f=g$؟ چرا؟

نتیجه: دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط را دارا باشند:

الف ــ دامنه‌های آن‌ها برابر باشند، یعنی $D_f=D_g$

ب ــ به ازای همه‌ی مقادیر x از دامنه، $f(x)=g(x)$ باشد.

مثال ۱: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x)=x+۲\ ,\ \ g_x=\frac{x^{۲}+۲x}{x}$$

حل: D_f و D_g را به‌دست می‌آوریم، آن‌گاه ثابت می‌شود برابر نیستند.

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ \ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\Rightarrow D_f\neq D_g$$

مثال ۲: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x)=۲-۲\sin^{۲}x \text{ و } g(x)=۲\cos^{۲}x$$

حل: D_f و D_g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f=\mathbb{R} \text{ و } D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f=D_g$$

ــ برای هر x در دامنه‌ی تابع f $(D_f=D_g)$، $f(x)=g(x)$

زیرا

$$f(x)=۲-۲\sin^{۲}x=۲(۱-\sin^{۲}x)=۲\cos^{۲}x$$

پس، $f=g$.

فعالیت ۲۳ــ۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳k+۱ & x=۲\end{cases} \text{ و } g(x)=x+۲$$

جاهای خالی زیر را تکمیل کنید.

الف) $D_g = \square$ و $D_f = (\mathbb{R} - \{۲\}) \quad \{۲\} = \square$

ب) $g(۲) = \square$

ج) هرگاه $f(۲) = g(۲)$ آن‌گاه $k = \square$

د) باتوجه به مقدار k، آیا می‌توان گفت دو تابع f و g برابرند؟

تمرین

کدام‌یک از زوج تابع‌های زیر برابرند؟

الف) $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۷x + ۱۲}{x + ۳}$ و $g(x) = x + ۴$

ب) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴x + ۳}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ -۲ & x = ۱ \end{cases}$ و $g(x) = x - ۳$

آزمون پایانی (۵)

۱ــ $C\in \mathbb{R}$ و $y=C$ یک تابع ثابت است. نمودار تابع با توجه به دو مقدار مختلف ($C>۰$ یا $C<۰$) در کدام قسمت از محور xها قرار می‌گیرد؟ (بالا یا پایین محور)

۲ــ هرگاه $A=\{۰,۱,۲\}$ تابعی از A بنویسید که مختص اول هر زوج آن برابر مختص دوم باشد.

۳ــ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{\cos x}{۲\sin x-\sqrt{۳}}$$

۴ ــ آیا دو تابع f و g برابرند؟ چرا؟

$$f(x)=x-۱\ ,\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۱}{x-۱} & ,\quad x\neq ۱\\ ۲ & \quad\ \ x=۱\end{cases}$$

۵ ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض‌است. مقدار زیر را محاسبه کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۲\sin x-۱ & \dfrac{\pi}{۳}\leq x<\dfrac{۵\pi}{۶}\\ \cos x & x<۰\end{cases}$$

$$۳f(\frac{\pi}{۲})+۲f(\frac{-\pi}{۳})$$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۵)

بخش دوم

فصل ششم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی
تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند ؛

۲ــ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g، ضابطه‌ی تابع $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g را بنویسد ؛

۳ــ دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g را تعیین کند ؛

۴ــ چهار عمل اصلی تابع‌ها را در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش آزمون (۶)

۱ــ توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۳}$

الف) دامنه‌ی f و g را بیابید.

ب) ضابطه‌های $f+g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و سپس دامنه‌ی هر یک را به دست آورید.

۲ــ توابع f و g با ضابطه‌های روبه رو مفروض‌اند.

$f(x)=۷x+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$

مقادیر زیر را به دست آورید.

$(f+g)(۲)$ و $(\frac{g}{f})(۲)$

۳ــ توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$f(x)=\{(-۱,۰),(۲,۵),(۹,۱۱),(۱۱,۲۰)\}$

$g(x)=\{(۹,۱۷),(۷,۹),(-۱,۳)\}$

حساب کنید :

الف) $f\times g$ و $۲f+۳g$

ب) D_{f+g} و $D_{f\times g}$

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۶)