مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را به روش مربع کامل حل کنید.

$x^۲ - ۶x + ۲ = ۰$

حل: جملات شامل مجهول (x) را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم.

$x^۲ - ۶x = -۲$

ــ مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{-۶}{۲})^۲ = ۹$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم، یعنی :

$x^۲ - ۶x + ۹ = -۲ + ۹ \Rightarrow (x - ۳)^۲ = ۷$

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف جذر گرفت و نوشت :

$\Rightarrow x - ۳ = \sqrt{۷}$ ، $x - ۳ = -\sqrt{۷}$

یا

$x_۱ = \sqrt{۷} + ۳$ ، $x_۲ = -\sqrt{۷} + ۳$

مثال ۲: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$x^۲ + ۱۰x = ۱۱$

حل: به دو طرف معادله مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{۱۰}{۲})^۲ = ۲۵$ را اضافه می‌کنیم :

$x^۲ + ۱۰x + ۵^۲ = ۱۱ + ۵^۲ \Rightarrow (x + ۵)^۲ = ۳۶$

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف معادله جذر گرفت و نوشت :

$x + ۵ = ۶$ ، $x + ۵ = -۶$

2   2

$x_۱ = ۱$ $x_۲ = -۱۱$

تمرین

۱ــ ریشه‌های معادله‌ی زیر را با تکمیل جاهای خالی حل کنید.

$$x^۲ + x - ۱ = ۰ \Rightarrow x^۲ + x = \square$$

$$x^۲ + x + \bigcirc = ۱ + \bigcirc \Rightarrow (x + \square)^۲ = \triangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \square = \sqrt{\triangle} & (۱) \\ x + \square = -\sqrt{\triangle} & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \Rightarrow x = \sqrt{\triangle} - \square$$

$$(۲) \Rightarrow x = -\sqrt{\triangle} - \square$$

بنابراین ریشه‌های معادله عبارتند از : $x_۱ =$ و $x_۲ =$

۲ــ ریشه‌های معادله‌های روبه‌رو را بیابید (به روش مربع کامل).

الف) $x^۲ - ۱۶x + ۳ = ۰$ ب) $t^۲ = -۸t + ۱$

دستور کلی حل معادله‌ی درجه دوم (روش .)

در این قسمت به چگونگی حل معادله‌ی درجه دوم به‌روش مربع کامل می‌پردازیم.

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0, a,b,c\in\mathbb{R}$$

ــ ابتدا عدد ثابت (c) را به‌طرف دیگر می‌بریم :

$$ax^2+bx=-c$$

ــ چون $a\neq 0$ دو طرف تساوی را بر a تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a}$$

ــ سپس مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}$ را به‌دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم ؛ داریم :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

ــ طرف اول را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم و در طرف دوم مخرج مشترک می‌گیریم، پس :

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ــ با فرض این‌که $b^2-4ac>0$ از طرفین جذر می‌گیریم، خواهیم داشت :

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

ــ مقادیر x_1 و x_2 برابر خواهند بود با :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

ــ عبارت b^2-4ac را مُبیّن معادله‌ی درجه دوم می‌گویند و با علامت یونانی دلتا (.) نشان می‌دهند، بنابراین درحالت کلی داریم :

$$. = b^2-4ac$$

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{.}}{2a}$$

نکته: اگر $. = 0$ باشد معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که برابر است با : $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

و اگر $. < 0$ باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم روبه‌رو را با استفاده از فرمول به‌دست آورید.

$$6x^2+5x-1=0$$

حل: مقدار a و b و c را تعیین می‌کنیم :

$$a=6 \ ، \ b=5 \ ، \ c=-1$$

ــ . را محاسبه می‌کنیم :

$$. = b^2-4ac=5^2-4(6)(-1)=25+24=49$$

ــ مقدار $x_۱$ و $x_۲$ را با استفاده از رابطه‌ی روبه‌رو پیدا می‌کنیم :

$$x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{.}}{۲a}$$

ــ ریشه‌های معادله‌ی، $x_۱$ و $x_۲$ ، به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow x_۱ = \frac{-۵ + \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۶} = \frac{-۵ + ۷}{۱۲} \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۶}$$

$$\Rightarrow x_۲ = \frac{-۵ - \sqrt{۴۹}}{۲ \times ۶} = \frac{-۵ - ۷}{۱۲} \Rightarrow x_۱ = -۱$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲ + \sqrt{۸}x + ۱ = ۰$ را با استفاده از . به‌دست آورید.

حل: مقادیر b ،a و c را تعیین می‌کنیم.

$$a = ۲ \ , \ b = \sqrt{۸} \ , \ c = +۱$$

ــ مبین معادله را به‌دست می‌آوریم :

$$= . \ b^۲ - ۴ac = (\sqrt{۸})^۲ - ۴(۲)(+۱) = ۸ - ۸ = ۰$$

چون ۰ = . است معادله، ریشه‌ی مضاعف دارد :

$$x_۱ = x_۲ = \frac{-b}{۲a} = \frac{-\sqrt{۸}}{۲ \times ۲} = \frac{-\sqrt{۴ \times ۲}}{۴} = \frac{-۲\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow x_۱ = x_۲ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ ریشه مضاعف}$$

مثال : ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را با استفاده از . به‌دست آورید.

$$-۵x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$$

حل: مقادیر b ،a و c را تعیین می‌کنیم :

$$a = -۵ \ , \ b = ۳ \ , \ c = -۴$$

ــ مقدار . را حساب می‌کنیم.

$$= . \ b^۲ - ۴ac = ۳^۲ - ۴(-۵)(-۴) = ۹ - ۸۰ = -۷۱$$

چون ۰ > . است پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

نتیجه: در معادله‌ی درجه دوم همواره برای . سه حالت زیر را داریم :

$$ax^۲ + bx + c = ۰ \ , a, b, c \in \mathbb{R} \ , a \neq ۰$$

حالت ۱: ۰ < . ، در این حالت معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد که آن‌ها را از رابطه‌ی مقابل پیدا می‌کنیم :

$$x_۱, x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{.}}{۲a}$$

حالت ۲: ۰ = . ، معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که آن را از فرمول مقابل به‌دست می‌آوریم :

$$x_۱ = x_۲ = \frac{-b}{۲a}$$

حالت ۳: ∘ .> ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: مقدار m را در معادله‌ی روبه‌رو چنان بیابید که معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$mx^{۲}+۵x+۴=۰$$

حل: مبین معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$b^{۲}-۴ac = . \quad و \quad ۰ = . \Rightarrow \text{شرط ریشه‌ی مضاعف}$$

با حل معادله‌ی درجه اول m را به‌دست می‌آوریم.

$$. = ۵^{۲}-۴(m)(۴)=۰ \Rightarrow ۲۵-۱۶m=۰$$

$$\Rightarrow m=\frac{۲۵}{۱۶}$$

تمرین

۱ــ معادله‌های زیر را به روش (.) حل کنید.

۱) $x^{۲}-۳x=-۱$

۲) $-x^{۲}+۳x+۲=۰$

۳) $۸x^{۲}+۴\sqrt{۲}x+۱=۰$

۴) $-۶x^{۲}+۵x-۴=۰$

۲ــ حدود m را در معادله‌ی زیر چنان بیابید که :

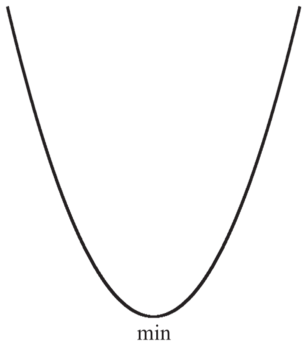
$$۷x^{۲}+۵x+m=۰$$

الف : دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

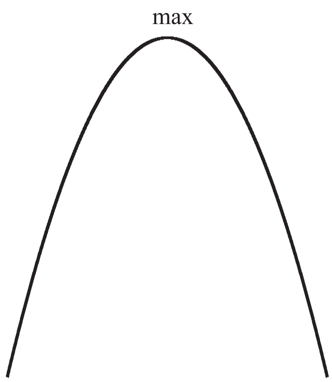
ب : ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

تعبیر هندسی حل معادله‌ی درجه دوم

از سال اول به یاد داریم که منحنی هر معادله که پس از ساده کردن به‌صورت $y = ax^{۲} + bx + c \quad (a \neq ۰)$ تبدیل شود، سهمی یا منحنی درجه دوم نامیده می‌شود. حال باید دانست که : هرگاه $a > ۰$ باشد، نمودار سهمی به‌صورت شکل ۹ــ۱ و هرگاه $a < ۰$ باشد نمودار سهمی به‌صورت شکل ۱۰ــ۱ می‌باشد. خط $x = \frac{-b}{۲a}$ را محور تقارن سهمی و نقطه‌ی x را طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم می‌نامند.



شکل ۹ــ۱



شکل ۱۰ــ۱

فعالیت ۴ــ۱

سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$y = -x^{۲} + ۳x + ۴$$

الف : آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟

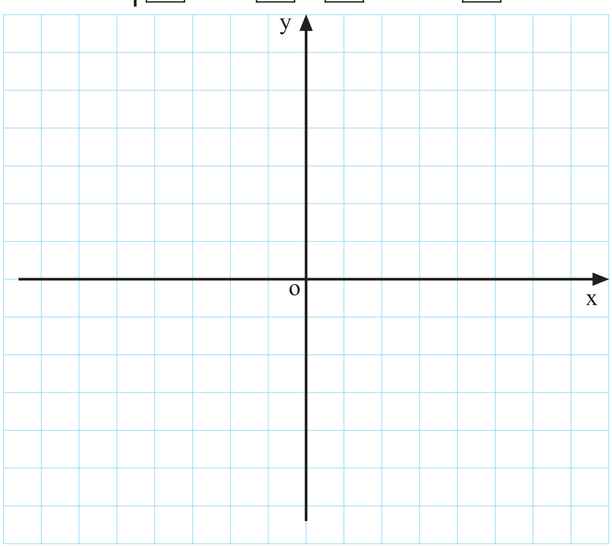
ب : طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم را به‌دست آورید.

ج : سهمی را با تکمیل جدول ۴ــ۱ رسم کنید.

د : با توجه به نمودار سهمی، ریشه‌های معادله‌ی $-x^{۲} + ۳x + ۴ = ۰$ را به‌دست آورید.

جدول ۴ــ۱

x	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	$\square$	۴
y	$\square$	۶	$\square$	$\square$	۴	$\square$



نمودار ۱۱ــ۱

فعالیت ۵ــ۱

یک سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$y = x^۲ - ۶x + ۵$$

الف : آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟

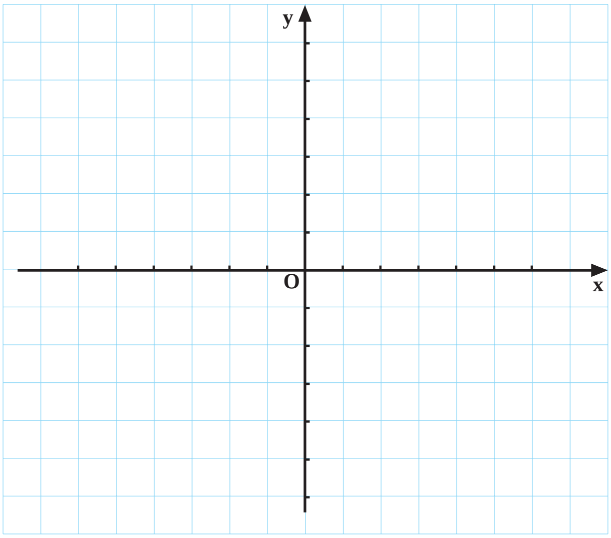
ب : طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم سهمی را پیدا کنید.

ج : با تکمیل جدول ۵ــ۱ سهمی را رسم کنید.

د : محل برخورد سهمی با محور xها را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جدول ۵ــ۱

x	۰	۲	۳	۴	۵
y					



شکل ۱۲ــ۱

کاربرد معادله‌ی درجه دوم در حل مسائل

مثال ۱: عدد صحیحی بیابید که مربع آن پنج برابر خودش باشد.

حل ۱:

ــ عدد را x فرض می‌کنیم، داریم :

$$x^۲ = ۵x \Rightarrow x^۲ - ۵x = ۰$$

ــ از x فاکتور می‌گیریم :

$$\Rightarrow x^۲ - ۵x = x(x - ۵) = ۰$$

ــ هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵ \end{cases}$$

مثال ۲: عددی طبیعی بیابید که حاصل‌جمع آن با مربعش برابر ۶ باشد.

حل: عدد را x فرض می‌کنیم، خواهیم داشت :

$$x + x^۲ = ۶$$

ــ با توجه به اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت :

$$x^۲ + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰$$

ــ هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ \text{یا} \\ x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳ \end{cases}$$

ــ با توجه به این‌که $-۳ \notin N$ ، این جواب قابل‌قبول نیست و تنها جواب ۲ قابل‌قبول است.

مثال ۳: عددی بیابید که مجموع مجذور و مکعب آن مساوی ۴ برابر عدد بعد از خودش باشد.

حل: عدد را x، مربع آن را $x^۲$ و مکعبش را $x^۳$ می‌نامیم.

ــ بنابر صورت مسئله چنین خواهد بود :

$$x^۲+x^۳=۴(x+۱) \Rightarrow x^۲(x+۱)-۴(x+۱)=۰$$

ــ از $x+۱$ فاکتور می‌گیریم :

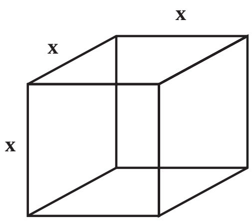
$$\Rightarrow (x+۱)(x^۲-۴)=۰ \Rightarrow (x+۱)(x-۲)(x+۲)=۰$$

ــ هر عامل را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله را مشخص می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \end{cases}$$

مثال ۴: طول ضلع مکعبی را بیابید که عدد مربوط به حجم آن ۹ برابر عدد مربوط به محیط یک وجه آن باشد.

مراحل حل: طول یک ضلع را x می‌نامیم. محیط یک وجه آن برابر $۴x$ و حجم مکعب $x^۳$ می‌باشد.



شکل ۱۳ــ۱

طبق صورت مسئله داریم :

$$x^۳=۹(۴x) \Rightarrow x^۳=۳۶x$$

ــ کلیه‌ی جملات را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

$$x^۳-۳۶x=۰$$

ــ از x فاکتور گرفته و همه‌ی عوامل را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$x(x^۲-۳۶)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x^۲-۳۶=۰ \Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=\pm۶ \end{cases}$$

با فرض مثبت بودن طول ضلع ابعاد مکعب، جواب منفی قابل‌قبول نیست ؛ بنابراین داریم :

$$x=۶ \;,\; x=\cancel{۰,-۶}$$

تنها جواب ۶ قابل‌قبول است.

تمرین

۱ــ مجموع ۵ عدد صحیح متوالی برابر ۸۵ است، این اعداد را مشخص کنید.

۲ــ مجموع مربع یک عدد با خودش برابر ۱۲ است، این عدد را بیابید.

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)

۱ــ نمودارهای زیر را رسم کنید :

۱) $3x + 5y = -15$

۲) $y = 2x^2 - 5x + 4$

۲ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{3x+1}{2} - \frac{5x-3}{4} = 1$

۲) $2x^2 + 7x + 4 = 0$

۳) $(-3x+1)^2 - 4(-3x+1) = 0$

۳ــ مجموع پنج عدد صحیح متوالی برابر ۴۵ است آن اعداد را بیابید.

۴ــ حدود k را در معادله‌ی روبه‌رو چنان بیابید که همواره دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

$kx^2 + 5x - 4 = 0$

بخش اول

فصل دوم

تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق

هدف کلی

یادآوری مطالب مربوط به تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق و خواص آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ عبارت‌های درجه اول و درجه دوم را تعیین علامت کند ؛

۲ــ نامعادله‌های مختلف را حل کند و حدود جواب هریک را مشخص سازد ؛

۳ــ قدرمطلق را تعریف کند و از خواص قدرمطلق برای حل نامعادلات قدرمطلقی استفاده کند.

پیش آزمون (۲)

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۲)

۱ــ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید :

۱) $P=-۲x+۳$

۲) $P=\frac{۲x-۱}{۵-۳x}$

۳) $P=-۲x^{۲}+۵x$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^{۲}>x$

۲) $\frac{۱}{x}+۳>۰$

۳) $|۵x+۳|<۷$

۴) $|-۲x+۳|>۴$

۲ـ۱ـ تعیین علامت

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که تعیین کنیم آن عبارت به‌ازای چه اعدادی منفی، مثبت و یا صفر می‌باشد.

۱ـ۲ـ۱ـ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

$P = ax + b \ ، a \neq ۰$

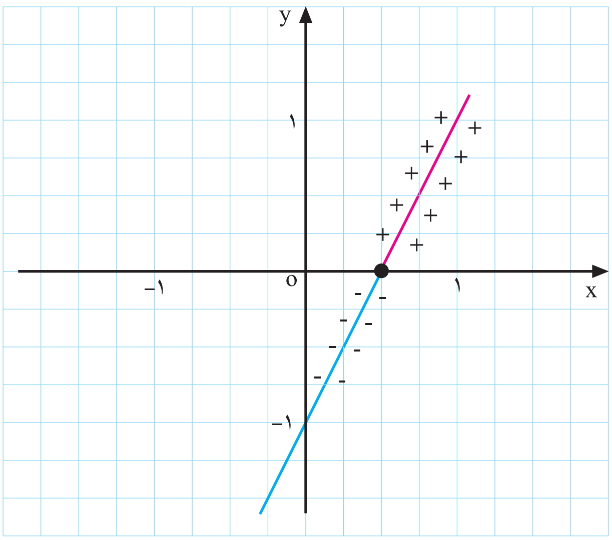
مثال ۱: معادله‌ی خط روبه‌رو مفروض است :

$y = ۲x + ۱$

جدول ۶ـ۱

x	۰	$\frac{۱}{۲}$
y	-۱	۰

با توجه به جدول ۶ـ۱ نمودار۱۴ـ۱ رسم شده است.



نمودار ۱۴ـ۱

خط محور xها را در نقطه‌ای با $x = \frac{۱}{۲}$ قطع نموده است.

بنابراین به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}$ عبارت $۲x - ۱$ صفر می‌باشد، یعنی $x = \frac{۱}{۲}$ جواب معادله‌ی $۲x - ۱ = ۰$ است. با توجه به نمودار ۱۴ـ۱ می‌بینیم که به‌ازای اعداد بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ $(x > \frac{۱}{۲})$ نمودار خط بالای محور xها است بنابراین علامت دوجمله‌ای مثبت می‌باشد ؛ و به‌ازای اعداد کمتر از $\frac{۱}{۲}$ $(x < \frac{۱}{۲})$ نمودار خط، زیر محور xها واقع است، بنابراین دوجمله‌ای منفی می‌شود. نتایج به‌دست آمده را می‌توان در جدول ۷ـ۱ خلاصه کرد.

جدول ۷ـ۱

x	$x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$x > \frac{۱}{۲}$
$۲x - ۱$	مخالف علامت ضریب x	۰	موافق با علامت ضریب x

فعالیت ۶ـ۱

نمودار خطی به معادله‌ی روبه‌رو را با تکمیل جدول ۸ـ۱ رسم کنید، سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

$y = -\frac{۱}{۲}x + ۳$

جدول ۸ـ۱

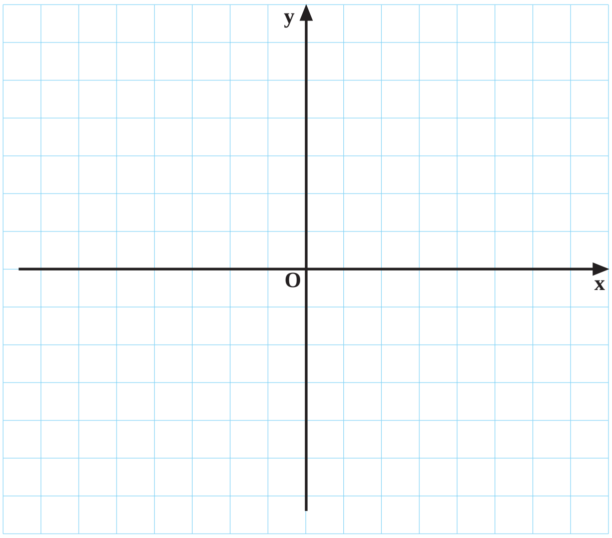
x	۰	$\square$
y	$\square$	۰

الف : در چه نقطه‌ای دو جمله‌ای صفر است؟ ج : $\square$

ب : به‌ازای اعداد بیش‌تر از ۶ نمودار خط زیر محور xها

واقع شده است علامت دوجمله‌ای در این بازه چگونه می‌باشد؟ج : ☐

ج : به‌ازای اعداد کمتر از ۶ نمودار خط بالای محور xها قرار گرفته است، در این بازه علامت دو جمله‌ای را تعیین کنید. ج : ☐



نمودار ۱۵ــ۱

د : با توجه به قسمت‌های بالا جدول ۹ــ۱ را تکمیل کنید.

جدول ۹ــ۱

x	$x<۶$	۶	$x>۶$
y	☐	∘	☐

نتیجه: هر عبارت که پس از ساده کردن به‌صورت $P = ax + b$ ، $a \neq ۰$ باشد یک دوجمله‌ای درجه اول نامیده می‌شود.

برای تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول، ریشه‌ی آن $(x = \frac{-b}{a})$ را به‌دست می‌آوریم. سپس با استفاده از جدول ۱۰ــ۱ تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{cases} ax + b = ۰ \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

جدول ۱۰ــ۱

x	$x < -\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x > -\frac{b}{a}$
$P = ax + b$	مخالف علامت a	∘	موافق علامت a

مثال ۱: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = ۷ - ۳x$$

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$P = ۰ \Rightarrow ۷ - ۳x = ۰ \Rightarrow -۳x = -۷$$

ــ ریشه‌ی معادله برابر است با :

$$\Rightarrow x = \frac{۷}{۳}$$

با توجه به جدول ۱۱ــ۱ به‌ازای $x > \frac{۷}{۳}$ علامت دوجمله‌ای منفی و به‌ازای $x < \frac{۷}{۳}$ علامت آن مثبت و به‌ازای $x = \frac{۷}{۳}$ مقدار دوجمله‌ای صفر می‌باشد.

جدول ۱۱ــ۱

x	$x < \frac{۷}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$x > \frac{۷}{۳}$
$P = ۷ - ۳x$	+	∘	−

نکته: هرگاه عبارت جبری به‌صورت حاصل‌ضرب یا تقسیم چند دوجمله‌ای درجه اول باشد (مثال : عبارت P) برای تعیین علامت مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$P=\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$$

۱ــ هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌ی آن را پیدا می‌کنیم :

$$x-a=۰\Rightarrow x=a$$

$$x-b=۰\Rightarrow x=b$$

و

$$x-c=۰\Rightarrow x=c$$

(با فرض $a<b<c$)

۲ــ جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن ریشه‌های به‌دست آمده را به‌ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم و در سطرهای دیگر به‌ترتیب عبارت مربوط به هر ریشه را که به‌ازای ریشه صفر می‌شود می‌نویسیم و تعیین علامت می‌کنیم.

۳ــ علامت‌های واقع در هر ستون عمودی را درهم ضرب می‌کنیم و نتیجه را در سطر آخر به‌دست می‌آوریم. علامت‌های به‌دست آمده در سطر آخر علامت عبارت (P) را مشخص می‌کند.

جدول ۱۲ــ۱

x		a		b		c	
$x-a$	−	۰	+		+		+
$x-b$	−		−	۰	+		+
$x-c$	−		−		−	۰	+
P	−	۰	+	۰	−	تعریف نشده	+

نکته: باید توجه داشت که عبارات جبری به‌ازای هریک از جواب‌های صورت، صفر و به‌ازای هریک از ریشه‌های مخرج تعریف نشده (نامعین) است.

مثال ۲: عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید.

$$P=\frac{x(۲x-۱)}{۳-۲x}$$

مراحل حل: ریشه‌های صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم :

$$P=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ ۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$۳-۲x=۰\Rightarrow -۲x=-۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$x=\frac{۳}{۲}$ ریشه‌ی مخرج است، لذا به‌ازای آن عبارت (P) تعریف نشده است.

ــ ریشه‌ها را به‌ترتیب صعودی در سطر اول جدول ۱۳ــ۱ می‌نویسیم.

ــ هریک از عبارات را به‌ترتیب ریشه‌های مربوط در سطر بعدی می‌نویسیم.

ــ عبارات را تعیین علامت می‌کنیم.

ــ از ضرب علامت‌های ستون عمودی علامت عبارت P را در فواصل ریشه‌ها به‌دست می‌آوریم.

جدول ۱۳ــ۱

x		۰		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۲}$	
x	−	۰	+		+		+
$۲x-۱$	−		−	۰	+		+
$۳-۲x$	+		+		+	۰	−
P	+	۰	−	۰	+	تعریف نشده	−

۲ـ۲ـ۱ـ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم

$P = ax^۲ + bx + c$ و $a,b,c \in \mathbb{R}$ ، $a \neq ۰$

مثال ۱: یک سهمی با ضابطه مقابل رسم کنید.

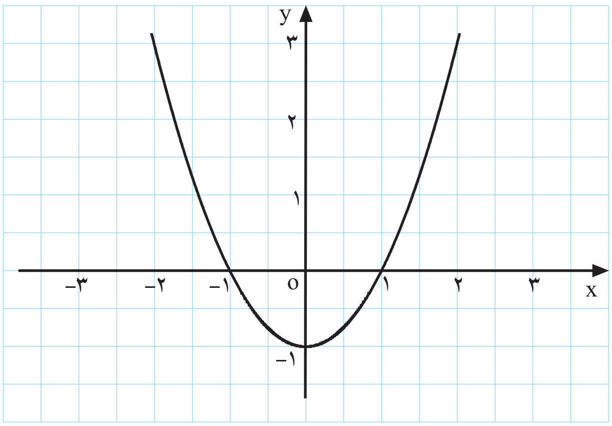
$y = x^۲ - ۱$

جدول ۱۴ـ۱

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۳	۰	−۱	۰	۳

مراحل حل: طول نقطه‌ی رأس سهمی $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

با توجه به نمودار ۱۶ـ۱ مشاهده می‌کنیم که اگر $x > ۱$ یا $x < -۱$ باشد نمودار سهمی بالای محور xها واقع می‌باشد. بنابراین سه‌جمله‌ای درجه دوم مثبت (موافق با علامت ضریب $x^۲$) و اگر $-۱ < x < ۱$ باشد نمودار زیر محور xها قرار دارد؛ بنابراین سه‌جمله‌ای درجه دوم منفی است.



نمودار ۱۶ـ۱

تمرین

با توجه به مثال ۱ و نمودار $y = x^۲ - ۱$ جدول ۱۵ـ۱ را کامل کنید.

جدول ۱۵ـ۱

x	$x < -۱$	−۱	$-۱ < x < ۱$	۱	$x > ۱$
$x^۲ - ۱$	☐	۰	◯	۰	☐

فعالیت ۷ـ۱

نمودار سهمی روبه‌رو را با تکمیل جدول ۱۶ـ۱ رسم کنید.

$y = -(x+۱)^۲ + ۱$

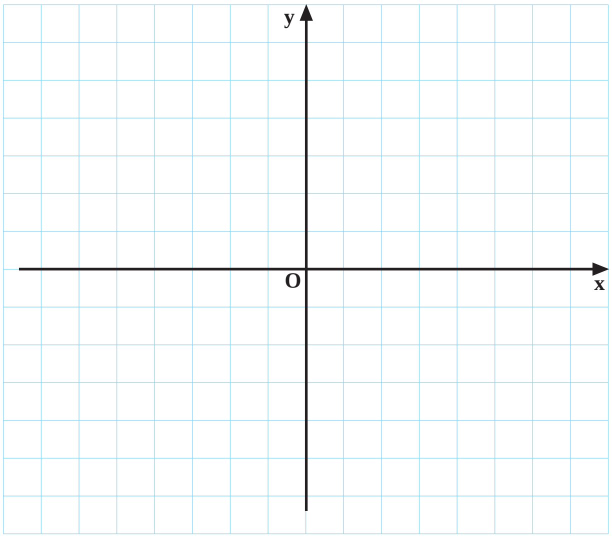
جدول ۱۶ـ۱

x	−۳	−۲	−۱	۰	۱
y	−۳	☐	۱	۰	☐

۱ـ به‌ازای $x > ۰$ یا $x < -۲$ سهمی زیر محور xها قرار گرفته است، علامت سه‌جمله‌ای چیست؟ج: ☐

۲ــ در بازه‌ی $-۲ < x < ۰$ علامت سه‌جمله‌ای چگونه است؟ ج : $\square$

۳ــ با توجه به نمودار ۱۷ــ۱، جدول ۱۷ــ۱ را کامل کنید.



نمودار ۱۷ــ۱

جدول ۱۷ــ۱

x	$x < -۲$	-۲	$-۲ < x < ۰$	۰	$x > ۰$
y	$\square$	۰	$\bigcirc$	۰	$\square$

نکته: با نتیجه‌گیری از مثال و فعالیت ۷ــ۱ می‌توان گفت هرگاه سه‌جمله‌ای درجه دوم دارای دو ریشه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱ < x_۲)$ باشد، مطابق جدول ۱۸ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱۸ــ۱

x	$x < x_۱$	$x_۱$	$x_۱ < x < x_۲$	$x_۲$	$x > x_۲$
$ax^۲ + bx + c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق با علامت a

مثال ۲ : سه‌جمله‌ای مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = ۷x^۲ - ۵x - ۲$$

حل:

ــ عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم :

$$P = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$$

ــ جمع ضرایب صفر است $(a + b + c = ۰)$، پس :

$$x_۱ = ۱ \;,\; x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{-۲}{۷}$$

چون ضریب $(a = ۷)x^۲$ مثبت است دو طرف ریشه‌ها مثبت و مابین دو ریشه منفی است.

جدول ۱۹ــ۱

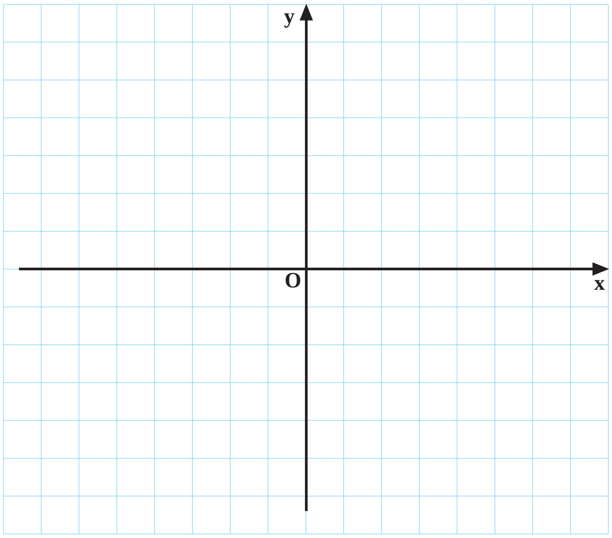
x	$x < -\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۲}{۷} < x < ۱$	۱	$x > ۱$
P	+	۰	−	۰	+

فعالیت ۸ــ۱

الف) با تکمیل جدول ۲۰ــ۱ نمودار سهمی $y=x^۲-۲x+۱$ را رسم کنید.

جدول ۲۰ــ۱

x	−۱	۰	۱	۲	۳
y	□	۱	۰	□	۴



نمودار ۱۸ــ۱

ب) x نقطه‌ی رأس، $\frac{-b}{۲a}$ ، برابر چه عددی است؟

ج) علامت نمودار در تمام دامنه به‌جز $x=۱$ چیست؟ چرا؟

د) با توجه به شکل ۱۸ــ۱ علامت جدول ۲۱ــ۱ را مشخص کنید.

جدول ۲۱ــ۱

x	$x<۱$	۱	$x>۱$
P	□	۰	□

نتیجه: هرگاه سه‌جمله‌ای درجه دوم دارای ریشه‌ی مضاعف (دو ریشه‌ی یکسان) باشد. همواره علامت سه‌جمله‌ای موافق ضریب $x^۲$ یعنی علامت a می‌باشد.

جدول ۲۲ــ۱

x	$-\infty$ $x<x_۱$	$x_۱=x_۲=\frac{-b}{۲a}$	$x>x_۲$
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

مثال ۳: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P=-۴+۴x-x^۲$$

حل: عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$P=۰\Rightarrow -۴+۴x-x^۲=۰$$

ــ . را پیدا می‌کنیم :

$$= .\ b^۲-۴ac=۴^۲-۴(-۱)(-۴)=۱۶-۱۶=۰$$

ــ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد (زیرا ۰ . =)

$$\Rightarrow .=\ ۰$$

ــ ریشه‌ی معادله برابر است با :

$$x_۱=x_۲=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۴}{۲(-۱)}=۲$$

چون ضریب $x^۲$ منفی است علامت سه‌جمله‌ای همواره منفی می‌شود، مگر در $x = ۲$ که برابر صفر است.

جدول ۲۳ــ۱

x	$x < ۲$	۲	$x > ۲$
$-۴ + ۴x - x^۲$	$-$	۰	$-$

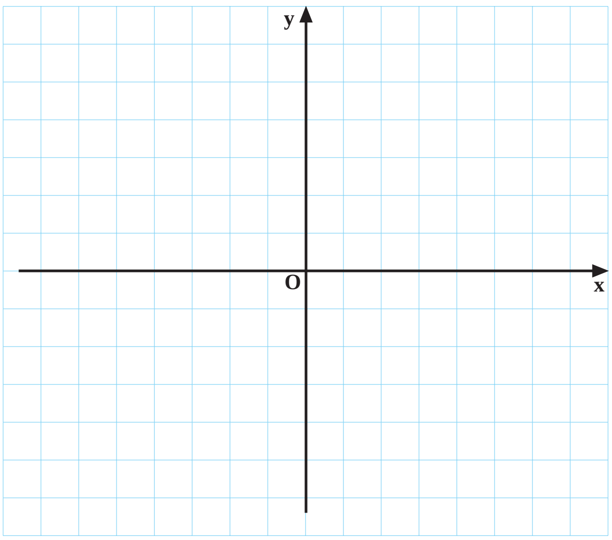
فعالیت ۹ــ۱

الف : نمودار سهمی $y = x^۲ + ۲$ را با تکمیل جدول ۲۴ــ۱ رسم کنید.

جدول ۲۴ــ۱

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۶	$\square$	۲	۳	$\square$

ب : از این‌که نمودار سهمی بالای محور x ها قرار می‌گیرد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



نمودار ۱۹ــ۱

ج : با توجه به نمودار ۱۹ــ۱ علامت جدول ۲۵ــ۱ را تعیین کنید.

جدول ۲۵ــ۱

x	به‌ازای هرمقدار x
$x^۲ + ۲$	

نتیجه: هرگاه در سه‌جمله‌ای درجه دوم $. < ۰$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد و علامت معادله همواره موافق علامت a خواهد بود.

جدول ۲۶ــ۱

x	به‌ازای هرمقدار x
$ax^۲ + bx + c$	موافق علامت ضریب $x^۲$

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = -۷x^۲ + x - ۱$$

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$P = ۰ \Rightarrow -۷x^۲ + x - ۱ = ۰$$

ـ مقادیر a ، b و c را مشخص می‌کنیم : $a=-۷$ ، $b=۱$ و $c=-۱$

ـ . یا مبیّن معادله را به‌دست می‌آوریم : $=.\ b^۲-۴ac=۱^۲-۴(-۷)(-۱)=۱-۲۸=-۲۷$

چون ۰ > . است پس علامت چندجمله‌ای موافق a است.

جدول ۲۷ــ۱

x	به‌ازای هرمقدار x		
$-۷x^۲+x-۱$	−	−	−

خلاصه‌ی بحث

در تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم $ax^۲+bx+c$ ، $a\neq ۰$

الف : اگر معادله دارای دو ریشه باشد طبق جدول ۲۸ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۲۸ــ۱

> > ۰

x		$x_۱$		$x_۲$	
P	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

ب : اگر معادله دو جواب یکسان (ریشه مضاعف) داشته باشد مطابق جدول ۲۹ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۲۹ــ۱

= = ۰

x		$x_۱=x_۲$	
P	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

پ : اگر معادله ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد طبق جدول ۳۰ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۳۰ــ۱

< < ۰

x	به‌ازای هر مقدار x
P	موافق علامت a

تمرین

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $P = -6x^2 - x + 1$

۲) $P = \dfrac{4 - x^2}{x - 1}$

۳) $P = -(x+2)^2 + 1$

۴) $P = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x - x^2}$

۵) $P = (-3x+4)^2(-4x^2+7x)$