

فصل ۲

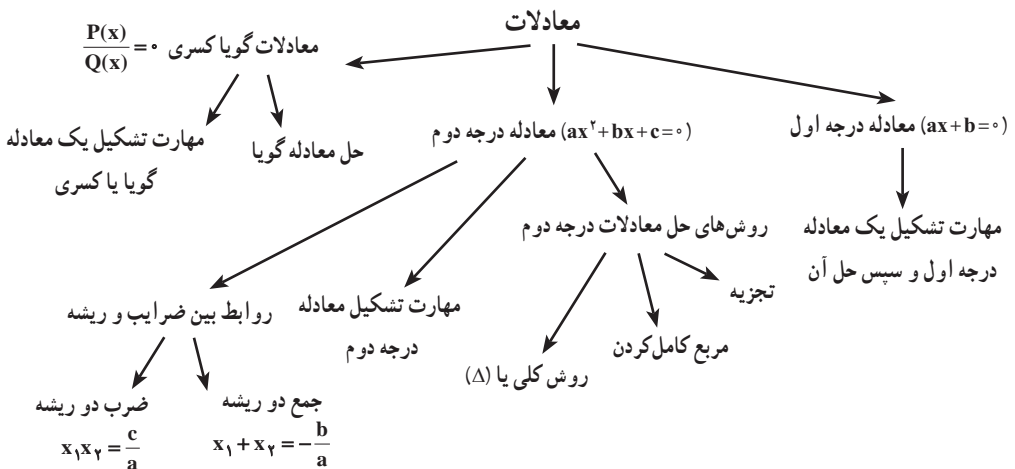
معادله درجه دوم

نگاه کلی به فصل

مطالب این فصل با معادله درجه اول شروع شده که هدف آن مهارت دانش آموز در مدل سازی یک معادله توسط یک ترازو می باشد که بتوان در مورد تعداد جواب های یک مسئله بحث کرده، سپس با اطلاعات مسئله تشکیل یک معادله داده و مهارت تشکیل دادن یک معادله را تجربه کرده، سپس به حل آن بپردازد. بعد با بیان مثالی که از کتاب نهم اقتباس شده با داشتن قطر مربعی می خواهد محیط را به دست آورد. سرانجام معادله ای از درجه بالاتر را معرفی می کند که به این معادله درجه دوم می گویند.

در ادامه جواب های معادله را با حدس زدن و سپس روش ها و فنون حل معادله درجه دوم بیان می کند و همچنین با داشتن جواب های یک معادله می توان آن معادله را تشکیل داد که آن معادله منحصر به فرد نیست و سپس با بیان چند مسئله مهارت ساختن معادله درجه دوم را بیان می کند که در اینجا سعی شده از مثال هایی استفاده کنند که دانش آموزان رشته انسانی با آنها سر و کار دارند مثل مفاهیم تابع سود، درآمد، هزینه، نقطه سر به سر. و در انتها با نوع دیگر معادلات که آنها را معادلات کسری یا گویا می گویند آشنا می شوند تا بتوانند با استفاده از آن، مسائل کاربردی را از طریق معادلات گویا حل کنند. البته به طور مختصر فقط با مفهوم روابط بین ضرایب و ریشه ها آشنا می شوند.

نقشه مفهومی



دانستنی‌های معلم

ریشه‌یابی معادلات روش‌های یافتن ریشه‌های یک معادله (The roots of equation) یعنی نقاط تلاقی نمودار آن معادله با محورهای مختصات می‌باشد و چون در توابع y را برحسب x تعریف می‌کنیم ریشه‌های یک معادله را نقاط برخورد با محور x ها (طول‌ها) در نظر می‌گیریم. برای مثال ریشه‌های معادله $y = ax + b$ و یا $y = ax^2 + bx + c$ و یا به‌طور کلی $y = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + c$ نسبت به محور x ها در واقع نقاط اشتراک نمودار معادله با محور x ها می‌باشد و چون آن نقاط روی محور x ها می‌باشد دارای عرض صفر می‌باشند. بدین منظور باید مقدار x را در معادله‌ای که عرض (y) آن صفر است به دست آوریم.

در حل معادله درجه اول که به صورت $y = mx + h$ می‌باشد و y عرض اصلی و h عرض اولیه یا عرض از مبدأ است باید $y = 0$ قرار دهیم و داریم $mx + h = 0 \leftarrow x = \frac{-h}{m}$ که x برابر است با حاصل تقسیم عرض از مبدأ به شیب یعنی هنگامی که عرض از مبدأ صفر باشد نمودار از مبدأ می‌گذرد و $x = 0$ می‌باشد. در معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ که $y = 0$ قرار می‌دهیم و $ax^2 + bx + c = 0$ را شروع به حل کردن می‌کنیم در صورت تجزیه عبارت درجه ۲ به پرانتزهای درجه ۱ حداکثر ۲ تا پرانتز ظاهر می‌شود که ممکن است این دو پرانتز شبیه به هم باشند پس می‌توان گفت که هر معادله درجه دوم حداکثر ۲ جواب دارد. اگر دو پرانتز مثل هم نباشند (۲ جواب) اگر پرانتزها مثل هم باشند (۱ جواب) و اگر نتوانیم تجزیه کنیم اصلاً جواب نداریم: سپس می‌توان گفت که معادله درجه n ، حداکثر n جواب دارد.

عبارت $b^2 - 4ac$ را برابر با حرف دلتای Δ نمایش می‌دهند دلتا در ریاضیات نماد فاصله یا تغییرات است.

طبق قضیه تنلیث دلتا

۱ اگر $\Delta > 0$ در این صورت فاصله بین دو ریشه مثبت است. پس معادله دو ریشه مختلف است.

۲ $\Delta = 0$ در این صورت فاصله بین دو ریشه صفر است پس هر دو جواب یکی است و معادله اصطلاحاً

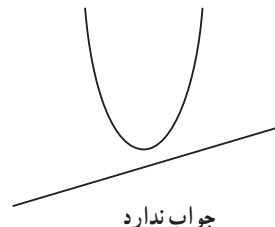
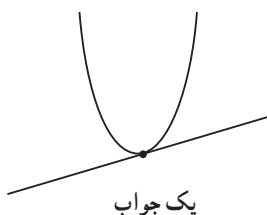
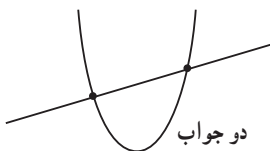
ریشه مضاعف دارد.

۳ $\Delta < 0$ فاصله بین دو ریشه منفی است و همان‌طور که می‌دانیم فاصله عدد منفی نمی‌تواند باشد و از

سوی دیگر Δ در زیر رادیکالی با فرجه زوج نمی‌تواند باشد پس ریشه ندارد.

به کمک نقاط برخورد خط و سهمی می‌توان تعداد جواب‌های معادله را تشخیص داد.

$$y = ax^2 + bx + c$$



اگر Δ مربع کامل باشد جواب‌های مسئله اعداد گویا می‌باشند.

مسیرهایی برای توسعه

برخی از مسائل مطرح‌شده در ادامه، ویژه دانش‌آموزانی که توانایی فراتری دارند و برای آزمون‌های عمومی توصیه نمی‌شود.

- ۱ مجموع ثلث و خمس عددی ۳۴ واحد بیشتر از ربع آن عدد است، نصف این عدد را بیابید.
- ۲ مجموع سه عدد فرد متوالی ۴۸۳ است رقم دهگان عدد بزرگ‌تر را بیابید.
- ۳ می‌دانیم قیمت پارچه ابریشمی ۶ برابر پارچه نخی است و با ۱۸۸۰۰۰۰ ریال می‌توانیم ۵ متر پارچه نخی و ۲۳ متر پارچه ابریشمی بخریم. قیمت یک متر از هر نوع پارچه را معین کنید.
- ۴ جواب معادله $x = x - 2(x - 1) - 4$ از جواب معادله $(\frac{5}{100} + \frac{2}{100}x) = 2x - \frac{25}{100}$ چقدر بیشتر است؟
- ۵ امسال پدری در ۲۰ سالگی فرزندش ۴۶ سال دارد. چند سال قبل سن پدر سه برابر سن پسرش بوده است؟

۶ معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & (2x-1)^2(4x+1)^2 \\ \text{ب)} & (x^2-9)(x^2-7x+10)=0 \\ \text{پ)} & x^2-7xy+12y^2=0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ت)} \quad x^2-10x^2+21x=0 \\ \text{ث)} \quad x^2-x^2-4x+4=0 \\ \text{ج)} \quad x^4-13x^2+36=0 \end{array}$$

۷ معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف)} & \sqrt{3}x^2 - 2(\sqrt{3}-1)x + \sqrt{3} - 2 = 0 \\ \text{ب)} & 2(x+2)^2 + 2x^2 = (2x-3)^2 + x \\ \text{پ)} & (x+1)^2 - x^2 = 1 \\ \text{ت)} & (3x+1)^2 - 5(3x+1) + 6(3x+1) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ث)} \quad (x^2+3x-5)(x^2+3x-2) = 4 \\ \text{ج)} \quad x^2 - 4x + \frac{6}{x^2 - 4x + 3} = 2 \\ \text{چ)} \quad (x-1)^4 + x^2 = 19 + 2x \\ \text{ح)} \quad (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3 \end{array}$$

۸ نشان دهید معادله $x^2 + ax + 2 = bx + a^2 + 1$ همواره جواب دارد.

۹ اگر $A = 2x - 1$ باشد آنگاه جواب معادله $A^2 + 2A - 1 = 0$ را به دست آورید.

۱۰ حاصل ضرب و حاصل جمع ریشه‌های معادله $2x(x^2+1) + 5 = 2x(x^2+3x) + (2x+1)$ را به دست آورید.

۱۱ مجموع ریشه‌های معادله $2x^2 - 3mx + 1 = 0$ از حاصل ضرب ریشه‌های آن یک واحد بیشتر است

را m بیابید.

۱۲ مقدار m را طوری بیابید که معادله $(m+3)x^2 + 2(3m+1)x + (m+3) = 0$ دارای ریشه مضاعف

باشد. سپس ریشه مضاعف را حساب کنید.

۱۳ ابعاد زمین فوتبال 90×60 است و عرض حاشیه پشت دروازه‌ها، ۲ برابر عرض حاشیه کنار زمین است. اگر بنا باشد مساحت زمین فوتبال و حاشیه آن برابر باشد، حاشیه اطراف زمین چقدر است؟
 ۱۴ مساحت زمین مستطیل شکلی ۱۸ مترمربع و محیط آن ۱۷ متر می‌باشد قدر مطلق اختلاف طول و عرض این زمین چقدر است؟

۱۵ اگر معادله $ax^2 + bx^2 + c = 0$ دو جواب داشته باشد شرطی بیاید که

(الف) دو جواب قرینه یکدیگر داشته باشد. (ب) دو جواب معکوس یکدیگر داشته باشد.

۱۶ سه کارگر که کم تجربه می‌باشند لوله‌کشی یک ساختمان را طی ۸ روز به اتمام می‌رسانند ولی همین میزان کار را دو کارگر با تجربه در ۵ روز انجام می‌دهند. دو کارگر کم تجربه و یک کارگر با تجربه طی چند روز این کار را انجام می‌دهند؟

۱۷ دو شیر A و B هر یک به تنهایی ۳ و ۵ ساعت یک استخر را پر از آب می‌کنند و دریچه تخلیه در ۶ ساعت استخر را تخلیه می‌کند اگر دو شیر A و B و دریچه تخلیه باز باشد آیا استخر پر از آب می‌شود؟ چرا؟

۱۸ قایق‌های تفریحی در رودخانه کارون در شهر اهواز مسافران را در یک گردش سه ساعت ۱۵ کیلومتر برخلاف جریان آب به بالای رودخانه می‌برند و سپس برمی‌گردانند. اگر سرعت آب از بالا به پایین 2 km/h باشد، سرعت ثابت قایق تفریحی (در آب ساکن) چقدر است؟ مدت زمانی که قایق در خلاف جهت آب رودخانه حرکت می‌کند چقدر است؟

۱۹ معادله را حل کنید.
$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} = \frac{1-2x}{1+x^2}$$

۲۰ نمودار تابع $y = 2x^2 - 5x - 3$ و $y = x^2 - x - 3$ محور xها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ از تعداد CDهایی که نسترن داشت نیمی را به برادرش و نیمه بقیه‌اش را به پدرش و نیمه باقی مانده را به مادرش داد و پنج CD دارد. تعداد CDهای نسترن چقدر بوده است؟

۲ علی و رضا و نیما در مجموع ۸۰ درصد سهام یک شرکت تازه تأسیس را خریده‌اند که سهم رضا نصف سهم علی و سهم نیما ۳۳ درصد می‌باشد. سهم علی چقدر از سهم نیما بیشتر است؟

۳ مجموع ثلث و سه برابر عددی 170 است آن عدد را بیابید.

۴ معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

(الف) $2x(x+2) = -2x(3x+2)$

(ث) $x^2 + 7x - 18 = 0$

(ب) $x(x-4) = 49 - 4x$

(ج) $4x^2 - 14x + 12 = 0$

(پ) $3x^2 = 27$

(چ) $x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 0$

(ت) $(x+1)^2 = 9x^2$

۵ در معادله درجه دوم $ax^2 - 2ax + a - 1 = 0$ مقدار a چه باشد تا بین معادله (Δ) برابر ۱۶ باشد؟

۶ معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش -2 و 5 باشد و ضریب x آن $-\frac{1}{3}$ باشد.

۷ معادله درجه دومی تشکیل دهید که دارای ریشه مضاعف $-\frac{2}{5}$ باشد و ضریب x^2 آن 5 باشد.

۸ به کمک (Δ) تعداد جواب‌های معادلات زیر را تعیین کنید.

الف) $-\frac{1}{4}x^2 + 3x + 4/5 = 0$

ب) $\frac{1}{4}x^2 - \sqrt{6}x + 3 = 0$

۹ معادله $(2x+1)^2 = 2k - 1$ مفروض است.

الف) به ازای چه مقداری از K این معادله دارای ریشه مضاعف است؟

ب) به ازای چه مقداری از K این معادله دارای دو ریشه حقیقی است؟

پ) به ازای چه تعدادی از K این معادله دارای ریشه حقیقی نیست؟

۱۰ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ (روش مربع کامل کردن)

ب) $x(2x+3) = 6$ (مربع کامل کردن)

پ) $(x-1)^2 + (x+1)^2 = 3x^2$

ت) $3x^2 + 4x + 2 = 0$

ث) $x^2 - \frac{x}{5} = \frac{6}{5}$

ج) $(5x-3)(x-5) = (2x+5)^2 - 57$

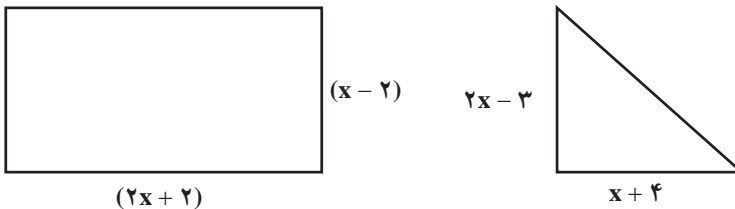
چ) $x(2x-1) = 1$

۱۱ چرا معادله $4x^2 - ax - 9 = 0$ همواره جواب دارد؟

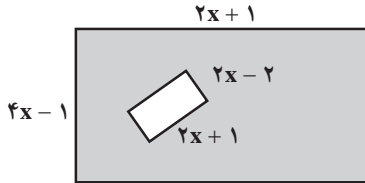
۱۲ مقدار m را طوری بیابید که $x=2$ یک جواب معادله $x^2 + mx + 2 = 0$ باشد، سپس جواب دیگر این

مسئله را بیابید.

۱۳ مساحت مستطیل و مثلث شکل زیر با هم مساویند. طول اضلاع مثلث قائم الزاویه را به دست آورید.



۱۴ در شکل زیر مقدار x را چنان تعیین کنید که مساحت قسمت هاشورخورده ۱۶ گردد.



۱۵ بدون حل معادله مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را در معادله $\sqrt{2}x^2 + x - \sqrt{8} = 0$ به دست آورید.

۱۶ در معادله $(2+m)x^2 + 3x + 5m = 0$ مقدار m را طوری تعیین کنید که مجموع ریشه‌ها $-\frac{1}{4}$ باشد.

۱۷ مقدار m را چنان بیابید که معادله $x^2 + 4x - m - 1 = 0$ دارای یک جواب باشد.

۱۸ مقدار m را چنان بیابید که معادله $x^2 + 4x + 2m - 1 = 0$ دارای ریشه مضاعف باشد سپس آن جواب

را به دست آورید.

۱۹ معادله $\frac{2x}{x-1} + \frac{2}{x-3} = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$ را حل کنید.

۲۰ تابلویی از جنس برنز داریم که نسبت برنز خالص به وزن برنج خالص آن ۷ است اگر آن را ذوب کرده

و ۲۰۰ گرم برنج به آن اضافه کنیم و تابلوی جدیدی ساخته شود می‌دانیم $\frac{3}{4}$ وزن تابلوی جدید برنز است

حال این تابلو قبل از ذوب شدن چه وزنی داشته است؟

۲۱ دو نقاش ساختمان با هم، کار یک ساختمان را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اگر نقاش اول به تنهایی

تمام کار را ۱۵ روز زودتر از نقاش دوم تمام کند، هر کدام از این دو نقاش به تنهایی تمام کار را در چند روز

تمام می‌کنند؟

۲۲ عدد طبیعی را بیابید که مجموع عکس عدد قبل و بعد از آن برابر $\frac{3}{4}$ باشد.

۲۳ به ازای چه مقدار a معادله $\frac{3x-2}{a+4} + \frac{x}{(2x-4)^2+1} = 3$ دارای جواب $x = -\frac{1}{4}$ است؟

۲۴ هزینه تولید x دستگاه کامپیوتر در شرکتی برابر با $C(x) = -x^2 + 30x + 3500$ میلیون ریال می‌باشد.

اگر این شرکت هر کامپیوتر را ۱۰ میلیون ریال بفروشد. چند کامپیوتر بفروشد تا نه سود کند و نه زیان؟ (یا

نقطه سر به سر آن را به دست آورید.)

معادله مسائل توصیفی

اهداف درس اول

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند:

- ۱ مهارت مدل کردن یک معادله به ترازو
- ۲ مهارت تشکیل یک معادله درجه اول و سپس حل آن
- ۳ معرفی معادله درجه دوم
- ۴ با داشتن ریشه‌های معادله درجه دوم قادر به ساختن معادله درجه دوم باشند.

روش تدریس

در فعالیت اول می‌خواهد به کمک یک ترازو، معادله را به صورت دو کفه ترازو نشان دهد که در صورتی کفه‌ها در یک راستا قرار می‌گیرند که مقادیر یکسان داشته باشند. سپس در فعالیت بعدی با طرح یک مسئله از دانش‌آموزان می‌خواهد که آن‌را به یک معادله تبدیل کنند؛ و وقتی دنبال عددی می‌گردند و نمی‌دانند آن عدد را x در نظر بگیرند. و در کار در کلاس با مطرح کردن یک معمای قدیمی از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که معادله ریاضی آن‌را ابتدا به دست آورند و بعد شروع به حل آن کنند. در این مثال از جنگل حرا واقع در جزیره قشم استفاده کرده که دانش‌آموزان با این منطقه آشنا شوند. فعالیت صفحه ۲۹؛ هدف حل مسئله به کمک تجزیه نیست فقط می‌خواهد با گذاشتن جواب‌ها در معادله به جواب نهایی برسند یعنی دانش‌آموز بفهمد که جواب هر معادله در خود معادله صدق می‌کند. نکته‌ای که دانش‌آموز باید به آن نیم‌نگاهی داشته باشد؛ سپس در اینجا اشاره‌ای به گذشته می‌کند و اشاره‌ای به این نکته که حاصل ضرب دو عبارت وقتی صفر می‌شود که حداقل یکی از آنها صفر شود پس می‌تواند از این قانون برای حل مسئله استفاده کند. در تمرین ۲ فعالیت صفحه ۲۹ سؤال به گونه‌ای مطرح شده که چون برحسب مساحت است x^2 و چون برحسب محیط است x را داشته باشیم و عدد ثابت نداشته باشد که باز هم بتوان از نکته بالا برای

حل مسئله استفاده کرد.

در کار در کلاس صفحه ۳۰، هدف این است که صورت مسئله به معادله تبدیل شود و هدف حل مسئله به کمک حدس زدن می باشد که با امتحان $x = 5$ به دست می آید ولی تأکید می کند که این تنها جواب مسئله نیست جواب دیگر را نیز به دست آورید که $x = -8$ می باشد ولی هیچ لزومی ندارد که همه جواب ها قابل قبول باشد. بستگی به شرایط مسئله، جواب ها را انتخاب می کنیم؛ که در اینجا چون مسئله سن مورد نظر است (-) منفی معنا ندارد.

توصیه های آموزشی

دادن سؤالاتی که دانش آموز قادر باشد عبارت را به صورت یک معادله درجه اول در بیاورد؛ مثلاً می توان از این مسائل استفاده کرد:

۱ اگر مجموع مساحت مربع و مستطیلی که یک ضلع آن با ضلع مربع برابر باشد و ضلع دیگر ۶ واحد باشد، ۱۶ شود ضلع مربع را به دست آورید.

۲ اگر در برابر مساحت مربعی از مساحت مستطیلی که یک ضلع آن ۳ و ضلع دیگرش برابر ضلع مربع باشد ۵ واحد بیشتر باشد، ضلع مربع را به دست آورید. که می تواند با حدس زدن اعدادی مانند $x=1$ ، $x=2$ ، $x=3$ ، $x=1/5$ ، $x=2/5$ و ... جواب هایی را برای این مسئله حدس بزند که چون طول ضلع است اعداد منفی در نظر نمی گیریم و برای تشکیل یک معادله سعی کنیم ریشه های گویا نیز به دانش آموزان داده شود مثلاً معادله ای تشکیل دهید که ریشه هایش $0/3$ ، $0/2$ و ضرب x^2 ، ۵ باشد که فقط معادله منحصر به فرد باشد.

اشتباهات رایج دانش آموزان

دانش آموزان در تشکیل معادله خیلی اشکال دارند. با مفهوم «۲ واحد بیشتر یا کمتر» یا «۵ برابر عددی از $\frac{1}{3}$ عددی کمتر است یا بیشتر است» در گذاشتن علامت مثبت یا منفی دچار اشتباه می شوند. — در معادله درجه اول که به صورت $ax = 0$ در می آید معمولاً به جای $x = 0$ ، عدد $\lambda = -a$ را به دست می آورند. در مساحت و محیط اشکال هندسی، اشتباه زیاد صورت می گیرد.

حل معادله درجه ۲ و کاربردها

درس دوم

اهداف درس دوم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند:

- ۱ آشنایی با مفهوم معادله درجه دوم
- ۲ آشنایی با روش‌ها و فنون حل معادله درجه دوم
- ۳ ساختن معادله درجه دوم
- ۴ تعداد ریشه‌های معادله درجه ۲
- ۵ روابط بین ضرایب و ریشه‌ها
- ۶ طرح و حل مسائل کاربردی از معادله درجه دوم

روش تدریس

ابتدا در این فصل یادآوری از اتحادها و تجزیه انجام شده تا برای دانش‌آموز حل معادله به روش تجزیه، دشوار نباشد و با فعالیت باید جاهای خالی را پر کند. در فعالیت بعدی کم کم می‌خواهیم به کمک تشخیص نوع اتحاد و تجزیه آن، شروع به حل معادله کنیم. سه تایی آنها توسط مؤلف گفته شده و بقیه به عهده دانش‌آموزان می‌باشد. و با این وسیله با روش‌های حل معادله به کمک تجزیه آشنا می‌شوند که با توجه به سؤالات مطرح شده می‌توان فهمید که کدام روش بهترین روش برای حل معادله به کمک تجزیه می‌باشد. اگر $c=0$ باشد روش فاکتورگیری و اگر $b=0$ باشد به شرطی که a, c هم علامت نباشند اتحاد مزدوج و اگر a, c هم علامت باشند، نمی‌توان تجزیه کرد و همین جا می‌توان گفت که این معادله جواب ندارد. در روش بعدی برای عباراتی که به صورت $a^2 + 2ab + b^2$ نوشته شود از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده می‌شود که چون ریشه تکراری دارد به آن ریشه مضاعف می‌گویند. و سپس سه جمله که قادر به تجزیه باشد اتحاد یک جمله مشترک می‌باشد.

در روش مربع کامل کردن چون باید طرف چپ به صورت مربع کامل باشد حتماً قید می‌شود که ضرب x را ابتدا

در ۲ ضرب و سپس تقسیم می‌کنیم و سپس مربع آن عددی که به ۲ تقسیم شده است را به طرفین اضافه می‌کنیم. در کار در کلاس صفحه ۳۲، هدف مرحله به مرحله حل کردن معادله درجه دوم و همچنین سرعت حل معادله می‌باشد که بین دانش‌آموزان رقابتی انجام شود که علاوه بر دقت در حل مسئله، زمان را نیز پیگیری کنند. در فعالیت بعدی که در صفحه ۴۴ می‌باشد حل معادله به کمک کلی می‌باشد که قبل از شروع به حل از دانش‌آموزان خواسته شود a, b, c را ابتدا بنویسند سپس Δ را تشکیل دهند، Δ را به درستی به دست آورند و در علامت‌ها اشتباهی صورت نگیرد و چون $\Delta > 0$ دو ریشه دارد، $\Delta < 0$ ریشه ندارد. $\Delta = 0$ یک ریشه دارد. در کاردر کلاس صفحه ۴۵ با اشاره به مجموع ریشه‌ها یعنی رابطه $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ می‌باشد که فقط همین را می‌خواهد.

در طرح مسئله می‌خواهد دانش‌آموزان کم کم با مسائل اقتصادی که در آینده با آن برخورد می‌کنند آشنا شوند و هدف از نام بردن تابع هزینه، درآمد و سود، مفهوم آن تابعی که معلمین عزیز در ذهن خود دارند نیست بلکه فقط اسامی می‌باشد تا شروعی برای مفهوم تابع در فصل آینده باشد. با طرح اولین مسئله از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که تابع درآمد و هزینه را خودشان با جاهای خالی به دست آورند که در رابطه درآمد نوشته فارسی را به ریاضی و تابع هزینه روابط فارسی را به ریاضی و ریاضی را به فارسی تبدیل کنند و همچنین گوشزد شود که در تابع هزینه همیشه یک مقدار ثابت به عنوان هزینه اولیه وجود دارد و سپس رابطه سود را به دست آورند.

در مسئله دوم، به نقطه سر به سر که در مسائل اقتصادی زیاد به کار برده می‌شود، اشاره می‌کند یعنی نقطه‌ای که سود صفر است یعنی نه سود اتفاق می‌افتد و نه زیان و باید $P(x) = 0$ باشد و آنگاه $P(x) = C(x)$ می‌شود؛ در واقع نقطه سر به سر نقطه‌ای است که درآمد و هزینه یکسان می‌باشد که در مثال الف؛ کافی است برای اینکه چیزی نفروشد $x = 0$ قرار دهیم که $x = -100$ به دست می‌آید. در قسمت ب، باید تابع سود برابر صفر باشد $P(x) = 0$ یعنی حل معادله $-100 = 8/15x - 405x^2$ که کافی است به دانش‌آموزان بگویند برای حل این مسئله با روش Δ می‌توانند از ماشین حساب کمک بگیرند و Δ عددی مثبت است پس $x = 12/25$ و $x = 2000$ می‌باشد.

در قسمت پ، که بیشترین سود را می‌خواهد، کافی است اعدادی را به دانش‌آموز بدهیم و بعداً با جای‌گذاری، بیشترین مقدار را به دست آوریم؛ مثلاً $x = 1000$ ، $x = 1005$ ، $x = 1006$ و $x = 1007$. با توجه به اینکه خودمان می‌دانیم که $x = 1006/17$ می‌باشد چون رأس سهمی است باید اعداد را در نزدیکی همان عدد انتخاب کنیم و با قراردادن $x = 1006$ به بیشترین مقدار برسیم. اگر دانش‌آموز گفت این عدد از کجا به دست آمده بگویند در فصل آینده شما هم می‌توانید این عدد را به دست آورید؛ کافی است نقاط قبلی

را با هم جمع کنیم سپس تقسیم بر ۲ کنیم؛ یعنی $\frac{2000 + 12/25}{2}$

توصیه‌های آموزشی

در روش حل معادله به روش تجزیه سعی کنید از مثال‌هایی استفاده کنید که به راحتی قابل تجزیه باشند تا دانش‌آموزان دید خوبی نسبت به این روش پیدا کنند که اگر این روش را یاد بگیرند به سرعت حل معادله درجه دوم کمک می‌کند.

و در عبارت $4x^2 + 10x + 6 = 0$ با اینکه همه عبارت بر ۲ بخش پذیر است بهتر است ساده نکنیم چون خود $4x^2$ به صورت مربع کامل است. $(2x)^2 + 5(2x) + 6 = 0$ که به راحتی تجزیه شود.

$$(2x+2)(2x+3) = 0$$

قبل از حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل کردن از دانش‌آموزان بخواهیم ابتدا معادله $x^2 = 36$ سپس $(x+1)^2 = 36$ را حل کنند چون هدف این است که معادله درجه دوم را به صورت مربع کامل درآوریم. به دانش‌آموزان تأکید کنیم که ممکن است برای یک معادله درجه دوم جواب به دست آوریم و جواب مورد نظر قابل قبول نباشد؛ مثلاً طول ضلع یا زمان یا سن مورد نظر باشد و اگر اعداد منفی به دست آید قابل قبول نیست یا هدف مسئله به دست آوردن عدد طبیعی باشد و ما اعدادی مانند $\frac{1}{4}$ و $\frac{2}{3}$ به دست آوریم.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

در تجزیه به علامت‌ها خیلی دقت کنند. معمولاً در علامت‌ها اشتباه زیاد رخ می‌دهد؛ مثلاً در تجزیه $x^2 - 5x + 6 = 0$ دو عدد پیدا کنید که حاصل جمع ۵- و حاصل ضربشان ۶ باشد که بخواهیم تجزیه را انجام دهیم. $(x-2)(x-3) = 0$ ولی جواب‌ها $x=2$ و $x=3$ می‌باشد و $x^2 + 5x + 6 = 0$ دو عدد که جمعشان ۵ و ضربشان ۶- باشد $(x+6)(x-1) = 0$ که $x = -6$ و $x = 1$ می‌باشد.

● در مربع کامل کردن بعد از اضافه کردن مربع (نصف ضرب x) مجدداً به صورت مربع کامل باید بنویسیم که در علامت و جذر آن عددی که مربع کامل شده دچار مشکل می‌شوند.

● در مجموع ریشه‌ها $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ است که در فصل بعد که رأس سهمی را می‌خوانند $x = \frac{-b}{2a}$ این دو فرمول با هم اشتباه گرفته می‌شود.

معادله‌های شامل عبارتهای گویا

درس سوم

اهداف درس سوم

در فرایند آموزشی این درس، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان به اهداف زیر برسند:

- ۱ حل معادلات کسری یا گویا
- ۲ بتوانند مسائل کاربردی را از طریق معادلات گویا حل کنند.

روش تدریس

یادآوری از کتاب نهم می‌باشد که هدف ساختن یک معادله گویا یا کسری است و حل آن منجر به یک معادله درجه اول می‌شود، می‌توان زمان را محاسبه کرد.

شرط تعریف شدن یک عبارت گویا یا کسری این است که مخرج هیچ‌گاه صفر نشود و تأکید می‌کنیم برای حل معادله گویا همه عبارت را به یک طرف انتقال دهیم و سپس مخرج مشترک بگیریم تا بعد از ساده‌شدن عبارت به صورت $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ درآید، سپس صورت کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم. جواب‌هایی قابل قبول است که مخرج را صفر نکند زیرا کسری که مخرج آن ناصفر باشد فقط و فقط وقتی صفر است که صورت آن صفر باشد.

در مثال آخر صفحه ۴۹، یادآور می‌شویم که هر معادله جوابش در خود معادله صدق می‌کند، با قراردادن جواب مسئله در معادله می‌توان متغیرهای دیگر را به دست آورد.

سپس با آوردن سه مثال متفاوت از مسائل کاربردی، آنها را به معادله گویا تبدیل می‌کنیم و سپس شروع به حل آنها می‌کنیم. در مثال گلدان نقره می‌توان وزن مس را برابر با x و یا وزن نقره را x در نظر بگیریم. چنانچه وزن مس را x در نظر بگیریم، راحت‌تر است. و حواسمان باشد که وزن گلدان قبل از ذوب‌شدن را می‌خواهد.

توصیه‌های آموزشی

معمولاً این‌گونه مسائل برای دانش‌آموزان یک مقدار مشکل می‌باشد که اگر قرار باشد یک معادله را به معادلات گویا تبدیل کنند بهتر است در این زمینه مسائل مختلف داده شود تا دانش‌آموز بتواند با این مسائل ارتباط برقرار کند.

در جواب مسائل گویا یا کسری به ویژه آنهایی که کاربردی هستند امکان دارد جوابی به دست آید که مخرج را صفر نکند ولی قابل قبول هم نباشد؛ مثلاً زمان یا تعداد روزها که منفی درآید.

اشتباهات رایج دانش‌آموزان

یکی از اشتباهات رایج در عبارات‌های گویا که یکی از اعداد آن ثابت است، این است که در مخرج مشترک‌گیری عدد ثابت را در مخرج مشترک ضرب نمی‌کنند و یادشان می‌رود برای مثال:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{6} = 0 \quad \xrightarrow[\text{در صورتی که باید باشد}]{\text{قرار می‌دهند}} \frac{6(x+2) - 6x - 0}{6(x)(x+2)} \rightarrow -1x(x+2)$$

- عدد منفی قبل از عبارت باید در تک تک عبارات ضرب شود که این کار هم کمتر اتفاق می‌افتد.
- جواب‌ها را امتحان نمی‌کنند که بدانند قابل قبول است یا نیست.

تمرین

هرکدام از عبارات‌های زیر را به یک معادله تبدیل کنید.

۱ الف) عددی را بیابید که پنج برابر آن به علاوه ۲، مساوی سه برابر آن عدد ۲- باشد.

عدد را x در نظر می‌گیریم

$$5x + 2 = 3x - 2$$

ب) مربع عددی برابر با همان عدد به علاوه عدد یک است.

عدد را x در نظر می‌گیریم

$$x^2 = x + 1$$

۲ در یک کارخانه حقوق یک مهندس، دو برابر یک فن‌ورز (تکنسین) و $\frac{2}{3}$ مدیر بخش خود است. قسمت تولید این کارخانه ۳ مدیر بخش، ۸ مهندس و ۱۲ فن‌ورز دارد. مدیر عامل کارخانه برای این قسمت ماهیانه ۵۵/۵ میلیون تومان حقوق پرداخت می‌کند. حقوق یک فن‌ورز در این کارخانه ماهیانه چقدر است؟

$$x = \text{حقوق مهندس}$$

$$3 \times \frac{3}{4}x + 8x + 12 \times \frac{x}{4} = 55,500,000$$

$$\frac{x}{2} = \text{فن ورز}$$

$$\frac{9x}{2} + 14x = 55,500,000 \Rightarrow 37x = 111,000,000$$

$$\frac{3}{4}x = \text{مدیر بخش}$$

$$x = 3,000,000 \leftarrow \text{فن ورز } 1/500,000$$

۲ با توجه به پیش بینی درخواست بازار آهن، کارخانه ذوب آهن اصفهان از روز شنبه هر روز تولید خود را دو برابر کرده است. در پایان روز چهارشنبه تولید فولاد به سقف ۶۴ هزار تن رسیده است. مجموع تولید فولاد در این پنج روز چقدر بوده است؟ اختلاف تولید در پایان روز شنبه با تولید فولاد در پایان روز چهارشنبه چقدر است؟

$$8x = 2 \times 4x = \text{سه شنبه} \quad 4x = 2(2x) = \text{دوشنبه} \quad 2x = \text{یکشنبه} \quad x = \text{شنبه}$$

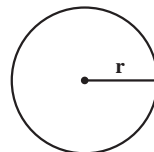
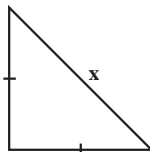
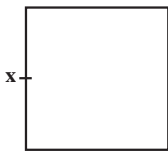
$$64,000 = 16x = \text{پایان روز چهارشنبه} \quad 2 \times 8x = 16x = \text{چهارشنبه}$$

$$\text{تن } 4,000 = \frac{64,000}{16} = x$$

$$\text{تن } 124,000 = 31x = 31 \times 4,000 = x + 2x + 4x + 8x + 16x$$

$$\text{تن بوده } 60,000 = 64,000 - 4,000 = \text{چهارشنبه}$$

۴ اگر مجموع مساحت های سه شکل زیر برابر ۷ باشد طول ضلع مربع را بیابید.



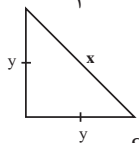
$$r = \frac{1}{\sqrt{2n}} x$$

$$7 = \text{مساحت دایره} + \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مربع}$$

$$7 = \text{مساحت دایره} + \text{مساحت مثلث} + \text{مساحت مربع}$$

جواب :

$$x^2 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} = 7 \rightarrow \frac{4x^2 + x^2 + 2x^2}{4} = 7$$



$$S = \frac{1}{2} \times y \times y \rightarrow \frac{1}{2} y^2 \quad \text{مثلث}$$

$$\text{مساحت دایره} = \pi r^2$$

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} x^2 \right)$$

$$= \pi \times \left(\frac{1}{\sqrt{2n}} x \right)^2 = \frac{\pi \times x^2}{2n} = \frac{x^2}{2}$$

$$2y^2 = x^2$$

قضیه فیثاغورث

$$y^2 = \frac{1}{4} x^2$$

$$4x^2 = 28 \rightarrow x^2 = 7 \rightarrow x = \sqrt{7}$$

۵ حروف الفبای فارسی (الف تا ی) را به ترتیب ۱ تا ۳۲ شماره گذاری کرده ایم هر حرف بدون نقطه با شماره آن از ۱ تا ۳۲ مشخص می شود. حروف نقطه ax^n که در آن a شماره حرف الفبا و n تعداد نقطه مورد نظر است.

حال با توجه توضیح فوق

الف) جدول زیر را کامل کنید.

الگوی ریاضی معادل آن	کلمه به زبان فارسی
$1+2x$	آب
$3x^2+1$	با
$11x+12+3x^2$	ذرت

ب) الگوی ریاضی معادل کلمه پیامبر رحمت را مشخص کنید.

$$ت م ح ر ر ب م ا ی پ$$

$$3x^2 + 32x^2 + 1 + 28 + 2x + 12 + 12 + 8 + 28 + 4x^2$$

۶ اگر در یک قالی با ابعاد $2/8 \times 2/10$ تعداد گره های قالی $5/880/000$ عدد باشد.

الف) این قالی چند رج دارد؟

$$\frac{2/8 \times 2/10}{0/07 \times 0/07} = \frac{5/880}{0/0049} = 1200$$

$$1200 \times x = 5/880/000 \rightarrow x = \frac{5/880/000}{1200} = 4900 \quad \sqrt{4900} = 70 \text{ رج}$$

ب) اگر برای هر گره 1 cm نخ قالی یا همان خامه قالی استفاده شود در این قالی چند متر نخ قالی استفاده

شده است؟

$$5/880/000 \text{ سانتی متر که برابر با } \frac{5/880/000}{100} = 58800 \text{ متر}$$

پ) یک قالی باف حرفه ای در یک روز می تواند 6000 گره قالی بیافد اگر این قالی باف 5 روز در هفته

کار کند برای اتمام این قالی چند هفته باید کار کند؟

$$6000 \times 5 = 30000$$

گره قالی در هفته

$$5/880/000 = 30000 \times x \rightarrow x = \frac{5/880/000}{30000} = 1960 \text{ هفته}$$

ت) اگر این قالی باف برای خرید مواد اولیه قالی شامل تار و بود و نخ قالی و... پنج میلیون و ششصد هزار تومان هزینه کرده باشد و بتواند در پایان بافت قالی، آن را به قیمت ۳۵ میلیون تومان بفروشد، این قالی باف برای هر هفته کار خود چه دستمزدی دریافت کرده است؟

$$۳۵/۰۰۰/۰۰۰ - ۵/۶۰۰/۰۰۰ = ۲۹/۴۰۰/۰۰۰$$

$$۱۹۶۰x = ۲۹/۴۰۰/۰۰۰ \rightarrow x = \frac{۲۹/۴۰۰/۰۰۰}{۱۹۶۰} = ۱۵۰۰۰ \text{ تومان}$$

تمرین صفحه ۳۷

۱) معادلات زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } ۲x^2 - ۸ = 0 \rightarrow ۲(x^2 - ۴) = ۲(x-۲)(x+۲) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = -۲ \end{cases}$$

$$\text{ب) } (x+۲)(x-۳) = x-۳ \rightarrow x^2 - x - ۶ - x + ۳ = 0 \Rightarrow x^2 - ۲x - ۳ = 0 \Rightarrow (x-۳)(x+۱) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ x = -۱ \end{cases}$$

$$\text{و یا } (x+۲)(x-۳) - (x-۳) = 0$$

$$(x-۳)[x+۲-۱] = (x-۳)(x+۱) = 0$$

$$\text{پ) } x^4 - ۲x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - ۲) = 0 \Rightarrow x^2(x - \sqrt{۲})(x + \sqrt{۲}) = 0$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x^2 = ۲$$

$$x = \sqrt{۲}$$

$$x = -\sqrt{۲}$$

$$\text{ت) } x^2 = x - \frac{1}{4} \rightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow x^2 - 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث) } ۲x^2 - ۸x = 0 \rightarrow ۲x(x-۴) = 0 \rightarrow ۲x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ یا } x-۴ = 0 \rightarrow x = ۴$$

$$\text{ج) } x^2 - ۵x + ۶ = 0 \rightarrow (x-۲)(x-۳) = 0$$

$$x-۲ = 0 \text{ یا } x-۳ = 0$$

$$x = ۲ \text{ یا } x = ۳$$

$$\text{ج) } \frac{x^2}{3} = x \rightarrow \frac{x^2}{3} - x = 0 \rightarrow x\left(\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \quad \underline{x=0} \quad \text{یا} \quad \frac{x}{3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{x-3}{3} = 0 \rightarrow x-3=0 \rightarrow \underline{x=3}$$

$$\text{ح) } x^2 = 5 - x^2 \rightarrow 2x^2 - 5 = 0 \rightarrow 2x^2 = 5 \rightarrow x^2 = \frac{5}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$(\sqrt{2}x - \sqrt{5})(\sqrt{2}x + \sqrt{5}) = 0 \rightarrow \sqrt{2}x - \sqrt{5} = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{5} = 0 \rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{خ) } x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow x^2 + 2(2x) + (2)^2 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x+2=0 \Rightarrow x = -2 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

$$\text{د) } 9x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$(3x)^2 + 1(3x) - 2 = 0$$

$$(3x+2)(3x-1) = 0$$

$$3x+2=0 \rightarrow 3x=-2 \rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

$$3x-1=0 \rightarrow 3x=1 \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{ذ) } (x-3)^2 = 4 \rightarrow (x-3)^2 - 4 = 0 \rightarrow [(x-3)-2][(x-3)+2] = 0 \rightarrow (x-5)(x-1) = 0$$

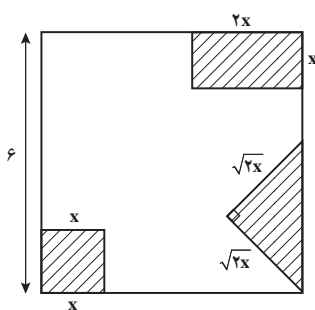
$$x-5=0 \rightarrow x=5$$

$$\text{یا } x-1=0 \rightarrow x=1$$

۲ از مربعی به ضلع ۶cm سه شکل زیر بریده شده است، مساحت باقی مانده 24 cm^2 است. طول ضلع

کوچک بریده شده چقدر است؟

$$6 \times 6 = 36 \quad \text{مساحت مربع}$$



$$\text{مساحت مربع} \quad \begin{array}{c} x \\ x \end{array} = x^2$$

$$\text{مساحت مستطیل} \quad \begin{array}{c} 2x \\ 2x \end{array} = 2x^2$$

$$\text{مساحت مثلث} \quad \begin{array}{c} \sqrt{2}x \\ \sqrt{2}x \end{array} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}x \times \sqrt{2}x = x^2$$

$$x^2 + 2x^2 + x^2 = 4x^2$$

$$36 - 4x^2 = 0 \rightarrow (9 - 2x)(9 + 2x) = 0$$

$$9 - 2x = 0 \rightarrow x = \frac{9}{2} \text{ ق.ق.}$$

$$9 + 2x = 0 \rightarrow x = -\frac{9}{2} \text{ ق.غ. ق.ق. نمی تواند منفی باشد.}$$

۲ معادله درجه دومی بنویسید که $x=2$ و $x=3$ جواب‌های آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟ چرا؟

$$\begin{aligned} x=2 &\rightarrow x-2=0 \\ x=3 &\rightarrow x-3=0 \end{aligned} \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

خیر، می‌توان این معادله را در هر عدد ثابت ضرب کرد مثل:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10x + 12 = 0 &\quad \times 2 \\ -3x^2 + 15x - 18 = 0 &\quad \times -3 \end{aligned}$$

۴ معادله درجه دومی بنویسید که $x=1$ ریشه مضاعف آن باشد. آیا این معادله منحصر به فرد است؟

$$\begin{aligned} x=1 &\rightarrow (x-1)=0 \\ &\Rightarrow (x-1)^2=0 \\ x=1 &\rightarrow (x-1)=0 \end{aligned}$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$5x^2 - 10x + 5 = 0 \quad \text{خیر، می‌تواند در هر عدد ثابتی ضرب شود مانند:}$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} = 0$$

۵ در معادله $(x-1)^2 = K$

الف) جواب این معادله را در صورت وجود به ازای $K=2, K=4, K=0, K=-9$ به دست آورید.

$$(x-1)^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = \sqrt{2} \rightarrow x = \sqrt{2} + 1 \\ x-1 = -\sqrt{2} \rightarrow x = -\sqrt{2} + 1 \end{cases}$$

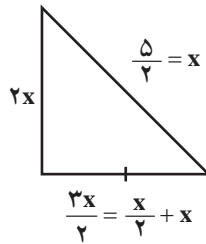
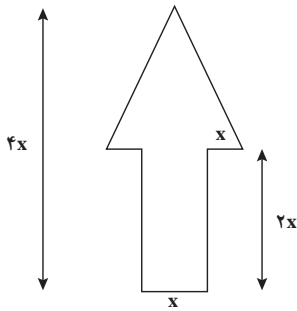
$$(x-1)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \rightarrow x = 3 \\ x-1 = -2 \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad x-1 = 0 \rightarrow \boxed{x=1}$$

جواب ندارد چون توان دوم یک عدد هیچ وقت یک عدد منفی نمی‌باشد.

ب) به ازای چه مقادیری از K معادله ریشه مضاعف دارد؟ در صورتی که $K=0$ باشد.

پ) به ازای چه مقادیری از K معادله ریشه حقیقی دارد؟ در صورتی که $K > 0$ باشد یعنی یک عدد مثبت باشد.
 ت) به ازای چه مقادیری از K معادله ریشه حقیقی ندارد؟ در صورتی که $K < 0$ باشد یعنی یک عدد منفی باشد.
 ۶) برای ساخت تابلوی راهنمایی «یک طرفه» روی یک پل مطابق شکل زیر از برجسب های آبی و سفید استفاده می شود. هزینه 1 cm^2 برجسب سفید 3° تومان و هزینه 1 cm^2 برجسب آبی 1° تومان است. مجموع هزینه برجسب های سفید و آبی 27000 تومان شده است.



مساحت مستطیل $2x \times x = 2x^2$

مساحت مستطیل + مساحت مثلث $= 5x^2 = 2x^2 + 3x^2$

الف) اندازه x چقدر است؟

ارتفاع

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times 2x \times 3x = 3x^2$$

قاعده مثلث

$$5x^2 \times \underbrace{3^\circ}_{\text{سفید}} + (\underbrace{24000 - 5x^2}_{\text{آبی}}) (1^\circ) = 27000$$

$$15000x^2 + 24000 - 5000x^2 = 27000 \Rightarrow 10000x^2 = 3000$$

$$x^2 = \frac{3000}{10000} = 30$$

$$x = \sqrt{30}$$

ب) اگر در این تابلوی راهنمایی مطابق شکل کتاب درسی از خطوط برجسب شیرنگ زرد استفاده کنیم که هزینه 1 cm آن 100 تومان است هزینه رنگ آمیزی تابلو 34800 تومان می شود. در این حالت اندازه x چقدر است؟

باید محیط فلش نیز اضافه شود. $p = 12x \Leftrightarrow (2x + 2x + x + x + x + 2 \times \frac{5}{2}x)$ می باشد.

$$5x^2 \times \underbrace{3^\circ}_{\text{سفید}} + (\underbrace{24000 - 5x^2}_{\text{آبی}}) (1^\circ) + 12x \times 100 = 34800$$

$$15000x^2 + 24000 - 5000x^2 + 1200x - 34800 = 0$$

$$10000x^2 + 1200x - 10800 = 0$$

$$100(x^2 + 12x - 108) = 0 \rightarrow x^2 + 12x - 108 = 0$$

$$a=1$$

$$b=12$$

$$c=-108$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(1)(-108) = 144 + 432 = 576$$

$$x = \frac{-12 \pm 24}{2}$$

غ.ق.ق $-\frac{36}{2} = -18$

ق.ق $\frac{12}{2} = 6$

تمرین صفحه ۴۳

معادلات درجه دوم زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید.

الف) $x^2 - 5x + 6 = 0$

مربع نصف ضریب x را به طرفین اضافه می کنیم $\rightarrow x^2 - 5x = -6$

$$x^2 - 2\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{25}{4} = -6 + \frac{25}{4} \rightarrow \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{6}{2} = 3 \quad x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

ب) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

$$9x^2 + 3x = 2 \rightarrow x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{2}{9}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{6}x\right) + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36} \rightarrow \left(x + \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$$

$$x + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \quad x + \frac{1}{6} = -\frac{3}{6}$$

$$x = \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad x = -\frac{3}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

پ) $x^2 + \frac{1}{4} = -x$

$$x^2 + x = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 + 2\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \rightarrow x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ریشه مضاعف

ت) $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$x^2 + 6x = -9$$

$$x^2 + 2(3x) + 9 = -9 + 9 \rightarrow (x+3)^2 = 0 \rightarrow x+3 = 0 \rightarrow x = -3$$

ریشه مضاعف

تمرین صفحه ۴۷

۱) معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

$$۱) x^2 - x + 5 = 0 \quad a=1 \quad b=-1 \quad c=5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(5) = 1 - 20 = -19 < 0 \quad \text{معادله جواب ندارد.}$$

$$۲) 2x^2 + x - 1 = 0 \quad a=2 \quad b=1 \quad c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(2)(-1) = 1 + 8 = 9 \rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} x = \frac{-4}{4} = -1 \\ x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$۳) 4x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow (2x)^2 - 2(2x) + 1 = (2x-1)^2 = 0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x = \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$۴) x^2 + 17x - 18 = 0 \rightarrow (x+18)(x-1) = 0 \rightarrow x = -18, \quad x=1$$

$$۵) 3x^2 - x + 4 = 0 \rightarrow a=3 \quad b=-1 \quad c=4$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(4) = 1 - 48 = -47 < 0 \quad \text{معادله ریشه ندارد.}$$

$$۶) x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0 \quad a=1 \quad b=\sqrt{3} \quad c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1) = 3 + 4 = 7$$

$$x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{7}}{2}$$

۲) معادله $2x^2 - 3x - 5 = 0$ را به روش Δ حل کنید. با محاسبه ریشه‌های x_1 و x_2 حاصل ضرب آنها را

به دست آورید.

$$a=2$$

$$b=-3$$

$$c=-5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49 \rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{4} \begin{cases} x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = x_1 \\ x = \frac{-4}{4} = -1 = x_2 \end{cases}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{5}{2} \times -1 = -\frac{5}{2}$$

۳ اگر یکی از جواب‌های معادله $2x^2 - ax + 28 = 0$ برابر -4 باشد جواب دیگر این معادله چیست؟

در معادله به جای x ، -4 قرار می‌دهیم چون جواب‌ها در معادله صدق می‌کند.

$$2(-4)^2 - a(-4) + 28 = 0 \rightarrow 2 \times 16 + 4a + 28 = 0$$

$$60 = -4a \rightarrow a = \boxed{-15}$$

$$2x^2 + 15x + 28 = 0$$

$$a = 2$$

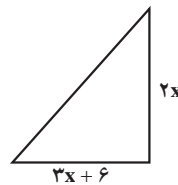
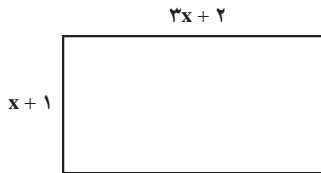
$$b = 15$$

$$c = 28$$

$$\Delta = (15)^2 - 4(2)(28) = 1$$

$$x = \frac{-15 \pm 1}{4} \begin{cases} \frac{-16}{4} = -4 \\ \frac{-14}{4} = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

۴ مساحت مثلث و مستطیل در شکل زیر مساوی‌اند، طول و عرض این مستطیل چقدر است؟



$$(x+1)(3x+2) = \frac{\cancel{x}(3x+6)}{\cancel{x}}$$

$$\cancel{3x}^1 + 5x + 2 = \cancel{3x}^1 + 6x \rightarrow 2 = 6x - 5x \rightarrow x = \boxed{2}$$



$x = 2$ طول و عرض مستطیل

عرض $\rightarrow x+1 \rightarrow 3$
 طول $\rightarrow 3x+2 \rightarrow 8$

۵ کدام یک از معادلات زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^2 + ax - 1 = 0$

$$a=1$$

$$b=a$$

$$c=-1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a)^2 - 4(1)(-1) = a^2 + 4 > 0 \quad \text{همواره مثبت است پس جواب دارد.}$$

ب) $x^2 - x + a = 0$

$$a=1$$

$$b=-1$$

$$c=a$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(a) = 1 - 4a \quad \text{بستگی به } a \text{ دارد.}$$

*۶ نشان دهید در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر $a+c=b$ باشد یکی از ریشه‌ها برابر -1 و دیگری $x = -\frac{c}{a}$ است.

$$-b = -(a+c)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow \frac{-(a+c) \pm \sqrt{+(a+c)^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-a-c \pm \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac - 4ac}}{2a} \rightarrow \frac{-a-c \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a}$$

$$x = \frac{-\cancel{a} - c + \cancel{a} - c}{2a} = \frac{-2c}{2a} = -\frac{c}{a}$$

دو حالت دارد

$$x = \frac{-a - \cancel{c} - a + \cancel{c}}{2a} = \frac{-2a}{2a} = -1$$

*۷ با تعیین ریشه‌های معادله نشان دهید حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

برابر $\frac{c}{a}$ است.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a \times 2a} = \text{اتحاد مزدوج} = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b)^2 - \sqrt{(b^2 - 4ac)^2}}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

* **۸**: نشان دهید در هر معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اگر مجموع ضرایب معادله برابر صفر باشد $(a+b+c=0)$ یکی از ریشه‌های معادله $x=1$ و دیگری $x = \frac{c}{a}$ است. $a+c=-b$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{a+c \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{a + \cancel{c} + a - \cancel{c}}{2a} = \frac{2a}{2a} = 1$$

$$x_2 = \frac{\cancel{a} + c - \cancel{a} + c}{2a} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

تمرین صفحه ۵۲

معادله‌های زیر را حل کنید.

۱ $\frac{3x-5}{x+3} = 1$

$$\frac{3x-5}{x+3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{(3x-5) - 1(x+3)}{x+3} = \frac{3x-5-x-3}{x+3} = \frac{2x-8}{x+3} = 0$$

$$2x-8=0 \rightarrow x=4 \quad \text{ق.ق.}$$

۲ $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} = 5$

$$\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+5}{x+3} - 5 = 0 \Rightarrow \frac{(3x-2)(x+3) + (2x+5)x - 5x(x+3)}{x(x+3)} = 0$$

$$\frac{\cancel{3x^2} + \cancel{3x} - 6 + \cancel{2x^2} + \cancel{5x} - \cancel{5x^2} - \cancel{15x}}{x(x+3)} = \frac{-3x-6}{x(x+3)} = 0 \rightarrow -3x-6=0 \rightarrow -3x=6 \rightarrow x=-2$$

۳ $\frac{2}{x+2} + \frac{x}{x+2} = x+3$

$$\frac{2+x}{x+2} - x - 3 = \frac{(x+2) - (x+3)(x+2)}{x+2} = \frac{x+2-x^2-5x-6}{x+2} = 0$$

$$-x^2-4x-4=0 \rightarrow x^2+4x+4=0 \rightarrow (x+2)^2=0 \rightarrow x=-2 \quad \text{غ.ق.ق.}$$

چون ریشه مخرج است پس این معادله جواب ندارد.

$$۴ \quad \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} - \frac{(x-1)}{x-2} = 0$$

$$\frac{x^2 - 2x + 2 - \overbrace{(1+x)(x-2)}^{x^2-x-2} - x(x-1)}{x(x-2)} = 0$$

$$\text{م.خ.م: } x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 2 - \cancel{x^2} + \cancel{x} + 2 - \cancel{x^2} + \cancel{x}}{x(x-2)} = \frac{-x^2 + 4}{x(x-2)} = 0 \rightarrow -x^2 + 4 = 0$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \begin{cases} \text{ق.ق. } x=2 \\ \text{ق.ق. } x=-2 \end{cases}$$

$$۵ \quad \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} = \frac{4}{x-2}$$

$$\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{3(x+3)(x-2)}^{x^2+x-6} - \overbrace{2(x-1)(x-2)}^{x^2-3x+2} - \overbrace{4(x-1)(x+3)}^{x^2+2x-3}}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\frac{3x^2 + 3x - 18 - 2x^2 + 6x - 4 - 4x^2 - 8x + 12}{(x-1)(x+3)(x-2)} = \frac{-3x^2 + x - 10}{(x-1)(x+3)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow -3x^2 + x - 10 = 0$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = -10 \end{cases} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-3)(-10) = 1 - 120 = -119 < 0 \quad \text{ریشه ندارد.}$$

$$۶ \quad \frac{11}{x^2 - 4} + \frac{x+3}{\underbrace{2-x}_{-(x-2)}} = \frac{2x-3}{x+2}$$

$$\frac{11}{x^2 - 4} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x-3}{x+2} = 0$$

$$\frac{11 - \overbrace{(x+3)(x+2)}^{x^2+5x+6} - \overbrace{(2x-3)(x-2)}^{2x^2-7x+6}}{(x-2)(x+2)} = 0$$

م.خ.م: $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$$\frac{11 - x^2 - 5x - 6 - 2x^2 + 7x - 6}{(x-2)(x+2)} = \frac{-3x^2 + 2x - 1}{(x-2)(x+2)} = 0$$

$$-3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \quad \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-3)(-1) = 4 - 12 = -8 < 0$$

معادله ریشه ندارد.

مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{5}{12}$ است آن دو عدد را بیابید.

عدد زوج باید مضربی از ۲ باشد. $2k \rightarrow 2k+2$

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+2} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+2} - \frac{5}{12} = 0$$

$$\frac{6(k+1) + 6k - 5k(k+1)}{12k(k+1)} = \frac{6k+6+6k-5k^2-5k}{12k(k+1)} = 0$$

م.خ.م: $12k(k+1)$

$$a = -5$$

$$-5k^2 + 7k + 6 = 0 \quad b = 7$$

$$c = 6$$

$$\Delta = 49 + 120 = 169$$

$$k = \frac{-7 \pm 13}{-10} \begin{cases} \rightarrow k = 2 \\ \rightarrow k = \frac{-2}{5} \end{cases}$$

ق.ق

غ.ق.ق

پس آن دو عدد ۲ و ۴ هستند.

اگر $k=2$ باشد اعداد زوج متوالی ۴ و ۶ که معکوس آنها $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{6}$ می باشد.

۸ هنگامی که دو چاپگر با هم کار می کنند فیش حقوقی کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می شود. اگر

چاپگر قدیمی تر به تنهایی برای این کار، ۳ ساعت زمان بیشتری نسبت به چاپگر جدیدتر نیاز داشته باشد در این صورت

هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می کنند؟

زمان انجام کار توسط چاپگر جدید بر حسب ساعت: x

$$x \rightarrow \frac{1}{x}$$

زمان انجام کار، توسط چاپگر قدیمی بر حسب ساعت: $x+3$

$$x+3 \rightarrow \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{4(x+3) + 4x - x(x+3)}{4x(x+3)} = 0$$

$$4x + 12 + 4x - x^2 - 3x = 0 \rightarrow -x^2 + 5x + 12 = 0$$

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 12 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 25 - 4(-1)(12) = 25 + 48 = 73$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{-2} \begin{cases} x_1 = \frac{-5 + \sqrt{73}}{-2} < 0 & \text{غیر قابل قبول} \\ x_2 = \frac{-5 - \sqrt{73}}{-2} = \frac{5 + \sqrt{73}}{2} & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

در نتیجه اگر چاپگر به تنهایی کار کند، فیش حقوقی کارگران را در مدت زمان $\frac{5 + \sqrt{73}}{2}$ ساعت و چاپگر قدیمی تر در مدت زمان $\frac{5 + \sqrt{73}}{2} + 3$ ساعت این کار را انجام می دهد.

۹- به ازای چه مقدار k ، معادله $\frac{4-t}{2-2t} = \frac{3t^2+k}{(t^2+1)^2-68}$ دارای جواب $t = -3$ است؟
به جای $t = -3$ قرار می دهیم.

$$\frac{4 - (-3)}{2 - 2(-3)} = \frac{3(-3)^2 + k}{((-3)^2 + 1)^2 - 68}$$

$$\frac{4+3}{2+6} = \frac{27+k}{100-68} \Rightarrow \frac{7}{8} = \frac{27+k}{32}$$

$$\frac{4 \times 7 - 27 - k}{32} = 0 \Rightarrow \frac{28 - 27 - k}{32} = \frac{1-k}{32} = 0 \Rightarrow 1-k = 0 \Rightarrow \underline{k=1}$$