

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

# ریاضیات امور مالی

رشته حسابداری بازرگانی

گروه تحصیلی اداری مالی

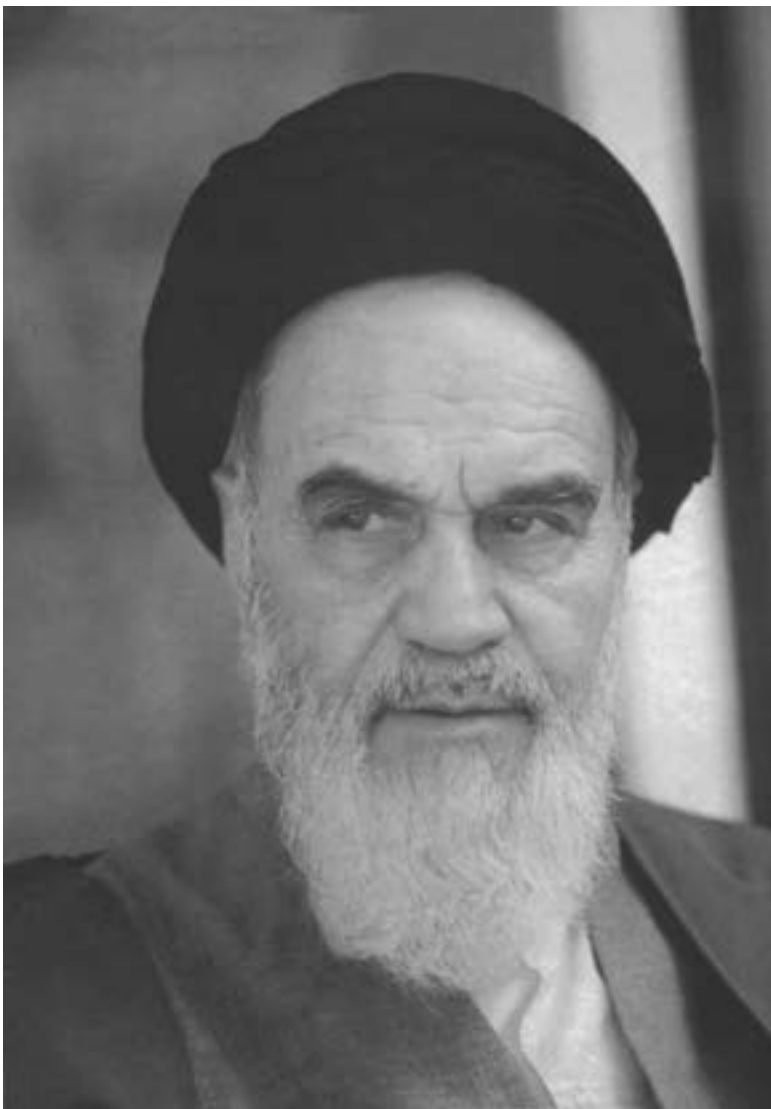
زمینه خدمات

شاخه آموزش فنی و حرفه ای

شماره درس ۳۹۶۲

افتخار، رحیم	۶۵۷/۴۸
ریاضیات امور مالی/ مؤلف: رحیم افتخار. - تهران: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های	ر ۶۲۶ الف
درسی ایران، ۱۳۹۵.	۱۳۹۵
۱۲۷ ص. - مصور. - (آموزش فنی و حرفه‌ای؛ شماره درس ۳۹۶۲)	
متون درسی رشته حسابداری بازرگانی گروه تحصیلی اداری مالی، زمینه خدمات.	
برنامه‌ریزی و نظارت، بررسی و تصویب محتوا: کمیسیون برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های	
درسی رشته حسابداری بازرگانی دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کار دانش وزارت	
آموزش و پرورش.	
۱. امور مالی - ریاضیات. الف. ایران. وزارت آموزش و پرورش. دفتر تألیف کتاب‌های	
درسی فنی و حرفه‌ای و کار دانش. ب. عنوان. ج. فروست.	





اول باید اخلاصتان را قوی بکنید، ایماتان را قوی بکنید،... و این اخلاص  
و ایمان، شما را تقویت می کند و روحیه شما را بالا می برد و نیروی شما جوری  
می شود که هیچ قدرتی نمی تواند (با شما) مقابله کند.

امام خمینی (ره)

## فهرست مطالب

۲	فصل اول : محاسبات ذهنی
۱۹	فصل دوم : کاربردهای تسهیم به نسبت
۳۱	فصل سوم : تخفیفات و کارمزدها
۴۸	فصل چهارم : محاسبات استهلاک دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت
۵۸	فصل پنجم : کاربردهای معادلات درجه اول در حسابداری
۷۱	فصل ششم : کاربردهای معادلات درجه دوم در حسابداری
۸۴	فصل هفتم : ماتریس و دترمینان
۱۲۴	پیوست
۱۲۷	فهرست منابع و مآخذ

## مقدمه

امروزه برای رفع بسیاری از مشکلات فرهنگی، اقتصادی، اجتماعی، نظامی و حتی سیاسی، از ریاضیات استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، پاسخ دادن به خیلی از سؤالات با استفاده از ریاضیات عملی تر است. مسئولین سطوح مختلف سازمان‌ها، برای تعیین اغلب اقلام مجهول و نامشخص، مثل پیش‌بینی نرخ تورّم یا قیمت نفت در سطح جهان یا نرخ بیکاری، از معادلات با متغیرها و درجات مختلف استفاده می‌کنند.

هم‌چنین، مدیران برای برنامه‌ریزی دقیق در موقعیت‌های بحرانی و حسّاسی که متغیرهای زیادی در امور دخالت دارند، ناچارند از تحقیق در عملیات استفاده کنند. بدیهی است کسانی می‌توانند تحقیق در عملیات را به خوبی به کار ببرند که با ریاضیات آشنا باشند. در این کتاب سعی شده است، با استفاده از ریاضیات، به حل برخی از مسائل موجود در امور مالی پرداخته شود. امید است با همکاری معلمان محترم مسائل بیش‌تری در زمینه‌های مربوط مطرح و در کلاس ارائه و حل و بحث گردد.

مؤلف

## هدف کلی

ایجاد توانایی در انجام محاسبات به منظور تسلط در ثبت  
عملیات حسابداری.

## محاسبات ذهنی

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- ضرب و تقسیم‌های اعداد در «۵، ۵۰، ۵۰۰ و ...» و «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و ...» را به‌طور ذهنی انجام دهد.
- ۲- «اعداد بین ۱۰ و ۲۰»، «اعداد دورقمی مختوم به ۵» و «مضارب ده‌دهی آن‌ها» را به‌صورت ذهنی درهم ضرب کند.
- ۳- اعداد قابل تبدیل به‌صورت  $(a \cdot b)^2$  و اتحاد مزدوج را (که شکل ساده پیدا نمایند) با تبدیل آن‌ها به‌طور ذهنی ضرب نماید.
- ۴- «کسرهای متشکل از صورت و مخرج به شکل عوامل ضرب» را با مهارت ساده نماید و قابلیت تقسیم اعداد به ۲ تا ۱۱ را تشخیص دهد.
- ۵- کاربرد محاسبات ذهنی را در امور مالی انجام دهد.

## ۱- محاسبات ذهنی

### ۱-۱ ضرب اعداد در «۵، ۵۰، ۵۰۰ و ...»

برای ضرب کردن هر عدد در «۵» راه‌های متعددی وجود دارد که به یک روش ساده‌ی آن اشاره می‌گردد.

۱-۱-۱ اگر بخواهیم عددی را در «۵» ضرب کنیم، می‌توانیم ابتدا عدد مورد نظر را در

«۱۰» ضرب و سپس بر «۲» تقسیم کنیم.

مثال ۱- عدد ۱۶۵ را در ۵ ضرب کنید.

$$۱۶۵ \times ۵ = ۱۶۵ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱۶۵}{۲} = ۸۲.۵$$

انجام عملیات به صورت ذهنی: صفر را در سمت راست عدد قرار می‌دهیم تا به  $۱۶۵$  تبدیل شود. حال از سمت چپ عدد شروع به تقسیم می‌نماییم  $\frac{۱۶}{۲} = ۸$  سپس ۵ را به ۲ تقسیم می‌کنیم که نتیجه‌ی آن ۲ می‌شود و یک باقی می‌ماند. عدد یک با توجه به صفر، تبدیل به ده می‌شود که به ۲ تقسیم می‌گردد و پنج نتیجه‌ی آن است. پس، جواب  $۸۲.۵$  می‌شود.  
مثال ۲- عدد  $۱۸۴$  را در ۵ ضرب کنید.

یک صفر، در سمت راست عدد مزبور قرار می‌دهیم تا به  $۱۸۴۰$  تبدیل شود. حال از سمت چپ عدد، شروع به تقسیم می‌نماییم.  $۱۸$  تقسیم بر ۲ می‌شود ۹، چهار تقسیم بر ۲ می‌شود ۲ و بالأخره صفر تقسیم بر ۲ می‌شود صفر. پس  $۹۲۰$  جواب سؤال ماست.

۱-۲ ضرب اعداد در «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و ...»: برای ضرب کردن هر عدد در ۲۵ راه‌های متعددی وجود دارد. اما در این جا تنها به دو روش اشاره می‌گردد.

الف) برای ضرب کردن عددی مانند  $A = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0$  در ۲۵ کافی است به روش‌های ذکر شده، عدد مورد نظر را دوبار در ۵ ضرب نماییم.

$$\text{مثال ۳- حاصل ضرب عدد } ۲۷ \text{ در } ۲۵ \text{ را بیابید.} \quad ۲۷ \times ۲۵ = ۲۷ \times ۵ \times ۵$$

$$۲۷ \text{ را دوبار در } ۵ \text{ ضرب می‌کنیم.} \quad (۲۷ \times ۵) \times ۵ = ۱۳۵ \times ۵ = ۶۷۵$$

یادآوری می‌شود برای ضرب هر عدد در ۵ پس از انجام چند تمرین، احتیاجی به قلم و کاغذ نیست.

ب) برای ضرب کردن عددی مانند  $A$  در ۲۵ می‌توانیم آن عدد را در  $۱۰۰$  ضرب و بر ۴ تقسیم نماییم. به عبارت دیگر، برای ضرب هر عدد در ۲۵، کافی است دو صفر در سمت راست آن عدد قرار داده، سپس به روش ذهنی، عدد جدید را به ۴ تقسیم نماییم.

مثال ۴- حاصل ضرب  $۱۴$  در  $۲۵$  را به صورت ذهنی پیدا کنید.

$$۱۴ \times ۲۵ = \frac{۱۴۰۰}{۴} = ۳۵۰$$

بدیهی است اگر حاصل ضرب عددی در  $۲۵$  یا  $۲۵۰۰$  مورد نظر باشد کافی است آن عدد را در ۲۵ ضرب کنیم. سپس یک یا دو صفر به سمت راست عدد حاصل اضافه نماییم.  
مثال ۵- حاصل ضرب  $۲۴۵$  در  $۲۵۰۰$  را به صورت ذهنی محاسبه کنید.

$$245 \times 2500 = (245 \times 25) \times 100 = \frac{24500}{4} \times 100 = 612500$$

و یا

$$(245 \times 5) \times 5 \times 100 = (1225 \times 5) \times 100 = 612500$$

## ۲-۱ تقسیم اعداد بر «۵، ۵۰، ۵۰۰ و ...»

۱-۲-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۵، کافی است آن عدد را در ۲ ضرب و بر ۱۰ تقسیم نماییم.

مثال ۶- حاصل تقسیم ۱۴۰ بر ۵ را بیابید.

$$140 : 5 = \frac{140 \times 2}{10} = \frac{280}{10} = 28$$

۲-۲-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۵۰، می‌توان آن عدد را در ۲ ضرب نمود و بر ۱۰۰ تقسیم کرد. برای تقسیم بر ۵۰۰ و ۵۰۰۰ ... نیز به همین شکل، قابل محاسبه است.

مثال ۷- حاصل تقسیم ۱۸۶ بر ۵۰ را محاسبه کنید.

$$186 : 50 = \frac{186 \times 2}{100} = \frac{372}{100} = 3/72$$

مثال ۸- حاصل تقسیم ۲۷۰۰۰ بر ۵۰۰ را پیدا نمایید.

$$27000 : 500 = \frac{27000 \times 2}{1000} = \frac{54000}{1000} = 54$$

## ۳-۱ تقسیم اعداد بر «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و ...»

۱-۳-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۲۵، می‌توان آن را در ۴ ضرب و بر ۱۰۰ تقسیم کرد. (زیرا

$$25 = \frac{100}{4} \text{ است.})$$

مثال ۹- ۶۲۵ را بر ۲۵ تقسیم و سپس پاسخ را مشخص کنید.

$$625 : 25 = \frac{625 \times 4}{100} = \frac{2500}{100} = 25$$

۲-۳-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۲۵۰ یا ۲۵۰۰ ... کافی است آن عدد را در ۴ ضرب و بر

۱۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰ و یا ... تقسیم کنیم، زیرا  $\frac{1}{2500} = \frac{4}{10000}$  و  $\frac{1}{250} = \frac{4}{1000}$  است.



مثال ۱۰- حاصل تقسیم ۳۵۰۰ بر ۲۵۰ را محاسبه کنید.

$$۳۵۰۰ \div ۲۵۰ = ۳۵۰۰ \times \frac{۴}{۱,۰۰۰} = \frac{۱۴۰۰۰}{۱,۰۰۰} = ۱۴$$

مثال ۱۱- حاصل تقسیم ۴۵۶۰ بر ۲۵۰۰ را پیدا کنید.

$$۴,۵۶۰ \div ۲,۵۰۰ = ۴,۵۶۰ \times \frac{۴}{۱۰,۰۰۰} = \frac{۱۸۲۴۰}{۱۰,۰۰۰} = ۱/۸۲۴$$

#### ۴-۱ ضرب عدد دورقمی بین ۱۰ و ۲۰ در خودش

برای ضرب دو عدد دورقمی که بین ۱۰ و ۲۰ قرار دارند باید به این نکته توجه داشت که نتیجه، عددی سه رقمی بین  $۱۰^۲ = ۱۰۰$  و  $۲۰^۲ = ۴۰۰$  است.

برای پیدا کردن حاصل ضرب اعداد دو رقمی بین ۱۰ و ۲۰ در خودش به طریق زیر عمل می‌کنیم.

الف) رقم یکان آن دو عدد را در هم ضرب می‌کنیم. اگر حاصل یک رقمی است، آن را به نشانه‌ی اولین رقم سمت راست می‌نویسیم و اگر دو رقمی است رقم یکان آن را می‌نویسیم و دهگان آن را، یعنی ده بر یک یا بیست بر دو و یا ... در حافظه‌ی خود نگه می‌داریم.

ب) رقم یکان آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و اگر دهگانی از قبل داشته باشیم به آن می‌افزاییم و به نشانه‌ی دومین رقم ثبت می‌نماییم. بدیهی است در صورتی که دهگانی داشته باشد به حافظه می‌سپاریم.

ج) رقم دهگان آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و در صورتی که از قبل دهگانی در حافظه داشته باشیم با آن جمع می‌کنیم و به نشانه‌ی سومین رقم در کنار رقم‌های قبلی می‌نویسیم.

مثال ۱۲- عدد ۱۳ را در خودش ضرب و نتیجه را محاسبه کنید.

الف) حاصل ضرب  $۳ \times ۳$  رقم یکان را تشکیل می‌دهد.

$$۱۳ \times ۱۳$$

ب) حاصل جمع  $۳ + ۳$  رقم دهگان را تشکیل می‌دهد.

$$۱۶۹$$

ج) حاصل ضرب  $۱ \times ۱$  رقم صدگان را تشکیل می‌دهد.

مثال ۱۳- حاصل ضرب  $۱۴ \times ۱۴$  را به دست آورید.

الف) حاصل ضرب  $۴ \times ۴$  می‌شود ۱۶؛ ۶ را به نشانه‌ی رقم یکان می‌نویسیم و ۱ را در حافظه

نگه می‌داریم.

ب) حاصل جمع  $۴ + ۴$  می‌شود ۸؛ آن را با عدد ۱ قبلی جمع می‌کنیم، حاصل رقم دهگان را

تشکیل می دهد (یعنی ۹).

ج) حاصل ضرب  $1 \times 1$  برابر با ۱ خواهد بود که رقم صدگان را مشخص می نماید. در نتیجه جواب ۱۹۶ است.

مثال ۱۴-  $19 \times 19$  را محاسبه نمایید.

الف) حاصل ضرب  $9 \times 9$  می شود ۸۱؛ ۱ را به نشانه‌ی رقم یکان می نویسیم و هشتاد بر هشت را در حافظه نگه می داریم.

ب) حاصل جمع  $9 + 9$  می شود ۱۸، به علاوه ۸ قبلی می شود ۲۶؛ ۶ را به نشانه‌ی رقم دهگان می نویسیم و بیست بر دو را در حافظه نگه می داریم.

ج) حاصل ضرب  $1 \times 1$  برابر با یک است، که با ۲ قبلی جمع می شود و حاصل آن ۳ می گردد که آن را به نشانه‌ی رقم صدگان در نظر می گیریم. پس جواب نهایی ۳۶۱ است.

مثال ۱۵- حاصل ضرب  $15 \times 15$  را محاسبه نمایید.

الف)  $5 \times 5 = 25$  اولین رقم ۵ است.

ب)  $5 + 5 = 10$ ، با ۲ قبلی جمع می شود پس دومین رقم (دهگان) ۲ است.

ج)  $1 \times 1 = 1$ ، با ۱ قبلی جمع می شود پس رقم صدگان نیز ۲ است.

در نهایت، جواب ما ۲۲۵ است.

## ۵- ضرب اعداد دورقمی مختوم به ۵ در خودش

برای پیدا کردن حاصل ضرب این گونه اعداد باید به این نکته توجه نمود که نتیجه، عددی سه یا چهاررقمی است و دو رقم سمت راست حاصل ضرب این نوع اعداد، همیشه ۲۵ خواهد بود. برای پیدا کردن حاصل ضرب به طریق زیر عمل می کنیم.

به رقم دهگان یکی از اعداد، یک می افزاییم و در رقم دهگان دیگری ضرب می نماییم. حاصل ضرب را می نویسیم و ۲۵ را در سمت راست آن عدد قرار می دهیم.

$$\overline{a5} \times \overline{a5} = \overline{(a+1) \times (a)(25)}$$

دو رقم سمت راست حاصل ضرب این نوع اعداد همیشه ۲۵ خواهد بود.

مثال ۱۶- حاصل ضرب  $35 \times 35$  را محاسبه کنید.

$$(3+1)(3) = 12$$

یک عدد به ۳ می افزاییم و در ۳ ضرب می نماییم

حاصل ۱۲ است. سپس ۲۵ را در سمت راست آن قرار می دهیم.

جواب می‌شود ۱۲۲۵

نتیجه برابر است با حاصل ضرب  $۳۵ \times ۳۵$

مثال ۱۷- حاصل ضرب  $۸۵ \times ۸۵$  را پیدا کنید.

جواب می‌شود  $۷۲۲۵$   $(۸+۱)(۸) = ۷۲$

## ۶- ضرب دو عدد با استفاده از اتحاد مزدوج

یادآوری: اتحاد مزدوج  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

در ضرب دو عدد، گاهی می‌توان از اتحاد مزدوج استفاده نمود و جواب را محاسبه کرد. زمانی که فاصله‌ی اضافی و نقصانی دو عدد نسبت به عدد مختوم به صفر مثل ۱۰۰ یا ۱,۰۰۰ یا ۵۰ و یا ... به یک اندازه باشد، می‌توان از این اتحاد استفاده نمود و پاسخ را محاسبه کرد.

مثال ۱۸- حاصل ضرب  $۱۰۱ \times ۹۹$  را پیدا کنید.

چون فاصله هر دو عدد نسبت به ۱۰۰ به یک اندازه است، از اتحاد مزدوج استفاده می‌نماییم.

$$(۱۰۰+۱)(۱۰۰-۱) = ۱۰,۰۰۰ - ۱ = ۹,۹۹۹$$

عدد مختوم به صفر را  $a$  فرض می‌کنیم و فاصله‌ی آن اعداد تا  $a$  را  $b$  می‌نامیم. به عبارت دیگر، نصف مجموع دو عدد را  $a$  و نصف تفاضل آن دو عدد را  $b$  فرض می‌کنیم و با استفاده از فرمول اتحاد مزدوج، پاسخ به راحتی قابل محاسبه است.

مثال ۱۹- حاصل ضرب  $۹۹۷ \times ۱۰۰۳$  را محاسبه کنید.

حاصل جمع این دو عدد ۲۰۰۰ است، در نتیجه نصف آن ۱۰۰۰ می‌شود.

تفاضل این دو عدد ۶ است؛ در نتیجه نصف آن ۳ می‌شود.

$$۱۰۰۳ \times ۹۹۷ = ۱,۰۰۰,۰۰۰ - ۹ = ۹۹۹,۹۹۱ \quad \text{بنابراین:}$$

مثال ۲۰- حاصل ضرب  $۹,۹۹۵ \times ۱۰۰۰۵$  را محاسبه کنید.

مجموع این دو عدد ۲۰۰۰۰ است، در نتیجه نصف آن ۱۰۰۰۰ می‌شود.

تفاضل این دو عدد ۱۰ است، در نتیجه نصف آن ۵ می‌شود.

$$(۱۰,۰۰۰+۵)(۱۰,۰۰۰-۵) = ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۲۵ = ۹۹,۹۹۹,۹۷۵ \quad \text{بنابراین:}$$

مثال ۲۱- حاصل ضرب  $۶۱ \times ۵۹$  را پیدا کنید.

نصف مجموع این دو عدد ۶۰ و نصف تفاضل این دو عدد ۱ است.

$$(۶۰+۱)(۶۰-۱) = ۳۶۰۰ - ۱ = ۳,۵۹۹ \quad \text{بنابراین:}$$

## ۷-۱ مجذور نمودن اعداد با استفاده از اتحاد اول و دوم

یادآوری:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

اتحاد اول

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

اتحاد دوم

برای مجذور کردن اعدادی که نزدیک به اعداد مختوم به صفرند، می‌توان از این اتحادها استفاده نمود و به صورت ذهنی پاسخ را پیدا کرد. در این گونه موارد باید بتوان عدد مورد نظر را که قرار است مجذور شود، تبدیل به مجموع یا تفاضل دو عددی نمود که لااقل یکی مختوم به صفر باشد سپس با استفاده از فرمول پاسخ را مشخص نمود. به مثال‌های زیر توجه کنید تا موضوع روشن‌تر شود.

مثال ۲۲- عدد ۱,۰۰۱ را به توان ۲ برسانید.

فرض می‌کنیم  $a=1000$  و  $b=1$  است. بنابراین، با استفاده از اتحاد اول می‌توان نوشت:

$$(1,000+1)^2 = 1,000,000 + 1 + 2,000 = 1,002,001$$

مثال ۲۳- عدد ۱,۹۹۹ را به توان ۲ برسانید.

فرض می‌کنیم  $a=2,000$  و  $b=1$  است؛ بنابراین، با استفاده از اتحاد دوم، می‌توان نوشت:

$$(2,000-1)^2 = 4,000,000 + 1 - 4,000 = 3,996,001$$

## ۸-۱ نحوه‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد بر ۲ تا ۱۱

اگر بخواهیم بینیم در عدد  $a$  چند عدد  $b$  وجود دارد، باید  $a$  را بر  $b$  تقسیم کنیم.  $a$  را مقسوم و  $b$  را مقسوم‌علیه نامند. از تقسیم این دو، عددی مانند  $q$  به نام خارج قسمت به دست می‌آید که نشانگر تعداد  $b$ هایی است که در  $a$  وجود دارد و هم‌چنین ممکن است باقی‌مانده‌ای کوچک‌تر از مقسوم‌علیه داشته باشد که آن را با  $r$  نمایش می‌دهیم. این رابطه  $a = b \times q + r$  وقتی درست است که  $b \leq r$  باشد. بدیهی است در صورتی که  $r = 0$  باشد، آن‌گاه می‌توان گفت که  $a$  بر  $b$  قابل تقسیم است. مثل ۷۶ که بر ۲ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن صفر است. اما ۷۷ بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی آن مخالف صفر است (باقی‌مانده‌ی آن ۱ است).

۸-۱-۱ قابلیت تقسیم بر ۲: عددی به ۲ قابل قسمت است که رقم یکان آن زوج یا صفر

باشد. چنان‌چه آخرین رقم سمت راست آن عدد فرد باشد، نتیجه می‌گیریم که آن عدد بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌اش یک است.

مثال ۲۴- آیا ۴۲۱ بر دو قابل قسمت است؟ چنانچه جواب منفی است، باقی مانده‌ی آن را پیدا کنید.

چون آخرین رقم سمت راست این عدد فرد است؛ بنابراین بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی آن یک است.

مثال ۲۵- آیا ۷۱۸ بر دو قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی آن را نیز معین کنید. چون آخرین رقم سمت راست آن زوج است، پس به ۲ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۲، صفر است.

۸-۲-۱ قابلیت تقسیم بر ۳: عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۳ صفر است. چنانچه عددی بر ۳ قابل قسمت نباشد، باقی مانده‌ی آن عدد بر ۳، یک یا دو است. برای پیدا کردن باقی مانده‌ی عددی که به ۳ قابل قسمت نیست، باید از مجموع ارقام آن مضرب‌های ۳ را کسر نمود.

مثال ۲۶- آیا ۲۳۱ بر ۳ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۳ نیز تعیین کنید. چون  $2+3+1=6$  است و عدد ۶ مضرب ۳ است، پس این عدد به ۳ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی آن صفر است.

مثال ۲۷- آیا ۳۲۲ بر ۳ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۳ نیز معین نمایید. چون  $3+2+2=7$ ، مضرب ۳ نیست پس عدد ۳۲۲ بر ۳ قابل قسمت نیست. برای تعیین باقی مانده، کافی است نزدیک‌ترین مضرب ۳ را از مجموع ارقام آن کم نماییم:

$$7-6=1$$

یا عدد ۷ را بر ۳ تقسیم کرد، تا باقی مانده‌ی یک به دست آید.

پس باقی مانده‌ی تقسیم ۳۲۲ بر ۳، برابر با ۱ است.

۸-۳-۱ قابلیت تقسیم بر ۴: عددی به ۴ قابل قسمت است که دو رقم سمت راست آن صفر یا بر ۴ قابل قسمت باشد. چنانچه عددی بر ۴ قابل قسمت نباشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۴ عدد ۱، ۲ یا ۳ است. برای یافتن باقی مانده‌ی عددی که به چهار قابل قسمت نباشد، باید نزدیک‌ترین عدد مضرب ۴ را از آن عدد کم نمود تا باقی مانده‌ای کوچک‌تر از ۴ به دست آید.

مثال ۲۸- آیا عدد ۵۱۲۴ به ۴ قابل قسمت است؟

چون ۲۴ به ۴ قابل قسمت است، پس این عدد به ۴ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۴، صفر است.

مثال ۲۹— آیا عدد ۷۲۴۳ به ۴ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۴ نیز پیدا کنید. از آن جا که ۴۳ به ۴ قابل قسمت نیست عدد ۷۲۴۳ نیز به ۴ قابل قسمت نیست. روشن است که باقی مانده‌ی تقسیم ۴۳ بر ۴ عددی به جز ۳ نیست. بنابراین، باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۴ عدد ۳ است.

روش دیگر: رقم یکان را در ۲ و رقم دهگان را در ۲ ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌نماییم. اگر حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد مضارب ۴ را از آن کم می‌کنیم تا مانده به کم‌تر از چهار برسد.

$$(3 \times 2) + (4 \times 2) = 3 + 8 = 11$$

$$11 - 8 = 3$$

۴— ۸— ۱ قابلیت تقسیم بر ۵: عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم اول سمت راست آن صفر یا پنج باشد. درغیراین صورت، آن عدد بر ۵ قابل قسمت نیست. برای تعیین باقی مانده‌ی آن عدد بر ۵ کافی است به رقم اول سمت راست آن توجه کنیم. اگر این رقم از ۵ کوچک‌تر است، پس باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۵، خود این عدد است. ولی اگر این رقم بیش‌تر از ۵ باشد باید ۵ واحد از آن کم کرد تا باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۵ مشخص گردد.

مثال ۳۰— آیا عدد ۴۶۵ به ۵ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی آن را نیز تعیین کنید. چون رقم اول سمت راست آن ۵ است، پس این عدد به ۵ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۵، صفر است.

مثال ۳۱— آیا عدد ۷۵۳۸ به ۵ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۵ نیز معین کنید. از آن جا که رقم اول سمت راست آن صفر یا پنج نیست، پس این عدد بر پنج قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی آن بر پنج برابر ۳ است، زیرا

$$8 - 5 = 3$$

۵— ۸— ۱ قابلیت تقسیم بر ۶: عددی بر ۶ قابل قسمت است که هم بر ۲ و هم بر ۳ قابل قسمت باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۶، صفر است. اگر عددی بر ۶ قابل قسمت نباشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۶، عددی کوچک‌تر از آن است. برای پیدا کردن باقی مانده کافی است نزدیک‌ترین عدد مضرب ۶ را از آن عدد کم نمود تا باقی مانده‌ای کوچک‌تر از ۶ به دست آید.

مثال ۳۲— آیا عدد ۷۶۷۱ بر ۶ قابل قسمت است؟

با توجه به این که این عدد، زوج نیست پس بر ۲ قابل قسمت نیست، در نتیجه بر ۶ نیز قابل قسمت نخواهد بود. برای پیدا کردن باقی مانده کافی است عدد ۷۶۶۸ را که نزدیک ترین عدد مضرب ۶ به آن عدد است از آن کم نمود.

$$7671 - 7668 = 3$$

پس باقی مانده برابر با ۳ است.

مثال ۳۳- آیا عدد ۴۳۲ بر ۶ قابل قسمت است؟

از آن جا که این عدد زوج است، پس بر ۲ قابل قسمت است. از طرفی مجموع ارقامش  $(9 = 2 + 3 + 4)$ ، ۹ است که بر ۳ قابل قسمت است. در نتیجه، این عدد بر ۶ قابل قسمت و باقی مانده ی آن صفر است.

۶- ۸- ۱- قابلیت تقسیم بر ۷: عددی بر هفت قابل قسمت است که باقی مانده ی آن بر هفت

صفر است. برای این که باقی مانده ی تقسیم عدد  $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ ، بر ۷ را به دست آوریم، به شرح زیر عمل می کنیم:

اولین رقم سمت چپ عدد مورد نظر یعنی  $a_{n-1}$  را سه برابر می کنیم و با رقم بعدی یعنی  $a_{n-2}$  جمع می نماییم. سپس مضرب های هفت آن را کسر و باقی مانده را سه برابر می کنیم و با  $a_{n-3}$  جمع می نماییم. پس از کسر مضارب هفت از آن، مجدداً به همین روش ادامه می دهیم تا باقی مانده ی نهایی حاصل شود.

مثال ۳۴- باقی مانده ی تقسیم عدد ۵۴۷۲ بر ۷ را پیدا کنید.

$$5 \times 3 = 15$$

رقم ۵ را ابتدا سه برابر و سپس آن را با ۴ جمع می کنیم.

$$15 + 4 = 19$$

$$19 - 14 = 5$$

مضرب ۷ یعنی ۱۴ را از آن کم می کنیم؛ باقی مانده ۵ می شود.

$$5 \times 3 = 15$$

$$15 + 7 = 22$$

۵ را ابتدا سه برابر و سپس آن را با ۷ جمع می کنیم.

$$22 - 21 = 1$$

مضرب هفت یعنی ۲۱ را از آن کسر می نماییم.

$$1 \times 3 = 3$$

نتیجه یعنی ۱ را سه برابر و سپس آن را با ۲ جمع می کنیم.

$$3 + 2 = 5$$

عدد ۵ حاصل می شود که باقی مانده تقسیم عدد ۵۴۷۲ بر ۷ است.

مثال ۳۵- آیا عدد ۱۸۱۳ به هفت قابل قسمت است؟

$$1 \times 3 = 3$$

اولین رقم را سه برابر می‌نماییم و نتیجه را با دومین رقم جمع می‌کنیم.

$$3 + 8 = 11$$

$$11 - 7 = 4$$

$$4 \times 3 = 12$$

$$12 + 1 = 13$$

$$13 - 7 = 6$$

$$6 \times 3 = 18$$

$$18 + 3 = 21$$

$$21 - 21 = 0$$

مضرب ۷ را از آن کسر و مجدداً سه برابر می‌کنیم.

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

نتیجه صفر می‌شود، پس عدد ۱۸۱۳ بر ۷ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن بر ۷، صفر است.  
۸-۱۱ قابلیت تقسیم بر ۸: عددی به ۸ قابل قسمت است که عدد متشکل از سه رقم اول سمت راست آن، به هشت قابل قسمت باشد، و یا سه رقم سمت راست آن صفر باشد.

برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد  $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$  بر ۸ کافی است باقی‌مانده‌ی عدد  $\overline{a_2a_1a_0}$  را بر ۸ محاسبه نماییم. به عبارت دیگر باقی‌مانده‌ی سه رقم اول سمت راست آن عدد را بر ۸ حساب می‌کنیم یعنی رقم یکان را در  $2^0$ ، رقم دهگان را در  $2^1$  و رقم صدگان را در  $2^2$  ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم، در صورتی که حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۸ باشد، مضارب ۸ را از آن کم می‌کنیم تا مانده به کم‌تر از ۸ برسد.

مثال ۳۶- آیا عدد ۱۸۴۸ به هشت قابل قسمت است؟

از آن‌جا که ۸۴۸ به هشت قابل قسمت است، پس ۱۸۴۸ نیز به هشت قابل قسمت است. (برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی ۸۴۸ به ۸، اولین رقم سمت چپ را با ۸ مقایسه می‌کنیم تا در صورتی که بزرگ‌تر یا مساوی ۸ باشد ۸ را از آن کسر نماییم، سپس باقی‌مانده را با رقم بعدی یعنی ۴ کنار هم قرار می‌دهیم و مجدداً مضرب ۸ را از آن کم می‌کنیم و بالأخره باقی‌مانده را با آخرین رقم یعنی ۸ کنار هم قرار می‌دهیم و مضرب ۸ را از آن کم می‌کنیم. باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۸ مشخص می‌گردد.)

مثال ۳۷- آیا عدد ۵,۴۷۳,۰۰۰ به ۸ قابل قسمت است؟

چون سه رقم سمت راست آن صفر است، پس این عدد به ۸ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۸، برابر با صفر است.

مثال ۳۸- آیا عدد ۷۴۵۵ به ۸ قابل قسمت است؟



چون ۴۵۵ به ۸ قابل قسمت نیست (عدد فرد است)، پس ۷۴۵۵ نیز به ۸ قابل قسمت نیست. اما برای یافتن باقی مانده که عددی بزرگتر از صفر و کمتر از ۸ است، لازم است نزدیکترین عدد سه رقمی مضرب ۸ به ۴۵۵ را پیدا نمود و از ۴۵۵ کم کرد که آن عدد ۴۴۸ است.

$$455 - 448 = 7$$

بنابراین، باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۷۴۵۵ بر ۸، برابر با ۷ است. بدیهی است اگر از عدد ۷۴۵۵ عدد ۷ را کم کنیم، عددی باقی می ماند که به ۸ قابل قسمت است.

$$7455 - 7 = 7448$$

$$(5 \times 2^0) + (5 \times 2^1) + (4 \times 2^2) = 5 + 10 + 16 = 31$$

رقم یکان را در ۲، رقم دهگان را در ۲<sup>۱</sup> و رقم صدگان را در ۲<sup>۲</sup> ضرب می کنیم و حاصل آن‌ها را با هم جمع می کنیم. چون ۳۱ بزرگتر از ۸ است ۲۴ را از آن کم می کنیم  $31 - 24 = 7$  پس باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۷۴۵۵ بر ۸ برابر با ۷ است.

ملاحظه می شود که ۷۴۴۸ به ۸ قابل قسمت است زیرا ۴۴۸ به ۸ قابل قسمت است.

**۸-۸-۱ قابلیت تقسیم بر ۹:** عددی به ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش به ۹ قابل قسمت باشد. بدیهی است اگر از مجموع ارقامش نزدیکترین مضرب ۹ را کسر کنیم و باقی مانده، عددی کوچکتر از ۹ شود، این عدد، باقی مانده‌ی تقسیم بر ۹ است.

مثال ۳۹- آیا ۲۹۳۴ به ۹ قابل قسمت است؟

$$2 + 9 + 3 + 4 = 18$$

مجموع ارقام آن عدد را محاسبه می نماییم:

چون ۱۸ مضرب ۹ است، پس آن عدد به ۹ قابل قسمت است.

مثال ۴۰- آیا ۵۳۷۶ به ۹ قابل قسمت است؟

$$5 + 3 + 7 + 6 = 21$$

مجموع ارقام آن عدد را محاسبه می کنیم:

$$21 - 18 = 3$$

مضرب ۹ را از آن کم می نماییم:

پس، این عدد به ۹ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۹، برابر با ۳ است.

**۹-۸-۱ قابلیت تقسیم بر ۱۰:** عددی به ۱۰ قابل قسمت است که اولین رقم سمت راست آن صفر باشد. بدیهی است اگر رقم سمت راست آن، رقمی غیر از صفر باشد، همان رقم باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است.

مثال ۴۱— آیا ۲۶۵۴ بر ۱۰ قابل قسمت است؟ اگر جواب منفی است باقی مانده‌ی آن را محاسبه کنید.

چون اولین رقم سمت راست آن صفر نیست، پس این عدد بر ۱۰ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۰، عدد ۴ است زیرا اولین رقم سمت راست آن ۴ است.

مثال ۴۲— آیا ۵۶۷۰ بر ۱۰ قابل قسمت است؟ چون رقم اول سمت راست آن عدد صفر است، پس بر ۱۰ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی آن صفر خواهد بود.

۱۰-۸-۱ قابلیت تقسیم بر ۱۱: فرض کنیم عدد صحیح  $A$  شامل  $n$  رقم باشد  $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ . مکان ارقام  $A$  را از راست به چپ، به ترتیب زوج و فرد، در نظر می‌گیریم و سپس ارقام در مکان‌های زوج را پس از جمع، از مجموع ارقام مکان‌های فرد منها می‌کنیم، اگر باقی مانده صفر باشد، عدد بر ۱۱ قابل قسمت است. ولی اگر باقی مانده مثبت و کم‌تر از ۱۱ بود، همان عدد باقی مانده‌ی تقسیم عدد  $A$  بر ۱۱ خواهد بود. اما اگر باقی مانده منفی یا مثبت و بزرگ‌تر از ۱۱ بود، آن‌گاه باید مضرب ۱۱ را به آن اضافه یا کم نمود تا باقی مانده‌ی واقعی که کوچک‌تر از ۱۱ است، به دست آید.

مثال ۴۳— بررسی کنید که عدد ۲۷۴۹۳ بر ۱۱ بخش پذیر است یا خیر؟

چنانچه جواب منفی است، باقی مانده‌ی آن را بر ۱۱ پیدا کنید.

$$(3+4+2)-(9+7)=9-16=-7$$

$$-7+11=4$$

ارقام در مکان‌های زوج را با هم و ارقام در مکان‌های فرد را نیز با هم جمع می‌نماییم. تفاوت آن‌ها ۷- است، که با اضافه کردن ۱۱ به آن، نتیجه ۴ می‌شود. پس، این عدد بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۱، عدد ۴ است.

مثال ۴۴— آیا ۱۱۹۳۵ بر ۱۱ قابل قسمت است؟

$$5+9+1=15$$

ارقام در مکان‌های زوج را با هم

$$3+1=4$$

و ارقام در مکان‌های فرد را با هم جمع می‌نماییم.

$$15-4=11$$

تفاوت آن‌ها ۱۱ است.

چون ۱۱ مضرب ۱۱ است، پس آن عدد به ۱۱ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر

۱۱ نیز، صفر می‌شود.

## ۹-۱ ساده کردن کسر

اگر صورت و مخرج کسری، دارای عامل مشترکی مخالف صفر و غیر از یک باشند، می‌توانیم آن‌ها را بر آن عامل مشترک تقسیم کنیم. به عبارت دیگر، برای ساده کردن کسر باید صورت و مخرج آن‌را جداگانه به عوامل ضرب تجزیه نمود. سپس در صورت اشتراک عوامل ضرب، مخالف صفر بین صورت و مخرج آن‌ها را حذف کرد.

بدیهی است چنان‌چه هیچ عامل مشترکی بین صورت و مخرج به جز ۱ نباشد، نتیجه می‌گیریم که این کسر ساده نیست. به این نوع کسرها، کسر تحویل‌ناپذیر گویند.

مثال ۴۵- در صورت امکان، کسر  $\frac{21}{22}$  را ساده کنید.

$$\frac{21}{22} = \frac{3 \times 7}{2 \times 11}$$

چون در صورت و مخرج کسر هیچ عامل مشترکی یافت نمی‌شود این کسر تحویل‌ناپذیر است و ساده نمی‌شود.

مثال ۴۶- در صورت امکان، کسر  $\frac{150}{21}$  را ساده کنید.

$$\frac{150}{21} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 5}{3 \times 7}$$

تنها عامل مشترک بین صورت و مخرج ۳ است. پس:

$$\frac{150}{21} = \frac{50}{7}$$

مثال ۴۷- در صورت امکان، کسر  $\frac{210}{315}$  را ساده کنید.

$$\frac{210}{315} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7 \times 3}$$

$$\frac{210}{315} = \frac{2}{3}$$

عوامل مشترک ۳، ۵، ۷ بین صورت و مخرج قابل حذف کردن‌اند. بنابراین، با حذف آن‌ها

کسر  $\frac{2}{3}$  حاصل می‌گردد.

## ۱۰-۱ کاربرد محاسبات ذهنی در امور مالی

همان‌طور که در درس حسابداری خوانده‌اید، حسابداران معمولاً در پایان دوره‌ی مالی، فهرستی از حساب‌های دفتر کل و مانده‌ی آن‌ها را تحت عنوان «تراز آزمایشی» تهیه می‌کنند تا بر این اساس راحت‌تر بتوانند صورت‌های مالی را تهیه نمایند. از طرف دیگر اگر جمع کل ارقام ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی با هم برابر باشد، حسابداران از صحت ثبت، انتقال و مانده‌گیری حساب‌ها تا حد بسیار بالایی اطمینان حاصل می‌کنند. اما اگر جمع کل ارقام ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی با هم برابر نباشد، در این صورت اشتباهی رخ داده و حسابدار موظف است آن را بیابد و برطرف نماید. برای این که حسابداران بتوانند اشتباه را از میان انبوه ثبت‌های دفتر روزنامه و نیز صفحات دفتر کل سریع‌تر پیدا کنند، باید از محاسبات ذهنی استفاده کنند. به این ترتیب که اگر اختلاف جمع دو ستون بدهکار و بستانکار تراز آزمایشی قابل تقسیم بر عدد ۲ باشد در این صورت به احتمال زیاد، اشتباهاً یک بدهکار در سمت بستانکار ثبت شده یا بالعکس. برای مثال، اگر در انتقال ارقام از دفتر روزنامه به دفتر کل ۲۵۰ ریال بدهکار حساب دریافتنی را اشتباهاً به بستانکار حساب دریافتنی در دفتر کل منتقل کرده باشیم در این صورت وقتی تراز آزمایشی را از روی مانده‌ی ارقام دفتر کل تهیه می‌کنیم، بین ستون بدهکار و بستانکار جمعاً ۵۰۰ ریال اختلاف وجود دارد که ۵۰۰ عددی قابل تقسیم بر عدد ۲ است. از تقسیم ۵۰۰ بر ۲ عدد ۲۵۰ به دست می‌آید و به این ترتیب حسابدار متوجه می‌شود که برای رفع اشتباه موجود باید عدد ۲۵۰ را در دفتر روزنامه و دفتر کل ردیابی کند. مثال دیگر این که اگر اختلاف دو ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی قابل تقسیم بر عدد ۹ باشد، در این صورت اختلاف موجود می‌تواند ناشی از جا انداختن یا اضافه نوشتن یک صفر آخر اعداد یا ثبت مقلوب (مثلاً ۳۲ را اشتباهاً ۲۳ بنویسیم) باشد. برای مثال، اگر رقم وجه نقد را به جای ۲۱۰۰۰ ریال اشتباهاً ۲۱۰۰ ریال به دفتر کل منتقل کنیم در این صورت در تراز آزمایشی جمع ۲ ستون بدهکار و بستانکار به اندازه‌ی ۱۸۹۰۰ ریال = (۲۱۰۰۰ - ۲۱۰۰) اختلاف خواهد داشت. از آن‌جا که ۱۸۹۰۰ عددی قابل تقسیم بر ۹ و حاصل این تقسیم برابر ۲۱۰۰ است، بنابراین حسابدار به این موضوع رهنمون می‌شود که به احتمال زیاد اشتباه مربوط به موردی بوده که عدد آن ۲۱۰۰ است و این عدد را ردیابی می‌کند.

همان‌طور که ملاحظه کردید، محاسبات ذهنی می‌تواند به حسابداران در یافتن اشتباهاتشان، که کار وقت‌گیری است، تا حدود زیادی کمک کند که دو مورد مذکور نمونه‌ای از آن بود.

## تمرین های فصل اول

در حد امکان، سعی کنید مسائل را به طور ذهنی پاسخ دهید.

۱- حاصل ضرب ۴۱، ۲۰۰، ۳۴، ۴۵۶، ادر ۵۰ را به صورت ذهنی محاسبه کنید.

۲- حاصل ضرب ۸۸، ۹۷۲، ۳۵۹، ۱۴، ۷۵۲، ادر ۲۵۰ را به صورت ذهنی محاسبه کنید.

۳- حاصل ضرب های زیر را به صورت ذهنی پاسخ دهید.

$$۱,۳۰۰ \times ۱۳۰ =$$

$$۱۹,۰۰۰ \times ۱۹ =$$

$$۱۷ \times ۱۷۰ =$$

$$۱,۸۰۰ \times ۱,۸۰۰ =$$

۴- حاصل ضرب های زیر را به صورت ذهنی پاسخ دهید.

$$۳۵ \times ۳۵۰ =$$

$$۱۵۰,۰۰۰ \times ۱,۵۰۰ =$$

$$۹۵۰۰ \times ۹۵ =$$

$$۶۵,۰۰۰ \times ۶۵,۰۰۰ =$$

۵- این اعداد را بر ۵ تقسیم کنید و پاسخ را به روش ذهنی به دست آورید.

$$۱۸۰$$

$$۲,۳۵۵$$

$$۶۷,۵۰۰$$

$$۲,۰۰۵$$

۶- حاصل تقسیم این اعداد بر ۲۵۰ را به صورت ذهنی پیدا کنید.

$$۴۴,۷۵۰$$

$$۳۹,۷۵۰$$

$$۵,۰۰۰$$

$$۷۳۸,۷۵۰$$

۷- با استفاده از اتحاد، حاصل ضرب های زیر را محاسبه کنید.

$$۱۰۷ \times ۹۳ =$$

$$۹۹۹ \times ۹۹۹ =$$

$$۲۰۱ \times ۱۹۹ =$$

$$۳,۹۹۸ \times ۳,۹۹۸ =$$

$$۱۰,۰۰۱ \times ۱۰,۰۰۱ =$$

$$۵,۰۰۳ \times ۵,۰۰۳ =$$

۸- کسرهای زیر را ساده کنید:

$$\frac{۷۸}{۱۱۴} \quad \frac{۳۵۰}{۷۳۵} \quad \frac{۱۹۸۰}{۵۹۴۰} \quad \frac{۱۰۵}{\frac{۲۸۰}{۳۲۲}} \\ \frac{۱۱۲}{}$$

۹- عددی به ..... قابل قسمت است که به ۲ و ..... قابل قسمت باشد.

- ۱۰- عددی به ..... قابل قسمت است که به ۳ و ۴ قابل قسمت باشد.
- ۱۱- عددی به ۱۰ قابل قسمت است که به ۲ و ..... قابل قسمت باشد.
- ۱۲- عددی به ۳۳ قابل قسمت است که به ..... و ۱۱ قابل قسمت باشد.
- ۱۳- عددی به ۳۹ قابل قسمت است که به ..... و ..... قابل قسمت باشد.
- ۱۴- ۲,۵۰۰ واحد از کالایی را با نرخ ۲۵۰ ریال به فروش رسانده‌ایم. اگر ۵ درصد از این مبلغ سود باشد، سود حاصله را به‌روش ذهنی محاسبه نمایید.
- ۱۵- با استفاده از اتحادها حاصل  $999^2$  را به‌دست آورید.
- ۱۶- به‌جای a در عدد  $45a2$  چه رقم یا ارقامی می‌توان قرار داد تا آن عدد به ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد؟

- ۱۷- شرکتی می‌خواهد تعداد ۵۷۶۲ واحد از تولیدات خود را بین ۱۱ مرکز بخش به‌طور مساوی توزیع نماید. آیا این عمل امکان‌پذیر است؟ اگر نیست چه باید کرد؟
- ۱۸- فرض کنید حسابدار شرکتی به‌هنگام ثبت فروش نسیه به مبلغ ۴۸۰۰۰ ریال، حساب‌های دریافتنی را ۴۸۰۰۰ ریال بدهکار و فروش را به مبلغ ۴۸۰۰۰ ریال بستانکار کرده است. این اشتباه چه تأثیری بر مانده‌ی ستون‌های بدهکار و بستانکار تراز آزمایشی دارد و چگونه می‌توان از طریق محاسبات ذهنی این اشتباه را سریع‌تر کشف کرد؟
- ۱۹- در پایان دوره‌ی مالی هنگامی که حسابداران شرکت تراز آزمایشی را تهیه کردند متوجه شدند که جمع ستون بدهکار و بستانکار آن به میزان ۸۷۵۰۰ ریال اختلاف دارد و با این‌که وقت زیادی صرف کرده‌اند تا دلیل این اختلاف را متوجه شوند اما هنوز به نتیجه نرسیده‌اند. شما چه راهکاری را به آن‌ها پیشنهاد می‌دهید تا سریع‌تر بتوانند این اشتباه را بیابند؟

### کاربردهای تسهیم به نسبت

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- انواع نسبت‌های سود و زیانی را محاسبه کند.
- ۲- مبالغ هزینه را با نسبت‌های مختلف سرشکن کند.
- ۳- رابطه‌ی درصد و نسبت و انواع موضوعات مربوط به آن را در حسابداری تشخیص دهد.
- ۴- انواع مسائل مشارکت را حل کند.
- ۵- تقسیم سود و زیان در شرکت‌های غیرسهامی را با نسبت‌های مختلف انجام دهد.

### ۲- کاربردهای تسهیم به نسبت

#### ۲-۱ انواع نسبت‌های سود و زیانی

محاسبه‌ی نسبت به این دلیل مفید است که رابطه‌ی بین اقلام عمده‌ی صورت‌های مالی، دقت ریاضی پیدا می‌کند. این نسبت‌ها وقتی بیش‌تر مفهوم پیدا می‌کنند که با سایر نسبت‌ها در دوره‌ی مالی قبل همان واحد تجاری (یا با مؤسسات مشابه و یا با استانداردهای مطلوب) مقایسه گردند. مسلماً سیر تحول روند نسبت‌ها در طول زمان، مثلاً چند سال، در مقام مقایسه با بررسی نسبت‌ها در یک سال معین، به مراتب اهمیت بیش‌تری دارد.

با بررسی دقیق صورت‌های سود و زیان هر مؤسسه، می‌توان اطلاعات جالبی در مورد کارایی و مدیریت آن مؤسسه به‌دست آورد. بیش‌تر کسانی که در امور مؤسسه‌ای، از لحاظ سرمایه‌گذاری،

اعتبار یا بازده فعالیت آن، ذی نفع یا علاقه‌مند هستند، معمولاً به میزان سود شرکت نسبت به حساب فروش و سرمایه‌گذاری توجه می‌نمایند.

قبل از پرداختن به بحث نسبت‌ها، بهتر است به اصطلاحات زیر توجه گردد.  
سود: به طور کلی مقصود سود خالص است، یعنی سود پس از کسر مالیات.  
فروش: منظور از فروش، فروش خالص است، یعنی فروش پس از کسر برگشتی‌ها و تخفیفات فروش.

ارزش ویژه: کل دارایی‌ها پس از کسر کل بدهی‌ها را ارزش ویژه نامند.  
ارزش دفتری دارایی ثابت: به معنای دارایی ثابت خالص است، یعنی دارایی ثابت پس از کسر استهلاک انباشته.

سرمایه در گردش: دارایی جاری پس از کسر بدهی جاری را سرمایه در گردش گویند و حاکی از مبلغی است که می‌توان آن را برای تأمین هزینه‌های روزمره و همچنین برای تهیه‌ی مواد اولیه و کالا مورد استفاده قرار داد.

## ۲-۲ شاخص‌های سودآوری

معمولاً به هر کسری که در صورت آن سود مؤسسه و در مخرج آن فروش، ارزش ویژه<sup>۱</sup>، دارایی ثابت، دارایی‌ها و یا سرمایه در گردش نوشته شده باشد، بازده گویند و آن‌ها را به‌عنوان شاخص سودآوری معرفی می‌کنند. در این جا فقط به پنج مورد بازده اشاره می‌شود: بازده فروش، بازده ارزش ویژه، بازده دارایی ثابت، بازده دارایی‌ها و بازده سرمایه‌ی در گردش.

۲-۲-۱ بازده فروش<sup>۲</sup>: نسبت سود به فروش را بازده فروش می‌نامند.

$$\text{بازده فروش} = \frac{\text{سود}}{\text{فروش}}$$

اگر بخواهیم بازده فروش را برحسب درصد بیان کنیم، فرمول زیر را به کار می‌بریم:

$$\text{بازده فروش برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{فروش}} \times 100$$

---

۱- بدهی - دارایی = ارزش ویژه



این نسبت، نشان می‌دهد که از هر یکصد ریال فروش، چه مقدار سود به‌دست آمده است. مثال ۱- فروش شرکتی که در یک سال ۲۰۰ میلیارد ریال و سود آن ۵۰ میلیارد ریال بوده است. بازده فروش و بازده فروش برحسب درصد آن شرکت را محاسبه نمایید:

$$\text{بازده فروش} = \frac{۵۰}{۲۰۰} = ۰/۲۵$$

$$\text{بازده فروش برحسب درصد} = \frac{۵۰}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۲۵$$

۲-۲-۲ بازده ارزش ویژه<sup>۱</sup>: بسیاری از تحلیلگران و هم‌چنین اغلب صاحبان سهام یا نمایندگان ایشان، این نسبت را پراهمیت‌تر از دیگر نسبت‌ها می‌دانند؛ زیرا نتیجه‌ای را که از سرمایه‌گذاری آنان به‌دست آمده است نشان می‌دهد. معمولاً ارزش ویژه را در اول دوره‌ی مالی به‌کار می‌برند. زیرا ارزش ویژه در پایان دوره، متأثر از سود یا زیان همان دوره است که نباید محاسبه گردد.

$$\text{بازده ارزش ویژه} = \frac{\text{سود}}{\text{ارزش ویژه‌ی اول دوره}}$$

و اگر بخواهیم بازده ارزش ویژه را برحسب درصد بیان کنیم، فرمول زیر را به‌کار می‌بریم:

$$\text{بازده ارزش ویژه برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{ارزش ویژه‌ی اول دوره}} \times ۱۰۰$$

مثال ۲- سود یک شرکت تعاونی ۴۳۲,۰۰۰ ریال و ارزش ویژه‌ی آن شرکت ۲,۴۰۰,۰۰۰ ریال است. بازده ارزش ویژه و بازده ارزش ویژه برحسب درصد آن شرکت تعاونی را محاسبه نمایید.

$$\text{بازده ارزش ویژه} = \frac{۴۳۲,۰۰۰}{۲,۴۰۰,۰۰۰} = ۰/۱۸$$

$$\text{بازده ارزش ویژه برحسب درصد} = \frac{۴۳۲,۰۰۰}{۲,۴۰۰,۰۰۰} \times ۱۰۰ = ۱۸$$

۲-۲-۳ بازده دارایی ثابت<sup>۲</sup>: از تقسیم سود به دارایی ثابت، بازده دارایی ثابت به‌دست می‌آید. هرگاه کسر به‌دست آمده را در عدد صد ضرب کنیم، درصد بازده دارایی ثابت حاصل می‌شود.

$$\text{بازده دارایی ثابت} = \frac{\text{سود}}{\text{دارایی ثابت}}$$

۱- Return on Net Worth

۲- Return on Fixed Asset

$$\text{بازده دارایی ثابت برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{دارایی ثابت}} \times 100$$

مثال ۳- دارایی ثابت شرکتی ۳۳۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سود آن ۱۶,۵۰۰,۰۰۰ ریال است، بازده دارایی ثابت و بازده دارایی ثابت برحسب درصد آن شرکت را محاسبه نمایید.

$$\text{بازده دارایی ثابت} = \frac{16,500,000}{330,000,000} = 0/05$$

$$\text{بازده دارایی ثابت برحسب درصد} = \frac{16,500,000}{330,000,000} \times 100 = 5$$

۲-۲-۴ بازده کل دارایی<sup>۱</sup>: بسیاری از نظریه پردازان، این نسبت را شاخص نهایی برای تشخیص کفایت و کارایی مدیریت در اداره‌ی امور مؤسسه می‌دانند. برای محاسبه‌ی این نسبت، می‌توان سود را به کل دارایی تقسیم نمود و اگر بخواهیم آن را برحسب درصد محاسبه کنیم، آن نسبت را در ۱۰۰ ضرب می‌نماییم.

$$\text{بازده دارایی} = \frac{\text{سود}}{\text{کل دارایی}}$$

$$\text{بازده دارایی برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{کل دارایی}} \times 100$$

مثال ۴- مؤسسه‌ای در سال گذشته ۴۰ میلیون ریال سود داشته است. اگر کل دارایی آن مؤسسه ۴۰۰ میلیون ریال باشد، بازده دارایی آن مؤسسه و هم چنین بازده دارایی آن را برحسب درصد محاسبه کنید.

$$\text{بازده دارایی} = \frac{\text{سود}}{\text{کل دارایی}} = \frac{40}{400} = 0/1$$

$$\text{بازده دارایی برحسب درصد} = \frac{40}{400} \times 100 = 10$$

۲-۲-۵ بازده سرمایه در گردش<sup>۲</sup>: این نسبت برای بستانکاران کوتاه مدت، بسیار حائز اهمیت است. مثلاً اگر یک بانک بخواهد به شرکتی وام کوتاه مدت (سه ماهه) پرداخت کند، علاوه بر

۱- Return on Asset

۲- Return on Working Capital

بررسی دیگر نسبت‌ها به این نسبت بیش تر توجه می‌کند. به عبارت دیگر، این نسبت تعیین کننده است. برای پیدا کردن بازده سرمایه در گردش کافی است سود را به سرمایه‌ی در گردش تقسیم نماییم و اگر بخواهیم آن را برحسب درصد به دست آوریم باید نسبت را در ۱۰۰ ضرب کنیم.

$$\text{بازده سرمایه در گردش} = \frac{\text{سود}}{\text{سرمایه در گردش}}$$

$$\text{بازده سرمایه در گردش برحسب درصد} = \frac{\text{سود}}{\text{سرمایه در گردش}} \times 100$$

مثال ۵- سرمایه در گردش شرکتی ۳۶۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سود آن ۲۵,۴۸۰,۰۰۰ ریال است. بازده سرمایه در گردش و بازده سرمایه در گردش برحسب درصد آن شرکت را محاسبه نمایید.

$$\text{بازده سرمایه در گردش} = \frac{25,480,000}{364,000,000} = 0/07$$

$$\text{بازده سرمایه در گردش برحسب درصد} = \frac{25,480,000}{364,000,000} \times 100 = 7$$

شکی نیست که تجزیه و تحلیل این نسبت‌های سود و زیانی، تا حدودی می‌تواند وضعیت مؤسسه را مشخص کند؛ اما برای نتیجه‌گیری بهتر، باید به روند نسبت‌ها نیز توجه کرد. مثلاً باید نسبت‌های سه سال گذشته را بررسی و تغییرات آن‌ها را تحلیل نمود تا بتوان وضعیت آینده مؤسسه را پیش‌بینی کرد. اگر بخواهیم دقت عمل خود را افزایش دهیم، باید به نسبت‌های سود و زیانی سایر مؤسسات مشابه و به خصوص روند آن‌ها در چند سال گذشته، توجه کنیم. بدیهی است تعیین روندهای بازده فروش و بازده ارزش ویژه در طی دو یا چند سال بسیار اهمیت دارد. صرفاً این که بدانیم مؤسسه‌ای سود داشته یا زیان برده است، کافی نیست. اگر روندهای مذکور، یعنی روند سود نسبت به فروش یا نسبت به ارزش ویژه در طی چند سال، کاهش را نشان بدهد وضع مؤسسه نامطلوب است، هرچند در طول مدت سود داشته باشد.

البته نمی‌توان انتظار داشت که در هر حالتی، همه‌ی نسبت‌ها روند مطلوبی را نشان بدهند و این حتی در زمان رونق فروش و افزایش سود هم کم‌تر تحقق پیدا می‌کند. ممکن است بازده فروش، یعنی نسبت سود به فروش، کاهش را نشان بدهد در حالی که در همان مدت رابطه‌ی سود به ارزش ویژه افزایش داشته است. به مثال زیر توجه نمایید.

(ارقام به هزار ریال)		
شرکت آلفا	سال X۲	سال X۱
فروش	۶۵۰,۰۰۰	۵۰۰,۰۰۰
سود	۶,۰۰۰	۵,۰۰۰
ارزش ویژه	۵۶,۰۰۰	۵۰۰,۰۰۰

### نسبت‌ها:

بازده فروش (سود به فروش)	۹/۰٪	۱٪
بازده ارزش ویژه	۷/۱۰٪	۱۰٪

مشاهده می‌شود هرچند نسبت بازده فروش کاهش یافته، ولی نسبت بازده ارزش ویژه افزایش داشته است.

علاوه بر موارد فوق باید به تورم در سال‌های مورد مطالعه توجه داشت. زیرا تورم می‌تواند روند نسبت‌ها را به هم بزند، به خصوص اگر تورم حاد باشد.

### ۲-۳ نحوه‌ی سرشکن کردن مبالغ هزینه

برای تسهیم کردن هزینه به قسمت‌های مختلف، باید ابتدا ارتباط هزینه‌ها را به قسمت‌های مختلف مشخص نمود. مثلاً با توجه به تعداد کارکنان در هر بخش یا به نسبت دستمزد پرداختی به بخش‌های مختلف یا به نسبت ارزش ساختمان و ماشین‌آلات، ساعات کار، مساحت زیر بنا و فروش و بالأخره سود و زیان هر یک از بخش‌ها.

مثال ۶- شرکتی در سال X۲، مبلغ ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال به‌عنوان کمک هزینه‌ی غذای کارکنان هزینه کرده است. اگر در بخش اداری ۴۰ نفر و در مرکز تولیدی A، B و C به ترتیب، ۷۳، ۱۵۶ و ۱۳۱ نفر شاغل باشند، هزینه‌ی فوق را به نسبت بخش‌های مختلف تسهیم نمایید.

$$۴۰ + ۷۳ + ۱۵۶ + ۱۳۱ = ۴۰۰$$

$$\frac{۴۰ \times ۲,۰۰۰,۰۰۰}{۴۰۰} = ۲۰۰,۰۰۰ \quad \text{هزینه‌ی بخش اداری}$$

$$\frac{۷۳ \times ۲,۰۰۰,۰۰۰}{۴۰۰} = ۳۶۵,۰۰۰ \quad \text{هزینه‌ی مرکز تولیدی A}$$

$$\frac{۱۵۶ \times ۲,۰۰۰,۰۰۰}{۴۰۰} = ۷۸۰,۰۰۰ \quad \text{هزینه‌ی مرکز تولیدی B}$$

$$\frac{131 \times 2,000,000}{400} = 655,000$$

هزینه‌ی مرکز تولیدی C

حال اگر این هزینه‌ها را با هم جمع کنیم، باید همان مبلغ ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال حاصل گردد.

$$200,000 + 365,000 + 780,000 + 655,000 = 2,000,000$$

یادآوری می‌شود اگر بخواهیم حق بیمه‌ی تأمین اجتماعی را تسهیم کنیم، باید برحسب جمع دستمزد هر بخش عمل کنیم، یا حق بیمه‌ی ساختمان و تأسیسات را برحسب ارزش دفتری هر بخش تسهیم نماییم و یا اجاره‌ی محل را برحسب مساحت هر بخش سرشکن کنیم.

## ۲-۴ روش‌های تقسیم سود و زیان در شرکت‌های غیر سهامی

امروزه، سرمایه، کار و قبول خطر، سه عامل سازنده‌ی سود در مؤسسات است و هریک از این عوامل، دارای ارزش اقتصادی خاصی، هستند. سود تضمین شده‌ی سرمایه، حق الزحمه‌ی شرکا، پاداش برای مدیران و ارزش قبول خطر، سودی است که به سرمایه تعلق می‌گیرد. در شرکت‌های غیر سهامی که سرمایه‌گذاری افراد به صورت‌های متفاوتی است، نحوه‌ی تقسیم سود با به‌کار انداختن عوامل سازنده‌ی سود توسط هریک از شرکا نیز، متفاوت است. بدیهی است که تقسیم سود با توجه به میزان سرمایه‌گذاری، صرف وقت در شرکت، تخصص یا حسن شهرت هریک از شرکا، با توافق آنان تعیین می‌گردد. روش‌های مختلف تقسیم سود و زیان به شرح زیر است.

۲-۴-۱ تقسیم سود به نسبت ثابت و از قبل تعیین شده: در این روش، سود حاصله، با توجه به توافق قبلی به عمل آمده، بین شرکا تقسیم می‌گردد. به طور مثال، چنانچه قرار باشد سود حاصله بین شرکا به نسبت ۲، ۳ و ۵ تقسیم گردد و میزان سود ۱۵۰,۰۰۰ ریال باشد سهم هر کدام به ترتیب عبارت‌اند از:

$$2 + 3 + 5 = 10$$

مجموع نسبت‌ها

$$\frac{2 \times 150,000}{10} = 30,000$$

سهم اولی

$$\frac{3 \times 150,000}{10} = 45,000$$

سهم دومی

$$\frac{5 \times 150,000}{10} = 75,000$$

سهم سومی

$$30,000 + 45,000 + 75,000 = 150,000$$

در نتیجه

۲-۴-۲ تقسیم سود به نسبت سرمایه: در این روش، سود در بین شرکا، به نسبت سرمایه

تقسیم می‌شود. اگر سرمایه‌ی هر یک از شرکا به ترتیب ۲۵۰,۰۰۰، ۳۵۰,۰۰۰، ۴۰۰,۰۰۰ ریال و سود حاصل ۴۰,۰۰۰ ریال باشد سهم هر یک عبارت است از:

$$۲۵۰,۰۰۰ + ۳۵۰,۰۰۰ + ۴۰۰,۰۰۰ = ۱,۰۰۰,۰۰۰$$

$$\frac{۴۰,۰۰۰ \times ۲۵۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰} = ۱۰,۰۰۰ \quad \text{سهم اولی}$$

$$\frac{۴۰,۰۰۰ \times ۳۵۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰} = ۱۴,۰۰۰ \quad \text{سهم دومی}$$

$$\frac{۴۰,۰۰۰ \times ۴۰۰,۰۰۰}{۱,۰۰۰,۰۰۰} = ۱۶,۰۰۰ \quad \text{سهم سومی}$$

$$۱۰,۰۰۰ + ۱۴,۰۰۰ + ۱۶,۰۰۰ = ۴۰,۰۰۰ \quad \text{جمع سود به دست آمده}$$

۳-۴-۲ احتساب سود برای سرمایه‌ی شرکا و تقسیم بقیه‌ی سود به نسبت تعیین شده: در این روش، شرکا توافق می‌کنند ابتدا برای سرمایه‌ی خود سودی با نرخ مثلاً ۵ درصد نسبت به سرمایه در نظر گرفته شود و سپس مابقی سود به طور مساوی یا نسبت‌های معین بین آن‌ها تقسیم گردد. مثال ۷- اگر سرمایه‌ی هر یک از شرکا، به ترتیب ۲۵۰,۰۰۰، ۳۵۰,۰۰۰ و ۴۰۰,۰۰۰ ریال باشد، هم‌چنین قرار شده است که برای سرمایه‌ی هر کدام سودی با نرخ پنج درصد نسبت به سرمایه در نظر گرفته شود و مابقی سود به طور مساوی بین آن‌ها تقسیم گردد و سود حاصله در سال قبل ۵۶,۰۰۰ ریال باشد سهم هر کدام را مشخص کنید.

$$۲۵۰,۰۰۰ + ۳۵۰,۰۰۰ + ۴۰۰,۰۰۰ = ۱,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۱,۰۰۰,۰۰۰ \times ۰.۰۵ = ۵۰,۰۰۰$$

$$۵۶,۰۰۰ - ۵۰,۰۰۰ = ۶,۰۰۰$$

$$۶,۰۰۰ \div ۳ = ۲,۰۰۰$$

$$۲۵۰,۰۰۰ \times ۰.۰۵ = ۱۲,۵۰۰$$

$$۱۲,۵۰۰ + ۲,۰۰۰ = ۱۴,۵۰۰ \quad \text{سهم شریک اولی}$$

$$۳۵۰,۰۰۰ \times ۰.۰۵ = ۱۷,۵۰۰$$

$$۱۷,۵۰۰ + ۲,۰۰۰ = ۱۹,۵۰۰ \quad \text{سهم شریک دومی}$$

$$۴۰۰,۰۰۰ \times ۰.۰۵ = ۲۰,۰۰۰$$

$$۲۰,۰۰۰ + ۲,۰۰۰ = ۲۲,۰۰۰ \quad \text{سهم شریک سومی}$$

$$۱۴,۵۰۰ + ۱۹,۵۰۰ + ۲۲,۰۰۰ = ۵۶,۰۰۰ \quad \text{جمع سود}$$

۴-۲ احتساب حقوق برای هر یک و تقسیم بقیه سود به نسبت سرمایه‌ی شرکا:  
 در این روش، ابتدا حقوق هر یک از شرکا را از کل سود کسر و باقی‌مانده‌ی سود را به نسبت سرمایه‌ی ایشان تقسیم می‌کنیم.

مثال ۸- با توجه به مثال ۷، چنانچه حقوق نفر اول ۱۰۰,۰۰۰ ریال در سال، حقوق دومی ۱۵۰,۰۰۰ ریال در سال و سومی حقوقی نداشته باشد و سود حاصله ۴۵۰,۰۰۰ ریال باشد، در این حالت به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$100,000 + 150,000 = 250,000$$

$$450,000 - 250,000 = 200,000$$

$$250,000 + 350,000 + 400,000 = 1,000,000$$

$$\frac{250,000 \times 200,000}{1,000,000} = 50,000$$

$$50,000 + 100,000 = 150,000$$

سهام شریک اولی

$$\frac{350,000 \times 200,000}{1,000,000} = 70,000$$

$$70,000 + 150,000 = 220,000$$

سهام شریک دومی

$$\frac{400,000 \times 200,000}{1,000,000} = 80,000$$

سهام شریک سومی

$$150,000 + 220,000 + 80,000 = 450,000$$

جمع سود هر سه نفر

## تمرین‌های فصل دوم

۱- شرکت بهار در سال ۲۰۰۰ میلادی مبلغ ۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش داشته است. سود آن ۲۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال، ارزش ویژه‌ی آن ۳۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، دارایی ثابت شرکت ۴۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، کل دارایی آن ۵۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و بدهی جاری ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. نسبت‌های بازده سرمایه در گردش، بازده دارایی، بازده دارایی ثابت، بازده ارزش ویژه و بازده فروش آن شرکت در سال قبل را برحسب درصد محاسبه کنید.

۲- شرکت بهار در سال ۲۰۰۱، مبلغ ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال سود داشته و فروش آن ۱۶۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. اگر بقیه‌ی اقلام با تمرین ۱ باشد کلیه‌ی نسبت‌های مذکور در تمرین ۱ را مجدداً

برحسب درصد محاسبه کنید.

۳- نسبت‌های تمرین ۱ و ۲ را با هم قیاس کنید.

۴- شرکت نور در سال X۲، مبلغ ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش داشته و سود آن ۱۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. ارزش ویژه‌ی آن ۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، دارایی ثابت شرکت ۲۵۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال، کل دارایی ۳۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سرمایه در گردش آن شرکت ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. نسبت‌های پنج‌گانه‌ی این شرکت را محاسبه کنید.

۵- اگر در سال X۳، سود شرکت نور ۸۰٪ نسبت به سال X۲ افزایش یابد و فروش آن ۵۰٪ افزوده شود، با فرض ثابت ماندن دیگر اقلام، نسبت‌های پنج‌گانه‌ی آن شرکت را محاسبه نمایید.

۶- شرکتی در سال X۲، مبلغ ۴۵۰,۰۰۰ ریال بابت بیمه‌ی ساختمان کلیه‌ی کارگاه‌ها پرداخت نموده است. اگر مساحت کارگاه شماره‌ی ۱، ۲۴,۰۰۰ مترمربع، مساحت کارگاه شماره‌ی ۲، ۴۶,۰۰۰ مترمربع و کارگاه شماره‌ی ۳، ۲۰,۰۰۰ مترمربع باشد، مشخص کنید سهم بیمه‌ی هر کارگاه چه مبلغی است؟

۷- یک شرکت، ماهیانه ۴,۶۰۰,۰۰۰ ریال اجاره بهای دو انبار، ساختمان اداری و کارگاه پرداخت می‌کند. اگر مساحت هر کدام از انبارها ۶,۰۰۰ مترمربع، ساختمان اداری ۵۰۰ مترمربع و کارگاه ۱۰,۵۰۰ مترمربع باشد، محاسبه کنید سهم اجاره‌ی هر یک از واحدها در یک سال چه مبلغی است؟

۸- چهار نفر، با تأسیس یک شرکت، توافق نمودند در صورتی که شرکت در پایان سال سودی داشته باشد به نسبت ۴، ۵، ۵، ۶ بین خود تقسیم نمایند. سود شرکت در پایان سال X۲، مبلغ ۵۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. سهم هر کدام را مشخص کنید. چنانچه لازم است ۲۰٪ از مبلغ سود بابت مالیات کسر شود، سهم هر کدام بابت برگشت سود دریافتی (مالیات) چه مبلغی است و در نهایت سود خالص هر کدام، پس از کسر مالیات، چه مبلغی خواهد شد؟ اگر مالیات ۳۰٪ می‌بود، سهم هریک را، پس از کسر مالیات، محاسبه کنید.

۹- حسن، علی و تقی، هر کدام به ترتیب ۶۰۰,۰۰۰، ۷۰۰,۰۰۰، ۱,۲۰۰,۰۰۰ ریال در شرکتی سرمایه‌گذاری نمودند و در پایان سال X۱، سود خالص شرکت ۵۰,۰۰۰ ریال بوده است. اگر قرار باشد به نسبت سرمایه، سود دریافت دارند سهم هر کدام را معین کنید. در سال X۲ حسن ۵۰٪ به سرمایه‌ی خود افزود و علی سرمایه خود را به ۹۰۰,۰۰۰ ریال رساند و سود سال X۲ به ۶۰,۰۰۰ ریال افزایش یافت. سهم هر کدام را در سال X۲ محاسبه کنید. سود هریک از شرکا در دو سال، چه مبلغی بوده است؟



نسبت سود به سرمایه‌ی هر کدام را در سال X1، در سال X2 و در دو سال یک‌جا، محاسبه کنید.

۱۰- سه نفر، شرکتی تأسیس کردند و به ترتیب ۷,۰۰۰,۰۰۰ ریال، ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و ۱۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال سرمایه‌گذاری نمودند و مقرر شد در پایان سال، به هر کدام به نسبت ۸٪ سرمایه، سود تعلق گیرد و در صورتی که باقی‌مانده‌ای داشت به نسبت مساوی بین هر سه نفر تقسیم شود.

الف) اگر سود سال اول ۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال باشد، سهم هر کدام را مشخص کنید.

ب) در صورتی که قرار می‌گذاشتند کل سود را به نسبت سرمایه تقسیم کنند، سهم هریک را محاسبه نمایید.

ج) اگر روش «ب» در نظر گرفته شود، چه کسی بیش‌تر و چه کسی کم‌تر سود خواهد برد؟ چه مبلغ؟

۱۱- احمد، اکبر و ابراهیم شرکتی تأسیس و توافق نمودند احمد به طور تمام وقت و اکبر و ابراهیم به صورت نیمه وقت در شرکت فعالیت کنند و بابت حقوق ماهیانه مبلغ ۵,۰۰۰ ریال برای احمد، ۳,۰۰۰ ریال برای اکبر و ۲,۰۰۰ ریال برای ابراهیم از محل سود سالانه‌ی شرکت منظور گردد. سرمایه‌ی احمد ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال، سرمایه‌ی اکبر ۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال و سرمایه‌ی ابراهیم ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال است. چنانچه در پایان سال ۳,۲۰۰,۰۰۰ ریال سود خالص عاید شرکت شود، سهم هر کدام را از بابت حقوق و سود سرمایه محاسبه کنید.

۱۲- دو شرکت، هر کدام با سرمایه‌ی ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال شروع به کار کردند. در پایان سال، اولی ۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال و دومی ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال سود داشتند. شرکت اولی سود را به نسبت مساوی بین شرکا (سه نفر) تقسیم نمود. شرکت دومی سود خود را به نسبت سرمایه‌ی شرکا تقسیم کرد. (سرمایه‌ی هر کدام به ترتیب ۳,۵۰۰,۰۰۰، ۳,۵۰۰,۰۰۰ و ۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال بوده است). اگر شرکت دومی سود را به نسبت مساوی بین شرکا تقسیم می‌کرد، تفاوت سود هر کدام از شرکا را محاسبه کنید.

۱۳- سود شرکتی بین سه نفر سهامدار آن شرکت به نسبت اعداد ۲ و ۵ و ۷ تقسیم شده است. در صورتی که سهم دومی ۱۲,۰۰۰ ریال بیش‌تر از سهم اولی باشد، سهم هر کدام را معین کنید.

۱۴- با استفاده از ارقام زیر نسبت‌های سودآوری در شرکت آلفا را به دست آورید.

ترازنامه ۷۴/۱۲/۲۹ شرکت آلفا (واحد به ریال)

دارایی جاری	۲۰۰,۰۰۰	بدهی جاری	۱۰۰,۰۰۰	فروش سال ۷۴	۱,۰۰۰,۰۰۰
دارایی ثابت	۳۰۰,۰۰۰	بدهی بلندمدت	۲۵۰,۰۰۰	سود سال ۷۴	۱۰۰,۰۰۰
		سرمایه	۱۵۰,۰۰۰		
جمع دارایی‌ها	۵۰۰,۰۰۰	جمع بدهی و سرمایه	۵۰۰,۰۰۰		

۱۵- هزینه‌ی مصرف آب فروشگاهی در سال X۳، مبلغ ۸,۴۰۰,۰۰۰ ریال بوده است. اگر بخواهیم این هزینه را به نسبت مساحت اشغال شده به وسیله‌ی هر قسمت تقسیم نماییم، هزینه‌ی مصرف آب هر قسمت را در صورتی که مساحت اشغال شده توسط هر قسمت به شرح زیر باشد محاسبه کنید. قسمت فروش ۱,۴۰۰ مترمربع، قسمت انبار ۱,۵۰۰ مترمربع، قسمت رستوران ۷۰۰ مترمربع، قسمت حسابداری ۲۰۰ مترمربع، قسمت اداری ۲۰۰ مترمربع. اگر هزینه‌ی برق فروشگاه ۱۴,۶۰۰,۰۰۰ ریال باشد، هزینه‌ی برق هر قسمت را نیز محاسبه کنید.

### تخفیفات و کارمزدها

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- انواع تخفیفات را در حالات مختلف محاسبه نماید.
- ۲- کارمزدها را در انواع مختلف محاسبه کند.
- ۳- مسائل مختلف انواع قسط‌ها، کارمزد و سود تضمین شده‌ی آن‌ها را محاسبه نماید.
- ۴- انواع قسط‌السنین را محاسبه کند.
- ۵- ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را براساس روش‌های مختلف برآورد نماید.

### ۳- تخفیفات و کارمزدها

#### مقدمه

معمولاً اعطای تخفیف به خریداران، تعداد خریداران و حجم فروش را افزایش می‌دهد و باعث جذب مشتریان جدید می‌گردد، حتی ممکن است رضایت خاطر همکاران را فراهم آورد و از همه مهم‌تر باعث تسریع در وصول مطالبات و افزایش نقدینگی مؤسسات گردد. بنابراین، تخفیفات به صورت اهرمی قوی در اختیار مدیران مؤسسه قرار گرفته است تا به وسیله‌ی آن بتوانند به اهداف مؤسسه دست یابند.

#### ۳-۱ انواع تخفیفات

با توجه به اهداف، سیاست‌ها و خط‌مشی‌های هر مؤسسه و شرایط زمانی، تخفیفات خاصی به

مستریان داده می‌شود. این تخفیفات بر دو نوع‌اند: یکی تخفیفات تجاری و دیگری تخفیفات نقدی. لازم است یادآوری شود که تخفیفات با برگشت از فروش، کاملاً متفاوت است. زیرا گاهی به عللی، از جمله نقص در کالا، مبلغی به خریدار مسترد می‌گردد یا این که کالایی به دلایل گوناگون به کارخانه عودت داده می‌شود و باید بهای آن به مشتری مسترد گردد.

### ۱-۱-۳ تخفیفات تجاری

**تعریف:** تخفیف تجاری یعنی کاهش قیمت فروش کالا، نسبت به قیمت مصوب و اعلام شده، که بنا به عللی برای بعضی از مشتریان در نظر گرفته می‌شود. مانند تخفیف به همکاران یا تخفیف به مشاغلی که به نحوی در ارتباط با این کالا هستند (تخفیف شرکت تولید لنت ترمز به شرکت اتومبیل‌سازی از این نوع است) و بالأخره تخفیف به مشتریانی که به‌طور عمده و تجاری کالا را خریداری می‌نمایند. به‌خصوص به شرکت‌هایی که در صادرات کالا به کشورهای دیگر تلاش می‌کنند تخفیف ویژه داده می‌شود.

مثال ۱- شرکتی، ضمن اعلام قیمت کالاهای خود به خریداران احتمالی، اعلام نموده است که اگر تعداد سفارش کالا بیش از ۱۰۰ واحد و کم‌تر از ۲۰۱ واحد باشد از یک درصد تخفیف و اگر سفارشی از ۲۰۱ واحد تا ۳۵۰ واحد باشد از دو درصد تخفیف و اگر سفارشی از ۳۵۱ واحد تا ۵۰۰ واحد باشد از سه درصد تخفیف و اگر از ۵۰۱ واحد به بالا باشد چهار درصد تخفیف داده می‌شود. هریک از تخفیفات فوق را «تخفیف تجاری» می‌نامند.

۲-۱-۳ تخفیفات نقدی: چنان‌چه در کشوری، وضعیت تولید به حدی باشد که تولیدکنندگان نیازمند بازاریابی باشند و رقابت تجاری چشم‌گیری بین تولیدکنندگان و توزیع‌کنندگان وجود داشته باشد، معمولاً مؤسسات کالاهای خود را به صورت نسیه به فروش می‌رسانند؛ یعنی پس از اخذ سفارش، کالا را به مشتری یا توزیع‌کننده تحویل می‌دهند و در تاریخ معینی، که «سررسید بدهی» نامیده می‌شود، نسبت به وصول وجه کالا اقدام می‌نمایند تا خریدار ظرف مدت مزبور، که معمولاً بین یک تا سه ماه است، بهای کالای خریداری یا خدمت را بپردازد. بدیهی است چنان‌چه خریدار قبل از انقضای زمان توافقی، بهای کالای خریداری یا خدمت را بپردازد به وی تخفیف خاصی داده می‌شود، که این نوع تخفیف را تخفیف نقدی گویند. اگر مدت زمان پرداخت صورت حساب ۳۰ روز تعیین شده باشد، اصطلاحاً به آن «نسیه ۳۰ روزه» گفته می‌شود و مخفف آن ن/۳۰ است. گاهی مؤسسات، برای سرعت بخشیدن به وصول مطالبات، تخفیف خاصی را پیش‌نهاد می‌نمایند. مثلاً اگر مهلت پرداخت بدهی ۳۰ روز باشد و مشتری، ظرف ۱۵ روز پرداخت کند از یک درصد تخفیف بهره‌مند می‌گردد و به صورت (ن/۳۰-۱۵) نشان داده می‌شود که در آن (ن) یعنی نسیه، (۳۰) یعنی ۳۰ روز مهلت بدهی، (۱) یعنی

یک درصد تخفیف و (۱۵) یعنی طول زمان برخورداری از تخفیف از زمان خرید کالا.

مثال ۲- شرکتی ضمن ارسال فاکتور کالاهای فروخته شده، به خریداران اعلام نموده است اگر قیمت کالا را ظرف مدت ۵ روز پرداخت نمایند از ۳ درصد تخفیف، و چنانچه ظرف مدت ۱۵ روز پرداخت نمایند از ۲ درصد تخفیف و اگر ظرف مدت ۲۵ روز پرداخت نمایند از یک درصد تخفیف بهره‌مند خواهند شد. این نوع تخفیفات را تخفیفات نقدی نامند.

مثال ۳- فرض کنید مغازه‌داری ۲۵۰ واحد از کالای شرکت مثال ۱ را خریداری نموده است. اگر قیمت رسمی اعلام شده‌ی کالا ۴۰۰ ریال باشد، فاکتور مربوط چه مبلغی می‌باشد؟ هم‌چنین، اگر براساس مثال ۲، مدت ۲۴ روز بعد از تاریخ فاکتور، بدهی خود را بپردازد مبلغ پرداختی را تعیین کنید.

$$۲۵۰ \times ۴۰۰ = ۱۰۰,۰۰۰ \quad \text{قیمت رسمی ریال}$$

$$۱۰۰,۰۰۰ \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۲,۰۰۰ \quad \text{تخفیف تجاری ریال}$$

$$۱۰۰,۰۰۰ - ۲,۰۰۰ = ۹۸,۰۰۰ \quad \text{مبلغ فاکتور ریال}$$

$$۹۸,۰۰۰ \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۹۸۰ \quad \text{تخفیف نقدی ریال}$$

$$۹۸,۰۰۰ - ۹۸۰ = ۹۷,۰۲۰ \quad \text{مبلغ پرداختی ریال}$$

## ۳-۲ کارمزدها

ابتدا، به تعریف مزد در قانون کار توجه کنید. ماده ۳۵ قانون کار، در فصل سوم، مزد را چنین تعریف نموده است:

«مزد عبارت است از وجوه نقدی یا غیرنقدی و یا مجموع آن‌ها که در مقابل انجام کار به کارگر پرداخت می‌شود».

تبصره ۱- چنانچه مزد با ساعات انجام کار مرتبط باشد، «مزد ساعتی» و در صورتی که براساس میزان انجام کار یا محصول تولید شده باشد، «کارمزد» و چنانچه براساس محصول تولید شده یا میزان انجام کار در زمان معین باشد، «کارمزد ساعتی» نامیده می‌شود. برای پرداخت اجرت کار مناسب، باید به عوامل مختلفی توجه داشت؛ زیرا پرداخت حداقل اجرت کار به منظور سود بیش‌تر ممکن است نتیجه‌ی معکوس داشته باشد. یعنی پرداخت اجرت کم‌تر از معمول امکان دارد کمیّت یا کیفیت کالا را پایین بیاورد و در نهایت باعث کاهش سود گردد. گاهی مشاهده شده است که با پرداخت

اجرت بالا به کارگر متخصص و با تجربه، نه تنها کمیت تولید افزایش یافته، بلکه کیفیت نیز بهبود یافته است. به هر حال، دقت در پرداخت اجرت مناسب می‌تواند به کارایی مؤسسه بیفزاید. از جمله عواملی که در انتخاب روش پرداخت باید در نظر گرفت، یکی رضایت نیروی کار، دیگری نوع کار و بالأخره قابلیت فهم روش پرداخت برای کارگران است. روش‌های پرداخت عبارت‌اند از:

**۱-۲-۳ پرداخت براساس زمان کار (مزد ساعتی):** در این روش، با کارگر توافق می‌شود که به ازای مثلاً هر یک ساعت کار مبلغ  $a$  ریال پرداخت گردد. بنابراین اگر کارگر  $n$  ساعت در هفته کار کند و در هر روز، ساعت کار از حد معینی (مثلاً ۸ ساعت) بیش تر نشود، مبلغ  $n \times a$  ریال به وی پرداخت گردد.

$$\text{مزد ساعتی} = n \times a$$

بدیهی است در این روش، انگیزه‌ی خاصی برای تلاش بیش‌تر کارگر ایجاد نمی‌شود.

**۲-۲-۳ پرداخت کارمزد براساس تعداد تولید:** در این روش، با کارگر توافق می‌شود که به ازای هر واحد تولید مبلغ  $b$  ریال به وی پرداخت گردد. بنابراین، اگر کارگر ظرف مدت معینی  $m$  واحد کالا تولید نماید، کارمزد او برابر با  $m \times b$  ریال خواهد بود.

$$\text{کارمزد} = m \times b$$

واضح است که در این روش کیفیت کالا ممکن است کاهش یابد، اما به کمیت افزوده خواهد شد. برای حل این مشکل، لازم است کالاها را از لحاظ کیفیت کنترل نمود و اگر کیفیت از حد معینی کم‌تر باشد، کالا غیرقابل قبول تلقی می‌شود و باید از تعداد تولید کسر گردد.

**۳-۲-۳ کارمزد ساعتی:** چنان‌چه پرداخت براساس محصول تولید شده یا میزان انجام کار در زمان معین باشد به آن کارمزد ساعتی گویند. به عبارت دیگر کارمزد ساعتی، مزدی است که در مقابل انجام کار مشخص در زمان مشخصی پرداخت می‌گردد.

**۴-۲-۳ پرداخت قسمتی از سود مؤسسه به کارگران:** در این روش، کارگر و کارفرما توافق می‌نمایند که کارمزدها براساس یکی از سه روش قبلی باشد؛ اما در پایان سال درصدی از سود کارگاه به نسبت زمان کار هر کارگر یا تعداد تولید هر کارگر یا ... بین ایشان تقسیم گردد. به این طریق، هم کیفیت و هم کمیت کالا افزایش می‌یابد. بدیهی است چنان‌چه سود پایان سال به صورت سهام در اختیار کارکنان قرار گیرد و ایشان در سرمایه‌ی کارخانه نیز شریک شوند نتایج بهتری به دنبال خواهد داشت. واضح است که انتخاب هر یک از روش‌های فوق به نوع کار، قدمت کارگاه، تعداد پرسنل هر واحد تولیدی، سود و زیان سنوات قبل و بالأخره سیاست مدیریت بستگی دارد.

### ۳-۳ معامله به صورت قسطی

بسیاری از فروشندگان، برای جذب بیش تر مشتریان ترجیح می دهند کالاهای خود را به صورت اقساط به فروش برسانند تا هم کالای بیش تری فروخته شود و هم سود بیش تری عاید آن ها گردد. به عبارت دیگر، با فروش اقساطی برای مشتریان فاقد قدرت خرید، ایجاد قدرت خرید نمایند. این امر موجب می شود که بهای کالای فروش رفته، برای مدتی نزد خریدار بماند. در این حالت باید سود تضمین شده ی مربوط را محاسبه نمود و سپس اصل و فرع به دست آمده را قسط بندی کرد. اگر سود فروشنده را با  $I$ ، سود تضمین شده ی قسط اول کل مبلغ اقساط را با  $K$  نشان دهیم، پس خواهیم داشت  $K = S \times r \times \frac{1}{12}$  و چنان چه پرداخت اقساط، هر دو ماه یک بار باشد به جای  $\frac{1}{12}$  از  $\frac{2}{12}$  استفاده می کنیم. هرگاه تعداد اقساط را با  $N$  نشان دهیم، فرمول:  $I = \frac{K(N+1)}{2}$  سود فروشنده را معین می کند و اگر کل مبلغ اقساط را با  $S$  نشان دهیم، فرمول  $Q = \frac{S+I}{N}$  مبلغ هر قسط را مشخص می کند ( $Q$  نشان دهنده ی مبلغ هر قسط است).

مثال ۴- شخصی یک رادیو ضبط خرید و مبلغ  $1,000,000$  ریال آن را به طور نقدی پرداخت نمود و مقرر شد باقی مانده را به صورت ۸ قسط  $150,000$  ریالی در هر ماه پرداخت کند. اگر قیمت فروش نقدی آن  $1,210,000$  ریال باشد، مبلغ سود پرداختی را محاسبه کنید.

$$150,000 \times 8 = 1,200,000$$

$$1,200,000 + 100,000 = 1,300,000$$

$$1,300,000 - 1,210,000 = 90,000$$

سود پرداختی ریال

مثال ۵- شخصی تلویزیونی را به مبلغ  $2,500,000$  ریال به اقساط خریده است. به این ترتیب که  $500,000$  ریال آن را نقد و بقیه را در شش قسط (ظرف شش ماه) پرداخت نماید. اگر نرخ سود تضمین شده ( $I$ ) برابر با  $6\%$  توافق شده باشد و مبلغ  $500,000$  ریال عوارض شهرداری باشد، مبلغ هر قسط را مشخص کنید.

$$2,500,000 - 500,000 = 2,000,000$$

کل مبلغ اقساط

$$K = S \times r \times \frac{1}{12}$$

$$I = \frac{K(N+1)}{2}$$

$$Q = \frac{S+I}{N}$$

$$K = \text{سود تضمین شده ی قسط اول} = 2,000,000 \times \frac{6}{100} \times \frac{1}{12} = 10,000$$

$$I = \frac{10,000(6+1)}{2} = 35,000$$

$$35,000 + 5,000 = 40,000$$

$$2,000,000 + 40,000 = 2,040,000$$

$$2,040,000 \div 6 = 340,000$$

مبلغ هر قسط

### ۳-۴ ارزش فعلی و نهایی سالواره‌های عادی و دائمی

قسط یا سالواره یا قسط‌السنین عبارت است از مبالغ مساوی پول که در فواصل زمانی معین دریافت یا پرداخت می‌شود.

ارزش نهایی: عبارت است از حاصل جمع کلیه‌ی اقساط پرداخت شده و سود آن‌ها در انتهای دوره.

ارزش فعلی: شامل مجموع ارزش‌های کنونی یک سری پرداخت‌های مساوی است که در فواصل منظمی از زمان صورت می‌گیرد.

قسط‌السنین عادی: یک سری دریافت یا پرداخت‌های پولی مساوی است که در پایان هر سال پرداخت می‌شود.

قسط‌السنین دائمی: یک سری دریافت یا پرداخت‌های پولی مساوی است که در اول هر سال پرداخت می‌شود.

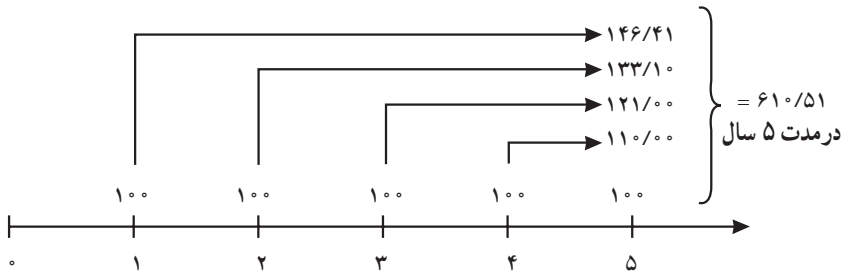
با توجه به تعاریف فوق، در ادامه با مثال‌هایی نحوه‌ی محاسبه‌ی ارزش فعلی و نهایی سالواره‌های عادی و دائمی توضیح داده می‌شود.

#### ۳-۴-۱ ارزش نهایی اقساط مساوی به روش عادی « $FV_A$ »

مثال ۶- فرض کنید به خاطر بدهی که دارید باید در طی ۵ سال، پایان هر سال ۱۰۰ ریال بپردازید. اگر نرخ سود تضمین شده‌ی سالانه برابر ۱۰٪ باشد. ارزش نهایی (آتی) پول‌هایی که طی ۵ سال می‌پردازید چه قدر است؟

برای حل این مثال کافی است نمودار این اقساط را ترسیم نماییم.





$$FV_A = 100(1/10)^4 + 100(1/10)^3 + 100(1/10)^2 + 100(1/10)^1 + 100 = 610/51$$

از آن جا که محاسبات فوق وقت گیر است می توان از یک فرمول کلی به شرح زیر استفاده نمود. این فرمول ارزش نهایی اقساط مساوی ۱ ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می شوند ( $FV_A$ ) را نشان می دهد.

$$FV_A = \sum_{t=1}^N Pmt_t (1+i)^{N-t} = Pmt \cdot \frac{(1+i)^N - 1}{i}$$

که در آن :

$i$  = نرخ سود تضمین شده ؛

$N$  = تعداد سال هایی که طی آن قسط ها پرداخت می شوند.

$Pmt$  = بیانگر مبلغ هر قسط است.

توجه: در حل مثال ها و تمرینات این قسمت، نرخ سود تضمین شده ثابت فرض می شود.

در این صورت در مثال فوق داریم که :

$$FV_A = 100 \cdot \frac{(1/10)^5 - 1}{-0/10} = 610/51$$

به دلیل پیچیدگی این فرمول، در این کتاب برای حل تمرین ها و مثال ها از جدول ارزش نهایی سالواره های عادی (جدول ۱) استفاده می شود. منظور از سالواره های عادی، یک سری دریافت یا پرداخت های پولی مساوی است که در پایان هر سال رخ می دهند.

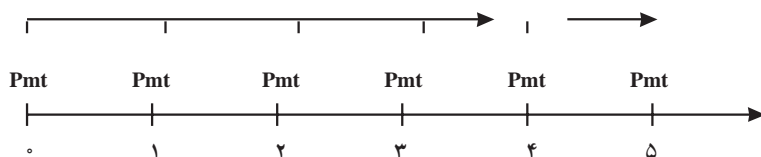
از این رو جهت حل مثال ۶ کافی است به جدول ۱ انتهای کتاب مراجعه نمایید. ابتدا نرخ بهره را از روی اعداد بالای ستون های جدول پیدا کنید. در مثال ۶، نرخ بهره ۱۰٪ است. بنابراین، در نیمه ی پایین وسط صفحه نرخ ۱۰٪ را می یابیم. بعد از ستون سمت چپ جدول مقدار  $n$ ، که بیانگر تعداد سال هایی است که اقساط طی آن دریافت یا پرداخت می شوند، عدد ۵ را پیدا می کنیم. از تلاقی

سطر  $n = 5$  و ستون  $10\%$  به عدد  $6/105100$  می‌رسیم که همان  $FV_A$  است که اگر آن را در مبلغ هر قسط (که در این مثال  $100$  ریال است) ضرب کنیم ارزش نهایی اقساط به دست می‌آید، که برابر  $6190/51$  ریال است (که قبلاً نیز به همین جواب رسیده بودیم).....

n	8/0%	9/0%	10/0%
1	1/000000	1/000000	1/000000
2	2/080000	2/090000	2/100000
3	3/246400	3/278100	3/310000
4	4/506112	4/573129	4/641000
5	5/866601000000	5/984710000000	6/105100

۲-۳ ارزش نهایی اقساط به روش پرداختنی ( $FV_{AD}$ )

مثال ۷- حال فرض کنید در مثال ۶ اگر قرار بود اقساط مذکور را در ابتدای هر سال پرداخت کنید در چنین حالتی مدل پرداخت اقساط شما به صورت زیر درمی‌آید.



برای حل این مثال، می‌توان از فرمول کلی زیر استفاده نمود که ارزش نهایی اقساط مساوی  $1$  ریالی ( $FV_{AD}$ ) را که در ابتدای هر سال دریافت یا پرداخت می‌شوند، نشان می‌دهد. به این گونه اقساط اصطلاحاً سالواره‌های پرداختنی نیز می‌گویند.

$$FV_{AD} = Pmt \cdot \frac{(1+i)^N - 1}{i} \cdot (1+i)$$

در این فرمول :

$i$  = نرخ سود تضمین شده ؛

$N$  = تعداد سال‌هایی که طی آن قسط‌ها پرداخت می‌شوند ؛

$Pmt$  = بیانگر مبلغ هر قسط است.

در این صورت برای مثال ۷ داریم :

$$FV_{AD} = 100 \cdot \frac{(1/10)^5 - 1}{0/10} \cdot (1/10) = 671/56$$

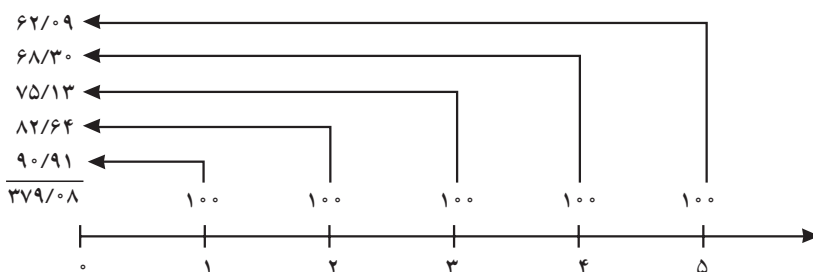
به دلیل پیچیدگی فرمول فوق در این کتاب برای حل مثال‌ها و تمرین‌ها از همان جدول ۱ ضمیمه کتاب استفاده می‌شود. فقط کافی است عدد به دست آمده از جدول (به شرحی که قبلاً گفته شد) را در مبلغ هر قسط و  $(1+i)$  ضرب کنید، یعنی

$$6/105100 \times 100 \times (1/1) = 671/561$$

### ۳-۴-۳ ارزش فعلی پرداخت اقساط به روش عادی « $PV_A$ »:

همان‌طور که می‌دانید ۱ ریال امروز با ارزش‌تر از یک ریالی است که شما در چند سال بعد خواهید داشت. به عبارت دیگر، اگر شما الان با ۱۰۰۰ تومان می‌توانید یک ساندویچ بخرید قطعاً ۱۰ سال دیگر این ساندویچ به قیمتی بسیار بیش‌تر از ۱۰۰۰ تومان فروخته می‌شود. این مثال ساده نشان‌دهنده‌ی ارزش زمانی پول است. از این رو شما می‌توانید ۱۰ هزار تومان در حساب بانکی با سود تضمین‌شده سرمایه‌گذاری کنید تا ارزش زمانی پولتان حفظ شود. با توجه به این توضیحات، حال می‌خواهیم ببینیم اگر نرخ سود تضمین‌شده ۱۰٪ باشد مجموع این ۱۰۰ ریال‌هایی که در پایان هر سال طی ۵ سال می‌پردازیم الان چه قدر ارزش دارند.

$$PV_A = \frac{100}{(1/10)^1} + \frac{100}{(1/10)^2} + \frac{100}{(1/10)^3} + \frac{100}{(1/10)^4} + \frac{100}{(1/10)^5} = 379/08$$



از آن‌جا که محاسبات فوق وقت‌گیر است، می‌توان از یک فرمول کلی به شرح زیر استفاده نمود. این فرمول ارزش فعلی اقساط مساوی ۱ ریالی را، که در پایان هر سال پرداخت می‌شوند  $(PV_A)$ ، نشان می‌دهد:

$$PV_A = \sum_{t=1}^N \frac{Pmt_t}{(1+i)^t} = Pmt \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^N}}{i}$$

که در آن :

$i =$  نرخ سود تضمین شده ؛

$N =$  تعداد سال‌هایی که طی آن قسط‌ها پرداخت می‌شوند ؛

$Pmt =$  بیانگر مبلغ هر قسط است.

در این صورت برای مثال فوق داریم :

$$PV_A = 100 \times \frac{1 - \frac{1}{(1+10\%)^5}}{0.10} = 379.08$$

به دلیل پیچیدگی فرمول فوق در این کتاب برای حل تمرین‌ها و مثال‌ها از جدول ارزش فعلی سالواره‌های عادی استفاده می‌شود. منظور از سالواره‌های عادی، یک سری دریافت یا پرداخت‌های بولی مساوی است که در پایان هر سال رخ می‌دهند.

برای حل این مثال، کافی است به جدول ۲ انتهای کتاب مراجعه نمایید. ابتدا نرخ بهره را از روی اعداد بالای ستون‌های جدول پیدا کنید. در مثال ۶، نرخ بهره ۱۰٪ است. بنابراین، در نیمه‌ی پایین وسط صفحه نرخ ۱۰٪ را می‌یابیم بعد از ستون سمت چپ جدول مقدار  $n$ ، که بیانگر تعداد سال‌هایی است که اقساط طی آن دریافت یا پرداخت می‌شوند، عدد ۵ را پیدا می‌کنیم. از تلاقی سطر  $n=5$  و ستون ۱۰٪ به عدد ۳/۷۹۰۷۸۷ می‌رسیم که همان  $PV_A$  است، که اگر آن را در مبلغ هر قسط (که در این مثال ۱۰۰ ریال است) ضرب کنیم ارزش فعلی اقساط به دست می‌آید که برابر است با ۳۷۹/۰۸ ریال (که قبلاً نیز به همین جواب رسیده بودیم).

n	۸٪	۹٪	۱۰٪
۱	۰/۹۲۵۹۲۶	۰/۹۱۷۴۳۱	۰/۹۰۹۰۹۱
۲	۱/۷۸۳۲۶۵	۱/۷۵۹۱۱۱	۱/۷۳۵۵۳۷
۳	۲/۵۷۷۰۹۷	۲/۵۳۱۲۹۵	۲/۴۸۶۸۵۲
۴	۳/۳۱۲۱۲۷	۳/۲۳۹۷۲۰	۳/۱۶۹۱۸۶۵
۵	۳/۹۹۲۷۱۰	۳/۸۸۹۶۵۱	۳/۷۹۰۷۸۷

۴-۳ ارزش فعلی پرداخت اقساط به روش پرداختی « $PV_{AD}$ »

مثال ۸- حال فرض کنید در مثال قبل شما قرار بود اقساط مذکور را در ابتدای هر سال

پرداخت کنید. در چنین حالتی مدل پرداخت اقساط شما به صورت زیر است.



برای این که در این حالت بیابید که ارزش فعلی پول‌هایی که طی ۵ سال می‌پردازید الان چه قدر است، به محاسبات زیر توجه نمایید.

$$PV_A = 100 + \frac{100}{(1/1.10)^1} + \frac{100}{(1/1.10)^2} + \frac{100}{(1/1.10)^3} + \frac{100}{(1/1.10)^4} = 416/98$$

از آن جا که محاسبات فوق وقت گیر است می‌توان از یک فرمول کلی به شرح زیر استفاده نمود. این فرمول ارزش فعلی اقساط مساوی ۱ ریالی را، که در ابتدای هر سال پرداخت می‌شوند ( $PV_{AD}$ )، نشان می‌دهد.

$$PV_{AD} = Pmt \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+i)^{(N-1)}}}{i} + Pmt$$

که در آن :

$i$  = نرخ سود تضمین شده ؛

$N$  = تعداد سال‌هایی که طی آن قسط‌ها پرداخت می‌شوند ؛

$Pmt$  = بیانگر مبلغ هر قسط است.

در این صورت برای مثال ۷ داریم :

$$PV_{AD} = 100 \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1/1.10)^{(5-1)}}}{0.10} + 100 = 416/98$$

به دلیل پیچیدگی فرمول فوق، برای حل مثال‌ها و تمرین‌ها از جدول ۳ استفاده می‌شود. این جدول ارزش فعلی اقساط مساوی ۱ ریالی را نشان می‌دهد که در ابتدای هر سال دریافت یا پرداخت می‌شوند.

بر این اساس جهت حل مثال ۸، کافی است به جدول ۳ انتهای کتاب مراجعه نمایید. ابتدا نرخ بهره را از روی اعداد بالای ستون‌های جدول پیدا کنید. در مثال ۶، نرخ بهره ۱۰٪ است. بنابراین،

در نیمه‌ی پایین وسط صفحه نرخ  $10\%$  را می‌یابیم. بعد از ستون سمت چپ جدول مقدار  $n$  که بیانگر تعداد سال‌هایی است که اقساط طی آن دریافت یا پرداخت می‌شوند، عدد  $5$  را پیدا می‌کنیم. از تلافی سطر  $n = 5$  و ستون  $10\%$  به عدد  $4/169865$  می‌رسیم که همان  $PV_{AD}$  است، که اگر آن را در مبلغ هر قسط (که در این مثال  $100$  ریال است) ضرب کنیم ارزش فعلی اقساط به دست می‌آید که برابر است با  $416/98$  ریال که قبلاً نیز به همین جواب رسیده بودیم.

$n$	$8\%$	$9\%$	$10\%$
1	1/000000	1/000000	1/000000
2	1/925926	1/917431	1/909091
3	2/783265	2/759111	2/735587
4	3/577097	3/531295	3/486852
5	4/312127	4/239720	4/169865

### ۳-۵ نحوه‌ی برآورد ذخیره‌ی مطالبات مشکوک الوصول

همان طوری که قبلاً ذکر شد، فروش بیش‌تر مؤسسات تجاری به صورت نسیه است. زیرا فروش به طور نسیه باعث افزایش میزان فروش می‌شود. ولی گاهی به دلایل مختلف از جمله ورشکستگی، فوت و یا ... ممکن است بعضی از خریداران نسیه، قادر به پرداخت قسمتی یا تمام بدهی خود نباشند. بنابراین، هر مؤسسه‌ی تجاری که فروش به صورت غیر نقدی و اقساطی دارد باید پیش‌بینی کند که قسمتی از مطالباتش ممکن است در آینده وصول نشود. به همین دلیل باید حسابی به نام ذخیره‌ی مطالبات مشکوک الوصول افتتاح نماید. این حساب در پایان سال مالی، به صورت کاهش‌دهنده‌ی حساب‌های دریافتنی در ترازنامه عمل می‌کند. هم‌چنین به صورت هزینه در حساب سود و زیان منظور می‌گردد، که باعث کاهش سود یا افزایش زیان خواهد شد. اگرچه برآورد مبلغ مطالبات مشکوک الوصول به نظر مدیریت بستگی دارد ولی روش‌هایی برای تخمین این مبالغ وجود دارد که می‌تواند برای مؤسسه راهنما باشد. این روش‌ها عبارت‌اند از:

۳-۵-۱ روش حذف مستقیم (روش اول): اگر مدیریت پیش‌بینی کند که بعضی از مطالبات قابل وصول نباشد آن را از حساب‌های دریافتنی حذف می‌کند. مثلاً ممکن است مدیریت، به علت ورشکستگی یکی از خریداران یا تأخیر بسیار طولانی در پرداخت تصمیم بگیرد تمام یا قسمتی از بدهی

وی را از دفاتر حذف کند. البته این روش چندان مناسب نیست و کم‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

### ۲-۵-۳ روش برآورد مطالبات مشکوک الوصول بر مبنای درصدی از فروش (روش

دوم): اگر رقم فروش نقدی بسیار پایین باشد یا درصد ثابتی از کل فروش باشد، می‌توان از این روش استفاده نمود. در این روش با توجه به تجربیات گذشته و وضعیت اقتصادی منطقه و مشتریان، ذخیره‌ی مطالبات مشکوک الوصول معادل درصد معینی از فروش تعیین می‌گردد.

مثال ۹- یک شرکت بازرگانی سالیانه ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش دارد که حدود ۳,۰۰۰,۰۰۰ ریال آن نقدی است (همه ساله حدود ۳۰٪ فروش نقدی و مابقی فروش نسیه است). اگر ذخیره‌ی مطالبات مشکوک الوصول، حدود ۲ درصد کل فروش پیش‌بینی شده باشد مبلغ آن را مشخص کنید.

$$\text{میزان ذخیره‌ی مطالبات مشکوک الوصول} = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۲}{۱۰۰} = ۲۰۰,۰۰۰$$

### ۳-۵-۳ روش برآورد مطالبات مشکوک الوصول بر مبنای درصدی از فروش‌های

نسیه (روش سوم): در این روش، که نسبت به روش‌های قبلی دقیق‌تر است، برآورد ذخیره‌ی مطالبات مشکوک الوصول بر مبنای درصدی از فروش‌های نسیه است؛ زیرا اصولاً فروش‌های نقدی تأثیری در ذخیره‌های مطالبات مشکوک الوصول ندارد. در این روش نیز براساس تجربیات گذشته، شرکت‌های مشابه، وضعیت خریداران و وضعیت اقتصادی منطقه و مشتریان، درصدی از فروش نسیه به صورت ذخیره مطالبات مشکوک الوصول پیش‌بینی می‌گردد.

مثال ۱۰- اگر در شرکت مثال ۹، ذخیره‌ی مطالبات مشکوک الوصول حدود ۲/۵ درصد فروش‌های نسیه پیش‌بینی شده باشد، مبلغ آن را مشخص کنید.

$$\text{فروش نسیه} = ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۳,۰۰۰,۰۰۰ = ۷,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۷,۰۰۰,۰۰۰ \times \frac{۲}{۵} = ۲۸۰,۰۰۰$$

### ۴-۵-۳ برآورد مطالبات مشکوک الوصول بر مبنای درصدی از مانده‌ی حساب‌های

دریافتنی (روش چهارم): به عقیده‌ی بعضی از صاحب‌نظران، این برآورد دقیق‌ترین روش‌هاست؛ زیرا اصولاً خیلی از خریداران، بدهی خود را به موقع پرداخت می‌نمایند و تعداد کمی هستند که در پرداخت خود تأخیر دارند و روشن است از بین کسانی که تأخیر در پرداخت دارند، معدودی بدهی خود را نمی‌پردازند. برای روشن‌تر شدن موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۱- شرکتی، سالیانه ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال فروش دارد که ۴۰٪ به صورت نقدی و مابقی به صورت نسیه است. مانده‌ی حساب‌های دریافتنی شرکت ۵۰,۰۰۰ ریال است. مدیر فروش معتقد به

روش دوم با برآورد ۳ درصد است. معاون بازرگانی شرکت، روش سوم را با برآورد ۲ درصد می‌پسندد و بالأخره مدیر عامل معتقد به روش چهارم با برآورد ۲۵ درصد است. با توجه به نظرات هر کدام، ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول شرکت را محاسبه کنید.

$$1,000,000 \times \frac{40}{100} = 400,000 \quad \text{فروش نقدی}$$

$$1,000,000 - 400,000 = 600,000 \quad \text{فروش نسبه}$$

روش دوم: میزان مطالبات مشکوک‌الوصول براساس نظر مدیر فروش

$$1,000,000 \times \frac{3}{100} = 30,000$$

روش سوم: میزان مطالبات مشکوک‌الوصول براساس نظر معاون بازرگانی

$$600,000 \times \frac{2}{100} = 12,000$$

روش چهارم: میزان مطالبات مشکوک‌الوصول براساس نظر مدیر عامل

$$50,000 \times \frac{25}{100} = 12,500$$

البته روش‌های عملی‌تری نیز وجود دارد که از بحث این کتاب خارج است. برای مثال در بعضی از مؤسسات، با توجه به قدمت حساب‌های دریافتی، آن‌ها را تفکیک و به صورت یک ماهه، سه ماهه، شش ماهه، یک ساله، دو ساله و بیش‌تر دسته‌بندی می‌کنند و درصد بالایی به نسبت قدمت هر کدام پیش‌بینی می‌نمایند. مثلاً ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را یک ماهه، یک درصد، سه ماهه، پنج درصد، شش ماهه، ده درصد، یک ساله، بیست و پنج درصد و بالأخره دو ساله پنجاه درصد برآورد می‌نمایند.



## تمرین های فصل سوم

۱- قیمت هر واحد کالایی ۳۰۰ ریال است. اگر از ۱۰۱ تا ۳۰۰ واحد خریداری شود، ۲ درصد تخفیف و اگر از ۳۰۱ تا ۵۰۰ واحد خریداری گردد ۵ درصد تخفیف و برای بیش از ۵۰۱ واحد خرید، ۸ درصد تخفیف داده می شود. صورت حساب این شرکت باید حداکثر ظرف یک ماه پرداخت گردد. ولی اگر در کم تر از ده روز پرداخت شود ۳ درصد تخفیف و چنانچه در کمتر از ۲۰ روز پرداخت شود ۱ درصد تخفیف منظور خواهد شد. حال اگر شخصی ۱۵۶ واحد خریداری کند و بهای آن ها را بخواهد ظرف ۴ روز پرداخت کند، چه مبلغی را باید بپردازد؟ اگر ۴۰۰ واحد خریداری کرده باشد و بخواهد ظرف پانزده روز پرداخت نماید، چه مبلغی را باید بپردازد؟

۲- کارگری روزانه ۸ ساعت کار می کند و ۳ واحد از کالایی را تولید می نماید. اگر دستمزد او ساعتی ۲۰,۰۰۰ ریال باشد یا قبول کند که در ازای هر واحد تولید کالا ۵,۰۰۰ ریال دریافت نماید، کدام روش به صلاح کارفرماست؟ پرداخت براساس ساعت کار یا پرداخت براساس واحدهای تولید شده؟ چرا؟ اگر روش پیشنهادی شما عملی شود چه محسّنات و چه معایبی به دنبال خواهد داشت؟ توضیح دهید.

۳- برای کارخانه ای، دستگاهی خریداری شده که قیمت نقد آن ۲۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال تعیین گردیده است. اگر کارخانه ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال از بهای نقد آن را به صورت پیش قسط و بقیه را در ۲ سال با اقساط متساوی و متوالی ماهانه با نرخ ۱۲٪ پرداخت نماید، مبلغ هر قسط را معین کنید. چنانچه اقساط دو ماه یک بار پرداخت گردد مبلغ هر قسط را محاسبه نمایید.

۴- یک شرکت، شرایط فروش کامیون های تولیدی خود را به این شرح اعلام نموده است:

۶۴,۲۰۰,۰۰۰

قیمت نقد

ولی به صورت اقساط نیز می توان کامیون را خریداری کرد. در این صورت  $\frac{1}{3}$  مبلغ را به طور نقدی و مابقی را به مدت ۲ سال با نرخ بهره ۱۵٪ به صورت اقساط ماهیانه دریافت می دارد. اولاً، مبلغ هر قسط را معین کنید.

ثانیاً، اگر پیش قسط را به  $\frac{1}{4}$  مبلغ نقد کاهش و مدت بازپرداخت اقساط را به ۳ سال افزایش دهد، مبلغ هر قسط کم تر می شود یا بیش تر؟ چه قدر؟

۵- فروشگاه، یک دستگاه تلویزیون را با دریافت ۱۰ درصد قیمت به صورت نقدی و بقیه را به صورت اقساط ۱۸ ماهه فروخت و مقرر شد که با نرخ ۸ درصد در سال سود تضمین شده بگیرد. اگر

۴۸,۰۰۰ ریال عوارض شهرداری به قیمت فروش افزوده شود و قیمت نقدی تلویزیون ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال باشد مبلغ هر قسط را مشخص کنید.

۶- فروشگاه، یخچالی را با مبلغ ۶۰۰,۰۰۰ ریال نقد و ده قسط ۲۳۰,۰۰۰ ریالی فروخت. اگر عوارض شهرداری این یخچال ۳۰,۰۰۰ ریال و قیمت نقدی آن ۲,۶۰۰,۰۰۰ ریال باشد، مبلغ سود تضمین شده در این معامله را محاسبه کنید.

۷- هرگاه دارنده‌ی سفته‌ای به مبلغ ۴۰۰,۰۰۰ ریال موافقت نماید که بدهکار وجه آن را به اقساط مساوی ماهانه در ۲ سال بازپرداخت کند و نرخ بهره ۶٪ باشد، الف) مبلغ هر قسط را مشخص نمایید.

ب) بدهکار تا پایان دوره، چه مبلغی بیش از مبلغ سفته پرداخت خواهد نمود؟ (اولین قسط یک ماه بعد از سررسید سفته پرداخت می‌گردد).

۸- قیمت اتومبیلی ۸۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال است. فروشنده حاضر است ۵۰ درصد قیمت را نقدی و مابقی را به صورت اقساط ماهیانه ظرف یک سال دریافت نماید. اگر نرخ سود تضمین شده ۱۰ درصد باشد، اقساط اتومبیل را محاسبه کنید.

۹- قیمت نقدی تلویزیونی ۴,۲۰۰,۰۰۰ ریال است. به دو روش می‌توانیم برای خرید آن اقدام کنیم:

الف) مبلغ ۴,۲۰۰,۰۰۰ ریال از بانکی با بهره ۱۸٪ دریافت و در ۱۲ قسط پرداخت نمایم.  
ب) بنابر اعلام فروشگاه قیمت قسطی این تلویزیون ۴,۸۰۰,۰۰۰ ریال در ۱۲ قسط مساوی است.

انتخاب کدام روش در خرید این تلویزیون، برای ما باصرفه‌تر است؟ چه قدر؟

۱۰- ارزش نهایی اقساط ۵۰۰ ریالی را، که طی ۴ سال با نرخ سود تضمینی ۴٪ پرداخت می‌شوند، در دو حالت زیر با استفاده از جدول ضمیمه‌ی کتاب محاسبه نمایید:

الف) اقساط در انتهای هر سال پرداخت شوند.

ب) اقساط در ابتدای هر سال پرداخت شوند.

۱۱- شخصی می‌خواهد با سپرده‌گذاری در بانک بعد از ۵ سال ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال در حساب خود داشته باشد، اگر نرخ سود تضمین شده ۱۸٪ باشد و قرار باشد که مشتری در ابتدای هر سال مبلغی را به حساب واریز کند این مبلغ را محاسبه کنید.

۱۲- حامد و زیبا به تازگی صاحب فرزندی شده‌اند. آن‌ها تصمیم گرفته‌اند تا یک حساب بانکی با نرخ سود تضمین شده‌ی ۱۸٪ برای فرزندشان افتتاح کنند و در انتهای هر سال مبلغی پول به این حساب واریز کنند، به نحوی که بعد از ۲۰ سال فرزندشان ۲۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال در حسابش داشته باشد. مقدار پولی را که این پدر و مادر هر سال باید به حساب فرزندشان واریز کنند، حساب کنید.

۱۳- ارزش فعلی اقساط ۵۰۰ ریالی را، که طی ۴ سال با نرخ سود تضمینی ۴٪ پرداخت می‌شوند، در دو حالت زیر با استفاده از جدول ضمیمه کتاب محاسبه نمایید:

الف) اقساط در انتهای هر سال پرداخت شوند.

ب) اقساط در ابتدای هر سال پرداخت شوند.

۱۴- حمید قصد دارد اتومبیلی به قیمت ۸۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال را به صورت قسطی طی ۱۰ قسط مساوی که پایان هر سال پرداخت می‌شود، بخرد. اگر نرخ سود تضمین شده ۱۰٪ باشد، مبلغ هر قسط را حساب کنید.

۱۵- مینا فرشی بافته است که ارزش آن هم اکنون ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال است. فردی حاضر شده است که فرش را به همین قیمت اما به طور قسطی بخرد. اگر نرخ سود تضمین شده ۱۶٪ باشد و خریدار بخواهد طی ۵ سال در ابتدای هر سال هر قسط خود را بپردازد، مینا باید مبلغ هر قسط را چه قدر تعیین کند؟

۱۶- شرکتی در سال گذشته ۸,۰۰۰ ریال فروش داشته، که ۵۰٪ آن به صورت نقدی و مابقی به صورت نسیه بوده است. مانده حساب‌های دریافتی شرکت ۳۵۰۰ ریال بوده است.

الف) ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را با روش برآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای ۴ درصد از فروش محاسبه نمایید.

ب) ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را با روش برآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای ۳ درصد از فروش‌های نسیه محاسبه کنید.

ج) ذخیره‌ی مطالبات مشکوک‌الوصول را با روش برآورد مطالبات مشکوک‌الوصول بر مبنای ۱۰ درصد از مانده‌ی حساب‌های دریافتی محاسبه نمایید.

د) به نظر شما، کدام یک از روش‌های فوق منطقی‌تر است؟

ه) به نظر شما، کدام یک از روش‌های فوق به نفع این شرکت است؟

### محاسبات استهلاك دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- استهلاك را تعريف کند.
- ۲- منظور از هزینه‌ی استهلاك را بیان کند.
- ۳- استهلاك دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت را به روش‌های مختلف محاسبه نماید.

### ۴- محاسبات استهلاك دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت

#### مقدمه

اصولاً هر مؤسسه‌ای از خدمات دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت خود، که ممکن است خرید آن مربوط به چند سال قبل باشد، بهره می‌گیرد. مثل خرید یک دستگاه وانت که چند سال قبل خریداری شده است و هم‌اکنون نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، برای این که عملکرد مؤسسه را در یک دوره‌ی معین مشخص کنیم لازم است کاهش ارزش ناشی از فرسودگی دارایی‌های بلندمدت یا دارایی ثابت به صورت هزینه منظور گردد. این نوع هزینه را که پرداخت نقدی در دوره‌ی فعلی ندارد، هزینه‌ی استهلاك گویند. استهلاك هر دارایی به مقدار خدمتی که به مؤسسه می‌دهد، یا به مدت زمانی که از شروع به کار آن می‌گذرد، هم‌چنین به عمر مفید و بالأخره به ارزش اسقاطی آن بستگی دارد.

#### ۴-۱ تعاریف استهلاك

قانون تجارت، پایین آمدن ارزش دارایی‌های بلندمدت یا دارایی‌های ثابت را که در نتیجه

استعمال، تغییرات فنی یا علل دیگر حادث شود، موجب استهلاك دانسته است. قانون مالیات‌های مستقیم، آن قسمت از دارایی‌های ثابت را، که بر اثر استعمال یا گذشت زمان یا سایر عوامل بدون توجه به تغییر قیمت‌ها تقلیل ارزش می‌یابد، قابل استهلاك تشخیص داده است.

در حسابداری، سرشکن کردن و تخصیص دادن بهای تمام شده‌ی دارایی‌های ثابت یا بلندمدت به طریقی معقول و منظم را بر دوره‌های استفاده از آن استهلاك می‌نامند. بهای تمام شده، معمولاً در طول مدت استفاده از دارایی ثابت می‌ماند. به طوری که در پایان عمر مفید دارایی، مجموع ارقام استهلاك دوره‌های استفاده از آن برابر می‌شود با بهای اولیه، منهای ارزشی که برای دارایی اسقاط در نظر گرفته شده است.

**تعریف استهلاك:** تقلیل تدریجی ارزش دارایی‌های بلندمدت یا دارایی‌های ثابت را به علت فرسودگی و منسوخ شدن، استهلاك گویند. در شرایط عادی و به طور معمول، می‌توان اذعان کرد که هر دارایی پس از مدتی (اعم از این که مورد استفاده قرار گرفته یا نگرفته باشد) مستهلک می‌شود و مقداری از ارزش خود را از دست می‌دهد. تفاوت قیمت تمام شده‌ی دارایی با ارزش اسقاط آن باید به شکلی بر دوره‌ی استفاده از آن تقسیم شود و به حساب هزینه‌ی استهلاك منظور گردد. برای محاسبه‌ی استهلاك، روش‌های مختلفی وجود دارد که به برخی از این روش‌ها اشاره می‌گردد. بدیهی است هیچ یک از روش‌های محاسبه‌ی استهلاك، هزینه‌ی دقیق و قطعی دارایی را در هر سال معین نمی‌کند، بلکه هزینه‌ی تقریبی آن را در سال محاسبه می‌نماید. این روش‌ها عبارت‌اند از:

- محاسبه‌ی استهلاك به روش خط مستقیم
- محاسبه‌ی استهلاك به روش مجموع سنوات
- محاسبه‌ی استهلاك به روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف

## ۲-۴ محاسبه‌ی استهلاك به روش خط مستقیم

اکثر مؤسسات، به دلیل سهولت، از این روش استفاده می‌نمایند. در این روش، ارزش اسقاطی دستگاه از قیمت خرید آن کسر و بر تعداد سال‌های تقریبی عمر مفید آن تقسیم می‌شود تا هزینه‌ی استهلاك یک سال تعیین گردد. اگر فرض کنیم دستگاهی به مبلغ  $a$  ریال خریداری شده است و پس از  $n$  سال مستهلک گردد و ارزش اسقاطی یا قراضه‌ی آن  $b$  ریال برآورد شده باشد و  $c$  هزینه‌ی استهلاك هر سال باشد، استهلاك سالانه دستگاه عبارت‌اند از:

$$c_k = \text{هزینه‌ی استهلاك}$$

c = بهای تمام شده

s = ارزش اسقاط

n = عمر مفید

$$c_k = \frac{c-s}{n}$$

مثال ۱ - دستگاه تراشی به مبلغ ۲۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری شده و پیش‌بینی شده است که بعد از ۱۰ سال کار، ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال ارزش داشته باشد. هزینه‌ی استهلاک سالانه‌ی آن را به روش خط‌مستقیم محاسبه کنید.  $c_K = \frac{(۲۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۴,۰۰۰,۰۰۰)}{۱۰} = ۱,۶۰۰,۰۰۰$ . واضح است که اگر بعد از ۶ سال، دستگاه تراش تعمیر اساسی شود و مبلغ ۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال هزینه‌ی تعمیر آن گردد، هزینه‌ی استهلاک آن از سال هفتم به بعد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

هزینه‌ی استهلاک شش سال ریال  $۱,۶۰۰,۰۰۰ \times ۶ = ۹,۶۰۰,۰۰۰$

ارزش دفتری دستگاه ریال  $۲۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۹,۶۰۰,۰۰۰ = ۱۰,۴۰۰,۰۰۰$

ارزش دفتری بعد از تعمیر ریال  $۱۰,۴۰۰,۰۰۰ + ۶,۰۰۰,۰۰۰ = ۱۶,۴۰۰,۰۰۰$

ارزش دفتری منهای ارزش اسقاط ریال  $۱۶,۴۰۰,۰۰۰ - ۴,۰۰۰,۰۰۰ = ۱۲,۴۰۰,۰۰۰$

هزینه‌ی استهلاک سالانه از سال هفتم ریال  $۱۲,۴۰۰,۰۰۰ \div ۴ = ۳,۱۰۰,۰۰۰$

بدیهی است در صورتی که تعمیر اساسی توانسته باشد چهار سال به عمر مفید دستگاه بیفزاید و قیمت قراضه‌ی آن ۴,۴۰۰,۰۰۰ ریال تخمین زده شود، استهلاک را به این صورت محاسبه می‌کنیم:

$$۱۶,۴۰۰,۰۰۰ - ۴,۴۰۰,۰۰۰ = ۱۲,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۴ + ۴ = ۸$$

هزینه‌ی استهلاک سالانه از سال هفتم به بعد ریال  $۱۲,۰۰۰,۰۰۰ \div ۸ = ۱,۵۰۰,۰۰۰$

### ۳-۴ محاسبه‌ی استهلاک به روش مجموع سنوات

همان‌گونه که می‌دانیم، معمولاً کاهش قیمت یک دارایی در سال‌های ابتدایی خرید بسیار بیش‌تر از سال‌های پایانی آن است. مثلاً قیمت یک دستگاه جرّاتقال پس از یک سال کار، تقریباً ۲۵٪ کاهش می‌یابد. در صورتی که در سال‌های هفتم و هشتم کم‌تر از ۵٪ از قیمت آن کم می‌شود. بنابراین، روش خط‌مستقیم اگر چه ساده است، ولی واقعی نیست. به همین دلیل می‌توان از روش مجموع سنوات، که به واقعیت نزدیک‌تر است، استفاده نمود. نرخ استهلاک در این روش، از تقسیم

سال‌های باقی‌مانده‌ی عمر مفید دستگاه بر مجموع ارقام سنوات آن به‌دست می‌آید.

مثال ۲- عمر مفید دستگاهی ۶ سال است، نرخ استهلاك هر سال آن را پیدا کنید.

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶=۲۱$$

مجموع سنوات

$$\frac{۶}{۲۱} \text{ نرخ استهلاك سال اول}$$

$$\frac{۵}{۲۱} \text{ نرخ استهلاك سال دوم}$$

$$\frac{۴}{۲۱} \text{ نرخ استهلاك سال سوم}$$

$$\frac{۳}{۲۱} \text{ نرخ استهلاك سال چهارم}$$

$$\frac{۲}{۲۱} \text{ نرخ استهلاك سال پنجم}$$

$$\frac{۱}{۲۱} \text{ نرخ استهلاك سال ششم}$$

برای سهولت می‌توان از فرمول

$$C_K = \frac{۲(n-K+1)(a-b)}{n(n+1)}$$

استفاده نمود که در آن  $a$ ، قیمت خرید دارایی با هزینه‌ی نصب و راه‌اندازی،  $b$ ، قیمت قراضه‌ی دارایی،  $n$ ، سال‌های عمر مفید دارایی و  $K$ ، سالی است که قرار است هزینه‌ی استهلاك آن تعیین شود و بالآخره  $C$ ، هزینه‌ی استهلاك سال مورد نظر است.

مثال ۳- شرکتی، یک دستگاه اتوبوس به مبلغ ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری نموده و پیش‌بینی

کرده است که این اتوبوس ۷ سال عمر مفید خواهد داشت و آن‌گاه به مبلغ ۸۰۰,۰۰۰ ریال به‌فروش برسد. هزینه‌ی استهلاك سالانه‌ی اتوبوس را به روش مجموع سنوات محاسبه نمایید.

$$C_1 = \frac{۲(۷-۱+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۱,۰۵۰,۰۰۰ \text{ ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاك سال اول}$$

$$C_2 = \frac{۲(۷-۲+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۹۰۰,۰۰۰ \text{ ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاك سال دوم}$$

$$C_3 = \frac{۲(۷-۳+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۷۵۰,۰۰۰ \text{ ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاك سال سوم}$$

$$C_4 = \frac{۲(۷-۴+۱)(۵,۰۰۰,۰۰۰-۸۰۰,۰۰۰)}{۷(۷+۱)} = ۶۰۰,۰۰۰ \text{ ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاك سال چهارم}$$

$$C_5 = \frac{2(7-5+1)(5,000,000-800,000)}{7(7+1)} = 450,000 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال پنجم ریال}$$

$$C_6 = \frac{2(7-6+1)(5,000,000-800,000)}{7(7+1)} = 300,000 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال ششم ریال}$$

$$C_7 = \frac{2(7-7+1)(5,000,000-800,000)}{7(7+1)} = 150,000 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال هفتم ریال}$$

بدیهی است  $\sum_{i=1}^k C_i$  برابر با  $4,200,000$  ریال خواهد بود.

#### ۴-۴ محاسبه‌ی استهلاک به روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف

قبل از بیان این روش به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴ - مؤسسه‌ای یک دستگاه موتورسیکلت به مبلغ  $800,000$  ریال برای نامه‌رسان خود خریداری نموده و پیش‌بینی کرده است که بعد از ۴ سال این وسیله را به قیمت  $300,000$  ریال به فروش رساند. هزینه‌ی استهلاک سال‌های مزبور را به طریق مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف محاسبه نمایید. چون عمر مفید دستگاه ۴ سال است، پس نرخ استهلاک به روش خط مستقیم  $25\%$  است، ولی در این جا به نرخ مضاعف یعنی  $50\%$  محاسبه می‌کنیم.

$$1. \quad 4 = -25$$

$$-25 \times 2 = -50$$

$$800,000 \times \frac{50}{100} = 400,000 \quad \text{ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال اول}$$

$$800,000 - 400,000 = 400,000$$

$$400,000 \times \frac{50}{100} = 200,000 \quad \text{ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال دوم}$$

$$400,000 + 200,000 = 600,000$$

$$800,000 - 600,000 = 200,000$$

$$200,000 \times \frac{50}{100} = 100,000 \quad \text{ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال سوم}$$

$$600,000 + 100,000 = 700,000$$

$$800,000 - 700,000 = 100,000$$



$$100,000 \times \frac{50}{100} = 50,000 \quad \text{ریال} \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال چهارم}$$

$$700,000 + 50,000 = 750,000$$

$$800,000 - 750,000 = 50,000$$

ملاحظه می‌شود که در این روش، ابتدا باید با توجه به عمر مفید دستگاه، نرخ استهلاک را به روش خط مستقیم محاسبه و آن را دو برابر کنیم و هم‌چنین به جای بهای تمام شده منهای ارزش قراضه، ارزش دفتری موتورسیکلت منهای استهلاک است. روشن است که ارزش دفتری آن، برابر با بهای تمام شده‌ی اولیه منهای ذخیره‌ی استهلاک انباشته است. بدیهی است در پایان سال چهارم، مبلغی به عنوان ارزش دفتری خواهیم داشت که هیچ ارتباطی با ارزش قراضه ندارد. در این روش، می‌توان از فرمول

$$C_K = (a - \sum_{i=1}^{k-1} C_i) \frac{2}{n}$$

استفاده کرد که در آن  $a$ ، قیمت خرید دارایی با هزینه‌ی نصب و راه‌اندازی و  $n$ ، سال‌های عمر مفید دارایی و  $K$ ، سالی است که قرار است هزینه‌ی استهلاک آن تعیین شود و بالأخره  $C$  هزینه‌ی استهلاک سال مورد نظر است.

مثال ۵ — هزینه‌ی استهلاک مثال ۴ را با استفاده از فرمول گفته شده محاسبه نمایید.

$$\sum_{i=1}^0 C_i = 0$$

$$C_1 = (800,000 - 0) \times \frac{2}{4} = 400,000$$

هزینه‌ی استهلاک سال اول

$$\sum_{i=1}^1 C_i = 400,000$$

$$C_2 = (800,000 - 400,000) \times \frac{2}{4} = 200,000$$

هزینه‌ی استهلاک سال دوم

$$\sum_{i=1}^2 C_i = 400,000 + 200,000 = 600,000$$

هزینه‌ی استهلاک سال سوم

$$C_3 = (800,000 - 600,000) \times \frac{2}{4} = 100,000$$

$$\sum_{i=1}^3 C_i = 400,000 + 200,000 + 100,000 = 700,000$$

هزینه‌ی استهلاک سال چهارم

$$C_4 = (800,000 - 700,000) \times \frac{2}{4} = 50,000$$

مثال ۶- شرکت نوبهار، دستگاهی را به قیمت ۵۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری نموده و پیش‌بینی کرده است که این دستگاه ۵ سال عمر مفید خواهد داشت و ارزش قراضه‌ی آن ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خواهد بود. ذخیره‌ی استهلاک سالیانه آن را به سه روش گفته شده محاسبه و با هم مقایسه نمایید.

الف) روش خط مستقیم

$$55,000,000 - 5,000,000 = 50,000,000$$

$$50,000,000 : 5 = 10,000,000$$

$$C = \frac{a-b}{n} = \frac{55,000,000 - 5,000,000}{5} = 10,000,000$$

ب) روش مجموع سنوات

$$C_K = \frac{2(n-K+1)(a-b)}{n(n+1)}$$

$$C_1 = \frac{2(5-1+1)(55,000,000 - 5,000,000)}{5(5+1)} = 16,666,667 \quad \text{سال اول}$$

$$C_2 = \frac{2(5-2+1)(55,000,000 - 5,000,000)}{5(5+1)} = 13,333,333 \quad \text{سال دوم}$$

$$C_3 = \frac{2(5-3+1)(55,000,000 - 5,000,000)}{5(5+1)} = 10,000,000 \quad \text{سال سوم}$$

$$C_4 = \frac{2(5-4+1)(55,000,000 - 5,000,000)}{5(5+1)} = 6,666,667 \quad \text{سال چهارم}$$

$$C_5 = \frac{2(5-5+1)(55,000,000 - 5,000,000)}{5(5+1)} = 3,333,333 \quad \text{سال پنجم}$$

$$\begin{aligned} & \cdot C_i = 50,000,000 \\ & i=1 \end{aligned}$$

$$C = (a - \sum_{i=1}^{k-1} C_i) \times \frac{2}{n}$$

ج) روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف

$$\begin{aligned} & \cdot C_0 = 0 \\ & i=0 \end{aligned}$$

$$C_1 = (55,000,000 - 0) \times \frac{2}{5} = 22,000,000 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال اول}$$

$$\cdot C_1 = 22,000,000$$

$$C_2 = (55,000,000 - 22,000,000) \times \frac{2}{5} = 13,200,000 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال دوم}$$

$$\cdot C_2 = 22,000,000 + 13,200,000 = 35,200,000$$

$$C_3 = (55,000,000 - 35,200,000) \times \frac{2}{5} = 7,920,000 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال سوم}$$

$$\cdot C_3 = 22,000,000 + 13,200,000 + 7,920,000 = 43,120,000$$

$$C_4 = (55,000,000 - 43,120,000) \times \frac{2}{5} = 4,752,000 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال چهارم}$$

$$\cdot C_4 = 22,000,000 + 13,200,000 + 7,920,000 + 4,752,000 = 47,872,000$$

$$C_5 = (55,000,000 - 47,872,000) \times \frac{2}{5} = 2,851,200 \quad \text{هزینه‌ی استهلاک سال پنجم}$$

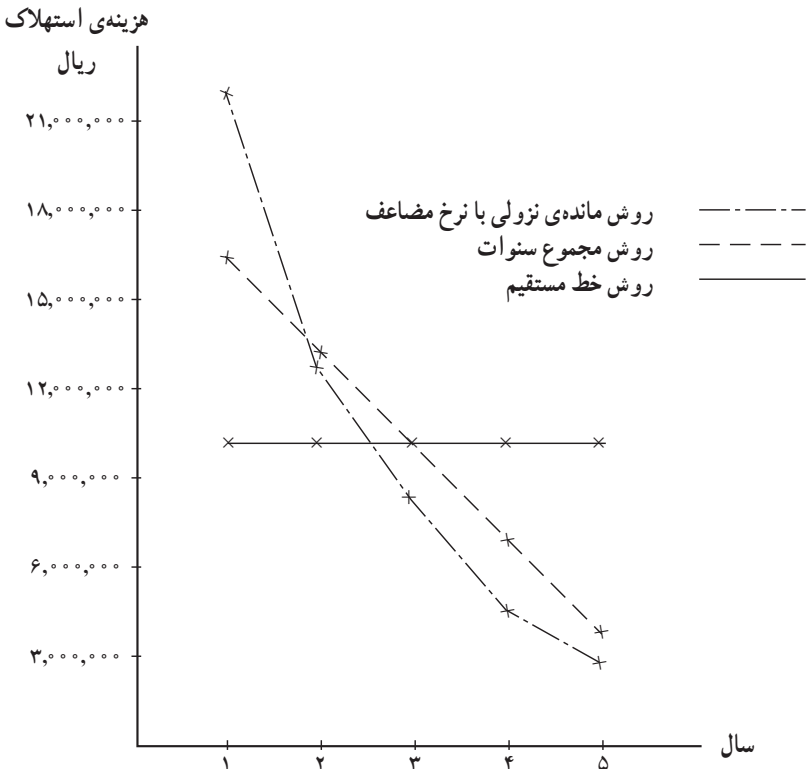
داخل پراتر، نشان‌دهنده‌ی ارزش دفتری دستگاه در هر سال است.

هزینه‌ی استهلاک سالیانه به روش‌های

خط مستقیم	مجموع سنوات	مانده‌ی نزولی
سال اول	۱۶,۶۶۶,۶۶۷	۲۲,۰۰۰,۰۰۰
سال دوم	۱۳,۳۳۳,۳۳۳	۱۳,۲۰۰,۰۰۰
سال سوم	۱۰,۰۰۰,۰۰۰	۷,۹۲۰,۰۰۰
سال چهارم	۶,۶۶۶,۶۶۷	۴,۷۵۲,۰۰۰
سال پنجم	۳,۳۳۳,۳۳۳	۲,۸۵۱,۲۰۰

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، برای این دستگاه، روش خط مستقیم معقول به نظر نمی‌رسد؛ زیرا اگر فرض کنیم مؤسسه بخواهد دستگاه را در سال دوم به فروش برساند، بیش از ۲۰٪ کاهش قیمت خواهد داشت. اما روش مجموع سنوات مناسب‌تر است؛ زیرا در سال‌های ابتدایی بیش از

روش خط مستقیم، هزینه‌ی استهلاک دارد. در روش مانده‌ی نزولی سرعت هزینه نمودن بسیار زیاد است؛ به طوری که ظرف دو سال اول، بیش از هفتاد درصد قیمت دستگاه هزینه شده است. برای روشن تر شدن موضوع نمودار ذخیره‌ی استهلاک را به روش‌های مختلف رسم می‌کنیم. به نموداری که هزینه‌ی استهلاک سالیانه مثال ۵ را به روش‌های مختلف نشان می‌دهد، توجه کنید.



## تمرین‌های فصل چهارم

۱- اتومبیلی به مبلغ ۲۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری و تخمین زده شده است که بعد از ۵ سال کار، ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال ارزش داشته باشد. هزینه‌ی استهلاک سالانه آن را به روش خط مستقیم محاسبه کنید. اگر بعد از سه سال، موتور و اتاق آن را تعمیر اساسی نماییم و مبلغ ۴,۰۰۰,۰۰۰ ریال هزینه کنیم و در مقابل، عمر مفید آن از ۵ سال به ۶ سال افزایش یابد و ارزش نهایی آن ۵,۰۰۰,۰۰۰ ریال بشود هزینه‌ی استهلاک را از سال چهارم به بعد محاسبه کنید.

- ۲- تمرین شماره‌ی یک را با استفاده از روش مجموع سنوات انجام دهید.
- ۳- تمرین شماره‌ی یک را با استفاده از روش مانده‌ی نزولی با نرخ مضاعف حل کنید.
- ۴- ماشین چاپی به قیمت ۴۰۰,۰۰۰ ریال خریداری و عمر مفید آن ۴ سال و قیمت قراضه آن در پایان عمر مفید مبلغ ۲۵,۰۰۰ ریال برآورد شده است. هزینه‌ی استهلاک سالانه آن را به روش‌های گفته شده محاسبه و با هم مقایسه نمایید.
- ۵- کارخانه‌ای، یک دستگاه قالب‌زنی به مبلغ ۵۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال خریداری و پیش‌بینی نموده است که بعد از ۵ سال کار، حدود ۱۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال ارزش داشته باشد. هزینه‌ی استهلاک سالیانه دستگاه را به روش‌های گفته شده محاسبه و با هم مقایسه نمایید. در صورتی که پس از ۳ سال، این دستگاه تعمیر اساسی شود و مبلغ ۱۶,۰۰۰,۰۰۰ ریال هزینه‌ی تعمیر آن گردد، هزینه‌ی استهلاک را از سال چهارم به بعد با استفاده از روش‌های گفته شده محاسبه نمایید. به شرطی که اولاً قیمت قراضه‌ی آن به ۱۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال و ثانیاً عمر مفید آن از ۵ سال به ۷ سال افزایش یافته باشد.
- ۶- شرکت محکم کار، ۳ دستگاه ماشین را در ابتدای سال ۱۳۷۳ به شرح جدول زیر خریداری نمود:

ردیف	نوع ماشین	بهای تمام شده ریال	برآورد ارزش اسقاط ریال	برآورد عمر مفید سال
۱	قالب زنی	۲,۸۰۰,۰۰۰	۴۰۰,۰۰۰	۵
۲	پرس	۴,۲۰۰,۰۰۰	۱,۷۰۰,۰۰۰	۸
۳	رنگ آمیزی	۱,۷۰۰,۰۰۰	صفر	۶

- (الف) هزینه‌ی استهلاک هر دستگاه را با روش خط مستقیم محاسبه کنید.
- (ب) هزینه‌ی استهلاک هر دستگاه را با روش مجموع سنوات محاسبه کنید.
- (ج) هزینه‌ی استهلاک هر دستگاه را با روش مانده‌ی نزولی محاسبه کنید.
- (د) کل هزینه‌ی استهلاک شرکت را در هر سال با روش‌های گفته شده به تفکیک محاسبه نمایید.

- ۷- عمر مفید یک دستگاه رایانه خریداری شده ۶ سال است، چنان‌چه ارزش اسقاط این دستگاه ۱,۰۰۰,۰۰۰ ریال و هزینه‌ی استهلاک سالانه‌ی آن به روش خط مستقیم ۲,۰۰۰,۰۰۰ ریال در سال باشد، قیمت تمام شده‌ی دستگاه را حساب کنید.

### کاربردهای معادلات درجه‌ی اول در حسابداری

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- نقطه‌ی تعادل انواع توابع را تعیین نماید.
- ۲- اقلام مجهول هر حساب را به شکل‌های مختلف محاسبه کند.
- ۳- معادلات خطی را در مسائل مالی انجام دهد.

### ۵- کاربردهای معادلات درجه‌ی اول در حسابداری

#### ۱- ۵ مقدمه

کسانی که با حسابداری آشنا هستند می‌دانند که در بسیاری از موارد ممکن است اقلامی در دست نباشد ولی با اطلاع از سایر داده‌ها می‌توان به اقلام مورد نظر دست یافت. مثلاً اگر هزینه‌ی ثابت، هزینه متغیر و تعداد واحد تولید شده در یک شرکت معین باشد، می‌توان بهای تمام شده‌ی هر واحد را تعیین نمود. به علاوه، اگر قیمت فروش مشخص شده باشد می‌توان تعداد واحد کالا در نقطه سر به سر را معین نمود. قبل از وارد شدن به اصل موضوع، در تعاریف زیر دقت کنید.

**هزینه‌ی ثابت:** به هزینه‌هایی که به تعداد تولید بستگی ندارد هزینه ثابت گویند، مانند هزینه‌ی نگهبانی یا هزینه‌ی روشنایی یا حقوق مدیریت و آن را با  $FC$  نشان می‌دهند (برای تعداد معین تولید).

**هزینه‌ی متغیر:** به هزینه‌هایی که رابطه مستقیم با تعداد تولید دارد هزینه متغیر گویند، مانند هزینه‌ی مواد اولیه برای ساخت یک سطل پلاستیکی یا هزینه‌ی دستمزد برای دوختن یک پیراهن یا هزینه‌ی مصرفی برق برای پرس کردن یک دکمه و آن را با  $VC$  نشان می‌دهند.

**هزینه‌ی کل:** مجموع هزینه‌های ثابت و هزینه‌های متغیر یک واحد تولیدی در یک دوره معین

را هزینه‌ی کل گویند و آن را با  $Tc$  نشان می‌دهند.

(=) تساوی: دو شیء یا دو عدد را زمانی با هم مساوی گویند که عیناً مانند یکدیگر باشند و نه

مشابه یکدیگر، مثلاً  $4 = 4$

معادله: اگر تساوی دو عبارت به متغیری بستگی داشته باشد و این تساوی به ازای یک یا بعضی

مقادیر عددی که به متغیر می‌دهیم برقرار شود، به این گونه تساوی، معادله و یا تساوی شرطی گویند.

مثال ۱- هزینه‌ی ثابت مؤسسه‌ای، روزانه  $300,000$  ریال و هزینه‌ی متغیر هر واحد تولید شده

$10,000$  ریال باشد و روزی  $20$  واحد کالا تولید گردد. بهای تمام شده‌ی هر واحد را تعیین کنید.

$$300,000 + 20 \times 10,000 = 500,000 \quad \text{کل هزینه}$$

$$\frac{500,000}{20} = 25,000 \quad \text{بهای تمام شده هر واحد}$$

حال اگر تعداد تولید در یک روز افزایش یابد و به  $30$  واحد برسد آن‌گاه بهای تمام شده برابر

خواهد بود با:

$$300,000 + 30 \times 10,000 = 600,000$$

$$\frac{600,000}{30} = 20,000 \quad \text{بهای تمام شده‌ی هر واحد}$$

ملاحظه می‌شود که با افزایش تعداد تولید از  $20$  واحد به  $30$  واحد بهای تمام شده از  $25,000$

ریال به  $20,000$  ریال کاهش می‌یابد. زیرا هزینه‌ی ثابت تغییری نداشته است. پس هر چه تعداد تولید

افزایش یابد، از بهای تمام شده یک واحد کاسته می‌شود. ولی از طرف دیگر امکان افزایش تولید کالا

تا حدی عملی است و از طرفی تقاضا برای خرید کالا نیز محدودیت دارد. بنابراین، با جمع‌آوری

اطلاعات از بازار و ظرفیت اسمی مؤسسه، می‌توان با استفاده از معادلات به بهترین شرایط تولید، که

سودآوری مؤسسه را دربر داشته باشد، دسترسی پیدا کرد.

## ۲-۵ حل معادله درجه یک، یک مجهولی

منظور از حل معادله‌ی درجه یک، پیدا کردن جواب برای معادله است، به شکلی که این

جواب بتواند معادله را به یک تساوی تبدیل کند. برای حل معادله درجه‌ی یک، معمولاً باید آن

را به صورت  $ax = b$  درآورد.

دو معادله وقتی هم‌ارز هستند که جواب یا جواب‌های آن‌ها یکی باشد. برای حل معادله‌ی فوق

به شرط  $a \neq 0$  می‌توانیم طرفین را بر  $a$  تقسیم کنیم.

$$\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$$

در نتیجه  $x = \frac{b}{a}$  جواب معادله است.

اگر  $a = 0$  و  $b \neq 0$  باشد، آن‌گاه  $b = 0 \times x = 0$  روشن است که برای  $x$  هیچ مقداری وجود نخواهد داشت که در رابطه‌ی بالا صدق کند. بنابراین، به این‌گونه معادلات، معادله‌ی غیرممکن گویند. اما اگر  $b = 0$  باشد، آن‌گاه  $0 = 0 \times x = 0$  و برای  $x$  تعداد بسیار زیادی جواب دل‌خواه وجود دارد، به این‌گونه معادلات، معادله‌ی مبهم گویند.

گاهی می‌توان برای تقاضای کالای معینی در بازار معادله درجه‌ی یک تشکیل داد و هم‌چنین برای عرضه‌ی همان کالا، گاهی می‌توان معادله‌ی درجه یک تشکیل داد. برای به‌دست آوردن نقطه‌ی تعادل می‌توان معادله‌ی تقاضا را با معادله عرضه مساوی قرار داد.

مثال ۲- اگر معادله‌ی عرضه برای کالایی  $S = 25x + 25$  و معادله‌ی تقاضا برای همان کالا  $D = -50x + 250$  باشد، نقطه تعادل معادلات عرضه و تقاضا برای کالای مزبور را به‌دست آورید.

$$S = 25x + 25$$

$$D = -50x + 250$$

$$S = D$$

$$25x + 25 = -50x + 250$$

$$50x + 25x + 25 = 50x - 50x + 250$$

$$75x + 25 = 250$$

$$75x + 25 - 25 = 250 - 25$$

$$75x = 225$$

$$x = \frac{225}{75}$$

$$x = 3$$

بنابراین اگر به ازای  $x$ ، عدد ۳ را در معادله قرار دهیم، دو طرف با هم مساوی می‌شوند. بدیهی است اگر به ازای جمیع مقادیری که به متغیر داده می‌شود، هر دو طرف با هم مساوی باشند، این



تساوی را اتحاد گویند.

مثال ۳- اگر  $9x - 4x + 1 = 3x + 2x + 1$  باشد در نتیجه  $5x + 1 = 5x + 1$ .

ملاحظه می‌شود که به ازای جمیع مقادیری که به  $x$  داده می‌شود، دو طرف با هم مساوی هستند. بنابراین، عبارت فوق یک اتحاد است. و یا

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

که به ازای جمیع مقادیر  $a$  و  $b$  دو طرف با هم مساوی هستند.

**نقطه سر به سر چیست؟** مقصود تعداد واحد کالایی است که باید تولید شود تا درآمد حاصل از فروش این مقدار کالا، کاملاً برابر با هزینه‌ی تمام شده آن باشد. نقطه‌ی سر به سر را با  $Q$  نشان می‌دهند. اگر قیمت فروش یک واحد کالا را با  $P$  نشان دهیم نقطه‌ی سر به سر را می‌توان از فرمول

$$Q = \frac{Fc}{P - V} \text{ به دست آورد.}$$

زیرا در نقطه‌ی سر به سر، سود ویژه مساوی صفر است یعنی درآمد کل با هزینه کل مساوی است.

مثال ۴- هزینه‌ی ثابت تولید کالایی  $1000$  ریال و هزینه‌ی متغیر برای هر واحد آن  $8$  ریال است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا  $10$  ریال باشد، نقطه‌ی سر به سر کالا را به دست آورید.

$$10x = 8x + 1000$$

$$10x - 8x = 8x + 1000 - 8x$$

$$2x = 1000$$

$$x = 500$$

$$Q = \frac{Fc}{P - V}$$

و یا با استفاده از فرمول

$$Q = \frac{1000}{10 - 8} = \frac{1000}{2} = 500$$

بنابراین، حداقل تعداد تولید باید  $500$  واحد باشد تا مؤسسه زیان نداشته باشد. پس اگر  $600$

واحد تولید گردد سود به دست آمده برابر با

$$600 \times 10 - 1000 - 600 \times 8 =$$

$$6000 - 1000 - 4800 =$$

$$6000 - 5800 = 200$$

پس سود به دست آمده برابر با ۲۰۰ ریال است.

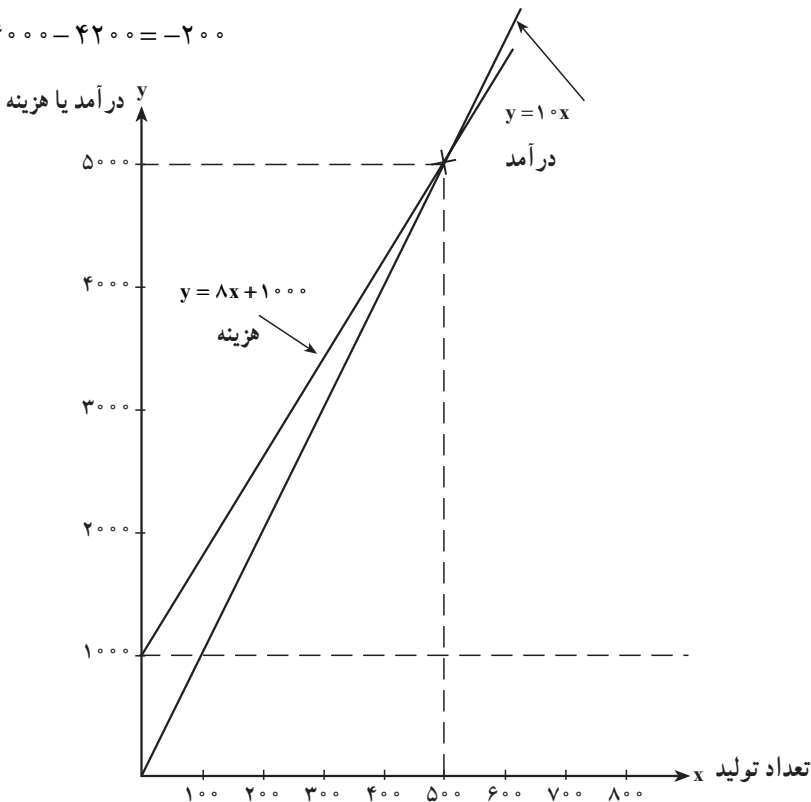
معادله‌ی هزینه‌ی کل را می‌توان به صورت  $y = 8x + 1000$  و معادله‌ی درآمد کلی را می‌توان به صورت  $y = 10x$  نشان داد. حال اگر نمودار معادلات فوق را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم، محل تقاطع این دو معادله نقطه  $y = 5000$  و  $x = 500$  (که همان نقطه‌ی سر به سر است، یعنی  $Q = 500$ ) باید باشد تا درآمد کل برابر با هزینه کل و مساوی ۵۰۰۰ ریال گردد.

روشن است که اگر تعداد واحدهای تولیدی از ۵۰۰ واحد کم‌تر باشد مؤسسه با زیان مواجه خواهد شد. مثلاً اگر ۴۰۰ واحد تولید شده باشد.

$$400 \times 10 - 1000 - 400 \times 8 =$$

$$4000 - 1000 - 3200 =$$

$$4000 - 4200 = -200$$



مؤسسه ۲۰۰ ریال زیان داشته است، یعنی درآمد کل از هزینه‌ی کل کم‌تر بوده است. پس نقطه‌ی سر به سر همیشه حداقل تعداد تولید را در یک مؤسسه نشان می‌دهد.

همان گونه که مشهود است، در نقطه‌ی  $x = 500$  و  $y = 5000$  هر دو خط یکدیگر را قطع می‌کنند، یعنی درآمد و هزینه باهم برابر است. بنابراین، برای  $x$ های بزرگ‌تر از  $500$ ، درآمد از هزینه بیش‌تر خواهد بود، مانند  $x = 600$

$$y = 10x$$

$$y = 10 \times 600 = 6000$$

$$y = 8x + 1000$$

$$y = 8 \times 600 + 1000 = 5800$$

$$6000 - 5800 = 200 \quad \text{تفاوت درآمد و هزینه}$$

مثال ۵— دفاتر حسابداری مؤسسه‌ای نشان می‌دهد که ظرف ۳ سال گذشته، جمعاً مبلغ  $30,000$  ریال به صورت ذخیره‌ی استهلاک دستگاهی که قیمت خرید آن  $120,000$  ریال بوده کسر گردیده است. اگر روش محاسبه‌ی استهلاک، خطی بوده باشد و عمر مفید دستگاه  $10$  سال تخمین زده شود، قیمت قراضه‌ی دستگاه را بعد از  $10$  سال تعیین کنید.

$$(120,000 - x) \times \frac{10}{100} \times 3 = 30,000$$

$$120,000 - x = 100,000$$

$$x = 20,000 \quad \text{قیمت دستگاه پس از 10 سال}$$

همان گونه که ملاحظه شد، برای هر معادله درجه‌ی اول (اگر توان مجهول، یک باشد آن را معادله درجه‌ی یک گویند) در ازای  $x$  جوابی می‌توان یافت. به طوری که دوطرف معادله در ازای آن  $x$  برابر گردند. این  $x$  را نیز نقطه‌ی تعادل معادله گویند.

مثال ۶— نقطه‌ی تعادل معادله  $3x + 7 = 2x + 12$  را پیدا کنید.

$$3x + 7 - 7 = 2x + 12 - 7$$

$$3x = 2x + 5$$

$$3x - 2x = 2x - 2x + 5. \quad x = 5$$

مثال ۷— محیط انبار مربع شکلی  $20$  متر است. به هریک از اضلاع آن، چند متر اضافه کنیم تا به محیط آن  $24$  متر افزوده گردد.

$$20 + 24 = 44 \quad \text{محیط انبار جدید}$$

$$20 \cdot 4 = 5 \quad \text{طول یک ضلع انبار}$$

طول یک ضلع انبار جدید  $x + 5$

$$4(x + 5) = 44$$

$$4x + 20 = 44$$

$$4x + 20 - 20 = 44 - 20$$

$$4x = 24 \quad . \quad x = 6$$

طول ضلع انبار جدید  $6 + 5 = 11$

مثال ۸ - سردخانه‌ی هتلی به شکل مکعب به ضلع ۲ متر است. با توجه به نیاز هتل حجم سردخانه باید دو برابر شود اما از جهت سقف و عرض امکان افزایش نیست. بنابراین، فقط طول سردخانه قابل افزایش است. تعیین کنید چه مقدار به طول سردخانه باید اضافه گردد تا حجم آن دو برابر شود.

طول جدید متر  $2 + x$

$$2 \times 2 \times 2 = 8 \quad \text{متر مکعب حجم سردخانه}$$

$$8 \times 2 = 16 \quad \text{متر مکعب حجم سردخانه جدید}$$

$$(2 + x) \times 2 \times 2 = 8 + 4x$$

$$8 + 4x = 16$$

$$8 - 8 + 4x = 16 - 8$$

$$4x = 8 \quad . \quad x = 2 \quad . \quad \text{طول جدید متر} = 2 + 2 = 4$$

مثال ۹ - در پایان سال گذشته کارکنان یک شرکت، زمانی که مشغول تراز گرفتن دفاتر حسابداری بودند، متوجه شدند که مانده‌ی طرف بدهکار با مانده‌ی طرف بستانکار ترازنامه ۱۹۸۰ ریال اختلاف دارد. رئیس حسابداری معتقد بود که به احتمال زیاد در انتقال عددی، یک صفر آن حذف گردیده است. اگر حدس او درست باشد تعیین کنید چه رقمی واقعی و چه رقمی اشتباه ثبت شده است؟ اگر فرض کنیم به جای ۱۰۰۰، ۱۰۰ ثبت شده باشد، پس به جای رقم اصلی ده درصد آن رقم ثبت گردیده است.

$$\left(x - \frac{10}{100}x\right) = 1980$$

$$100x - 10x = 198000 \quad \text{طرفین را در ۱۰۰ ضرب می‌کنیم}$$

$$90x = 198000$$

$$x = 2200$$

بنابراین، اشتباه در ثبت ۲۲۰ به جای ۲۲۰۰ است.

$$2200 - 220 = 1980$$

یا برعکس، زیرا

روشن است که حل معادلات درجه‌ی اول بسیار ساده است، اما تشکیل معادلات احتیاج به دقت و تمرین زیاد دارد.

### ۳-۵ معادلات خطی

هرگاه بتوان رابطه‌ی بین دو متغیر مثلاً فروش و هزینه‌ی تبلیغات یک مؤسسه را به صورت معادله‌ی درجه‌ی اول فرضی در آورد، به آن معادله‌ی خطی گویند. مثلاً اگر  $y$  را فروش ماهیانه و  $x$  را هزینه‌ی تبلیغات یک مؤسسه فرض کنیم، معادله  $y = 100 + 2x$  بین  $x$  و  $y$  روابطی را برقرار می‌نماید. این معادله نشان می‌دهد که اگر  $100$  باشد، مبلغی بابت تبلیغات پرداخت نخواهد شد ولی اگر  $100$  باشد پرداخت هزینه تبلیغات عملی است.

مثال ۱۰- اگر فروش ماهیانه  $120$  ریال باشد، چه مبلغی را می‌توان به هزینه‌ی تبلیغات

اختصاص داد؟

$$y = 100 + 2x$$

$$120 = 100 + 2x$$

$$120 - 100 = 100 + 2x - 100$$

$$20 = 2x$$

$$\boxed{x = 10}$$

پس،  $10$  ریال می‌توان به تبلیغات اختصاص داد.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود این معادله‌ی خطی، بی‌نهایت جواب دارد. یعنی به ازای  $x$ های

مختلف  $y$ های مختلف به دست می‌آید.

### ۴-۵ دستگاه معادلات خطی

دستگاه معادلات عبارت است از یک یا چند معادله که در هریک، یک یا چند متغیر وجود

داشته باشد.

منظور از حل دستگاه معادلات خطی، به دست آوردن جواب‌های معادله (مقادیر مربوط به

متغیرها) است. به این ترتیب که اگر مقادیر به دست آمده را در دستگاه قرار دهیم، دو طرف معادله

مساوی گردد. برای حل مسائل و به دست آوردن جواب‌ها باید تعدادی معادله تشکیل دهیم.

مثال ۱۱- دو پالایشگاه وجود دارد که در هر ساعت محصولات مشترکی را طبق جدول زیر تولید می‌کنند.

محصول در هر ساعت	پالایشگاه شماره ۱	پالایشگاه شماره ۲
بنزین (هزار بشکه)	۳	۲
نفت (هزار بشکه)	۱	۱

چنانچه سفارش تولید ۱۱ هزار بشکه بنزین و ۵ هزار بشکه نفت داده شده باشد؛ معین کنید این دو پالایشگاه در چه مدت زمانی بدون تولید اضافی، میزان سفارش را انجام می‌دهند؟

$$2x + 3y = 11$$

$$x + y = 5$$

معادله‌ی دوم را در ۲ ضرب و از معادله‌ی یک کم می‌کنیم.

$$2x + 3y = 11$$

$$- 2x + 2y = 10$$

$$3y - 2y = 11 - 10$$

$$y = 1$$

$$x + 1 = 5$$

$$x + 1 - 1 = 5 - 1$$

$$x = 4$$

بنابراین، لازم است که پالایشگاه شماره ۱ یک، چهار ساعت و پالایشگاه شماره ۲ دو، یک ساعت پالایش نماید تا اقلام مورد نیاز تأمین گردد.

مثال ۱۲- شرکتی دارای دو کارگاه خیاطی است. کارگاه اول، در هر ساعت می‌تواند ۴ کت و ۶ شلوار بدوزد. کارگاه دوم، در هر ساعت ۷ کت و ۱۳ شلوار می‌دوزد. اگر شرکت قراردادی منعقد نموده باشد که هر روز ۴۰ کت و ۷۰ شلوار تحویل دهد، معین کنید هر کارگاه باید چند ساعت در روز کار کند که ضمن تأمین نیاز شرکت، لباس اضافی تولید نشود؟ تعداد ساعاتی را که کارگاه اول باید فعال باشد،  $x$  فرض می‌نماییم.

تعداد ساعاتی را که کارگاه دوم باید فعال باشد،  $y$  فرض می‌کنیم.

کارگاه اول	کارگاه دوم	
$x$	$y$	
۴	۷	کت
۶	۱۳	شلوار

$$۳. 4x + 7y = 40$$

$$۲. 6x + 13y = 70$$

برای حل این دستگاه دو معادله‌ی دو مجهولی کافی است معادله‌ی اول را سه برابر و معادله‌ی دوم را دو برابر کنیم. سپس، نتایج به دست آمده را از هم کم کنیم تا یکی از مجهولات حذف گردد.

$$- . 12x + 21y = 120$$

$$: 12x + 26y = 140$$

$$5y = 20. \quad y = 4$$

$$4x + 7 \times 4 = 40$$

$$4x + 28 = 40$$

$$4x + 28 - 28 = 40 - 28$$

$$4x = 12$$

$$x = 3$$

در نتیجه، باید کارگاه اول روزی سه ساعت و کارگاه دوم روزی چهار ساعت فعال شود تا سفارش‌ها تهیه گردد.

مثال ۱۳- اگر معادله‌ی تقاضا برای کالایی برابر با  $y = 15 - 3x$  و معادله‌ی عرضه برای

همان کالا برابر با  $y = 4x + 1$  باشد، نقطه‌ی تعادل معادلات عرضه و تقاضا برای کالای مزبور را پیدا

$$4x + 1 = 15 - 3x \quad \text{کنید. در این معادله، فقط}$$

$$4x + 1 + 3x = 15 - 3x + 3x \quad \text{به ازای}$$

$$7x = 14 \quad x = 2$$

$$x = 2 \quad \text{تعادل برقرار است}$$

$$y = 9 \quad \text{و در نتیجه}$$

است.

## تمرین‌های فصل پنجم

۱- معادلات زیر را حل و جواب آن‌ها را پیدا کنید.

$$3x + 2 = 7x - 2$$

$$(x + 3) - (x - 3) = \frac{5x + 1}{2}$$

$$16x - 25 = 2x + 3$$

$$\frac{x-2}{3} - \frac{12-x}{2} + 1 = \frac{5x-63}{4}$$

$$5x - 2 = 73$$

$$\frac{x-2}{2} - (x - \frac{2x-1}{3}) = \frac{-1}{3}$$

۲- معادله‌ی عرضه و تقاضا برای کالایی به صورت زیر است. نمودار آن را رسم و نقطه‌ی

$$y = 7x + 6$$

تبادل معادلات را پیدا کنید.

$$y = 16 - 2x$$

۳- کل هزینه‌ی ثابت برای تولید کالایی ۷۵۰ ریال و هزینه‌ی متغیر برابر با ۷۰٪ قیمت فروش

آن است. اگر قیمت فروش هر واحد ۱۰ ریال باشد:

الف) نقطه‌ی سر به سر آن کالا را پیدا کنید.

ب) اگر هزینه‌ی متغیر به ۸۰٪ قیمت فروش افزایش یابد، نقطه‌ی سر به سر را پیدا کنید.

ج) اگر هزینه‌ی ثابت ۲۰٪ افزایش پیدا کند و هزینه‌ی متغیر همان ۷۰٪ قیمت فروش باشد،

نقطه‌ی سر به سر را محاسبه کنید.

۴- مبلغ ۱۶۴,۰۰۰ ریال را بین چهار نفر چنان تقسیم کنید که اولی ۴ برابر چهارمی و

چهارمی ۴ برابر سومی و دومی برابر اولی و چهارمی سهم ببرند.

۵- اختلاف مانده‌ی بدهکار و مانده‌ی بستانکار ترازنامه‌ای ۴۵۶۳۰ ریال است. اگر به احتمال

زیاد این اختلاف ناشی از ثبت یک رقم با حذف صفر سمت راست آن باشد، آن عدد واقعی و اشتباه را

بیابید.

۶- محیط حوض مستطیل شکلی ۱۴ متر است. اگر فرض کنیم که عرض آن ثابت و طول آن

قابل تغییر باشد و بخواهیم محیط آن به ۱۰ متر کاهش داده شود، تعیین کنید که طول آن حوض چه

مقدار باید کاهش داده شود؟

۷- یک شرکت با تدارکات ارتش قراردادی منعقد نموده که روزانه ۱۱۰,۰۰۰ کیلو روغن

جامد و ۴۱,۰۰۰ کیلو روغن مایع تحویل نماید. هیئت مدیره تصمیم گرفته است که روغن مورد نیاز



این قرارداد را فقط از طریق دو کارخانه، که یکی در تهران و دیگری در شیراز است، تأمین نماید. ظرفیت کارخانه‌ی تهران در هر ساعت ۱۰,۰۰۰ کیلو روغن جامد و ۴,۰۰۰ کیلو روغن مایع است. ظرفیت کارخانه‌ی شیراز در هر ساعت ۶,۰۰۰ کیلو روغن جامد و ۲,۰۰۰ کیلو روغن مایع است.

تعیین کنید هر یک از این دو کارخانه روزانه باید چند ساعت فعال باشند تا شرکت بتواند روغن مورد نیاز را تحویل دهد و روغن اضافی در انبار نماند.

۸- اگر قیمت فروش واحد کالایی ۱۲۵ ریال و هزینه‌ی متغیر آن ۱۰۵ ریال باشد، نقطه‌ی سربه‌سر کالا را به‌دست آورید (در صورتی که می‌دانیم کل هزینه ثابت ۲,۵۰۰ ریال است).

۹- اندازه‌ی ضلع انبار مربع شکلی ۱۰ متر است، گنجایش آن کافی نیست و نیاز است که اضلاع مربع از هر طرف به یک اندازه افزایش یابد، تا در کل ۲۴ متر به محیط آن افزوده گردد. مقدار افزایش از هر طرف را تعیین کنید.

۱۰- معادله‌ی تقاضا برای کالایی  $y = 100 - 5x$  است و معادله‌ی عرضه برای همان کالا  $y = 15x + 20$  است. اولاً قیمت و مقدار کالا در نقطه‌ی تعادل را به‌دست آورید. ثانیاً اگر قیمت کالا ۵ ریال باشد مقادیر هر یک از عرضه و تقاضا را مشخص کنید و بررسی کنید که بازار در وضعیت کمبود یا مازاد است؟ ثالثاً اگر قیمت کالا ۳ ریال باشد مقادیر هر یک از عرضه و تقاضا را تعیین و وضعیت بازار را نیز مشخص نمایید.

۱۱- هزینه‌ی ثابت شرکتی ۵۰۰,۰۰۰ ریال و هزینه‌ی متغیر هر واحد کالا ۴۰۰۰ ریال است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا ۵۰۰۰ ریال باشد مطلوب است اولاً تعداد تولید در نقطه‌ی سربه‌سر، ثانیاً چنانچه تعداد تولید ۴۰۰ واحد باشد این شرکت سود ده است، یا زیان ده؟ ثالثاً اگر با تغییراتی در روش تولید، هزینه‌ی ثابت هیچ‌گونه تغییری نیابد و در نقطه‌ی سربه‌سر ۲۵۰ واحد کالا تولید گردد هزینه‌ی متغیر کاهش یا افزایش داشته است؟ چه مقدار؟

۱۲- هزینه‌ی ثابت شرکتی برابر با ۸۰,۰۰۰,۰۰۰ ریال و هزینه‌ی متغیر هر واحد کالا ۶۰۰۰ ریال است. اگر قیمت فروش هر واحد کالا برابر ۱۰,۰۰۰ ریال باشد، اولاً تعداد تولید در نقطه‌ی سربه‌سر را محاسبه کنید. ثانیاً در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد میزان سود یا زیان شرکت را محاسبه کنید. ثالثاً در صورتی که شرکت بخواهد مبلغ ۲۰۰,۰۰۰ ریال سود داشته باشد چه تعداد کالا باید تولید گردد؟

۱۳- شرکتی دارای دو کارگاه تولیدی است. کارگاه اول، در هر ساعت می‌تواند ۵۰ واحد چنگال و ۶۰۰ واحد قاشق تولید نماید. هم‌چنین کارگاه دوم، در هر ساعت می‌تواند ۴۰ واحد چنگال

و ۷۰۰ واحد قاشق تولید نماید. با توجه به این که شرکت قراردادی منعقد نموده است که هر روز باید ۵۸۰۰ واحد چنگال و ۸۵۰۰ واحد قاشق تحویل دهد، معین کنید هرکارگاه لازم است چند ساعت در روز کار کند که ضمن تأمین نیاز، قاشق و چنگال اضافی تولید نگردد؟

## کاربردهای معادلات درجه‌ی دوم در حسابداری

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- نقطه‌ی تعادل انواع توابع را تعیین کند.
- ۲- دستگاه‌های معادلات را برای تعیین انواع اقلام مجهول به کار برد.
- ۳- معادلات درجه‌ی دوم را حل و بحث نماید.

## ۶- کاربردهای معادلات درجه‌ی دوم در حسابداری

همان‌گونه که در فصل قبل گفته شد، صورت کلی معادلات درجه‌ی یک  $ax = b$  است، که به

آن معادلات خطی نیز می‌گویند. اگر طرفین را بر  $(a \neq 0)$  تقسیم کنیم

$$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$

$x$  به دست می‌آید. بدیهی است در خیلی از موارد، شکل ظاهری معادله‌ی درجه‌ی اول به صورت

$ax = b$  نیست و باید عملیاتی روی آن انجام شود تا به این صورت درآید.

مثال ۱- شرکتی لیوان پلاستیکی تولید می‌نماید. هزینه‌ی متغیر هر لیوان ۲۰ ریال و هزینه‌ی

ثابت آن شرکت ۵۰۰ ریال در روز است. اگر قیمت فروش هر لیوان ۳۰ ریال باشد، چه تعداد لیوان باید

در روز تولید شود و به فروش برسد تا شرکت نه سود داشته باشد و نه زیان؟

$$30x = 20x + 500$$

$$30x - 20x = 20x + 500 - 20x$$

$$10x = 500$$

$$x = 50$$

## ۶-۱ معادله‌ی درجه‌ی دوم

در مورد معادله‌ی درجه‌ی دوم نیز، صورت کلی آن  $ax^2 + bx + c = 0$  است، که به آن معادله‌ی درجه‌ی دوم کامل می‌گویند. روشن است که پارامترهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد ثابتی هستند و گاهی اوقات ممکن است صفر نیز باشند.

اگر  $a$  برابر با صفر باشد، معادله به درجه‌ی اول تبدیل می‌شود. بنابراین، با شرط  $a \neq 0$  این

$$bx + c = 0 \quad \text{معادله درجه‌ی دوم خواهد بود.}$$

$$ax^2 + c = 0 \quad \text{اگر } b = 0 \text{ باشد،}$$

معادله دارای دو جواب قرینه است (به شرطی که  $a$  و  $c$  علامت مختلف داشته باشند).

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \text{اگر } b \text{ و } c \text{ هر دو صفر باشند و } a \text{ مخالف صفر باشد، آن‌گاه } ax^2 = 0 \text{ یعنی } x = 0$$

(مضاعف). دقت کنید که اگر  $b = 0$  باشد و  $a > 0$  و  $c > 0$  باشد و یا  $a$  و  $c$  هر دو منفی باشد به عبارت دیگر اگر  $b = 0$  و  $a$  و  $c$  هر دو دارای علامت یکسان باشند، آن‌گاه معادله جواب حقیقی نخواهد داشت و جواب، موهومی خواهد بود.

در صورتی که  $c = 0$  باشد  $(ax + b) \times x = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$  یکی از جواب‌ها صفر و

$$\text{جواب دیگر } \frac{-b}{a} \text{ است } x = 0, \quad x = \frac{-b}{a}$$

$$4x^2 + 8x = 0 \quad \text{مثال ۲- معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.}$$

$$x = 0 \quad x = \frac{-8}{4} = -2$$

مثال ۳- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$-6x^2 + 54 = 0$$

$$x^2 = \frac{54}{6} = 9$$

$$x = \pm 3$$

مثال ۴- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2x^2 + 7 = 0 \quad 2x^2 = -7$$

$$x^2 = \frac{-7}{2}$$

جواب حقیقی ندارد

## ۱-۱-۶ حل معادلات درجه‌ی دوم کامل

$$ax^2 + bx + c = 0$$

چون معادله‌ی درجه‌ی دوم کامل است، پس  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  و  $c \neq 0$ . بنابراین، طرفین را بر  $a$ ، که مخالف صفر است، تقسیم می‌نماییم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

با استفاده از دو جمله‌ی اول، آن را به اتحاد اول مشابه می‌کنیم. سپس، جمله‌ی سوم را، که  $\frac{b^2}{4a^2}$  است، به آن اضافه و کم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2} = 0 \quad \text{در نتیجه}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad \text{و}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \quad \text{اگر از طرفین جذر بگیریم}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x', x'' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{پس}$$

که با استفاده از این فرمول (به شرطی که زیر رادیکال مقداری مثبت باشد) همیشه دو جواب برای معادله‌ی درجه‌ی دوم به دست می‌آید. اما اگر  $b^2 - 4ac = 0$  باشد، معادله، یک ریشه‌ی مضاعف خواهد داشت و اگر  $b^2 - 4ac < 0$  باشد، معادله، جواب حقیقی ندارد و ریشه‌های موهومی خواهد داشت.

معمولاً  $b^2 - 4ac$  را با علامت دلتا ( $\Delta$ ) نشان می‌دهند و به آن مبین معادله‌ی درجه‌ی دوم می‌گویند.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

پس، اگر  $\Delta > 0$  باشد، معادله دارای دو جواب حقیقی است و اگر  $\Delta = 0$  باشد، معادله دارای جواب مضاعف است و اگر  $\Delta < 0$  باشد، معادله دارای جواب حقیقی نیست و دارای دو جواب موهومی است.

مثال ۵- معادله را حل و پاسخ آن را پیدا کنید.

$$3x^2 + 7x + 2 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 49 - 4 \times 2 \times 3 = 25$$

مثال ۶- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x' = \frac{-7 \pm 5}{6} = \begin{matrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{matrix}$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Delta = 36 - 36 = 0$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$

ریشه‌ی مضاعف

مثال ۷- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$\Delta = 9 - 40 = -31$$

چون  $\Delta < 0$  است، پس معادله‌ی زیر جواب حقیقی ندارد.

مثال ۸- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 12 = 4$$

$$x' = \frac{4 \pm 2}{2} = 3$$

$$x'' = \frac{4 - 2}{2} = 1$$

۲-۱-۶ حالت خاص معادله‌ی درجه‌ی دوم: همان گونه که در مثال ۷ ملاحظه نمودید، b

عددی زوج است و می‌توان از نصف آن، یعنی  $\frac{b}{2}$  استفاده کرد.

اگر  $b'$  را نصف b فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$b = 2b'$$

$$ax^2 + 2b'x + c = 0$$

و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$x'', x' = \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{جواب‌ها عبارت‌اند از:}$$

$$x', x'' = \frac{-2(-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac})}{2a} \quad \text{و یا}$$

$$x', x'' = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad \text{در نتیجه}$$

$$\Delta' = b'^2 - ac \quad \text{و}$$

بنابراین، برای سهولت می‌توان از این فرمول به‌جای فرمول قبلی در زمانی که  $b$  زوج باشد استفاده نمود. روشن است تمام مطالبی که در مورد  $\Delta$  گفته شد، عیناً در مورد  $\Delta'$  صدق می‌کند. مثال ۹- معادله‌ی مثال ۸ را با استفاده از فرمول اخیر حل کنید.

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$\Delta' = b'^2 - ac = 4 - 3 = 1$$

$$x', x'' = \frac{2 \pm 1}{1} = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$$

$$x^2 - 18x + 32 = 0$$

مثال ۱۰- معادله

را با استفاده از هر دو فرمول گفته شده حل کنید.

$$\Delta = 18 \times 18 - 4 \times 32 = 196$$

$$x', x'' = \frac{18 \pm \sqrt{196}}{2} = \begin{matrix} 2 \\ 16 \end{matrix}$$

$$\Delta' = 9 \times 9 - 32 = 49$$

$$x', x'' = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{1} = \begin{matrix} 2 \\ 16 \end{matrix}$$

ملاحظه می‌شود که روش دوم بسیار ساده‌تر است. جواب‌ها نیز عیناً یکی است. اگر جمع ضرایب یک معادله‌ی درجه‌ی دوم برابر با صفر باشد، یکی از جواب‌ها ۱ است و جواب دیگر، برابر با  $\frac{c}{a}$  است.

$$a + b + c = 0$$

در چنین حالتی  $ax^2 + bx + c$  بر  $x - 1$  قابل قسمت است. اگر  $ax^2 + bx + c$  را بر

۱- x تقسیم نماییم، مانده صفر است و خارج قسمت آن

$$ax - c = 0$$

$$x = \frac{c}{a}$$

در نتیجه

مثال ۱۱- جواب معادله‌ی زیر را محاسبه کنید.

$$2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$2 - 3 + 1 = 3 - 3 = 0$$

$$x' = 1 \quad x'' = \frac{1}{2}$$

پس

۳-۱-۶ جمع و ضرب جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم: اگر جواب‌های معادله‌ی درجه‌ی

دوم را با هم جمع و یا در هم ضرب کنیم، نتایج زیر حاصل می‌شود.

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{و} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' + x'' = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = S$$

مجموع ریشه‌ها

$$x' \times x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x' \times x'' = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} = P$$

حاصل ضرب ریشه‌ها

با دانستن روابط بین ریشه‌ها به این نکته توجه کنید.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

طرفین را بر a، که مخالف صفر است، تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\frac{c}{a} = P \quad \text{و} \quad \frac{-b}{a} = S \quad x^2 - Sx + P = 0$$

$\frac{c}{a}$  برابر با حاصل ضرب ریشه‌ها و  $\frac{-b}{a}$  برابر با حاصل جمع ریشه‌هاست.

مثال ۱۲- معادله‌ای بنویسید که مجموع ریشه‌های آن ۵ و حاصل ضرب ریشه‌های آن ۴

باشد.



$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x', x'' = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

گاهی اوقات لازم است که سه جمله‌ای درجه‌ی دوم  $ax^2 + bx + c$  را به حاصل ضرب عوامل تجزیه کنیم. برای این عمل، کافی است از فرمول زیر استفاده کنیم.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 0$$

مثال ۱۳- معادله را به حاصل ضرب عوامل تبدیل کنید.

$$\Delta' = 9 - 8 = 1$$

$$x', x'' = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

$$2x^2 - 6x + 4 = 2(x - 1)(x - 2)$$

## ۲-۶ کاربردهای معادلات درجه‌ی دوم

معادلات درجه‌ی دوم، کاربردهای زیادی دارند، از جمله در محاسبات مجهولات. معمولاً حل معادلات درجه‌ی دوم برای دانش‌آموزان بسیار ساده است، ولی گاهی تبدیل کردن صورت مسئله به معادله اندکی مشکل به نظر می‌رسد. برای حل این مشکل، باید به مثال‌های زیر توجه کرد و تمرین‌های پایان فصل را به دقت انجام داد.

مثال ۱۴- برای ساختن قوطی، یک ورق مقوای به شکل مربع و به ضلع ۵ سانتی‌متر در اختیار داریم.

اما این مقوا جواب‌گوی نیاز ما نیست و لازم است ۲۴ سانتی‌متر مربع به سطح آن افزوده شود. تعیین کنید به اندازه‌ی هر ضلع مربع چه قدر باید اضافه کرد تا مربعی به دست آید که اختلاف مساحت آن با مساحت فعلی ۲۴ سانتی‌متر مربع باشد.

$$5 \times 5 = 25 \quad \text{مساحت مقوای فعلی}$$

اگر طول ضلع مربع جدید را  $(x + 5)$  فرض کنیم، مساحت آن  $(x + 5)(x + 5)$  است. پس،

$$(x + 5)(x + 5) = 25 + 24$$

$$x^2 + 25 + 10x = 49$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\Delta' = 25 + 24 = 49$$

$$x', x'' = \frac{-5 \pm 7}{1} = \begin{cases} 2 \\ -12 \end{cases}$$

روشن است که جواب  $-12$  پذیرفتنی نیست و فقط  $x = 2$  قابل قبول است.

مثال ۱۵- اگر معادلات عرضه و تقاضای کالایی به شکل زیر باشد، در حالت تعادل مقدار و

قیمت کالا را تعیین کنید.  $x$  نشانگر مقدار کالا و  $y$  نشانگر قیمت آن است.

$$\begin{cases} (x+12)(y+6) = 169 \\ x-y+6 = 0 \end{cases}$$

$$y = x + 6$$

از معادله‌ی دوم داریم

$$(x+12)(x+6+6) = 169$$

در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم

$$(x+12)(x+12) = 169$$

$$x^2 + 24x + 144 = 169$$

$$x^2 + 24x - 25 = 0$$

$$\Delta' = 144 + 25 = 169$$

$$x', x'' = \frac{-12 \pm 13}{1} = \begin{cases} 1 \\ -25 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 7$$

چون قیمت و مقدار نمی‌تواند منفی باشد

$$x = -25 \Rightarrow y = -19$$

پس، فقط جواب  $7$  برای قیمت

و  $1$  برای مقدار کالا مورد قبول است و نقطه‌ی تعادل  $(1, 7)$  است.

مثال ۱۶- مساحت میدان دایره شکلی،  $314$  مترمربع است. بنا به دلایلی، لازم است این

میدان سه برابر بزرگ‌تر از وضع فعلی گردد. معین کنید شعاع میدان چه قدر باید بیش‌تر بشود.

$$314 \div 3/14 = 100$$

$$\sqrt{100} = 10$$

پس، شعاع فعلی میدان  $10$  متر است؛ لذا شعاع میدان جدید  $10 + x$  فرض می‌شود. پس،

$$(x+10)(x+10) \times 3/14 = 314 + 3 \times 314$$

$$(x^2 + 20x + 100) \times 3/14 = 314 \times 4$$

$$x^2 + 20x + 100 = 400$$

$$x^2 + 20x - 300 = 0$$

$$\Delta' = 100 + 300 = 400$$

$$x', x'' = \frac{-10 \pm 20}{1} = \begin{cases} 10 \\ -30 \end{cases}$$

$$10 + 10 = 20$$

واضح است که  $-30$  پذیرفتنی نیست و  $x = 10$  قابل قبول است. یعنی شعاع دایره باید دو برابر گردد تا مساحت میدان چهار برابر وضع فعلی شود.

مثال ۱۷- رابطه‌ی درآمد کل یک مؤسسه با تعداد تولید آن

$$y = -x^2 + 9x$$

است، که در آن  $y$  درآمد کل ناخالص به میلیون ریال ماهانه است و  $x$  تعداد تولید کالا به میلیون واحد در ماه است. اگر این مؤسسه بخواهد در ماه، درآمدی کُلّی برابر با ۸ میلیون ریال داشته باشد، چه تعداد کالا باید تولید نماید؟

$$y = -x^2 + 9x$$

$$8 = -x^2 + 9x$$

$$-x^2 + 9x - 8 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \times 8 = 81 - 32 = 49$$

$$x' = \frac{-9 + 7}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x'' = \frac{-9 - 7}{-2} = +8$$

اگر چه از نظر ریاضی جواب ۸ میلیون و یک میلیون، یک درآمد مشخصی را برای مؤسسه ایجاد می‌کند، ولی از نظر اقتصادی باید با جواب کم‌تر، یعنی یک میلیون واحد تولید نمود.

مثال ۱۸- اگر  $x$  مقدار کالا به تن و  $y$  قیمت کالا به هزار ریال را نشان دهد مقدار و قیمت

تبادل برای معادلات عرضه و تقاضای زیر را پیدا کنید.

$$x^2 + 5x - y + 1 = 0$$

$$2x^2 + y - 9 = 0$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 5x + 1 \\ y = -2x^2 + 9 \end{cases}$$

$$x^2 + 5x + 1 = -2x^2 + 9$$

$$2x^2 + x^2 + 5x + 1 = 2x^2 - 2x^2 + 9$$

$$3x^2 + 5x + 1 = 9$$

$$3x^2 + 5x + 1 - 9 = 9 - 9$$

$$3x^2 + 5x - 8 = 0$$

$$\Delta = 25 + 96 = 121$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{6} = \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{-8}{3} \end{cases}$$

با توجه به این که در این گونه مسائل فقط آن قسمت از معادلات قابل قبول است که در ربع اول

واقع شده باشد، پس فقط جواب  $x = 1$  قابل قبول است و  $x = \frac{-8}{3}$  قابل قبول نیست.

$$y = -2x^2 + 9$$

پس

$$y = -2 + 9 = 7$$

$$y = 7$$

یعنی قیمت ۷ هزار ریال و مقدار ۱ تن قابل قبول است.

مثال ۱۹- اگر  $x$  مقدار کالا به تن و  $y$  قیمت کالا به هزار ریال را نشان دهد، مقدار و قیمت

تعالی برای معادلات عرضه و تقاضای زیر را پیدا کنید.

$$(x + 12)(y + 6) = 169$$

$$x - y + 6 = 0$$

$$y = x + 6$$

$$(x + 12)(x + 6 + 6) = 169$$

$$(x + 12)(x + 12) = 169$$

$$x^2 + 144 + 24x = 169$$

$$x^2 + 24x + 144 - 169 = 169 - 169$$

$$x^2 + 24x - 25 = 0$$

$$(x - 1)(x + 25) = 0$$

چون جمع ضرایب صفر است

$$x' = 1 \quad x'' = -25$$

پس فقط  $x = 1$  قابل قبول است.

$$y = x + 6$$

$$y = 1 + 6$$

$$y = 7$$

یعنی قیمت ۷ هزار ریال و مقدار ۱ تن قابل قبول است.

مثال ۲۰- اگر  $x$  مقدار کالا به تن و  $y$  قیمت کالا به هزار ریال را نشان دهد، مقدار و قیمت

تبادل برای معادلات عرضه و تقاضای زیر را پیدا کنید.

$$2x + y - 10 = 0$$

$$y^2 - 8x - 4 = 0$$

$$y = -2x + 10$$

$$(-2x + 10)^2 - 8x - 4 = 0$$

$$4x^2 + 100 - 40x - 8x - 4 = 0$$

$$4x^2 - 48x + 96 = 0$$

$$x^2 - 12x + 24 = 0$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6 \times 6 - 24 \times 1}}{1} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{1} = 6 \pm \sqrt{12}$$

$$x = 6 \pm 2\sqrt{3}$$

ظاهراً هر دو جواب قابل قبول است.

حال باید  $y$  را بررسی نمود

$$x = 6 + 2\sqrt{3}$$

$$y = -2(6 + 2\sqrt{3}) + 10$$

$$y = -12 - 4\sqrt{3} + 10$$

$$y = -2 - 4\sqrt{3}$$

این جواب قابل قبول نیست

$$x = 6 - 2\sqrt{3} \approx 2.5$$

$$y = -2(6 - 2\sqrt{3}) + 10$$

$$y = -12 + 4\sqrt{3} + 10$$

$$y = -2 + 4\sqrt{3} \approx 4/9$$

این جواب قابل قبول است

پس  $x \approx 2/5$  و  $y \approx 4/9$  قابل قبول است.

## تمرین های فصل ششم

۱- معادلات زیر را حل نمایید و در صورتی که جواب دارند، جواب را مشخص کنید.

$$11x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$3x^2 + 6x - 11 = 0$$

$$7x^2 - 9x + 2 = 0$$

$$x^2 - 3x + 10 = 0$$

$$x^2 + x + 7 = 0$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

۲- بدون حل معادلات، حاصل جمع و حاصل ضرب جواب های معادلات دارای جواب

تمرین ۱ را محاسبه، سپس با جواب ها مقایسه کنید.

۳- حاصل ضرب دو عدد صحیح متوالی ۷۲ است، آن دو عدد را پیدا کنید.

۴- مجموع مربعات سه عدد صحیح متوالی ۱۱۰ است. آن اعداد را تعیین کنید.

۵- آن چه عددی است که اگر ۳۵ واحد به دو برابر آن افزوده شود، حاصل برابر با مربع همان

عدد گردد؟

۶- مجموع ارقام یک عدد دو رقمی ۱۰ است و رقم دهگان آن ۴ واحد بیش تر از مربع رقم

یکان آن است. آن عدد را پیدا کنید.

۷- رابطه ی امکانات تولید برای یک مؤسسه، به این ترتیب است  $9y + x^2 = 225$

این مؤسسه با داشتن امکانات تولیدی ثابت می تواند کالای  $x$  یا کالای  $y$  یا ترکیبی از هر دو را تولید

نماید. مقادیر کالا برحسب واحد تُن است. تعیین کنید اگر این مؤسسه بخواهد از کالای  $y$ ، ۱۶ تُن تولید نماید، قادر به تولید چند تُن از کالای  $x$  خواهد بود؟

۸- رابطه‌ی عرضه‌ی کالایی  $y = 2x^2 - 4x + 2$  است که در آن  $y$  قیمت به هزار ریال و  $x$  مقدار کالا به میلیون کیلو در ماه است. تعیین کنید در قیمت ۸ هزار ریال، چه مقدار کالا به بازار عرضه می‌گردد؟

۹- رابطه‌ی هزینه‌ی کل (هزینه‌ی ثابت به علاوه‌ی هزینه‌ی متغیر) یک بنگاه تولیدی  $y = \frac{1}{10}x^2 + 6x + 200$  است که در آن  $y$  هزینه‌ی کل به ده هزار ریال و  $x$  مقدار کالا به تُن است. تعیین کنید وقتی هزینه‌ی کل بنگاه برابر ۶ میلیون ریال باشد، مقدار تولید بنگاه چه قدر است؟

۱۰- رابطه‌ی هزینه‌ی کل یک شرکت تولیدی گِج پاکتی  $y = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 3$  است. اگر  $y$  هزینه‌ی کل به ده هزار ریال و  $x$  مقدار گِج تولیدی به تُن باشد، تعیین کنید زمانی که هزینه‌ی کل کارخانه ۱۸۰,۰۰۰ ریال باشد مقدار تولید چه مقدار است؟

۱۱- رابطه‌ی درآمد کل یک شرکت با تعداد تولید آن به صورت  $y = -x^2 + 6x$  است، که در آن  $y$  درآمد کل به میلیون ریال و  $x$  تعداد تولید کالا به میلیون واحد است. اگر مدیر شرکت بخواهد درآمدی کلی، برابر با ۹ میلیون ریال داشته باشد، چه تعداد کالا باید تولید نماید؟

۱۲- اگر رابطه‌ی هزینه‌ی کل شرکتی  $y = x^2 - 3x + 7$  باشد ( $y$  هزینه‌ی کل به میلیون ریال و  $x$  تعداد تولید است)، چه تعداد کالا باید تولید گردد تا هزینه‌ی شرکت ۵ میلیون ریال باشد؟

۱۳- رابطه‌ی درآمد شرکتی  $T_R = 20x - 5x^2$  و رابطه‌ی هزینه‌ی کل آن شرکت  $T_C = 10x + 6x^2$  است. در صورتی که شرکت با زیان یک میلیون ریالی مواجه باشد، مقدار تولید را به میلیون واحد تعیین کنید.

۱۴- رابطه‌ی هزینه‌ی کل شرکتی  $T_C = 3x^2 + 20x - 50$  و رابطه‌ی درآمد کل آن شرکت  $T_R = 30x - x^2$  است. مطلوب است تعداد تولید در نقطه‌ی سر به سر.

۱۵- محیط مغازه‌ای به شکل مستطیل ۳۴ متر و مساحت آن برابر با ۶۰ مترمربع است. طول و عرض این مغازه را محاسبه نمایید.

۱۶- اندازه‌ی ضلع انبار مربع شکلی ۱۰ متر است. مساحت آن کافی نیست و نیاز است که اضلاع مربع از هر طرف به یک اندازه افزایش یابد تا در کل، ۴۴ مترمربع به سطح آن افزوده گردد. مقدار افزایش از هر طرف را محاسبه کنید.

### ماتریس و دترمینان

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- ماتریس، انواع و کاربردهای آن را بیان کند و جبر ماتریس‌ها را نشان دهد.
- ۲- جمع ماتریس‌ها، خصوصیات آن‌ها، ضرب ماتریس در عدد و کاربرد آن را توضیح دهد.
- ۳- ضرب ماتریس‌ها و کاربرد آن‌را انجام دهد.
- ۴- دترمینان را تعریف و مقدار آن‌را محاسبه کند و خواص آن‌را توضیح دهد.
- ۵- معکوس ماتریس دو در دو و سه در سه و کاربرد آن‌را در مسائل انجام دهد.

### ۷- ماتریس و دترمینان

#### مقدمه

برای فهم ساده‌تر ریاضیات، گاهی از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌شود. از آن جمله ماتریس است که به ما در حل بسیاری از مشکلات کمک کند. مثلاً برای به حداکثر رساندن سود یک شرکت، با توجه به محدودیت‌هایی، مثل نیروی انسانی، ساعت کار، اعتبارات بانکی، مواد اولیه، عرضه و تقاضا، می‌توان از ماتریس استفاده کرد یا برای به حداقل رساندن هزینه‌ی یک بیمارستان یا یک مؤسسه دولتی ماتریس و معکوس ماتریس به کار می‌رود. امروزه در اکثر بنگاه‌های خصوصی و دولتی از برنامه‌ریزی خطی، سیمپلکس، ماتریس تصمیم‌گیری و مدل شبکه، مدل تخصیصی کار و حمل و نقل، که الفبای همه‌ی آن‌ها ماتریس است، استفاده فراوان می‌گردد.



برای مثال، فرض کنید شرکت نفت ایران سه انبار در محل های A، B و C دارد و سه پمپ بنزین باید از طریق این انبارها تغذیه شوند. اگر  $P_1$ ،  $P_2$  و  $P_3$  پمپ های بنزین باشند و فاصله ی آن ها تا انبارهای مزبور به شرح زیر باشد:

فاصله ی	A	تا	$P_1$	۴۰	کیلومتر است
فاصله ی	A	تا	$P_2$	۲۵	کیلومتر است
فاصله ی	A	تا	$P_3$	۲۰	کیلومتر است
فاصله ی	B	تا	$P_1$	۳۰	کیلومتر است
فاصله ی	B	تا	$P_2$	۱۵	کیلومتر است
فاصله ی	B	تا	$P_3$	۳۵	کیلومتر است
فاصله ی	C	تا	$P_1$	۱۵	کیلومتر است
فاصله ی	C	تا	$P_2$	۳۰	کیلومتر است
فاصله ی	C	تا	$P_3$	۴۵	کیلومتر است

این اطلاعات را می توانیم در گروه ای به این شکل نشان دهیم. در بعضی از کتاب ها به جای گروه از براتر هم استفاده می گردد.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$
A	۴۰	۲۵	۲۰#
B	۳۰	۱۵	۳۵%
C	۱۵	۳۰	۴۵%

محل تلاقی خطوط افقی و قائم، فاصله ی انبار تا پمپ بنزین را نشان می دهد. این آرایه ی اعداد مثالی از یک ماتریس است. به آرایه ای از اعداد در شکل زیر دقت کنید. هر کدام از این آرایه ها را یک ماتریس می نامند.

$$A = \begin{matrix} ۵ & ۱\# \\ \cdot & \% \\ !۰ & ۲\% \end{matrix}$$

$$B = \begin{matrix} ۲\# \\ \cdot & \% \\ !۳\% \end{matrix}$$

$$C = \& \quad ۳ \quad ۵ \quad ۷ \quad ۹ \quad .$$

$$D = \begin{matrix} \circ & ۱ & ۲\# \\ \cdot & & \% \\ \cdot & ۱ & ۴\% \\ \cdot & & \% \\ \cdot & ۲ & ۲ & ۵\% \end{matrix}$$

$$E = \begin{matrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۴\# \\ ۱ & ۳ & ۵ & ۱ & ۲\% \end{matrix}$$

نام هر ماتریس را با حروف بزرگ الفبای لاتین نشان می‌دهند مانند ماتریس A, B, C, D, E

و . . . .

### ۷-۱ سطر یک ماتریس

هریک از اعداد داخل گروه را یک درایه‌ی یا یک عضو ماتریس می‌نامند. درایه‌هایی را که در امتداد یک خط افقی قرار گیرند، یک سطر ماتریس می‌نامند. مانند ۵، ۶، ۲، ۱، ۲، ۰، ۳، ۰، ۱ در ماتریس A.

$$A = \begin{matrix} ۲ & ۵ & ۶\# \\ \circ & ۲ & ۱\% \\ \cdot & & \% \\ \cdot & ۱ & ۳\% \end{matrix}$$

### ۷-۲ ستون یک ماتریس

درایه‌هایی را، که در امتداد یک خط قائم قرار گیرند، یک ستون ماتریس می‌نامند، مانند ۵ یا ۲ یا ۱ در همان ماتریس A.

بنابراین، این ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

بدیهی است ۵، ۶، ۲ را سطر اول، ۱، ۲، ۰ را سطر دوم و ۳، ۰، ۱ را سطر سوم ماتریس

می‌نامند.

هم‌چنین ۱ را ستون اول، ۲ را ستون دوم و ۳ را ستون سوم می‌نامند.

به ماتریسی مانند A، که m سطر و n ستون داشته باشد، یک ماتریس m در n گفته می‌شود و

آن را به صورت  $A_{m \times n}$  نشان می‌دهند.



$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$  قطر اصلی را تشکیل می‌دهند که به ترتیب عبارت‌اند از: ۱، ۲، ۲ و ۳. توضیح: دو درایه از دو ماتریس را زمانی متناظر گویند که آدرس آن‌ها (محل سطر و ستون) یکی باشد.

## ۷-۵ انواع ماتریس‌ها

۷-۵-۱ ماتریس صفر: به ماتریسی که کلیه درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر گویند. مثال ۵- ماتریس A و B و C نمونه‌ای از ماتریس صفر هستند.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۷-۵-۲ ماتریس مربع: اگر در یک ماتریس  $m \times n$  داشته باشیم  $m = n$ ، این ماتریس را ماتریس مربع مرتبه n یا m گویند. به عبارت دیگر، ماتریس مربع ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{مثال ۶- ماتریس } C_{2 \times 2} \text{ یک ماتریس مربع است.}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{مثال ۷- ماتریس } D_{3 \times 3} \text{ یک ماتریس مربع است.}$$

۷-۵-۳ ماتریس سطری: اگر در یک ماتریس  $m \times n$  داشته باشیم  $m = 1$ ، این ماتریس را ماتریس سطری می‌نامند.

مثال ۸- ماتریس E را یک ماتریس سطری گویند.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}$$

۷-۵-۴ ماتریس ستونی: اگر در یک ماتریس  $m \times n$  داشته باشیم  $n = 1$ ، این ماتریس را ماتریس ستونی می‌نامند.

مثال ۹- ماتریس F را یک ماتریس ستونی می‌نامند.

$$F = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

۷-۵-۵ ماتریس بالا مثلثی: به ماتریس مربعی که در آن کلیه ی درایه های زیر قطر اصلی صفر باشند ماتریس بالا مثلثی می گویند.

مثال ۱۰ - ماتریس M را یک ماتریس بالا مثلثی گویند.

$$M = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۶ & ۲ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۷-۵-۶ ماتریس پایین مثلثی: به ماتریس مربعی که در آن کلیه ی درایه های بالای قطر اصلی صفر باشند ماتریس پایین مثلثی گویند.

مثال ۱۱ - ماتریس N را یک ماتریس پایین مثلثی گویند.

$$N = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۴ & ۱ & ۲ \end{pmatrix}$$

۷-۵-۷ ماتریس قطری: به ماتریس مربعی که درایه های آن به جز درایه های روی قطر اصلی صفر باشند، ماتریس قطری گویند، مانند ماتریس B.

$$B = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

۷-۵-۸ ماتریس واحد: یک ماتریس قطری است که کلیه درایه های روی قطر اصلی آن یک باشد. به ماتریس واحد، ماتریس یکانی نیز گفته می شود. معمولاً ماتریس واحد (یکانی) را با  $I_n$  نشان می دهند که در آن n تعداد سطرها یا ستون های ماتریس است، مانند ماتریس  $I_۳$ .

$$I_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

## ۷-۶ ماتریس ترانهاده یا برگردان

هرگاه جای تمام سطرها و ستون های یک ماتریس مانند A را با هم عوض کنیم ماتریس جدیدی به دست می آید که آن را ماتریس ترانهاده ی ماتریس A می نامند و به صورت  $(A^t)$  نمایش داده می شود.

مثال ۱۲ - ترانهاده یا برگردان ماتریس  $A = \begin{matrix} ۲ & ۳ & ۱ & ۴\# \\ ۱۵ & ۸ & ۷ & ۶\% \end{matrix}$  را به دست آورید.

$$A^t \text{ (یا } A^t) = \begin{matrix} ۲ & ۵\# \\ ۱۵ & ۸\% \\ ۳ & ۷\% \\ ۱ & ۶\% \\ ۴ & ۶\% \end{matrix}$$

### ۷-۲ دو ماتریس مساوی

دو ماتریس را زمانی مساوی یکدیگر گویند که اولاً تعداد سطرها، ثانیاً تعداد ستون‌ها، ثالثاً درایه‌های متناظر هر دو ماتریس مساوی باشند، یعنی  $a_{۱۱} = b_{۱۱}$  و  $a_{۱۲} = b_{۱۲}$  و  $a_{۲۲} = b_{۲۲}$  و  $a_{۲۱} = b_{۲۱}$  و ...

مثال ۱۳ - دو ماتریس A و B با هم مساوی هستند؛ زیرا

$$A = \begin{matrix} ۱ & ۲\# \\ ۱۳ & ۴\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} ۳ & ۶\# \\ ۳ & ۳\% \\ ۹ & ۲ \times ۲\% \\ ۳ & ۳\% \end{matrix}$$

هر دو ماتریس  $۲ \times ۲$  می‌باشند و درایه‌های متناظر با هم مساوی هستند.

$$\begin{matrix} ۱ = \frac{۳}{۳} & ۲ = \frac{۶}{۳} \\ ۳ = \frac{۹}{۳} & ۴ = ۲ \times ۲ \end{matrix}$$

### ۷-۸ جمع ماتریس‌ها

باید توجه داشت دو ماتریس در صورتی می‌توانند با هم جمع شوند که تعداد سطرها و ستون‌های هر دو با هم مساوی باشند. در غیر این صورت، نمی‌توان آن‌ها را با هم جمع نمود.

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}$$

حاصل مجموع دو ماتریس، خود یک ماتریس است.

مثال ۱۴ - ماتریس A، که دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، با ماتریس B که آن نیز دارای

۲ سطر و ۳ ستون است، قابل جمع کردن هستند، ولی ماتریس A با C را نمی توان جمع نمود، زیرا ماتریس C، دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

$$A = \begin{matrix} & ۲ & ۱ & ۰\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۱ & ۲ & ۳\% & \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & ۱ & ۲ & ۱\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۴ & ۰ & ۱\% & \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} & ۱ & ۳ & ۲\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۲ & ۰ & ۴\% & \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۱ & ۴ & ۲\% & \end{matrix}$$

اگر دو ماتریس A و B،  $m \times n$  باشند، مجموع آن ها نیز یک ماتریس  $m \times n$  مانند C است، به طوری که هر درایه ی آن مساوی مجموع درایه های متناظرش در A و B است. مثال ۱۵ – مجموع دو ماتریس A و B را به دست آورید.

$$A = \begin{matrix} & ۱ & ۲ & ۳\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۲ & ۰ & ۱\% & \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & ۳ & ۱ & ۲\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۱ & ۰ & ۲\% & \end{matrix} \quad A + B = \begin{matrix} & ۱+۳ & ۲+۱ & ۳+۲\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۲+۱ & ۰+۰ & ۱+۲\% & \end{matrix}$$

چون هر دو ماتریس  $۲ \times ۳$  می باشند، پس جمع آن ها شدنی است و نتیجه، ماتریس C می شود که یک ماتریس  $۲ \times ۳$  است.

$$C = \begin{matrix} & ۴ & ۳ & ۵\# \\ \cdot & \% & \% & \% \\ !۳ & ۰ & ۳\% & \end{matrix}$$

مثال ۱۶ – شرکتی انواع کولر را با حجم های کوچک، متوسط و بزرگ در مدل های عادی و لوکس تولید می نماید. اگر تولید آن در شش ماهه ی اول و دوم سال به ترتیب جدول زیر باشد، تعیین کنید شرکت در یک سال چند کولر با حجم ها و انواع مختلف تولید می کند.

شش ماهه ی دوم		شش ماهه ی اول		حجم کولر	A + B = C
نوع لوکس	نوع عادی	نوع لوکس	نوع عادی		
۱۶۰۰	۱۴۰۰	۲۰۰۰	۲۷۰۰	کوچک	
۲۰۰۰	۲۱۰۰	۴۱۰۰	۴۳۰۰	متوسط	
۱۱۰۰۰	۴۰۰۰	۱۵۰۰	۵۲۰۰	بزرگ	

ماتریس A را تولید در شش ماهه ی اول و ماتریس B را تولید در شش ماهه ی دوم سال فرض می کنیم.

$$A = \begin{matrix} 2000 & 2700\# \\ \cdot 4100 & 4300\% \\ \vdots 1500 & 5200\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} 1600 & 1400\# \\ \cdot 2000 & 2100\% \\ \vdots 1100 & 4000\% \end{matrix} \quad C = \begin{matrix} 3600 & 4100\# \\ \cdot 6100 & 6400\% \\ \vdots 2600 & 9200\% \end{matrix}$$

در نتیجه ماتریس C، که مجموع A و B است، تولید کولر در یک سال را مشخص می‌نماید.  
مثال ۱۷ — ماتریس A و B را با هم جمع کنید.

$$A = \begin{matrix} 1 & 2\# \\ \cdot 13 & 1\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} 1 & 0 & 2\# \\ \cdot 12 & 1 & 3\% \end{matrix}$$

به دلیل این که تعداد سطر و ستون دو ماتریس با هم یکی نیست، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

## ۹- ضرب عدد حقیقی در ماتریس

اگر k عددی حقیقی و A ماتریس  $m \times n$  باشد، حاصل ضرب k در A ماتریسی خواهد بود  $m \times n$ ، که کلیه‌ی درایه‌های آن برابر با درایه‌های ماتریس A ضربدر k است.

$$k \times A = k \times \begin{matrix} a & b\# \\ \cdot c & d\% \end{matrix} = \begin{matrix} ka & kb\# \\ \cdot kc & kd\% \end{matrix}$$

مثال ۱۸ — اگر  $A = \begin{matrix} 1 & 2\# \\ \cdot 10 & 3\% \end{matrix}$  باشد، حاصل ضرب عدد ۵ را در A بیابید.

$$5 \times A = 5 \times \begin{matrix} 1 & 2\# & 5 & 10\# \\ \cdot 10 & 3\% & 10 & 15\% \end{matrix}$$

مثال ۱۹ — فرض کنید فروش فروردین ماه ۳ نوع محصول شرکت ایران خودرو (سمنند، پژو ۲۰۶ و پارس) در شهر تهران و اصفهان به صورت زیر است:

$$F = \begin{matrix} & \text{پارس} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{سمنند} \\ \text{تهران} & 90\# & 70 & 110 \\ \text{اصفهان} & 140\% & 100 & 160 \end{matrix}$$

اگر پیش‌بینی شود، فروش این شرکت در اردیبهشت ماه ۱۰٪ افزایش یابد، ارقام مربوط به



میزان فروش ماه اردیبهشت این شرکت در ۲ شهر تهران و اصفهان را به صورت ماتریس بنویسید.

۱۰٪ افزایش فروش فروش فروردین فروش اردیبهشت

$$F_2 = F_1 + 0.1F_1 = 1.1F_1 = 1.1 \begin{matrix} 110 & 70 & 90 \\ 60 & 100 & 140 \end{matrix} \%$$

پارس پژو ۲۰۶ سمند

$$F_2 = \begin{matrix} 121 & 77 & 99 \\ 66 & 110 & 154 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \# \\ \% \end{matrix} \begin{matrix} تهران \\ اصفهان \end{matrix}$$

### ۱۰-۷ ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

برای درک بهتر موضوع به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۰- در سال گذشته، شرکتی سه نوع کولر رومیزی، آبی و گازی را به تعداد ۵۰,۰۰۰، ۴۰,۰۰۰ و ۳۰,۰۰۰ به فروش رسانده است. اگر قیمت هر دستگاه کولر به ترتیب برابر با ۱۴۰,۰۰۰، ۲۵۰,۰۰۰ و ۳۰۰,۰۰۰ ریال باشد، فروش شرکت را در سال قبل تعیین کنید.

تعداد کولرها را می توان با یک ماتریس سطری A نمایش داد.

$$A_{1 \times 3} = \begin{matrix} & \text{گازی} & \text{آبی} & \text{رومیزی} \\ 50,000 & 40,000 & 30,000 \end{matrix}$$

هم چنین، بهای فروش هر دستگاه را می توان با یک ماتریس ستونی نشان داد.

$$B_{3 \times 1} = \begin{matrix} 140,000 \\ 250,000 \\ 300,000 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \end{matrix} \begin{matrix} \text{بهای کولر رومیزی} \\ \text{بهای کولر آبی} \\ \text{بهای کولر گازی} \end{matrix}$$

حاصل ضرب این دو ماتریس برابر است با :

$$A \times B = \begin{matrix} 140,000 \\ 250,000 \\ 300,000 \end{matrix} \begin{matrix} \% \\ \% \\ \% \end{matrix} \begin{matrix} 50,000 & 40,000 & 30,000 \end{matrix} \times \begin{matrix} 140,000 \\ 250,000 \\ 300,000 \end{matrix} \begin{matrix} \% \\ \% \\ \% \end{matrix}$$

$$= 50,000 \times 140,000 + 40,000 \times 250,000 + 30,000 \times 300,000$$

$$= 7,000,000,000 + 10,000,000,000 + 9,000,000,000 = 26,000,000,000$$

همان گونه که ملاحظه می‌شود، اولین درایه‌ی ماتریس سطری را در اولین درایه‌ی ماتریس ستونی، سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی و بالأخره سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سرانجام حاصل ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه، که یک ماتریس  $1 \times 1$  است، به‌دست آید.

دقت کنید که ضرب یک ماتریس سطری  $A$ ، در یک ماتریس ستونی  $B$  فقط وقتی شدنی است که تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  مساوی با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  باشد.

بنابراین، اگر  $A$  یک ماتریس  $1 \times n$  و  $B$  یک ماتریس  $n \times 1$  باشد، برای پیدا کردن حاصل ضرب  $A \times B$  به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

اولین درایه‌ی ماتریس سطری را در اولین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم. پس از آن سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم و بالأخره آخرین درایه‌ی ماتریس سطری را در آخرین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم. حاصل ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه حاصل گردد.

مثال ۲۱

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} = (2 \times 1) + (3 \times 2) = 2 + 6 = 8$$

$1 \times 2 \quad 2 \times 1$

$$A \times B = \begin{array}{r} 2 \\ 3 \end{array} \cdot \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array}$$

$1 \times 3 \quad 2 \times 1$

مثال ۲۲

چون ماتریس  $A$ ،  $1 \times 3$  و ماتریس  $B$ ،  $2 \times 1$  است، لذا ضرب آن‌ها عملی نیست.

## ۱۱-۷ ضرب ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس  $A$  و  $B$  مفروض باشند، تنها شرطی که بتوان ماتریس  $A$  را در ماتریس  $B$  ضرب نمود ( $A \times B$ )، این است که تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  برابر با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  باشد. اگر ماتریس  $A$  یک ماتریس  $m \times p$  و  $B$  یک ماتریس  $p \times n$  باشد، برای به‌دست آوردن ماتریس

$A \times B$  که یک ماتریس  $m \times n$  خواهد بود به صورت زیر عمل می‌کنیم. اولاً، ماتریس  $B$  را به  $n$  ماتریس ستونی تجزیه می‌کنیم. ثانیاً، ماتریس  $A$  را طبق روش قبلی در هریک از این ماتریس‌های ستونی ضرب می‌نماییم. ثالثاً، ضرب‌های به دست آمده را که به صورت ماتریس‌های ستونی هستند از چپ به راست ستون‌های اول تا  $n$ ام ماتریس حاصل ضرب قرار می‌دهیم. مثال ۲۳— حاصل ضرب  $A \times B$  را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times 4 & 1 \times 3 + 2 \times 1 \\ 3 \times 2 + 4 \times 4 & 3 \times 3 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix}$$

چون هر دو ماتریس  $2 \times 2$  هستند، پس ضرب آن‌ها شدنی است و نتیجه، یک ماتریس  $2 \times 2$  خواهد بود.

در این مثال می‌توان  $B \times A$  را محاسبه نمود. چون هر دو ماتریس  $2 \times 2$  هستند. ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A \times B \quad B \times A$$

$$B \times A = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 3 & 2 \times 2 + 3 \times 4 \\ 4 \times 1 + 1 \times 3 & 4 \times 2 + 1 \times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

ملاحظه می‌شود حاصل ضرب  $A \times B$  با  $B \times A$  برابر نیست.

مثال ۲۴— دو ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$  و  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$  مفروض است. حاصل ضرب  $A \times B$  را پیدا کنید.

چون تعداد ستون‌های ماتریس  $A$  برابر با تعداد سطرهای ماتریس  $B$  است، پس این ضرب شدنی است.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 3 \times 2 & 2 \times 3 + 3 \times 4 & 2 \times 5 + 3 \times 6 \\ 10 \times 1 + 5 \times 2 & 10 \times 3 + 5 \times 4 & 10 \times 5 + 5 \times 6 \end{pmatrix}$$

زیرا  $2 = 2$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3\# & 1\# & 2 \times 1 + 3 \times 2\# & 8\# & & \\ 1\% & 5\% \times & 12\% \overline{=} & 1\% \times 1 + 5\% \times 2\% \overline{=} & 11\% & & \end{array} \quad \text{ستون اول حاصل ضرب}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3\# & 3\# & 2 \times 3 + 3 \times 4\# & 18\# & & \\ 1\% & 5\% \times & 14\% \overline{=} & 1\% \times 3 + 5\% \times 4\% \overline{=} & 22\% & & \end{array} \quad \text{ستون دوم حاصل ضرب}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 3\# & 5\# & 2 \times 5 + 3 \times 6\# & 28\# & & \\ 1\% & 5\% \times & 16\% \overline{=} & 1\% \times 5 + 5\% \times 6\% \overline{=} & 32\% & & \end{array} \quad \text{ستون سوم حاصل ضرب}$$

$$A \times B = \begin{array}{ccc} 8 & 18 & 28\# \\ 11\% & 20\% & 30\% \end{array} \quad \text{به طور خلاصه}$$

دقت کنید که در این مثال  $B \times A$  را نمی توان محاسبه نمود؛ زیرا

$$B \times A = \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 5\# & 2 & 3\# \\ 12\% & 4\% & 6\% \times & 10\% & 5\% \\ & & & 2 \times 3) & 2 \times 2 \end{array} \quad 2. 3$$

## ۱۲-۷ تفریق ماتریس ها

تفریق ماتریس ها نیز مانند جمع آن هاست، با در نظر گرفتن این مطلب که تفریق حالت خاصی از جمع است، لذا برای انجام عمل تفریق  $A - B$ ، که در آن  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم مرتبه ی دل خواه اند، در ابتدا تمام اعضای ماتریس  $B$  را در  $-1$  ضرب می کنیم و سپس عمل جمع  $A + (-B)$  را انجام می دهیم.

مثال ۲۵- اگر

$$A = \begin{array}{ccc} 5 & 3 & 2\# \\ 1\% & 1 & 4\% \end{array}$$

و

$$B = \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 3\# \\ 12\% & 1 & 3\% \end{array}$$

باشد، آن گاه  $A - B$  را محاسبه کنید.

$$(-1) \times B = -B = \begin{array}{ccc} -3 & -2 & -3\# \\ 1-2 & -1 & -3\% \end{array}$$

$$A - B = A + (-B) = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5-3 & 3-2 & 2-3 \\ 1-2 & 4-1 & 1-3 \end{vmatrix} \quad A - B = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

### ۷-۱۳ دترمینان

فقط برای ماتریس مربع می توان عددی به نام دترمینان به دست آورد و برای ماتریس هایی که سطر و ستون آن ها مساوی نباشد، محاسبه ی دترمینان امکان ندارد. دترمینان ماتریس مربع  $A$ ، که  $n \times n$  است،

به صورت  $|A|$  نمایش داده می شود. اگر  $A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  یک ماتریس  $2 \times 2$  باشد، عدد حقیقی  $|A|$  برابر با  $ad - bc$  را دترمینان ماتریس  $A$  می نامیم.

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  باشد، دترمینان  $A$  را به شکل زیر محاسبه می کنیم.

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

روشن است که برای محاسبه ی دترمینان، ابتدا درایه ی  $a_{11}$  را در دترمینان ماتریس  $A$  با حذف سطر اول و ستون اول آن ضرب می کنیم. سپس، منفی درایه ی  $a_{12}$  را در دترمینان ماتریس  $A$ ، با حذف سطر اول و ستون دوم آن ضرب می کنیم و بالاخره درایه ی  $a_{13}$  را در دترمینان ماتریس  $A$ ، با حذف سطر اول و ستون سوم آن ضرب می نماییم تا از حاصل جمع این سه عدد، دترمینان  $A$  به دست آید.

$$|A| = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

$$= aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{مثال ۲۶- دترمینان ماتریس A را به دست آورید.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \times (6 - 0) - 3 \times (4 - 1) + 2 \times (0 - 3) = 6 - 9 - 6 = -9$$

اگر A یک ماتریس  $4 \times 4$  باشد، برای پیدا کردن دترمینان A با توجه به مطالبی که گفته شد، به شرح زیر عمل می‌کنیم.

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix} = a \times \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{vmatrix} - b \times \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & o & p \end{vmatrix} +$$

$$c \times \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{vmatrix} - d \times \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{vmatrix}$$

دقت کنید که علامت ضریب  $a_{ij}$  با استفاده از دستور  $(-1)^{i+j}$  به دست آمده است. به طور کلی، برای پیدا کردن دترمینان A، که یک ماتریس  $n \times n$  است، به این صورت عمل

می‌کنیم.

$$|A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{A}_{ij}$$

در این رابطه  $a_{ij}$  عبارت از درایه‌ی یک سطر یا یک ستون از ماتریس  $A$  است و  $\dot{A}_{ij}$  را هم‌سازه‌ی (کوفاکتور یا زیر ماتریس) درایه‌ی  $a_{ij}$  گویند.

بنابراین، دترمینان ماتریس  $A$  عبارت است از حاصل ضرب داخلی درایه‌ی یک سطر با یک

ستون ماتریس  $A$  در هم‌سازه‌های  $\dot{A}_{ij}$ .

مقدار  $\dot{A}_{ij}$  برابر با  $(-1)^{i+j}$  ضربدر دترمینان ماتریس حاصل از  $A$  با حذف سطر  $i$  و ستون  $j$  است.

مثال ۲۷- دترمینان ماتریس  $B$  را که  $4 \times 4$  است، پیدا کنید.

$$B = \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \begin{matrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{matrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \times \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} + 0 + 0$$

سپس دترمینان‌های مرتبه‌ی ۳ را برحسب ستون‌های اول آن‌ها بسط می‌دهیم.

$$|B| = (-1)(-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-2)(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1(3 - 0) - 2(4 + 1) = 3 - 10 = -7$$

۱-۱۳-۷ ماتریس الحاقی: فرض کنیم  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  یک ماتریس مربع  $M \times M$  باشد. آن گاه

بنا بر تعریف، ماتریس الحاقی برای ماتریس مربع  $A$ ، که با  $\text{adj}A$  نمایش داده می‌شود، عبارت است از برگردان ماتریس حاصل از  $A$ ، به طوری که در آن به جای عناصر  $a_{ij}$ ، هم‌سازه‌های آن‌ها یعنی  $\dot{A}_{ij}$  قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر ماتریس الحاقی  $\text{adj}A$  برابر است با برگردان ماتریس مربعی که به جای هر عنصر آن  $(-1)^{i+j}$  برابر دترمینان زیر ماتریس حاصل از همان عنصر قرار گرفته باشد.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{مثال ۲۸- فرض کنیم}$$

ماتریس الحاقی آن برابر است با

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{21} & \dot{A}_{31} \\ \dot{A}_{12} & \dot{A}_{22} & \dot{A}_{32} \\ \dot{A}_{13} & \dot{A}_{23} & \dot{A}_{33} \end{pmatrix}$$

که در آن  $\dot{A}_{ij}$  هم‌سازه‌ی  $a_{ij}$  است، مثل

$$\dot{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و یا

$$\dot{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

مثال ۲۹- ماتریس الحاقی

را به دست آورید.



$$\text{adj}A = \begin{array}{cc} d & -b\% \\ -c & a\% \end{array}$$

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3\% \\ 1 & 3 & 4\% \\ 1 & 4 & 3\% \end{array}$$

مثال ۳۰- ماتریس الحاقی

را به دست آورید.

$$\text{adj}A = \begin{array}{ccc|ccc|ccc} \cdot & 3 & 4 & - & 2 & 3 & 2 & 3 & \# \\ \cdot & 4 & 3 & & 4 & 3 & 3 & 4 & \% \\ \cdot & 1 & 4 & & 1 & 3 & 1 & 3 & \% \\ \cdot & 1 & 3 & - & 1 & 3 & 1 & 4 & \% \\ \cdot & 1 & 3 & & 1 & 2 & 1 & 2 & \% \\ \cdot & 1 & 4 & - & 1 & 4 & 1 & 3 & \% \\ ! & 1 & 4 & & 1 & 4 & 1 & 3 & \% \end{array}$$

$$\text{adj}A = \begin{array}{ccc} -7 & 6 & -1\% \\ 1 & 0 & -1\% \\ 1 & -2 & 1\% \end{array}$$

## ۱۴-۷ خواص دترمینانها

۱- هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس را با یکدیگر عوض کنیم، دترمینان آن

ماتریس تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

۲- از تعویض دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مربع با یکدیگر، تنها علامت دترمینان آن

تغییر می‌یابد.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

۳- هرگاه دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مساوی باشد، دترمینان آن ماتریس صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

۴- هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون یک ماتریس در عددی مانند  $k$  ضرب شود، دترمینان آن ماتریس نیز در  $k$  ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

۵- هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد، دترمینان آن برابر صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

۶- هرگاه به سطر (یا ستون) یک ماتریس، مضرب‌هایی از سطرها یا ستون‌های دیگر (یا از ستون‌های دیگر) اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس قبلی مساوی است. مرتبه‌ی یک ماتریس مربع: به تعداد سطرها یا ستون‌های یک ماتریس مربع، مرتبه‌ی ماتریس نیز می‌گویند.

۷- هرگاه  $A$  و  $B$  دو ماتریس مربع هم مرتبه باشند، داریم:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

یعنی دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس، برابر است با حاصل ضرب دترمینان‌های آن دو ماتریس.

مثال ۳۱- دترمینان ماتریس  $A$  و  $B$  را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \# \\ 1 & 2\% \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0$$

در ماتریس  $A$  چون سطر اول صفر است، پس دترمینان آن صفر است.

$$B = \begin{matrix} & \circ & ۱ & ۲\# \\ \circ & ۳ & ۱\% \\ ۱\circ & ۲ & ۴\% \end{matrix}$$

$$|B| = \circ$$

در ماتریس B چون ستون اول صفر است، پس دترمینان آن صفر است و نیازی به محاسبه ندارد.

مثال ۳۲- دترمینان ماتریس A و B را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$A = \begin{matrix} & ۱ & ۳ & ۲\# \\ \circ & ۲ & ۳ & ۱\% \\ ۱ & \circ & ۲\% \end{matrix} \quad B = \begin{matrix} & ۱ & ۳ & ۲\# \\ \circ & ۴ & ۶ & ۲\% \\ ۱ & \circ & ۲\% \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ \circ & ۲ & ۱ \\ ۱ & \circ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \times \begin{vmatrix} ۳ & ۱ \\ \circ & ۲ \end{vmatrix} - ۳ \times \begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۲ \times \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix}$$

$$۱ \times (۶ - \circ) - ۳ \times (۴ - ۱) + ۲ \times (\circ - ۳) = ۶ - ۹ - ۶ = -۹$$

$$|B| = \begin{vmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ \circ & ۴ & ۲ \\ ۱ & \circ & ۲ \end{vmatrix} = ۱ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ \circ & ۲ \end{vmatrix} - ۳ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۲ \times \begin{vmatrix} ۴ & ۶ \\ ۱ & \circ \end{vmatrix}$$

$$|B| = ۱(۱۲ - \circ) - ۳(۴ \times ۲ - ۱ \times ۲) + ۲(۴ \times \circ - ۱ \times ۶)$$

$$|B| = ۱۲ - ۳(۸ - ۲) + ۲(-۶) = ۱۲ - ۱۸ - ۱۲ = -۱۸$$

ملاحظه می‌شود که تنها تفاوت ماتریس A و B در آن است که سطر دوم ماتریس B همان سطر دوم ماتریس A است، که در عدد ۲ ضرب شده است. بنابراین، با توجه به خاصیت (۴) دترمینان ماتریس B برابر است با همان دترمینان ماتریس A ضرب در عدد ۲. چون دترمینان ماتریس A، -۹ بوده است، پس دترمینان ماتریس B برابر با  $۹ \times ۲ = ۱۸$  -۱۸ است.

## ۱۵-۷ معکوس یک ماتریس

اگر برای یک ماتریس مربع  $A_{n \times n}$ ، یک ماتریس هم مرتبه با آن، مانند  $B$  وجود داشته باشد، به طوری که حاصل ضرب آن‌ها ماتریسی واحد باشد، چنین ماتریسی ( $B$ ) را معکوس ماتریس  $A$  می‌نامند.

$$A_{n \times n} \times B_{n \times n} = I_n = B_{n \times n} \times A_{n \times n}$$

و به این صورت نشان می‌دهند.

$$B_{n \times n} = A_{n \times n}^{-1}$$

ماتریس مربع با هر مرتبه، تنها هنگامی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد. برای روشن تر شدن موضوع به مثال زیر توجه فرمایید.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{مثال ۳۳- معکوس ماتریس } A \text{ را پیدا کنید.}$$

فرض می‌کنیم معکوس ماتریس  $A$ ، ماتریس مانند  $B$  باشد. بنابراین، طبق آنچه قبلاً گفته شد

$$A \times B = I$$

و یا

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه داریم:

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \quad (۱)$$

$$a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 0 \quad (۲)$$

$$a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 0 \quad (۳)$$

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 1 \quad (۴)$$

برای پیدا کردن درایه‌های ماتریس  $B$  به شکل زیر عمل می‌کنیم.

$$b_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{از حل دستگاه (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:}$$

$$b_{21} = \frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \quad \text{و}$$

و از حل دستگاه (۲) و (۴) نتیجه می شود :

$$b_{12} = \frac{-a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

و

$$b_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

توجه کنید که مخرج هریک از این روابط، برابر با دترمینان A است.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

بنابراین، اگر  $|A| = 0$  باشد ماتریس B نامعین و  $A^{-1}$  وجود ندارد. پس، هر ماتریس مربع فقط زمانی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.  
مثال ۳۴- معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \det A = -3 - 24 = -27 = |A|$$

چون  $|A| \neq 0$  پس معکوس آن وجود دارد.

$$b_{11} = \frac{3}{-27} = -\frac{1}{9}$$

$$b_{12} = \frac{-6}{-27} = \frac{2}{9}$$

$$b_{21} = \frac{-4}{-27} = \frac{4}{27}$$

$$b_{22} = \frac{-1}{-27} = \frac{1}{27}$$

پس،

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{27} & \frac{1}{27} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

توجه کنید که :

$$A \times A^{-1} = I$$

مثال ۳۵- معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 15 - 15 = 0$$

چون دترمینان آن مساوی صفر است، پس، ماتریس A معکوس ندارد. یک ماتریس، زمانی دارای معکوس است که اولاً، این ماتریس مربع باشد و ثانیاً، دترمینان آن یعنی |A| مخالف صفر گردد.

## ۱۶-۷ پیدا کردن ماتریس معکوس به روش عملیات ردیفی

چون استفاده از روش قبلی در محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس، همیشه عملی نیست و ممکن است محاسبات به طول انجامد، روش عملیات ردیفی نیز قابل استفاده است. این روش بر سه اصل عمده‌ی زیر استوار است :

$$1- \text{قاعده‌ی کلی } A \times A^{-1} = I$$

۲- ضرب یا تقسیم کردن ردیفی از ردیف‌های یک ماتریس در یک، یا بر یک عدد غیر صفر.

۳- اضافه یا کسر کردن مضربی از یک ردیف ماتریس به ردیف دیگری از ردیف‌های ماتریس.

برای محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس مربع A، ابتدا ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن  $I_n$  را مجاور ماتریس A قرار می‌دهیم (یعنی  $I: A$ ). سپس، بر مبنای این که  $A \times A^{-1} = I$  و  $A^{-1} \times A = I$ ، عملیات را به شکلی پس می‌گیریم که محل دو ماتریس مجاور در  $(I: A)$  با یکدیگر تعویض گردند، به شکلی که I محل خود را به  $A^{-1}$  بدهد و A به I مبدل شود (یعنی  $I: A^{-1}$ ). لذا قواعد زیر در عملیات ردیفی برای  $I: A$  به کار می‌رود.

۱- کلیه‌ی درایه‌های بالاترین ردیف ماتریس  $I: A$  را بر اولین درایه‌ی سمت چپ آن (برای

مرحله‌ی اول عملیات، درایه‌ی واقع در ردیف یکم و ستون یکم خواهد بود) تقسیم می‌کنیم (به شرطی که این درایه غیر صفر باشد). اما اگر اولین درایه‌ی سمت چپ ردیف، صفر باشد ابتدا هر ردیف دیگری

از ماتریس را که اولین عنصر آن صفر نباشد با ردیف اول جمع می‌کنیم و سپس قاعده را به کار می‌بریم. بدیهی است چنانچه ردیفی وجود نداشته باشد که اولین درایه‌ی سمت چپ آن غیر صفر باشد، ماتریس معکوس ندارد.

اجرای اولین قاعده سبب می‌گردد که بالاترین درایه‌ی سمت چپ به عدد یک تبدیل گردد و در نتیجه بتوان تجسس را برای داشتن بردار واحد شروع کرد.

۲- چنان مضربی از ردیف با اولین درایه‌ی تبدیل شده به واحد را با سایر ردیف‌ها جمع می‌کنیم، به شکلی که کلیه‌ی درایه‌ی موجود در ستون حاوی درایه‌ی تبدیل شده به یک (ستون یکم) برابر صفر شوند به جز خود درایه‌ی تبدیل شده به واحد که باید تا آخر عملیات واحد باقی بماند.

۳- قاعده‌ی یک و دو را برای کلیه‌ی ردیف‌های باقی‌مانده تکرار می‌نماییم تا آن که  $A^{-1}$  مشخص گردد. این روش برای حل دستگاه معادلات با استفاده از کامپیوتر کاربرد دارد.  
مثال ۳۶- معکوس ماتریس  $A$  را با استفاده از روش عملیات ردیفی پیدا کنید.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A : I = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

کلیه‌ی درایه‌های ردیف یکم را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

چنان مضربی از ردیف یکم را با سایر ردیف‌ها جمع می‌نماییم که کلیه‌ی درایه‌های ستون یکم به استثنای درایه‌ی اول برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب صفر از ردیف یکم با ردیف دوم و مضرب ۱- از آن ردیف با ردیف سوم جمع شوند.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & \end{array}$$

سپس اولین درایه‌ی سمت چپ باقی‌مانده برای ردیف دوم عنصر یک است که عملیات را بر روی آن شروع می‌نماییم.

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف دوم را بر اولین درایه‌ی باقی‌مانده در سمت چپ (عدد یک) تقسیم می‌کنیم.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & \end{array}$$

چنان مضربی از ردیف دوم به سایر ردیف‌ها اضافه می‌کنیم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون دوم به استثنای درایه‌ی واحد آن برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب  $-\frac{1}{3}$  از آن با ردیف اول و مضرب  $\frac{1}{3}$  از آن با ردیف سوم جمع گردد.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & \end{array}$$

اینک عملیات ردیفی را برای اولین درایه باقی‌مانده در سمت چپ ردیف سوم (یعنی  $\frac{2}{3}$ ) انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، کلّیه‌ی درایه‌های ردیف سوم را بر عنصر  $\frac{2}{3}$  تقسیم می‌نماییم.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ \cdot & & & & & & \\ \cdot & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \end{array}$$



بالأخره برای تبدیل درایه‌های ستون سوم، به استثنای درایه‌ی سوم آن به صفر، باید مضرب  
 ۱- از آن را با ردیف دوم و مضرب  $\frac{4}{3}$  - از آن را با ردیف اول جمع نماییم.

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}$$

ملاحظه می‌شود که در اثر عملیات ردیفی ماتریس  $(A; I)$  تبدیل به  $(I; A^{-1})$  می‌شود و معکوس  $A$  به دست آمده است.

۱۶-۷ پیدا کردن ماتریس معکوس با استفاده از ماتریس الحاقی: روش دیگری که برای محاسبه‌ی ماتریس معکوس به کار می‌رود، استفاده از ماتریس الحاقی است. در این روش، در میانه ماتریسی که می‌خواهیم معکوس آن را به دست آوریم، محاسبه می‌کنیم. اگر  $A$  ماتریس (غیرمنفرد، نامنفرد) معکوس پذیر باشد، یعنی  $|A| \neq 0$  در این صورت داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A$$

مثال ۳۷- معکوس ماتریس  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  را در صورت وجود تعیین کنید.

$$|A| = 3$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

در نتیجه

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}A}{|A|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

مثال ۳۸- معکوس ماتریس را در صورت وجود تعیین کنید.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = 0 + 2(-2 + 3) + (-3)(-2 + 3) = -1$$

پس عناصر ماتریس الحاقی عبارت‌اند از

$$\hat{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

$$\hat{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 + 3) = -1$$

$$\hat{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1$$

$$\hat{A}_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(4 - 6) = 2$$

$$\hat{A}_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$$

$$\hat{A}_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -(-0 - 2) = 2$$

$$\hat{A}_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 9 = 3$$

$$\hat{A}_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(0 + 3) = -3$$

$$\hat{A}_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2$$

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}A = \begin{matrix} \circ & -2 & -3\# \\ 1 & 3 & 3\% \\ -1 & -2 & -2\% \end{matrix}$$

## ۱۷-۷ دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی

برای حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم.

ب) هم‌سازهای ستون اول را تشکیل می‌دهیم.

ج)  $\dot{A}_{11}$  را در معادله‌ی اول،  $\dot{A}_{21}$  را در معادله‌ی دوم و  $\dot{A}_{31}$  را در معادله‌ی سوم ضرب می‌نماییم.

د) هر سه معادله را با هم جمع و  $x$  را محاسبه می‌کنیم.

مثال ۳۹- دستگاه را با استفاده از هم‌سازه، نسبت به  $x$  حل کنید.

$$. 2x + y + z = 0$$

$$. x - y + 5z = 0$$

$$. x - 2y - z = -18$$

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 1\# \\ 1 & -1 & 5\% \\ 1 & -2 & -1\% \end{matrix}$$

$$\dot{A}_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 10 = 11$$

$$\dot{A}_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 2) = -1$$

$$\dot{A}_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 1 = 6$$

$$. 11(2x + y + z) = 0$$

$$. -1(x - y + 5z) = 0$$

$$. 6(x - 2y - z) = -18 \times 6$$

$$. 22x + 11y + 11z = 0$$

$$. -x + y - 5z = 0$$

$$. 6x - 12y - 6z = -108$$

$$(22x - x + 6x) + (11y + y - 12y) + (11z - 5z - 6z) = -108$$

$$27x = -108$$

$$x = -4$$

مثال ۴۰- این دستگاه را با استفاده از هم‌سازه نسبت به  $x$  حل کنید.

$$. 2x + y = 2$$

$$. 3x - 2z = 4$$

$$. y + 3z = 1$$

$$A = \begin{matrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix} \quad \Delta_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = +2$$

$$\Delta_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3 \quad \Delta_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$. 2 \cdot 4x + 2y = 4$$

$$-3 \cdot -9x + 6z = -12$$

$$. -5x = -10 \cdot x = 2$$

$$-2 \cdot -2y - 6z = -2$$

روش دیگری برای حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی: برای حل دستگاه به ترتیب زیر

عمل می‌کنیم.

(الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را  $+$  می‌نامیم.

(ب) دترمینان  $+$  را محاسبه می‌کنیم. به شرطی که مخالف صفر باشد.

(ج) در ماتریس ضرایب، ستون اول را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+$

می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+_2$

می‌نامیم.

ه) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را

$+_3$  می‌نامیم.

و) دترمینان  $+_1$  و  $+_2$  و  $+_3$  را محاسبه می‌نماییم.

$$x_i = \frac{+_i}{+}, \quad i=1,2,3$$

ز) با استفاده از فرمول

جواب‌های دستگاه به دست می‌آید.

مثال ۴۱ — دستگاه معادلات

$$. 2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$. x_1 + 3x_2 + x_3 = 5$$

$$. x_1 + x_2 + 5x_3 = -7$$

را حل کنید.

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با

$$+ = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(15-1) - (5-1) + (1-3) = 28 - 4 - 2 = 22$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$+_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 2(15-1) - (25+7) + (5+21) = 28 - 32 + 26 = 22$$

$$+_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & -7 & 5 \end{vmatrix} = 2(25+7) - 2(5-1) + (-7-5) = 64 - 8 - 12 = 44$$

$$+_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 2(-21-5) - (-7-5) + 2(1-3) = -52 + 12 - 4 = -44$$

در نتیجه

$$x_1 = \frac{+x_1}{+} = \frac{22}{22} = 1 \quad . \quad x_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{+x_2}{+} = \frac{44}{22} = 2 \quad . \quad x_2 = 2$$

$$x_3 = \frac{+x_3}{+} = \frac{-44}{22} = -2 \quad . \quad x_3 = -2$$

حال امتحان می‌کنیم.

$$. \quad 2(1) + 2 + (-2) = 2 \quad . \quad 2 = 2$$

$$. \quad 1 + 3(2) + (-2) = 1 + 6 - 2 = 5 \quad . \quad 5 = 5$$

$$. \quad 1 + 2 + 5(-2) = 1 + 2 - 10 = -7 \quad . \quad -7 = -7$$

### ۱۸-۷ دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی (جهت مطالعه آزاد)

برای حل دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را  $+$  می‌نامیم.

ب) دترمینان  $+$  را محاسبه می‌کنیم، به شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اول را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+_1$

می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را  $+_2$

می‌نامیم.

ه) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را

$+_3$  می‌نامیم.

و) در ماتریس ضرایب، ستون چهارم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را

$+_4$  می‌نامیم.

ز) دترمینان  $+_1$  و  $+_2$  و  $+_3$  و  $+_4$  را محاسبه می‌نامیم.

$$x_i = \frac{+_i}{+} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ح) با استفاده از فرمول

جواب‌های دستگاه به دست می‌آید.

مثال ۴۲ - دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$. 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9$$

$$. 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5$$

$$. x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0$$

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با:

$$= . \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 . 0$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$+_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81$$

$$+_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108$$

$$+_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

$$+_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27$$

در نتیجه

$$x_1 = \frac{+1}{+} = \frac{81}{27} = 3$$

$$x_2 = \frac{+2}{+} = \frac{-1 \cdot 8}{27} = -4$$

$$x_3 = \frac{+3}{+} = \frac{-27}{27} = -1$$

$$x_4 = \frac{+4}{+} = \frac{27}{27} = 1$$

حال امتحان می کنیم

$$. 2(3) + (-4) - 5(-1) + 1 = 8. \quad 6 - 4 + 5 + 1 = 8. \quad 8 = 8$$

$$3 - 3(-4) - 6(1) = 9. \quad 3 + 12 - 6 = 9. \quad 9 = 9$$

$$. 2(-4) - (-1) + 2(1) = -5. \quad -8 + 1 + 2 = -5. \quad -5 = -5$$

$$. 3 + 4(-4) - 7(-1) + 6(1) = 0. \quad 3 - 16 + 7 + 6 = 0. \quad 0 = 0$$

## تمرین های فصل هفتم

۱- ماتریس های زیر را دوباره با هم جمع کنید.

$$\begin{matrix} 2 & 0\# & 1 & 2\# \\ 1 & 3\%+ & 1 & 4\% \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & 5 & 1\# & 1 & 2 & 3\# \\ .2 & 2 & \%+ & .0 & 1 & \% \\ . & & \% & . & & \% \\ !1 & 2 & 1\% & !2 & 2 & 1\% \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a & b & c\# & 1 & 0 & 1\# \\ !d & e & f\%+ & !2 & 2 & 1\% \end{matrix}$$



$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & ۳\# & -۱ & -۳\# \\
 \cdot ۲ & \circ \frac{\%}{\%} & \cdot -۲ & \circ \frac{\%}{\%} \\
 ! ۱ & ۱\% & ! -۱ & ۱\%
 \end{array}$$

۲- ماتریس‌های زیر را در هم ضرب نمایید :

$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & -۱ & ۱\# & ۱ & ۲\# \\
 \cdot ۲ & \circ & ۱\% & -۱ & ۱\% \\
 ! ۳ & -۱ & ۲\% & ۱ & ۳\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & -۱ & ۱\# & ۱ & -۱ & ۱\# \\
 ! ۲ & \circ & ۱\% & ۱ & -۱\% \\
 & & ! ۱ & ۱ & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 ۲ & ۳\# & ۱\# \\
 ! ۱ & ۴\% & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a & b\# & \\
 \cdot c & d\% & ۱\# \\
 ! e & f\% & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 ۱ & ۲ & \circ\# & \circ & \circ & \circ\# \\
 \cdot ۱ & ۱ & \circ\% & \circ & \circ & \circ\% \\
 ! -۱ & ۴ & \circ\% & ۱ & ۴ & ۹\%
 \end{array}$$

۳- دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{cc}
 ۲ & ۱\# \\
 ! ۰ & ۲\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 ۱ & ۲ & ۳\# \\
 \cdot ۰ & ۱ & ۱\% \\
 ! ۲ & ۱ & ۲\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \circ & \circ & ۷\# \\
 \cdot -۲ & ۳ & ۴\% \\
 ! ۵ & ۶ & ۱\%
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & 0 & 0 \# \\ \cdot & 0 & -1 & 2 \quad 1 \% \\ \cdot & 0 & 0 & -1 \quad 2 \% \\ ! & 1 & 0 & 0 \quad -3 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 5 & 2 \# \\ \cdot & 1 & 1 \quad \sqrt{\frac{\%}{\%}} \\ \cdot & 0 & -3 \quad 4 \% \\ ! & 0 & -3 \quad 4 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \# \\ \cdot & 5 & 1 \quad -3 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & 2 & 7 \quad 4 \% \\ ! & 2 & 7 \quad 4 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 3 & -1 \# \\ \cdot & 4 & 0 \quad 5 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & -1 & 2 \quad 1 \% \\ ! & -1 & 2 \quad 1 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 4 & 0 & 5 \# \\ \cdot & 2 & 3 \quad -1 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & -1 & 2 \quad 1 \% \\ ! & -1 & 2 \quad 1 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \# \\ \cdot & 1 & 2 \quad 3 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & -1 & 4 \quad 0 \% \\ ! & -1 & 4 \quad 0 \% \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \# \\ \cdot & a & b \quad c \frac{\%}{\%} \\ \cdot & d & e \quad f \% \\ ! & d & e \quad f \% \end{array}$$

۴- معکوس ماتریس‌های زیر را در صورت وجود، پیدا کنید.

$$A = \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \# \\ \cdot & 0 & 1 \quad 6 \frac{\%}{\%} \\ \cdot & 1 & 3 \quad 2 \% \\ ! & 1 & 3 \quad 2 \% \end{array}$$

$$B = \begin{array}{ccc} 2 & 4\# & \\ 15 & 3\% & \end{array}$$

$$C = \begin{array}{ccc} 2 & 1\# & \\ 11 & 0\% & \end{array}$$

$$D = \begin{array}{ccc} 8 & 3 & 5\# \\ 4 & 11 & 7\% \\ 3 & 9 & 6\% \end{array}$$

$$E = \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 3\# \\ 3 & 3 & 1\% \\ 2 & 0 & 3\% \end{array}$$

$$F = \begin{array}{ccc} 0 & -2 & -1\# \\ 1 & -3 & 4\% \\ -1 & -1 & -1\% \end{array}$$

$$G = \begin{array}{ccc} 2 & -3\# & \\ 14 & -6\% & \end{array}$$

۵ - دستگاه‌های زیر را با استفاده از هم‌سازه نسبت به  $x$  حل کنید.

$$\begin{array}{ll} . x - y = 0 & . x + y + z = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . y - z = 0 & . x + y - z = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . z - x = 0 & . 2x + 3y + z = 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . x + y + z = 3 & . 3x + 3y + z = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . x - z = -1 & . x - y + 2z = 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . 2x + 2y = 2 & . 2x + y - z = -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . x + y + 2z = 45 & . x + y + 2z = 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . 2x - y + z = 15 & . 2x + y - z = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} . x + y - z = 0 & . -x + y = 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 4 & x + y - z &= 1 \\ y - z &= -1 & 3x - z &= 2 \\ x + y - z &= -\frac{1}{2} & 4x - y &= 5 \end{aligned}$$

۶- در ماتریس A، مقدار x را طوری تعیین کنید که درمینان A برابر ۱۵- باشد.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ x & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix}$$

۷- یک شرکت مقاطعه کاری برای هر ساعت کامیون بدون راننده ۶۰۰۰ تومان، بابت کرایه هر ساعت تراکتور بدون راننده ۲۰۰۰ تومان و برای هر ساعت جهت راننده ۱۰۰۰ تومان پرداخت می نماید. این شرکت از ماتریس A برای انجام کارهای مختلف استفاده می نماید.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \\ \% \end{matrix}$$

الف) اگر ۱۰۰۰، ۲۰۰۰، ۳۰۰۰ P = نشان دهنده ی ماتریس قیمت باشد، که توسط این شرکت پرداخت می شود، ماتریس PA را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید که شرکت برای انجام یک طرح کوچک نیازمند ۲۰ ساعت کار از نوع I، و ۳۰

ساعت کار از نوع II است. اگر  $S = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \# \\ \% \\ \% \end{matrix}$  ماتریس تقاضا باشد AS را محاسبه کنید.

ج) PAS را محاسبه نماید.

۸- یک فروشنده ی ماشین حساب پنج مدل ماشین حساب خود را در سه مغازه که در مناطق

مختلف شهر قرار دارند می‌فروشد. موجودی هر مدل در هر مغازه در ماتریس M خلاصه شده است. قیمت فروش کلی (W) و جزئی (R) در ماتریس N برای هر مدل نوشته شده است.

	A	B	C	D	E
M =	۴	۲	۳	۷	۱#
	۲	۳	۵	۰	۶%
	۱۰	۴	۳	۴	۳%

	تومان	تومان
	W	R
N =	۷۰۰	۸۴۰ #A
	۱۴۰۰	۱۸۰۰ %B
	۱۸۰۰	۲۴۰۰ %C
	۲۷۰۰	۳۳۰۰ %D
	۳۵۰۰	۴۹۰۰ %E

الف) قیمت جزئی موجودی مغازه ۲ چه قدر است؟

ب) قیمت کلی موجودی مغازه ۳ چه قدر است؟

ج) ماتریس MN را محاسبه نمایید.

۹- یک پیمان کار توافق کرده است که ۴ ویلا، ۳ آپارتمان و ۹ خوابگاه بسازد. این توافق را

می‌توان در قالب ماتریس زیر نشان داد.

خوابگاه آپارتمان ویلا

$$Q = \begin{bmatrix} & ۳ & ۹ \\ & & \end{bmatrix}$$

مقادیر ریالی مصالح معدنی در ساخت ساختمان‌ها و دستمزد کارگران به شرح ماتریس زیر است:

	آجر	چوب	شیشه	بتن	دستمزد کارگران
R =	۱۰۰	۳۰	۵۰	۳۰	۱۲۰ # ویلا
	۴۰	۸۰	۲۰	۴۰	۱۰۰% آپارتمان
	۱۶۰	۵۰	۷۰	۲۰	۱۰۰% خوابگاه

مطلوب است: محاسبه  $Q \times R$ ، که بیانگر میزان مصالح و کارگر لازم برای ساخت هر

ساختمان است.

۱۰- امید و خواهرش مریم هر کدام به دو فروشگاه متفاوت می‌روند. امید ۴ کیلو شکر به ازای هر کیلو ۶۰۰ تومان، ۲ کیلو گوشت که هر کیلوی آن ۴۰۰۰ تومان و ۳ بسته نان که هر بسته‌ی آن ۱۲۰ تومان است می‌خرد. مریم نیز ۲ کیلوگرم شکر به ازای هر کیلو ۷۵۰ تومان، ۱ کیلو گوشت که هر کیلوی آن ۳۵۰۰ تومان و ۴ بسته نان که هر بسته آن ۱۰۰ تومان است می‌خرد.  
مطلوب است:

۱- جمع کل پولی که امید و مریم هر کدام بابت خریدهایشان پرداخت کرده‌اند.  
۲- مشخص کنید که اگر امید از فروشگاه‌ای که مریم خرید کرده بود، خرید می‌کرد چه قدر پول باید می‌پرداخت؟  
۳- اگر مریم از فروشگاه‌ای که امید از آن خریداری کرده بود، خرید می‌کرد، چه قدر پول باید می‌پرداخت؟

۱۱- فرض کنید شرکتی ۳ نوع شکلات (کاکائویی، قهوه‌ای و شیرینی) تولید می‌کند و قصد دارد از هر شکلات به تعداد زیر در ماه فروردین در ۲ مدرسه‌ی دخترانه و پسرانه بفروشد:

شکلات شیری شکلات قهوه‌ای شکلات کاکائویی

$$T = \begin{matrix} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \# 105 & 70 & 120 \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \% 145 & 100 & 65 \end{matrix}$$

اگر اطلاعات مربوط به فروش واقعی شکلات‌های این شرکت به صورت ماتریس زیر باشد، اختلاف بین فروش پیش‌بینی شده و فروش واقعی این شرکت در هر یک از این مدارس چه قدر است؟

شکلات شیری شکلات قهوه‌ای شکلات کاکائویی

$$J = \begin{matrix} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \# 100 & 50 & 120 \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \% 150 & 75 & 80 \end{matrix}$$

۱۲- سارا و زهرا و نیما به یک مغازه میوه فروشی رفته‌اند. سارا ۱۲ عدد پرتقال، ۵ عدد انار، ۲۰ عدد سیب، ۶ عدد موز و ۳ عدد لیموترش خرید. زهرا ۲۰ عدد پرتقال، ۳ عدد انار، ۱۰ عدد سیب و ۴ عدد موز خرید و نیما هم ۱۰ عدد پرتقال، ۱۰ عدد انار، ۱۲ عدد موز خرید. اگر قیمت هر عدد پرتقال ۳۰۰ تومان، انار ۲۰۰ تومان، سیب ۵۰ تومان، موز ۱۰۰ تومان و لیموترش ۱۰ تومان باشد.  
مطلوب است:

الف) مقدار میوه‌های خریداری شده توسط هر یک از این ۳ نفر را در یک ماتریس افقی نشان

دهید.

- ب) قیمت خرید هر نوع میوه توسط این ۳ نفر را در یک ماتریس ستونی نشان دهید.
- ج) از طریق ضرب ماتریس‌ها، صورت حساب هر کدام از این ۳ نفر را تهیه کنید.
- د) با استفاده از جمع ماتریس‌ها مشخص کنید از هر نوع میوه، کلاً چند عدد خریداری شده است؟
- ه) با استفاده از ضرب ماتریس‌ها، حساب کنید برای خرید هر نوع میوه جمعاً چند تومان پرداخت شده است؟

جدول ۱- ارزش نهایی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می شود

n	1.5%	4.0%	1.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	2.015000	2.040000	2.045000	2.050000	2.055000	2.060000	2.070000
3	3.045225	3.121600	3.137025	3.152500	3.168025	3.183600	3.214900
4	4.090903	4.246464	4.278191	4.310125	4.342266	4.374616	4.439943
5	5.152267	5.416323	5.470710	5.525631	5.581091	5.637093	5.750739
6	6.229551	6.632975	6.716892	6.801913	6.888051	6.975319	7.153291
7	7.322894	7.898294	8.019152	8.142008	8.266894	8.393838	8.654021
8	8.432839	9.214226	9.389014	9.539109	9.721573	9.897468	10.259803
9	9.559332	10.582795	10.802114	11.026564	11.256260	11.491316	11.927989
10	10.702722	12.006107	12.288209	12.572893	12.875354	13.180795	13.816448
11	11.863262	13.486351	13.841179	14.206787	14.583498	14.971643	15.783599
12	13.041211	15.023905	15.464032	15.917127	16.385591	16.869941	17.898451
13	14.236830	16.626938	17.159913	17.712983	18.286798	18.882138	20.140643
14	15.450382	18.291911	18.932109	19.598632	20.292572	21.019069	22.550488
15	16.682138	20.023588	20.784054	21.578564	22.408663	23.273970	25.120232
16	17.932370	21.824531	22.719337	23.657492	24.641140	25.672528	27.890054
17	19.201355	23.697512	24.741707	25.840366	26.996401	28.212880	30.840217
18	20.489376	25.643410	26.855084	28.132385	29.491203	30.905653	33.999033
19	21.796716	27.671229	29.063562	30.539001	32.102671	33.738962	37.378965
20	23.123667	29.780729	31.371423	33.065954	34.868318	36.785591	40.995192
21	24.470522	31.969202	33.783137	35.719252	37.786076	39.992727	44.865177
22	25.837580	34.247970	36.303378	38.505214	40.864310	43.392290	49.005739
23	27.225144	36.617889	38.937030	41.430475	44.111847	46.995828	53.436141
24	28.633521	39.082644	41.689196	44.501909	47.537998	50.815577	58.176671
25	30.063024	41.645908	44.565210	47.727099	51.152588	54.864512	63.249138
26	31.513969	44.311745	47.570645	51.113454	54.965981	59.156383	68.676470
27	32.986678	47.084214	50.711324	54.869126	58.989109	63.705266	74.483823
28	34.481479	49.967583	53.993333	58.402583	63.233510	68.528112	80.697691
29	35.998701	52.966286	57.423033	62.322712	67.711354	73.639798	87.346729
30	37.538681	56.081938	61.007070	66.438848	72.435478	79.058186	94.490786
n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	2.080000	2.090000	2.100000	2.120000	2.140000	2.160000	2.180000
3	3.246400	3.278100	3.310000	3.374100	3.439600	3.506600	3.572400
4	4.506112	4.573129	4.641000	4.779328	4.921143	5.066496	5.215432
5	5.866601	5.984711	6.105100	6.352817	6.610104	6.877135	7.154210
6	7.335929	7.523335	7.715610	8.115189	8.535519	8.977477	9.441968
7	8.922803	9.280435	9.487171	10.088012	10.730491	11.413673	12.141522
8	10.636628	11.028474	11.435888	12.299693	13.232760	14.240093	15.326996
9	12.487558	13.021036	13.594727	14.775656	16.085347	17.518508	19.085855
10	14.486562	15.192930	15.937425	17.548735	19.337295	21.321469	25.121309
11	16.645487	17.580293	18.531167	20.654583	23.044516	25.732904	28.755144
12	18.977126	20.140720	21.384284	24.133133	27.270749	30.850169	34.930470
13	21.495297	22.953385	24.522712	28.029109	32.088654	36.786196	42.218663
14	24.214920	26.019189	27.974983	32.392602	37.581065	43.671987	50.818022
15	27.152114	29.360916	31.722482	37.279715	43.842414	51.659505	60.965266
16	30.324283	33.003399	35.949730	42.753280	50.980352	60.925026	72.930014
17	33.750226	36.973705	40.544703	48.883674	59.117861	71.673030	87.068036
18	37.450244	41.301338	45.599173	55.749715	68.394066	84.140715	103.740283
19	41.446263	46.018458	51.159090	63.439681	78.969235	98.603230	123.413534
20	45.761964	51.160120	57.279999	72.052442	91.027947	115.279747	146.627970
21	50.422921	56.764530	64.002499	81.698736	104.768418	134.840506	174.021005
22	55.456755	62.873338	71.402749	92.502584	120.435996	157.414987	206.344785
23	60.893296	69.514939	79.543024	104.602894	138.297035	183.601385	244.486847
24	66.764759	76.789113	88.497327	118.155241	158.658620	213.977607	289.494479
25	73.105940	84.700896	98.347089	133.333870	181.870827	249.214024	342.602486
26	79.954413	93.323977	109.181765	150.333934	208.332743	290.088267	405.272193
27	87.350768	102.723135	121.089942	169.374067	238.499327	337.502390	479.221643
28	95.336830	112.968217	134.209936	190.698887	272.889233	392.502773	566.480890
29	103.965936	124.135356	148.630930	214.582751	312.093725	456.303216	669.447450
30	113.283211	136.307539	164.494023	241.332684	356.786847	530.311731	790.9479



جدول ۲- ارزش فعلی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می شود

n	1.5%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	0.985222	0.961538	0.956938	0.952381	0.947867	0.943396	0.934579
2	1.955893	1.894095	1.872668	1.851410	1.830320	1.809393	1.806018
3	2.912200	2.775091	2.748964	2.723248	2.697933	2.673012	2.624316
4	3.854385	3.629995	3.587526	3.545951	3.505150	3.465106	3.382211
5	4.782645	4.451822	4.389977	4.329477	4.270284	4.212364	4.100197
6	5.697187	5.242137	5.157872	5.075692	4.995530	4.917324	4.766540
7	6.598214	6.002055	5.892701	5.786373	5.682467	5.582381	5.389289
8	7.485925	6.732743	6.595886	6.463213	6.334566	6.209794	5.971299
9	8.360517	7.435332	7.268790	7.107822	6.952195	6.801692	6.515232
10	9.222185	8.110896	7.912718	7.721735	7.537626	7.360387	7.023582
11	10.071118	8.760477	8.528917	8.309414	8.092536	7.886875	7.498674
12	10.907505	9.385074	9.118361	8.863252	8.618518	8.383844	7.942686
13	11.731532	9.985638	9.682852	9.393573	9.117079	8.852683	8.357651
14	12.543382	10.563123	10.222825	9.898641	9.589648	9.294984	8.745468
15	13.343233	11.118387	10.739546	10.379658	10.075781	9.712249	9.107914
16	14.131264	11.652296	11.234015	10.837770	10.462162	10.105895	9.446649
17	14.907639	12.165669	11.707191	11.274066	10.864609	10.477260	9.763223
18	15.672561	12.659297	12.159992	11.689587	11.216074	10.827603	10.059087
19	16.426168	13.133939	12.593294	12.085321	11.607654	11.158116	10.335595
20	17.168639	13.590326	13.007936	12.462210	11.950382	11.469921	10.591014
21	17.900137	14.029160	13.404724	12.821153	12.275243	11.764077	10.835527
22	18.620824	14.451115	13.781425	13.163003	12.583170	12.041582	11.061740
23	19.330861	14.856812	14.147775	13.488574	12.875042	12.300379	11.272187
24	20.030405	15.246963	14.495478	13.798642	13.151699	12.550358	11.469334
25	20.719611	15.622080	14.828209	14.093945	13.413933	12.783356	11.653583
26	21.398632	15.982769	15.146611	14.375185	13.662495	13.003166	11.825779
27	22.067617	16.329586	15.451203	14.643034	13.898100	13.210534	11.986709
28	22.726717	16.663063	15.742874	14.898127	14.121122	13.406164	12.137111
29	23.376076	16.983715	16.021889	15.141074	14.333101	13.590721	12.277674
30	24.015838	17.292033	16.288889	15.372451	14.533745	13.764831	12.408011
n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	0.925926	0.917431	0.909091	0.892887	0.877193	0.862069	0.847458
2	1.783265	1.759111	1.735537	1.690051	1.646661	1.605232	1.565642
3	2.572797	2.531295	2.486852	2.410831	2.321632	2.245880	2.174273
4	3.312127	3.239270	3.169865	3.037349	2.913712	2.798184	2.690862
5	3.992710	3.889651	3.790787	3.604776	3.433081	3.274294	3.127171
6	4.622880	4.485919	4.355261	4.111407	3.888668	3.684736	3.492603
7	5.206370	5.032953	4.888419	4.563757	4.288305	4.038565	3.811528
8	5.746639	5.531819	5.334926	4.967640	4.638864	4.343591	4.077566
9	6.246888	5.995247	5.739024	5.228250	4.946372	4.606541	4.303022
10	6.710081	6.417658	6.144567	5.650223	5.216116	4.833227	4.494086
11	7.138984	6.805141	6.493061	5.937699	5.452733	5.028644	4.656005
12	7.536078	7.160725	6.813692	6.194374	5.660292	5.197107	4.793225
13	7.903776	7.486904	7.103356	6.423548	5.842362	5.342324	4.909513
14	8.244237	7.786150	7.366687	6.628168	6.002072	5.467529	5.008062
15	8.559479	8.069688	7.606080	6.810861	6.142168	5.575456	5.091578
16	8.851369	8.312558	7.823709	6.973986	6.265060	5.668497	5.162354
17	9.121638	8.543631	8.021553	7.119630	6.372859	5.748704	5.222334
18	9.371887	8.755625	8.201412	7.249670	6.467420	5.817848	5.273164
19	9.603599	8.950115	8.364920	7.365777	6.550369	5.877455	5.316241
20	9.818147	9.128546	8.513564	7.469444	6.624131	5.928941	5.352746
21	10.016803	9.292244	8.648694	7.562003	6.686957	5.973139	5.383683
22	10.200744	9.442425	8.771540	7.644646	6.742944	6.011326	5.409901
23	10.371059	9.580207	8.883218	7.718434	6.792056	6.044247	5.432120
24	10.528758	9.706612	8.984714	7.784316	6.835137	6.072627	5.450949
25	10.674776	9.822580	9.077040	7.843139	6.872927	6.097092	5.466966
26	10.809978	9.928972	9.160185	7.895660	6.906077	6.118183	5.480429
27	10.935165	10.026580	9.237223	7.942554	6.935155	6.136361	5.491899
28	11.051078	10.116128	9.306767	7.984423	6.960662	6.152038	5.501601
29	11.158416	10.198283	9.369606	8.021806	6.983037	6.165550	5.509831
30	11.257783	10.273654	9.426914	8.055184	7.002864	6.177198	5.516886

جدول ۳- ارزش فعلی اقساط مساوی یک ریالی را نشان می‌دهد که در ابتدای هر

سال دریافت یا پرداخت می‌شود

n	15%	4.0%	4.5%	5.0%	5.5%	6.0%	7.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	1.985222	1.961538	1.956938	1.952381	1.947867	1.943396	1.934579
3	2.955883	2.886005	2.872668	2.859410	2.846320	2.833393	2.808018
4	3.912200	3.775091	3.748963	3.723248	3.697933	3.673012	3.624316
5	4.854385	4.629895	4.582526	4.545951	4.509150	4.465106	4.387211
6	5.782645	5.451822	5.389977	5.329477	5.270284	5.212364	5.109197
7	6.697187	6.242137	6.157872	6.075692	5.995330	5.917324	5.766540
8	7.595214	7.002701	6.892701	6.786373	6.682967	6.582381	6.389289
9	8.485925	7.732745	7.595886	7.461213	7.334566	7.210794	6.971299
10	9.360517	8.435332	8.268790	8.107822	7.952195	7.801692	7.515232
11	10.222185	9.110896	8.912718	8.721735	8.537626	8.360087	8.023582
12	11.071118	9.760477	9.528917	9.306113	9.092536	8.886975	8.496674
13	11.907505	10.385074	10.118581	9.863252	9.618518	9.383844	8.942686
14	12.731532	10.985648	10.682852	10.393573	10.117079	9.852683	9.357651
15	13.543382	11.563123	11.222825	10.896641	10.589648	10.294848	9.745468
16	14.343233	12.118387	11.739546	11.379658	11.037583	10.712249	10.107914
17	15.131264	12.652296	12.234015	11.837770	11.462162	11.105895	10.446649
18	15.907649	13.165669	12.701191	12.274966	11.864609	11.477260	10.763223
19	16.672561	13.659297	13.159492	12.689587	12.246074	11.827603	11.059487
20	17.426168	14.133939	13.593294	13.085321	12.607651	12.158110	11.335595
21	18.168639	14.590326	14.007936	13.462210	12.950382	12.469921	11.594014
22	18.900137	15.029460	14.401724	13.821153	13.275244	12.764077	11.835527
23	19.620824	15.451115	14.784425	14.163003	13.583170	13.041582	12.061240
24	20.330861	15.856842	15.147775	14.488574	13.875042	13.303379	12.272187
25	21.030405	16.246963	15.495478	14.798642	14.151690	13.550358	12.469334
26	21.719611	16.622080	15.828209	15.093945	14.413933	13.783356	12.653583
27	22.398632	16.982769	16.146611	15.375185	14.662495	14.003166	12.825279
28	23.067617	17.329586	16.451303	15.643034	14.898100	14.210534	12.986709
29	23.726717	17.663083	16.742874	15.898127	15.121422	14.406164	13.137111
30	24.376676	17.983715	17.021889	16.141074	15.333101	14.590721	13.277674

n	8.0%	9.0%	10.0%	12.0%	14.0%	16.0%	18.0%
1	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
2	1.925926	1.917431	1.908991	1.892857	1.877193	1.862069	1.847458
3	2.783265	2.759111	2.735537	2.690051	2.646661	2.605232	2.565642
4	3.577097	3.531295	3.486852	3.401831	3.321632	3.245890	3.174273
5	4.312127	4.239720	4.169865	4.037349	3.913732	3.798181	3.690623
6	4.992710	4.889651	4.790787	4.604276	4.433081	4.274294	4.127171
7	5.622880	5.485919	5.353261	5.111407	4.888688	4.684736	4.497603
8	6.206370	6.032953	5.868419	5.563757	5.288305	5.038565	4.811528
9	6.746639	6.534819	6.334926	5.967610	5.638864	5.343591	5.077566
10	7.246888	6.995247	6.759024	6.328250	5.946372	5.606544	5.303022
11	7.710081	7.417658	7.143567	6.650223	6.216116	5.833227	5.494086
12	8.138964	7.805191	7.497061	6.937689	6.452733	6.028644	5.656905
13	8.536078	8.160725	7.813692	7.194374	6.660292	6.197107	5.793225
14	8.903776	8.486904	8.103356	7.423548	6.842362	6.342334	5.909513
15	9.244237	8.786150	8.366687	7.628168	7.002072	6.462529	6.008962
16	9.559479	9.060688	8.606080	7.810864	7.142168	6.575456	6.091578
17	9.851369	9.312558	8.823709	7.973986	7.265060	6.668497	6.162354
18	10.121638	9.543631	9.021553	8.119630	7.372859	6.748704	6.222334
19	10.371887	9.755625	9.201412	8.249670	7.467420	6.817848	6.273164
20	10.603599	9.950115	9.364920	8.365777	7.550369	6.877455	6.316241
21	10.818147	10.128546	9.513564	8.469444	7.622331	6.928841	6.352746
22	11.016303	10.292244	9.648694	8.562003	7.686957	6.973139	6.383683
23	11.200744	10.442425	9.771540	8.644646	7.742944	7.011326	6.409901
24	11.371059	10.580207	9.883218	8.718434	7.792056	7.044247	6.432120
25	11.528758	10.706612	9.984744	8.784316	7.835137	7.072627	6.450949
26	11.674776	10.822580	10.077040	8.843139	7.872927	7.097092	6.466906
27	11.809978	10.928972	10.160945	8.895600	7.906077	7.118183	6.481429
28	11.935165	11.026580	10.237223	8.942554	7.935155	7.136364	6.494889
29	12.051078	11.116428	10.306567	8.984123	7.960662	7.152038	6.507601
30	12.158406	11.198283	10.369606	9.021806	7.983037	7.165550	6.509831

## فهرست منابع و مآخذ

- اصغریور، محمدجواد، برنامهریزی خطی، دانشگاه الزهراء، ۱۳۶۳
- پترویچ دوموریاد، الکساندر، در قلمرو ریاضیات، پرویز شهریاری (مترجم) امیرکبیر، ۱۳۴۸
- تقوی، مهدی، مقدمه‌ای بر تجزیه و تحلیل اقتصاد میکرو، مؤسسه‌ی عالی علوم سیاسی و امور حزبی، ۱۳۵۴
- جلیلی، میرزا، فرشید مین‌باشیان، ریاضیات جدید، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۶۷
- دانش نارونی، غلامرضا، میرزا جلیلی، ریاضیات جدید، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۷۲
- رودلف مک‌شین، آن‌کاتلر، روش سریع تراختنبرگ در حساب، محمد باقری، (مترجم) دانشمند، ۱۳۷۱
- قربانی، ابوالقاسم، جبر، چاپخانه‌ی آرین، ۱۳۶۶
- مصاحب، غلامحسین، تئوری مقدماتی اعداد، سروش، ۱۳۵۸
- مولوی، رضا، نظریه و مسائل ماتریس‌ها، انتشارات میلاد، تهران، ۱۳۷۴
- وبر، اجین، تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی، حسین علی‌پور کاظمی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۳۶۷
- حافظی نسب، مصطفی، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت، نشر آروین، ۱۳۷۷
- جوادی، حسین، مصطفی، حافظی نسب، ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت، انتشارات اندرز، ۱۳۷۵
- Gosling, "maths for Business and Finance", 1995, Pascal Press

