# فصل هفتم

# ماتریس و دترمینان

**هدف‌های رفتاری:** در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود :

۱ــ ماتریس، انواع وکاربردهای آن را بیان کند و جبر ماتریس‌ها را نشان دهد.

۲ــ جمع ماتریس‌ها، خصوصیّات آن‌ها، ضرب ماتریس در عدد و کاربرد آن را توضیح دهد.

۳ ــ ضرب ماتریس‌ها و کاربرد آن‌را انجام دهد.

۴ــ دترمینان را تعریف و مقدار آن‌را محاسبه کند و خواصّ آن‌را توضیح دهد.

۵ ــ معکوس ماتریس دو در دو و سه در سه و کاربرد آن‌را در مسائل انجام دهد.

## ۷ــ ماتریس و دترمینان

### مقدمه

برای فهم ساده‌تر ریاضیّات ، گاهی از نمادها و قراردادهایی استفاده می‌شود. از آن‌جمله ماتریس است که به ما در حلّ بسیاری از مشکلات کمک کند.

مثلاً برای به حداکثر رساندن سود یک شرکت، با توجه به محدودیت‌هایی، مثل نیروی انسانی،ساعت کار،اعتبارات بانکی،مواد اولیه،عرضه و تقاضا، می‌توان از ماتریس استفاده کرد یا برای به حداقل رساندن هزینه‌ی یک بیمارستان یا یک مؤسسه دولتی ماتریس و معکوس ماتریس به‌کار می‌رود. امروزه در اکثر بنگاه‌های خصوصی و دولتی از برنامه‌ریزی خطی، سیمپلکس، ماتریس تصمیم‌گیری و مدل شبکه، مدل تخصیصی کار و حمل و نقل، که الفبای همه‌ی آن‌ها ماتریس است، استفاده فراوان می‌گردد.

برای مثال، فرض کنید شرکت نفت ایران سه انبار در محل‌های A، B و C دارد و سه پمپ بنزین باید از طریق این انبارها تغذیه شوند. اگر $P_1$ ، $P_2$ و $P_3$ پمپ‌های بنزین باشند و فاصله‌ی آن‌ها تا انبارهای مزبور به‌شرح زیر باشد :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| فاصله‌ی | A | تا | $P_1$ | ۴۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | A | تا | $P_2$ | ۲۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | A | تا | $P_3$ | ۲۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | B | تا | $P_1$ | ۳۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | B | تا | $P_2$ | ۱۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | B | تا | $P_3$ | ۳۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | C | تا | $P_1$ | ۱۵ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | C | تا | $P_2$ | ۳۰ | کیلومتر است |
| فاصله‌ی | C | تا | $P_3$ | ۴۵ | کیلومتر است |

این اطلاعات را می‌توانیم در کروشه‌ای به‌این شکل نشان دهیم. در بعضی از کتاب‌ها به‌جای کروشه از پرانتز هم استفاده می‌گردد.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array} & \begin{bmatrix} ۴۰ & ۲۵ & ۲۰ \\ ۳۰ & ۱۵ & ۳۵ \\ ۱۵ & ۳۰ & ۴۵ \end{bmatrix} \end{array}$$

محلّ تلاقی خطوط افقی و قایم، فاصله‌ی انبار تا پمپ بنزین را نشان می‌دهد.

این آرایه‌ی اعداد مثالی از یک ماتریس است. به آرایه‌ای از اعداد در شکل زیر دقّت کنید. هرکدام از این آرایه‌ها را یک ماتریس می‌نامند.

$$A = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۳ & ۵ & ۷ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۴ \\ ۲ & ۲ & ۵ \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ & ۴ \\ ۳ & ۵ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

نام هر ماتریس را با حروف بزرگ الفبای لاتین نشان می‌دهند مانند ماتریس A، B،C، D، E و . . . .

## ۱ــ۷ سطر یک ماتریس

هریک از اعداد داخل کروشه را یک درایه‌ی یا یک عضو ماتریس می‌نامند.

درایه‌هایی را که در امتداد یک خطّ افقی قرار گیرند، یک سطر ماتریس می‌نامند. مانند ۶، ۵، ۲، یا ۱، ۲، ۰ یا ۳، ۰، ۱ در ماتریس A.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ & ۶ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

## ۲ــ۷ ستون یک ماتریس

درایه‌هایی را، که در امتداد یک خطّ قایم قرار گیرند، یک ستون ماتریس می‌نامند، مانند $\begin{smallmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{smallmatrix}$ یا $\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۰ \end{smallmatrix}$ یا $\begin{smallmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۳ \end{smallmatrix}$ در همان ماتریس A.

بنابراین، این ماتریس دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

بدیهی است ۶، ۵، ۲ را سطر اوّل، ۱، ۲، ۰ را سطر دوم و ۳، ۰، ۱ را سطر سوم ماتریس می‌نامند.

هم‌چنین $\begin{smallmatrix} ۲ \\ ۰ \\ ۱ \end{smallmatrix}$ را ستون اوّل، $\begin{smallmatrix} ۵ \\ ۲ \\ ۰ \end{smallmatrix}$ را ستون دوم و $\begin{smallmatrix} ۶ \\ ۱ \\ ۳ \end{smallmatrix}$ را ستون سوم می‌نامند.

به ماتریسی مانند A، که m سطر و n ستون داشته باشد، یک ماتریس m در n گفته می‌شود و آن‌را به‌صورت $A_{m\times n}$ نشان می‌دهند.

**مثال ۱ــ ماتریس**

$$\begin{array}{cccc} & \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \\ \text{سطر اوّل} & & & \\ & \multicolumn{3}{c}{A = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ & ۱ \\ ۴ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}} \\ \text{سطر دوم} & & & \end{array}$$

را یک ماتریس ۲ در ۳ می‌نامند. $A_{۲\times۳}$

**مثال۲ــ ماتریس** $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \end{bmatrix}$

یک ماتریس یک در چهار است. $B_{۱\times۴}$

## ۳ــ۷ آدرس درایه

هر درایه معمولاً با حرف کوچک الفبای لاتین نشان داده می‌شود.

به‌علاوه آدرس هر درایه را به‌صورت اندیس در کنار آن می‌نویسیم.

رقم سمت چپ نشان‌دهنده‌ی سطر درایه و رقم سمت راست آن نشان‌دهنده‌ی ستون درایه است. به‌عبارت دیگر آدرس هر درایه عبارت است از سطر و ستونی که آن درایه در ماتریس دارد.

**مثال ۳ــ** در ماتریس A، که یک ماتریس ۳ × ۲ است، آدرس درایه‌ی ۳ را مشخّص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۴ \\ ۲ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} \qquad a_{۱۲} = ۳$$

به‌طورکلّی، هر درایه به‌صورت $a_{ij}$ نشان‌داده می‌شود که نشان‌دهنده‌ی درایه‌ی سطر iام و ستون jام ماتریس است.

i و j از اعداد طبیعی هستند.

## ۴ــ۷ قطر اصلی ماتریس مربّع

اگر در یک ماتریس، در درایه‌هایی که در آن i=j باشد دقّت کنیم، مشخّص می‌شود که همگی این درایه‌ها روی یک خط راست قرار گرفته‌اند و آن را قطر اصلی ماتریس مربع می‌نامند.

**مثال ۴ ــ** در ماتریس مربّع ۴×۴

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ & ۵ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$$

$a_{۱۱}$ ، $a_{۲۲}$ ، $a_{۳۳}$ و $a_{۴۴}$ قطر اصلی را تشکیل می‌دهند که به ترتیب عبارت‌اند از : ۱، ۲، ۲و۳.

**توضیح** : دو درایه از دو ماتریس را زمانی متناظر گویند که آدرس آن‌ها (محل سطر و ستون) یکی باشد.

## ۵ـ۷ انواع ماتریس‌ها

**۱ـ۵ـ۷ ماتریس صفر:** به ماتریسی که کلیّه درایه‌های آن صفر باشد، ماتریس صفر گویند.

**مثال ۵ـ** ماتریس A و B و C نمونه‌ای از ماتریس صفر هستند.

$$A=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

**۲ـ۵ـ۷ ماتریس مربع:** اگردر یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $m=n$ ، این ماتریس را ماتریس مربّع مرتبه n یا m گویند. به عبارت دیگر، ماتریس مربع ماتریسی است که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند.

**مثال ۶ ـ** ماتریس $C_{۲\times۲}$ یک ماتریس مربّع است.

$$C=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

**مثال ۷ ـ** ماتریس $D_{۳\times۳}$ یک ماتریس مربّع است.

$$D=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

**۳ـ۵ـ ۷ ماتریس سطری:** اگر در یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $m=۱$ ، این ماتریس را ماتریس سطری می‌نامند.

**مثال ۸ ـ** ماتریس E را یک ماتریس سطری گویند.

$$E=\begin{bmatrix} [illegible] & ۱ & ۵ \end{bmatrix}$$

**۴ـ۵ـ۷ ماتریس ستونی:** اگر در یک ماتریس $m\times n$ داشته باشیم $n=۱$ ، این ماتریس را ماتریس ستونی می‌نامند.

**مثال ۹ ـ** ماتریس F را یک ماتریس ستونی می‌نامند.

$$F=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ ۰ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

**۵ـ۵ـ۷ ماتریس بالا مثلثی:** به ماتریس مربعی که در آن کلیه‌ی درایه‌های زیر قطر اصلی صفر باشند ماتریس بالا مثلثی می‌گویند.

**مثال ۱۰ ــ** ماتریس M را یک ماتریس بالامثلثی گویند.

$$M=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

**۶ـ۵ـ۷ ماتریس پایین مثلثی:** به ماتریس مربعی که در آن کلیه‌ی درایه‌های بالای قطر اصلی صفر باشند ماتریس پایین مثلثی گویند.

**مثال ۱۱ ــ** ماتریس N را یک ماتریس پایین مثلثی گویند.

$$N=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

**۷ ـ۵ـ۷ ماتریس قطری:** به ماتریس مربّعی که درایه‌های آن به‌جز درایه‌های روی قطر اصلی صفر باشند، ماتریس قطری گویند، مانند ماتریس B.

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

**۸ـ۵ـ۷ ماتریس واحد:** یک ماتریس قطری است که کلیه درایه‌های روی قطر اصلی آن یک باشد. به ماتریس واحد، ماتریس یکانی نیز گفته می‌شود. معمولاً ماتریس واحد (یکانی) را با $I_n$ نشان می‌دهند که در آن n تعداد سطرها یا ستون‌های ماتریس است، مانند ماتریس $I_3$ .

$$I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

## ۶ـ۷ ماتریس ترانهاده یا برگردان

هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس مانند A را با هم عوض کنیم ماتریس جدیدی به‌دست می‌آید که آن را ماتریس ترانهاده‌ی ماتریس A می‌نامند و به صورت $(A^t)$ یا $(A)$ نمایش داده می‌شود.

**مثال ۱۲ ــ** ترانهاده یا برگردان ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ & ۴ \\ ۵ & ۸ & ۷ & ۶ \end{bmatrix}$ را به‌دست آورید.

$$A^t=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۸ \\ ۱ & ۷ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}\quad \text{(یا} A'\text{)}$$

## ۷ــ۷ دو ماتریس مساوی

دو ماتریس را زمانی مساوی یکدیگر گویند که اولاً تعداد سطرها، ثانیاً تعداد ستون‌ها، ثالثاً درایه‌های متناظر هر دو ماتریس مساوی باشند، یعنی $a_{۱۱}=b_{۱۱}$ و $a_{۱۲}=b_{۱۲}$ و $a_{۲۲}=b_{۲۲}$ و $a_{۲۱}=b_{۲۱}$ و . . . .

**مثال ۱۳ ــ** دو ماتریس A و B با هم مساوی هستند ؛ زیرا

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix} \frac{۳}{۳} & \frac{۶}{۳} \\ \frac{۹}{۳} & ۲\times۲ \end{bmatrix}$$

هر دو ماتریس ۲×۲ می‌باشند و درایه‌های متناظر با هم مساوی هستند.

$$۱=\frac{۳}{۳}\qquad ۲=\frac{۶}{۳}$$
$$۳=\frac{۹}{۳}\qquad ۴=۲\times۲$$

## ۸ــ۷ جمع ماتریس‌ها

باید توجّه داشت دو ماتریس درصورتی می‌توانند با هم جمع شوند که تعداد سطرها و ستون‌های هر دو با هم مساوی باشند. درغیر این‌صورت، نمی‌توان آن‌ها را با هم جمع نمود.

$$A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}$$

حاصل مجموع دو ماتریس، خود یک ماتریس است.

**مثال ۱۴ ــ** ماتریس A ، که دارای ۲ سطر و ۳ ستون است، با ماتریس B که آن نیز دارای

۲ سطر و ۳ ستون است، قابل جمع کردن هستند، ولی ماتریس A با C را نمی‌توان جمع نمود، زیرا ماتریس C، دارای ۳ سطر و ۳ ستون است.

$$A=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&3\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1&2&1\\4&0&1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&3&2\\2&0&4\\1&4&2\end{bmatrix}$$

اگر دو ماتریس A و B، $m\times n$ باشند، مجموع آن‌ها نیز یک ماتریس $m\times n$ مانند C است، به‌طوری که هر درایه‌ی آن مساوی مجموع درایه‌های متناظرش در A و B است.

**مثال ۱۵ ــ** مجموع دو ماتریس A و B را به‌دست آورید.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&1\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&0&2\end{bmatrix}.\quad A+B=\begin{bmatrix}1+3&2+1&3+2\\2+1&0+0&1+2\end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس $3\times 2$ می‌باشند، پس جمع آن‌ها شدنی است و نتیجه، ماتریس C می‌شود که یک ماتریس $3\times 2$ است.

$$C=\begin{bmatrix}4&3&5\\3&0&3\end{bmatrix}$$

**مثال ۱۶ــ** شرکتی انواع کولر را با حجم‌های کوچک، متوسّط و بزرگ در مدل‌های عادی و لوکس تولید می‌نماید. اگر تولید آن در شش ماهه‌ی اوّل و دوم سال به‌ترتیب جدول زیر باشد، تعیین کنید شرکت در یک‌سال چند کولر با حجم‌ها و انواع مختلف تولید می‌کند.

| | شش ماهه‌ی اوّل | | شش ماهه‌ی دوم | |
|---|---|---|---|---|
| حجم کولر | نوع عادی | نوع لوکس | نوع عادی | نوع لوکس |
| کوچک | ۲۷۰۰ | ۲۰۰۰ | ۱۴۰۰ | ۱۶۰۰ |
| متوسط | ۴۳۰۰ | ۴۱۰۰ | ۲۱۰۰ | ۲۰۰۰ |
| بزرگ | ۵۲۰۰ | ۱۵۰۰ | ۴۰۰۰ | ۱۱۰۰۰ |

$$A+B=C$$

ماتریس A را تولید در شش‌ماهه‌ی اوّل و ماتریس B را تولید در شش‌ماهه‌ی دوم سال فرض می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}۲۰۰۰ & ۲۷۰۰\\ ۴۱۰۰ & ۴۳۰۰\\ ۱۵۰۰ & ۵۲۰۰\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}۱۶۰۰ & ۱۴۰۰\\ ۲۰۰۰ & ۲۱۰۰\\ ۱۱۰۰ & ۴۰۰۰\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}۳۶۰۰ & ۴۱۰۰\\ ۶۱۰۰ & ۶۴۰۰\\ ۲۶۰۰ & ۹۲۰۰\end{bmatrix}$$

درنتیجه ماتریس C، که مجموع A و B است، تولید کولر در یک سال را مشخّص می‌نماید.

**مثال ۱۷ ــ** ماتریس A و B را با هم جمع کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۱\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۳\end{bmatrix}$$

به‌دلیل این‌که تعداد سطر و ستون دو ماتریس با هم یکی نیست، پس جمع آن‌ها امکان‌پذیر نیست.

## ۹ ــ۷ ضرب عدد حقیقی درماتریس

اگر k عددی حقیقی و A ماتریس $m\times n$ باشد، حاصل‌ضرب k در A ماتریسی خواهد بود $m\times n$ ، که کلیّه‌ی درایه‌های آن برابر با درایه‌های ماتریس A ضربدر k است.

$$k\times A=k\times\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ka & kb\\ kc & kd\end{bmatrix}$$

**مثال ۱۸ــ** اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، حاصل‌ضرب عدد ۵ را در A بیابید.

$$۵\times A=۵\times\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۱۰\\ ۰ & ۱۵\end{bmatrix}$$

**مثال ۱۹ــ** فرض کنید فروش فروردین ماه ۳ نوع محصول شرکت ایران خودرو (سمند، پژو۲۰۶ و پارس) در شهر تهران و اصفهان به‌صورت زیر است :

$$\begin{array}{cccc} & \text{سمند} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{پارس} \\ F= & \begin{bmatrix}۱۱۰ & ۷۰ & ۹۰\\ ۶۰ & ۱۰۰ & ۱۴۰\end{bmatrix} & & \begin{matrix}\text{تهران}\\ \text{اصفهان}\end{matrix}\end{array}$$

اگر پیش‌بینی شود، فروش این شرکت در اردیبهشت ماه ۱۰٪ افزایش یابد، ارقام مربوط به

میزان فروش ماه اردیبهشت این شرکت در ۲ شهر تهران و اصفهان را به‌صورت ماتریس بنویسید.

فروش اردیبهشت   فروش فروردین   ۱۰٪ افزایش فروش

$$F_۲ = F_۱ + ۰/۱F_۱ = ۱/۱F_۱ = ۱/۱\begin{bmatrix} ۱۱۰ & ۷۰ & ۹۰ \\ ۶۰ & ۱۰۰ & ۱۴۰ \end{bmatrix}$$

$$F_۲ = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} \text{سمند} & \text{پژو ۲۰۶} & \text{پارس} \\ \end{array}$$

$$F_۲ = \begin{bmatrix} ۱۲۱ & ۷۷ & ۹۹ \\ ۶۶ & ۱۱۰ & ۱۵۴ \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{تهران} \\ \text{اصفهان} \end{array}$$

## ۱۰ــ۷ ضرب یک ماتریس سطری در یک ماتریس ستونی

برای درک بهتر موضوع به مثال زیر توجّه کنید.

**مثال ۲۰ــ** درسال گذشته، شرکتی سه نوع کولر رومیزی، آبی و گازی را به تعداد ۵,۰۰۰، ۴,۰۰۰ و ۳,۰۰۰ به‌فروش رسانده است. اگر قیمت هر دستگاه کولر به‌ترتیب برابر با ۱۴۰,۰۰۰، ۲۵۰,۰۰۰ و ۳۰۰,۰۰۰ ریال باشد، فروش شرکت را در سال قبل تعیین کنید.

تعداد کولرها را می‌توان با یک ماتریس سطری A نمایش داد.

$$\begin{array}{cccc} & \text{رومیزی} & \text{آبی} & \text{گازی} \\ A_{۱\times۳} = & [۵,۰۰۰ & ۴,۰۰۰ & ۳,۰۰۰] \end{array}$$

هم‌چنین، بهای فروش هر دستگاه را می‌توان با یک ماتریس ستونی نشان داد.

$$B_{۳\times۱} = \begin{bmatrix} ۱۴۰,۰۰۰ \\ ۲۵۰,۰۰۰ \\ ۳۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix}\begin{array}{l} \text{بهای کولر رومیزی} \\ \text{بهای کولر آبی} \\ \text{بهای کولر گازی} \end{array}$$

حاصل ضرب این دو ماتریس برابر است با :

$$A\times B = \begin{bmatrix} ۵,۰۰۰ & ۴,۰۰۰ & ۳,۰۰۰ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱۴۰,۰۰۰ \\ ۲۵۰,۰۰۰ \\ ۳۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۵,۰۰۰\times۱۴۰,۰۰۰ + ۴,۰۰۰\times۲۵۰,۰۰۰ + ۳,۰۰۰\times۳۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ۷۰۰,۰۰۰,۰۰۰ + ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰ + ۹۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲,۶۰۰,۰۰۰,۰۰۰ \end{bmatrix}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، اوّلین درایه‌ی ماتریس سطری را در اوّلین درایه‌ی ماتریس ستونی، سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی و بالأخره سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سرانجام حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه، که یک ماتریس ۱×۱ است، به‌دست آید.

دقّت کنید که ضرب یک ماتریس سطری A، در یک ماتریس ستونی B فقط وقتی شدنی است که تعداد ستون‌های ماتریس A مساوی با تعداد سطرهای ماتریس B باشد.

بنابراین، اگر A یک ماتریس $n\times ۱$ و B یک ماتریس $۱\times n$ باشد، برای پیدا کردن حاصل‌ضرب $A\times B$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

اوّلین درایه‌ی ماتریس سطری را در اوّلین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌کنیم. سپس دومین درایه‌ی ماتریس سطری را در دومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم. پس از آن سومین درایه‌ی ماتریس سطری را در سومین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم و بالأخره آخرین درایه‌ی ماتریس سطری را در آخرین درایه‌ی ماتریس ستونی ضرب می‌نماییم.

حاصل‌ضرب‌های به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم تا نتیجه حاصل گردد.

**مثال ۲۱**

$$\underset{۱\times۲}{\begin{bmatrix} & ۳\end{bmatrix}}\underset{۲\times۱}{\begin{bmatrix}۱\\۲\end{bmatrix}}=[(۲\times۱)+(۳\times۲)]=[۲+۶]=[۸]=۸$$

**مثال ۲۲**

$$A\times B=\underset{۱\times۳}{\begin{bmatrix} & ۲ & ۳\end{bmatrix}}\underset{۲\times۱}{\begin{bmatrix}۳\\۴\end{bmatrix}}=$$

چون ماتریس A، ۳×۱ و ماتریس B، ۱×۲ است، لذا ضرب آن‌ها عملی نیست.

## ۱۱ــ۷ ضرب ماتریس‌ها

اگر دو ماتریس A و B مفروض باشند، تنها شرطی که بتوان ماتریس A را در ماتریس B ضرب نمود $(A\times B)$، این است که تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B باشد.

اگر ماتریس A یک ماتریس $m\times p$ و B یک ماتریس $p\times n$ باشد، برای به‌دست آوردن ماتریس

$A\times B$ که یک ماتریس $m\times n$ خواهد بود به‌صورت زیر عمل می‌کنیم.

اوّلاً، ماتریس B را به n ماتریس ستونی تجزیه می‌کنیم. ثانیاً، ماتریس A را طبق روش قبلی در هریک از این ماتریس‌های ستونی ضرب می‌نماییم. ثالثاً، ضرب‌های به‌دست آمده را که به‌صورت ماتریس‌های ستونی هستند از چپ به راست ستون‌های اوّل تا nام ماتریس حاصل‌ضرب قرار می‌دهیم.

**مثال ۲۳ــ** حاصل‌ضرب $A\times B$ را پیدا کنید.

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\times۲+۲\times۴ & ۱\times۳+۲\times۱\\ ۳\times۲+۴\times۴ & ۳\times۳+۴\times۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۰ & ۵\\ ۲۲ & ۱۳\end{bmatrix}$$

چون هر دو ماتریس ۲×۲ هستند، پس ضرب آن‌ها شدنی است ونتیجه، یک ماتریس ۲×۲ خواهد بود.

در این مثال می‌توان $B\times A$ را محاسبه نمود. چون هر دو ماتریس ۲×۲ هستند.

ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

$$A\times B\neq B\times A$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۴ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲\times۱+۳\times۳ & ۲\times۲+۳\times۴\\ ۴\times۱+۱\times۳ & ۴\times۲+۱\times۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۱ & ۱۶\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}۱۰ & ۵\\ ۲۲ & ۱۳\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}۱۱ & ۱۶\\ ۷ & ۱۲\end{bmatrix}$$

ملاحظه می‌شود حاصل‌ضرب $A\times B$ با $B\times A$ برابر نیست.

**مثال ۲۴ــ** دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱۰ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۵\\ ۲ & ۴ & ۶\end{bmatrix}$ مفروض است. حاصل‌ضرب $A\times B$ را پیدا کنید.

چون تعداد ستون‌های ماتریس A برابر با تعداد سطرهای ماتریس B است، پس این ضرب شدنی است.

$$A\times B=\underset{۲\times۲}{\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۱۰ & ۵\end{bmatrix}}\times\underset{۲\times۳}{\begin{bmatrix}۱ & ۳ & ۵\\ ۲ & ۴ & ۶\end{bmatrix}}$$

زیرا ۲ = ۲

ستون اوّل حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times1+3\times2 \\ 10\times1+5\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 110 \end{bmatrix}$

ستون دوم حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times3+3\times4 \\ 10\times3+5\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 120 \end{bmatrix}$

ستون سوم حاصل‌ضرب $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times5+3\times6 \\ 10\times5+5\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 130 \end{bmatrix}$

به‌طور خلاصه $A\times B = \begin{bmatrix} 8 & 18 & 28 \\ 110 & 20 & 30 \end{bmatrix}$

دقّت کنید که در این مثال $B\times A$ را نمی‌توان محاسبه نمود ؛ زیرا

$$B\times A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \qquad 2 . 3$$

$$2\times3) \quad 2\times2$$

## ۱۲ــ۷ تفریق ماتریس‌ها

تفریق ماتریس‌ها نیز مانند جمع آن‌هاست، با درنظر گرفتن این مطلب که تفریق حالت خاصی از جمع است، لذا برای انجام عمل تفریق $A-B$ ، که در آن A و B دو ماتریس هم مرتبه‌ی دل‌خواه‌اند، در ابتدا تمام اعضای ماتریس B را در ۱– ضرب می‌کنیم و سپس عمل جمع $A+(-B)$ را انجام می‌دهیم.

**مثال ۲۵ــ** اگر

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

و

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

باشد، آن‌گاه $A-B$ را محاسبه کنید.

$$(-1)\times B = -B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A-B=A+(-B)=\begin{bmatrix} ۵ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -۳ & -۲ & -۳ \\ -۲ & -۱ & -۳ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} ۵-۳ & ۳-۲ & ۲-۳ \\ ۰-۲ & ۱-۱ & ۴-۳ \end{bmatrix} \qquad A-B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ -۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

## ۱۳ــ۷ دترمینان

فقط برای ماتریس مربّع می‌توان عددی به‌نام دترمینان به‌دست آورد و برای ماتریس‌هایی که سطر و ستون آن‌ها مساوی نباشد، محاسبه‌ی دترمینان امکان ندارد. دترمینان ماتریس مربّع A، که $n\times n$ است، به‌صورت $|A|$ نمایش داده می‌شود. اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ یک ماتریس $۲\times ۲$ باشد، عدد حقیقی $|A|$ برابر با $ad-bc$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم.

$$\det A=|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

اگر A یک ماتریس $۳\times ۳$ باشد، دترمینان A را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

روشن است که برای محاسبه‌ی دترمینان، ابتدا درایه‌ی $a_{۱۱}$ را در دترمینان ماتریس A با حذف سطر اوّل و ستون اوّل آن ضرب می‌کنیم. سپس، منفی درایه‌ی $a_{۱۲}$ را در دترمینان ماتریس A، با حذف سطر اوّل و ستون دوم آن ضرب می‌کنیم و بالأخره درایه‌ی $a_{۱۳}$ را در دترمینان ماتریس A، با حذف سطر اوّل و ستون سوم آن ضرب می‌نماییم تا از حاصل جمع این سه‌عدد، دترمینان A به‌دست آید.

$$|A|=a(ei-fh)-b(di-fg)+c(dh-eg)$$

$$=aei-afh-bdi+bfg+cdh-ceg$$

**مثال ۲۶ــ** دترمینان ماتریس A را به‌دست آورید.

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۲\end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۰ & ۲\end{vmatrix}=۱\times\begin{vmatrix}۳ & ۱\\ ۰ & ۲\end{vmatrix}-۳\times\begin{vmatrix}۲ & ۱\\ ۱ & ۲\end{vmatrix}+۲\times\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۱ & ۰\end{vmatrix}=$$

$$۱\times(۶-۰)-۳\times(۴-۱)+۲\times(۰-۳)=۶-۹-۶=-۹$$

اگر A یک ماتریس ۴×۴ باشد، برای پیدا کردن دترمینان A با توجّه به مطالبی که گفته شد، به‌شرح زیر عمل می‌کنیم.

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ e & f & g & h\\ i & j & k & l\\ m & n & o & p\end{vmatrix}=a\times\begin{vmatrix}f & g & h\\ j & k & l\\ n & o & p\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}e & g & h\\ i & k & l\\ m & o & p\end{vmatrix}+$$

$$c\times\begin{vmatrix}e & f & h\\ i & j & l\\ m & n & p\end{vmatrix}-d\times\begin{vmatrix}e & f & g\\ i & j & k\\ m & n & o\end{vmatrix}$$

دقت کنید که علامت ضریب $a_{ij}$ با استفاده از دستور $(-۱)^{i+j}$ به‌دست آمده است.

به‌طورکلّی، برای پیدا کردن دترمینان A، که یک ماتریس $n\times n$ است، به این صورت عمل می‌کنیم.

$$|A|=|a_{ij}|=\begin{vmatrix}a_{۱۱}\ldots a_{۱j}\ldots a_{۱n}\\ a_{n۱}\ldots a_{nj}\ldots a_{nn}\end{vmatrix}=\sum_{j=۱}^{n}a_{ij}\,A_{ij}$$

در این رابطه $a_{ij}$ عبارت از درایه‌ی یک سطر یا یک ستون از ماتریس A است و $\dot{A}_{ij}$ را هم‌سازه‌ی (کوفاکتور یا زیر ماتریس) درایه‌ی $a_{ij}$ گویند.

بنابراین، دترمینان ماتریس A عبارت است از حاصل‌ضرب داخلی درایه‌ی یک سطر با یک ستون ماتریس A در هم‌سازه‌های $\dot{A}_{ij}$ .

مقدار $\dot{A}_{ij}$ برابر با $(-1)^{i+j}$ ضربدر دترمینان ماتریس حاصل از A با حذف سطر i و ستون jام است.

**مثال ۲۷ــ** دترمینان ماتریس B را که ۴×۴ است، پیدا کنید.

$$B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \qquad |B|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & -3\end{vmatrix}$$

$$=-1\times\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-1\times\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & -3\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -3\end{vmatrix}+0+0$$

سپس دترمینان‌های مرتبه‌ی ۳ را برحسب ستون‌های اوّل آن‌ها بسط می‌دهیم.

$$|B|=(-1)(-1)\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & -3\end{vmatrix}+(-2)(1)\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$1(3-0)-2(4+1)=3-10=-7$$

**۱ــ۱۳ــ۷ ماتریس الحاقی:** فرض کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس مربع $M \times M$ باشد. آن‌گاه بنا بر تعریف، ماتریس الحاقی برای ماتریس مربع A، که با adj.A نمایش داده می‌شود، عبارت است از برگردان ماتریس حاصل از A، به‌طوری که در آن به‌جای عناصرِ $a_{ij}$ ، هم‌سازه‌های آن‌ها یعنی $\dot{A}_{ij}$ قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر ماتریس الحاقی adjA برابر است با برگردان ماتریس مربعی که به‌جای هر عنصر آن $(-1)^{i+j}$ برابر دترمینان زیر ماتریس حاصل از همان عنصر قرار گرفته باشد.

**مثال ۲۸ــ** فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ماتریس الحاقی آن برابر است با

$$adjA = \begin{bmatrix} \dot{A}_{11} & \dot{A}_{21} & \dot{A}_{31} \\ \dot{A}_{12} & \dot{A}_{22} & \dot{A}_{32} \\ \dot{A}_{13} & \dot{A}_{23} & \dot{A}_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن $\dot{A}_{ij}$ هم‌سازه‌ی $a_{ij}$ است، مثل

$$\dot{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و یا

$$\dot{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**مثال ۲۹ــ** ماتریس الحاقی

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

را به‌دست آورید.

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**مثال ۳۰ــ ماتریس الحاقی**

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

را به‌دست آورید.

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} -7 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

## ۱۴ــ۷ خواصّ دترمینان‌ها

۱ــ هرگاه جای تمام سطرها و ستون‌های یک ماتریس را با یکدیگر عوض کنیم، دترمینان آن ماتریس تغییر نمی‌کند.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

۲ــ از تعویض دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مربّع با یکدیگر، تنها علامت دترمینان آن تغییر می‌یابد.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

۳ــ هرگاه دو سطر (یا دو ستون) یک ماتریس مساوی باشد، دترمینان آن ماتریس صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲ & a_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \\ b_۱ & b_۲ & b_۳ \end{vmatrix} = ۰$$

۴ــ هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون یک ماتریس در عددی مانند k ضرب شود، دترمینان آن ماتریس نیز در k ضرب می‌شود.

$$\begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ ka_۲ & kb_۲ & kc_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix} = k \times \begin{vmatrix} a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \\ a_۳ & b_۳ & c_۳ \end{vmatrix}$$

۵ ــ هرگاه تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس صفر باشد، دترمینان آن برابر صفر خواهد بود.

$$\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ a_۱ & b_۱ & c_۱ \\ a_۲ & b_۲ & c_۲ \end{vmatrix} = ۰$$

۶ــ هرگاه به سطر (یا ستون) یک ماتریس، مضرب‌هایی از سطرهای دیگر (یا از ستون‌های دیگر) اضافه کنیم، دترمینان ماتریس حاصل با دترمینان ماتریس قبلی مساوی است.

**مرتبه‌ی یک ماتریس مربع:** به تعداد سطرها یا ستون‌های یک ماتریس مربّع، مرتبه‌ی ماتریس نیز می‌گویند.

۷ــ هرگاه A و B دو ماتریس مربّع هم مرتبه باشند، داریم :

$$|A.B| = |A|.|B|$$

یعنی دترمینان حاصل ضرب دو ماتریس، برابر است با حاصل‌ضرب دترمینان‌های آن دو ماتریس.

**مثال ۳۱ــ** دترمینان ماتریس B و A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۰$$

در ماتریس A چون سطر اوّل صفر است، پس دترمینان آن صفر است.

$$B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$|B|=0$$

در ماتریس B چون ستون اوّل صفر است، پس دترمینان آن صفر است و نیازی به محاسبه ندارد.

**مثال ۳۲ــ** دترمینان ماتریس A و B را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$1\times(6-0)-3\times(4-1)+2\times(0-3)=6-9-6=-9$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 4 & 6 & 2\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}6 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}4 & 6\\ 1 & 0\end{vmatrix}$$

$$|B|=1(12-0)-3(4\times 2-1\times 2)+2(4\times 0-1\times 6)$$

$$|B|=12-3(8-2)+2(-6)=12-18-12=-18$$

ملاحظه می‌شود که تنها تفاوت ماتریس A و B در آن است که سطر دوم ماتریس B همان سطر دوم ماتریس A است، که در عدد ۲ ضرب شده است. بنابراین، با توجّه به خاصیت (۴) دترمینان ماتریس B برابر است با همان دترمینان ماتریس A ضرب در عدد ۲. چون دترمینان ماتریس A، ۹− بوده است، پس دترمینان ماتریس B برابر با ۲×۹− یعنی ۱۸− است.

## ۷ـ۱۵ معکوس یک ماتریس

اگر برای یک ماتریس مربّع $A_{n\times n}$ ، یک ماتریس هم مرتبه با آن، مانند B وجود داشته باشد، به‌طوری که حاصل ضرب آن‌ها ماتریسی واحد باشد، چنین ماتریسی (B) را معکوس ماتریس A می‌نامند.

$$A_{n\times n}\times B_{n\times n}=I_n=B_{n\times n}\times A_{n\times n}$$

و به این صورت نشان می‌دهند.

$$B_{n\times n}=A_{n\times n}^{-1}$$

ماتریس مربّع با هر مرتبه، تنها هنگامی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد. برای روشن‌تر شدن موضوع به مثال زیر توجّه فرمایید.

**مثال ۳۳ــ معکوس ماتریس** A را پیدا کنید.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

فرض می‌کنیم معکوس ماتریس A، ماتریس مانند B باشد. بنابراین، طبق آن‌چه قبلاً گفته شد

$$A\times B=I$$

و یا

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

درنتیجه داریم :

(۱) $a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=1$

(۲) $a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}=0$

(۳) $a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}=0$

(۴) $a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=1$

برای پیدا کردن درایه‌های ماتریس B به‌شکل زیر عمل می‌کنیم.

از حلّ دستگاه (۱) و (۳) نتیجه می‌شود :

$$b_{11}=\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

و

$$b_{21}=\frac{-a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

و از حل دستگاه (۲) و (۴) نتیجه می‌شود :

$$b_{۱۲} = \frac{-a_{۱۲}}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

و

$$b_{۲۲} = \frac{a_{۱۱}}{a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}}$$

توجه کنید که مخرج هریک از این روابط، برابر با دترمینان A است.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} \end{vmatrix} = a_{۱۱}a_{۲۲} - a_{۲۱}a_{۱۲}$$

بنابراین، اگر $|A| = ۰$ باشد ماتریس B نامعیّن و $A^{-۱}$ وجود ندارد. پس، هر ماتریس مربّع فقط زمانی دارای معکوس است که دترمینان آن مخالف صفر باشد.

**مثال ۳۴ــ** معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix} \quad \det A = -۳ - ۲۴ = -۲۷ = |A|$$

چون $|A| \neq ۰$ پس معکوس آن وجود دارد.

$$b_{۱۱} = \frac{۳}{-۲۷} = -\frac{۱}{۹}$$

$$b_{۱۲} = \frac{-۶}{-۲۷} = \frac{۲}{۹}$$

$$b_{۲۱} = \frac{-۴}{-۲۷} = \frac{۴}{۲۷}$$

$$b_{۲۲} = \frac{-۱}{-۲۷} = \frac{۱}{۲۷}$$

پس،

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۶ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۹} & \frac{۲}{۹} \\ \frac{۴}{۲۷} & \frac{۱}{۲۷} \end{bmatrix} = A^{-۱}$$

توجه کنید که :

$A \times A^{-1} = I$ یا

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{9} & -\frac{1}{9}\\ \frac{1}{27} & \frac{4}{27}\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

**مثال ۳۵ـــ** معکوس ماتریس A را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix}-3 & 15\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$

$$\det A = 15 - 15 = 0$$

چون دترمینان آن مساوی صفر است، پس، ماتریس A معکوس ندارد. یک ماتریس، زمانی دارای معکوس است که اولاً، این ماتریس مربّع باشد و ثانیاً، دترمینان آن یعنی $|A|$ مخالف صفر گردد.

## ۱۶ـــ۷ پیدا کردن ماتریس معکوس به روش عملیّات ردیفی

چون استفاده از روش قبلی در محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس، همیشه عملی نیست و ممکن است محاسبات به‌طول انجامد، روش عملیّات ردیفی نیز قابل استفاده است. این روش بر سه اصل عمده‌ی زیر استوار است :

۱ــ قاعده‌ی کلّی $A \times A^{-1} = I$

۲ــ ضرب یا تقسیم کردن ردیفی از ردیف‌های یک ماتریس در یک، یا بر یک عدد غیر صفر.

۳ــ اضافه یا کسر کردن مضربی از یک ردیف ماتریس به ردیف دیگری از ردیف‌های ماتریس.

برای محاسبه‌ی معکوس یک ماتریس مربع A، ابتدا ماتریس واحد هم مرتبه‌ی آن $I_n$ را مجاور ماتریس A قرار می‌دهیم (یعنی $A \vdots I$). سپس، بر مبنای این که $A \times A^{-1} = I$ و $A^{-1} \times I = A^{-1}$، عملیّات را به‌شکلی پس می‌گیریم که محلّ دو ماتریس مجاور در $(A \vdots I)$ با یکدیگر تعویض گردند، به شکلی که I محل خود را به $A^{-1}$ بدهد و A به I مبدل شود (یعنی $I \vdots A^{-1}$). لذا قواعد زیر در عملیّات ردیفی برای $A \vdots I$ به‌کار می‌رود.

۱ــ کلیه‌ی درایه‌های بالاترین ردیف ماتریس $A \vdots I$ را بر اوّلین درایه‌ی سمت چپ آن (برای مرحله‌ی اوّل عملیّات، درایه‌ی واقع در ردیف یکم و ستون یکم خواهد بود) تقسیم می‌کنیم (به‌شرطی که این درایه غیر صفر باشد). امّا اگر اوّلین درایه‌ی سمت چپ ردیف، صفر باشد ابتدا هر ردیف دیگری

از ماتریس را که اوّلین عنصر آن صفر نباشد با ردیف اوّل جمع می‌کنیم و سپس قاعده را به‌کار می‌بریم.

بدیهی است چنان‌چه ردیفی وجود نداشته باشد که اوّلین درایه‌ی سمت چپ آن غیر صفر باشد، ماتریس معکوس ندارد.

اجرای اوّلین قاعده سبب می‌گردد که بالاترین درایه‌ی سمت چپ به عدد یک تبدیل گردد و درنتیجه بتوان تجسس را برای داشتن بردار واحد شروع کرد.

۲ــ چنان مضربی از ردیف با اوّلین درایه‌ی تبدیل شده به واحد را با سایر ردیف‌ها جمع می‌کنیم، به‌شکلی که کلّیه‌ی درایه‌ی موجود در ستون حاوی درایه‌ی تبدیل شده به یک (ستون یکم) برابر صفر شوند به‌جز خود درایه‌ی تبدیل شده به واحد که باید تا آخر عملیّات واحد باقی بماند.

۳ــ قاعده‌ی یک و دو را برای کلّیه‌ی ردیف‌های باقی‌مانده تکرار می‌نماییم تا آن‌که $A^{-1}$ مشخّص گردد. این روش برای حل دستگاه معادلات با استفاده از کامپیوتر کاربرد دارد.

**مثال ۳۶ــ** معکوس ماتریس A را با استفاده از روش عملیّات ردیفی پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۵ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A \vdots I = \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۳ & ۱ & ۵ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف یکم را بر عدد ۳ تقسیم می‌کنیم.

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} ۱ & \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۱ \end{array}\right]$$

چنان مضربی از ردیف یکم را با سایر ردیف‌ها جمع می‌نماییم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون یکم به‌استثنای درایه‌ی اوّل برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب صفر از ردیف یکم با ردیف دوم و مضرب ۱− از آن ردیف با ردیف سوم جمع شوند.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

سپس اوّلین درایه‌ی سمت چپ باقی‌مانده برای ردیف دوم عنصر یک است که عملیّات را بر روی آن شروع می‌نماییم.

کلّیه‌ی درایه‌های ردیف دوم را بر اوّلین درایه‌ی باقی‌مانده در سمت چپ (عدد یک) تقسیم می‌کنیم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

چنان مضربی از ردیف دوم به سایر ردیف‌ها اضافه می‌کنیم که کلّیه‌ی درایه‌های ستون دوم به‌استثنای درایه‌ی واحد آن برابر صفر شوند. به این منظور باید مضرب $-\frac{1}{3}$ از آن با ردیف اوّل و مضرب $\frac{1}{3}$ از آن با ردیف سوم جمع گردد.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right]$$

اینک عملیّات ردیفی را برای اوّلین درایه باقی‌مانده در سمت چپ ردیف سوم (یعنی $\frac{2}{3}$) انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر، کلّیه‌ی درایه‌های ردیف سوم را بر عنصر $\frac{2}{3}$ تقسیم می‌نماییم.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

بالأخره برای تبدیل درایه‌های ستون سوم، به استثنای درایه‌ی سوم آن به صفر، باید مضرب $-1$ از آن را با ردیف دوم و مضرب $-\frac{4}{3}$ از آن را با ردیف اول جمع نماییم.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right]$$

ملاحظه می‌شود که دراثر عملیّات ردیفی ماتریس$(A \vdots I)$ تبدیل به$(I \vdots A^{-1})$ می‌شود و معکوس A به‌دست آمده است.

**۱ــ۱۶ــ۷ پیدا کردن ماتریس معکوس با استفاده از ماتریس الحاقی:** روش دیگری که برای محاسبه‌ی ماتریس معکوس به‌کار می‌رود، استفاده از ماتریس الحاقی است. در این روش، دترمینان ماتریسی که می‌خواهیم معکوس آن را به‌دست آوریم، محاسبه می‌کنیم. اگر A ماتریس (غیرمنفرد، نامنفرد) معکوس‌پذیر باشد، یعنی $|A| \neq 0$ در این‌صورت داریم :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A$$

**مثال ۳۷ــ** معکوس ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

$$|A| = 3$$

$$\operatorname{adj}A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

درنتیجه

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}A}{|A|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**مثال ۳۸ــ** معکوس ماتریس را در صورت وجود تعیین کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = ۰ + ۲(-۲ + ۳) + (-۳)(-۲ + ۳) = -۱$$

پس عناصر ماتریس الحاقی عبارت‌اند از

$$\hat{A}_{۱۱} = (-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} ۳ & ۳ \\ -۲ & -۲ \end{vmatrix} = -۶ + ۶ = ۰$$

$$\hat{A}_{۱۲} = (-۱)^{۱+۲}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -(-۲ + ۳) = -۱$$

$$\hat{A}_{۱۳} = (-۱)^{۱+۳}\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -۲ + ۳ = ۱$$

$$\hat{A}_{۲۱} = (-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ -۲ & -۲ \end{vmatrix} = -(۴ - ۶) = ۲$$

$$\hat{A}_{۲۲} = (-۱)^{۲+۲}\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = ۰ - ۳ = -۳$$

$$\hat{A}_{۲۳} = (-۱)^{۲+۳}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ -۱ & -۲ \end{vmatrix} = -(۰ - ۲) = ۲$$

$$\hat{A}_{۳۱} = (-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} -۲ & -۳ \\ ۳ & ۳ \end{vmatrix} = -۶ + ۹ = ۳$$

$$\hat{A}_{۳۲} = (-۱)^{۳+۲}\begin{vmatrix} ۰ & -۳ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = -(۰ + ۳) = -۳$$

$$\hat{A}_{۳۳} = (-۱)^{۳+۳}\begin{vmatrix} ۰ & -۲ \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix} = ۰ + ۲ = ۲$$

$$\mathrm{adj}A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۳ & -۳ \\ ۱ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

پس

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

## ۱۷ــ۷ دستگاه سه معادله‌ی سه‌مجهولی

برای حل دستگاه سه‌معادله‌ی سه مجهولی، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم.

ب) هم‌سازه‌های ستون اوّل را تشکیل می‌دهیم.

ج) $\acute{A}_{11}$ را در معادله‌ی اوّل، $\acute{A}_{21}$ را در معادله‌ی دوم و $\acute{A}_{31}$ را در معادله‌ی سوم ضرب می‌نماییم.

د) هر سه معادله را با هم جمع و x را محاسبه می‌کنیم.

**مثال ۳۹ــ** دستگاه را با استفاده از هم‌سازه، نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x-y+5z=0 \\ x-2y-z=-18 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\acute{A}_{11}=(-1)^{2}\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=1+10=11$$

$$\acute{A}_{21}=(-1)^{3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-(-1+2)=-1$$

$$\acute{A}_{31}=(-1)^{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=5+1=6$$

$$\begin{cases} 11(2x+y+z)=0 \\ -1(x-y+5z)=0 \\ 6(x-2y-z)=-18\times 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 22x+11y+11z=0 \\ -x+y-5z=0 \\ 6x-12y-6z=-108 \end{cases}$$

$$(22x-x+6x)+(11y+y-12y)+(11z-5z-6z)=-108$$

$$27x=-108$$

$$x=-4$$

**مثال ۴۰ـــ** این دستگاه را با استفاده از هم‌سازه نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x-2z=4 \\ y+3z=1 \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \dot{A}_{11}=\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=+2$$

$$\dot{A}_{21}=(-1)^{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-3 \qquad \dot{A}_{31}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=-2$$

$$\begin{cases} 2 \;\; 4x+2y=4 \\ -3 \;\; -9x+6z=-12 \\ -2 \;\; -2y-6z=-2 \end{cases} \Rightarrow -5x=-10 \Rightarrow x=2$$

**روش دیگری برای حل دستگاه سه معادله‌ی سه مجهولی:** برای حل دستگاه به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را + می‌نامیم.

ب) دترمینان + را محاسبه می‌کنیم. به شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اوّل را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_1$

می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۲$ می‌نامیم.

هـ) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۳$ می‌نامیم.

و) دترمینان $+_۱$ و $+_۲$ و $+_۳$ را محاسبه می‌نماییم.

ز) با استفاده از فرمول

$$x_i = \frac{+_i}{+}\ ,\ \ i = ۱,۲,۳$$

جواب‌های دستگاه به‌دست می‌آید.

**مثال ۴۱ــ** دستگاه معادلات

$$\begin{array}{l} ۲x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲ \\ x_۱ + ۳x_۲ + x_۳ = ۵ \\ x_۱ + x_۲ + ۵x_۳ = -۷ \end{array}$$

را حل کنید.

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با

$$+ = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵-۱)-(۵-۱)+(۱-۳) = ۲۸-۴-۲ = ۲۲$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$+_{x_۱} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۵ & ۳ & ۱ \\ -۷ & ۱ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۱۵-۱)-(۲۵+۷)+(۵+۲۱) = ۲۸-۳۲+۲۶ = ۲۲$$

$$+_{x_۲} = \begin{vmatrix} ۲ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۵ & ۱ \\ ۱ & -۷ & ۵ \end{vmatrix} = ۲(۲۵+۷)-۲(۵-۱)+(-۷-۵) = ۶۴-۸-۱۲ = ۴۴$$

$$+_{x_۳} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۵ \\ ۱ & ۱ & -۷ \end{vmatrix} = ۲(-۲۱-۵)-(-۷-۵)+۲(۱-۳) = -۵۲+۱۲-۴ = -۴۴$$

درنتیجه

$$x_۱ = \frac{+_{x_۱}}{+} = \frac{۲۲}{۲۲} = ۱ \quad . \quad x_۱ = ۱$$

$$x_۲ = \frac{+_{x_۲}}{+} = \frac{۴۴}{۲۲} = ۲ \quad . \quad x_۲ = ۲$$

$$x_۳ = \frac{+_{x_۳}}{+} = \frac{-۴۴}{۲۲} = -۲ \quad . \quad x_۳ = -۲$$

حال امتحان می‌کنیم.

$$۲(۱)+۲+(-۲)=۲ \quad . \quad ۲=۲ \,.$$

$$۱+۳(۲)+(-۲)=۱+۶-۲=۵ \quad . \quad ۵=۵ \,.$$

$$۱+۲+۵(-۲)=۱+۲-۱۰=-۷ \quad . \quad -۷=-۷ \,.$$

## ۱۸ـ۷ دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی (جهت مطالعه آزاد)

برای حل دستگاه چهار معادله‌ی چهار مجهولی، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم.

الف) ماتریس ضرایب را تشکیل می‌دهیم و آن را $+$ می‌نامیم.

ب) دترمینان $+$ را محاسبه می‌کنیم، به‌شرطی که مخالف صفر باشد.

ج) در ماتریس ضرایب، ستون اوّل را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۱$ می‌نامیم.

د) در ماتریس ضرایب، ستون دوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۲$ می‌نامیم.

هـ) در ماتریس ضرایب، ستون سوم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۳$ می‌نامیم.

و) در ماتریس ضرایب، ستون چهارم را با ستون اعداد ثابت دستگاه تعویض می‌کنیم و آن را $+_۴$ می‌نامیم.

ز) دترمینان $+_۱$ و $+_۲$ و $+_۳$ و $+_۴$ را محاسبه می‌نماییم.

ح) با استفاده از فرمول $x_i = \frac{+_i}{+} \ , \ i = ۱,۲,\ldots,n$

جواب‌های دستگاه به‌دست می‌آید.

**مثال ۴۲ــ** دستگاه معادلات خطی زیر را حل کنید.

$$
\begin{aligned}
&.\ ۲x_۱ + x_۲ - ۵x_۳ + x_۴ = ۸ \\
&x_۱ - ۳x_۲ - ۶x_۴ = ۹ \\
&\dot{}\ ۲x_۲ - x_۳ + ۲x_۴ = -۵ \\
&.\ x_۱ + ۴x_۲ - ۷x_۳ + ۶x_۴ = ۰
\end{aligned}
$$

دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه برابر است با :

$$= . \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۵ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۰ & -۶ \\ ۰ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۴ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = ۲۷\ .\ ۰$$

حال، بقیه‌ی دترمینان‌ها را محاسبه می‌کنیم

$$+_۱ = \begin{vmatrix} ۸ & ۱ & -۵ & ۱ \\ ۹ & -۳ & ۰ & -۶ \\ -۵ & ۲ & -۱ & ۲ \\ ۰ & ۴ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = ۸۱$$

$$+_۲ = \begin{vmatrix} ۲ & ۸ & -۵ & ۱ \\ ۱ & ۹ & ۰ & -۶ \\ ۰ & -۵ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۷ & ۶ \end{vmatrix} = -۱۰۸$$

$$+_۳ = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۸ & ۱ \\ ۱ & -۳ & ۹ & -۶ \\ ۰ & ۲ & -۵ & ۲ \\ ۱ & ۴ & ۰ & ۶ \end{vmatrix} = -۲۷$$

$$+_{۴}=\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & -۵ & ۸ \\ ۱ & -۳ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۲ & -۱ & -۵ \\ ۱ & ۴ & -۷ & ۰ \end{vmatrix}=۲۷$$

درنتیجه

$$x_{۱}=\frac{+_{۱}}{+}=\frac{۸۱}{۲۷}=۳$$

$$x_{۲}=\frac{+_{۲}}{+}=\frac{-۱۰۸}{۲۷}=-۴$$

$$x_{۳}=\frac{+_{۳}}{+}=\frac{-۲۷}{۲۷}=-۱$$

$$x_{۴}=\frac{+_{۴}}{+}=\frac{۲۷}{۲۷}=۱$$

حال امتحان می‌کنیم

$$.\ ۲(۳)+(-۴)-۵(-۱)+۱=۸.\quad ۶-۴+۵+۱=۸.\quad ۸=۸$$

$$۳-۳(-۴)-۶(۱)=۹.\quad ۳+۱۲-۶=۹.\quad ۹=۹$$

$$۲(-۴)-(-۱)+۲(۱)=-۵.\quad -۸+۱+۲=-۵.\quad -۵=-۵$$

$$.\ ۳+۴(-۴)-۷(-۱)+۶(۱)=۰.\quad ۳-۱۶+۷+۶=۰.\quad ۰=۰$$

## تمرین‌های فصل هفتم

۱ــ ماتریس‌های زیر را دوبه‌دو با هم جمع کنید.

۲ ۰# ۱ ۲#
!۱ ۳%+ !۴ ۰%=

۳ ۵ ۱# ۱ ۲ ۳#
۲ ۲ ۰%+ ۰ ۱ ۰%=
!۱ ۲ ۱% !۲ ۲ ۱%

a b c# ۱ ۰ ۱#
!d e f%+ !۲ ۲ ۱%=

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

۲ــ ماتریس‌های زیر را در هم ضرب نمایید :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} =$$

۳ــ دترمینان هریک از ماتریس‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -3 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

**۴ــ معکوس ماتریس‌های زیر را در صورت وجود، پیدا کنید.**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} ۸ & ۳ & ۵ \\ ۴ & ۱۱ & ۷ \\ ۳ & ۹ & ۶ \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} ۰ & -۲ & -۱ \\ ۱ & -۳ & ۴ \\ -۱ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} ۲ & -۳ \\ ۴ & -۶ \end{bmatrix}$$

۵ ــ دستگاه‌های زیر را با استفاده از هم‌سازه نسبت به x حل کنید.

$$\begin{cases} x+y+z=۶ \\ x+y-z=۰ \\ ۲x+۳y+z=۱۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y=۰ \\ y-z=۰ \\ z-x=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ۳x+۳y+z=۲ \\ x-y+۲z=۶ \\ ۲x+y-z=-۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=۳ \\ x-z=-۱ \\ ۲x+۲y=۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+۲z=۲۵ \\ ۲x+y-z=۹ \\ -x+y=۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+۲z=۴۵ \\ ۲x-y+z=۱۵ \\ x+y-z=۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-z=2 \\ 4x-y=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y+z=4 \\ y-z=-1 \\ x+y-z=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

۶ــ در ماتریس A ، مقدار x را طوری تعیین کنید که دترمینان A برابر ۱۵ــ باشد.

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ x & 1 & x-2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۷ــ یک شرکت مقاطعه‌کاری برای هر ساعت کامیون بدون راننده ۶۰۰۰ تومان، بابت کرایه هر ساعت تراکتور بدون راننده ۲۰۰۰ تومان و برای هر ساعت جهت راننده ۱۰۰۰ تومان پرداخت می‌نماید. این شرکت از ماتریس A برای انجام کارهای مختلف استفاده می‌نماید.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array} \\ A= & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

الف) اگر $P=\begin{bmatrix} 6000 & 2000 & 1000 \end{bmatrix}$ نشان‌دهنده‌ی ماتریس قیمت باشد، که توسط این شرکت پرداخت می‌شود، ماتریس PA را محاسبه کنید.

ب) فرض کنید که شرکت برای انجام یک طرح کوچک نیازمند ۲۰ ساعت کار از نوع I ، و ۳۰ ساعت کار از نوع II است. اگر $S=\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ \\ \end{bmatrix}$ ماتریس تقاضا باشد AS را محاسبه کنید.

ج) PAS را محاسبه نمایید.

۸ــ یک فروشنده‌ی ماشین حساب پنج مدل ماشین‌حساب خود را در سه مغازه که در مناطق

مختلف شهر قرار دارند می‌فروشد. موجودی هر مدل در هر مغازه در ماتریس M خلاصه شده است. قیمت فروش کلی (W) و جزئی (R) در ماتریس N برای هر مدل نوشته شده است.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ M = & \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 6 \\ 10 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{مغازه‌ی ۱} \\ \text{مغازه‌ی ۲} \\ \text{مغازه‌ی ۳} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{تومان} & \text{تومان} \\ W & R \end{array} \\ N = & \begin{bmatrix} 700 & 840 \\ 1400 & 1800 \\ 1800 & 2400 \\ 2700 & 3300 \\ 3500 & 4900 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}$$

الف) قیمت جزئی موجودی مغازه‌ی ۲ چه‌قدر است؟

ب) قیمت کلی موجودی مغازه‌ی ۳ چه‌قدر است؟

ج) ماتریس MN را محاسبه نمایید.

۹ــ یک پیمان‌کار توافق کرده است که ۴ ویلا، ۳ آپارتمان و ۹ خوابگاه بسازد. این توافق را می‌توان در قالب ماتریس زیر نشان داد.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{ویلا} & \text{آپارتمان} & \text{خوابگاه} \end{array} \\ Q = & \begin{bmatrix} 4 & 3 & 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

مقادیر ریالی مصالح معدنی درساخت ساختمان‌ها و دستمزد کارگران به شرح ماتریس زیر است :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \text{آجر} & \text{چوب} & \text{شیشه} & \text{بتن} & \text{دستمزد کارگران} \end{array} \\ R = & \begin{bmatrix} 100 & 30 & 50 & 30 & 120 \\ 40 & 80 & 20 & 40 & 100 \\ 60 & 50 & 70 & 20 & 100 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{ویلا} \\ \text{آپارتمان} \\ \text{خوابگاه} \end{array}$$

مطلوب است : محاسبه‌ی $Q \times R$ ، که بیانگر میزان مصالح و کارگر لازم برای ساخت هر ساختمان است.

۱۰ــ امید و خواهرش مریم هر کدام به دو فروشگاه متفاوت می‌روند. امید ۴ کیلو شکر به ازای هر کیلو ۶۰۰ تومان، ۲ کیلو گوشت که هر کیلوی آن ۴۰۰۰ تومان و ۳ بسته نان که هر بسته‌ی آن ۱۲۰ تومان است می‌خرد. مریم نیز ۲ کیلوگرم شکر به ازای هر کیلو ۷۵۰ تومان ، ۱کیلوگوشت که هر کیلوی آن ۳۵۰۰ تومان و ۴ بسته نان که هر بسته آن ۱۰۰ تومان است می‌خرد.

مطلوب است :

۱ــ جمع کل پولی که امید و مریم هر کدام بابت خریدهایشان پرداخت کرده‌اند.

۲ــ مشخص کنید که اگر امید از فروشگاهی که مریم خرید کرده بود، خرید می‌کرد چه‌قدر پول باید می‌پرداخت؟

۳ــ اگر مریم ازفروشگاهی که امید از آن خریداری کرده بود، خرید می‌کرد، چه‌قدر پول باید می‌پرداخت؟

۱۱ــ فرض کنید شرکتی ۳ نوع شکلات (کاکائویی، قهوه‌ای و شیری) تولید می‌کند و قصد دارد از هر شکلات به تعداد زیر در ماه فروردین در ۲ مدرسه‌ی دخترانه و پسرانه بفروشد :

$$\begin{array}{cccc} \text{شکلات شیری} & \text{شکلات قهوه‌ای} & \text{شکلات کاکائویی} & \\ & & & \\ \end{array}$$

$$T = \begin{bmatrix} ۱۲۰ & ۷۰ & ۱۰۵ \\ ۶۵ & ۱۰۰ & ۱۴۵ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \end{array}$$

اگر اطلاعات مربوط به فروش واقعی شکلات‌های این شرکت به‌صورت ماتریس زیر باشد ،اختلاف بین فروش پیش‌بینی شده و فروش واقعی این شرکت در هریک از این مدارس چه‌قدر است؟

$$\begin{array}{ccc} \text{شکلات شیری} & \text{شکلات قهوه‌ای} & \text{شکلات کاکائویی} \end{array}$$

$$J = \begin{bmatrix} ۱۲۰ & ۵۰ & ۱۰۰ \\ ۸۰ & ۷۵ & ۱۵۰ \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{مدرسه‌ی پسرانه} \\ \text{مدرسه‌ی دخترانه} \end{array}$$

۱۲ــ سارا و زهرا و نیما به یک مغازه میوه فروشی رفته‌اند. سارا ۱۲ عدد پرتقال، ۵ عدد انار، ۲۰ عدد سیب، ۶ عدد موز و ۳ عدد لیموترش خرید. زهرا ۲۰ عدد پرتقال، ۳ عدد انار، ۱۰ عدد سیب و ۴ عدد موز خرید و نیما هم ۱۰ عدد پرتقال، ۱۰ عدد انار، ۱۲ عدد موز خرید. اگر قیمت هر عدد پرتقال ۳۰۰ تومان، انار ۲۰۰ تومان، سیب ۵۰ تومان، موز ۱۰۰ تومان و لیموترش ۱۰ تومان باشد.

مطلوب است :

الف) مقدار میوه‌های خریداری شده توسط هر یک از این ۳ نفر را در یک ماتریس افقی نشان دهید.

ب) قیمت خرید هر نوع میوه توسط این ۳ نفر را در یک ماتریس ستونی نشان دهید.

ج) از طریق ضرب ماتریس‌ها، صورت‌حساب هر کدام از این ۳ نفر را تهیه کنید.

د) با استفاده از جمع ماتریس‌ها مشخص کنید از هر نوع میوه، کلاً چند عدد خریداری شده است؟

هـ) با استفاده از ضرب ماتریس‌ها، حساب کنید برای خرید هر نوع میوه جمعاً چند تومان پرداخت شده است؟

# پیوست

## جدول ۱ــ ارزش نهایی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

| n | 1.5% | 4.0% | 4.5% | 5.0% | 5.5% | 6.0% | 7.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 2.015000 | 2.040000 | 2.045000 | 2.050000 | 2.055000 | 2.060000 | 2.070000 |
| 3 | 3.045225 | 3.121600 | 3.137025 | 3.152500 | 3.168025 | 3.183600 | 3.214900 |
| 4 | 4.090903 | 4.246464 | 4.278191 | 4.310125 | 4.342266 | 4.374616 | 4.439943 |
| 5 | 5.152267 | 5.416323 | 5.470710 | 5.525631 | 5.581091 | 5.637093 | 5.750739 |
| 6 | 6.229551 | 6.632975 | 6.716892 | 6.801913 | 6.888051 | 6.975319 | 7.153291 |
| 7 | 7.322994 | 7.898294 | 8.019152 | 8.142008 | 8.266894 | 8.393838 | 8.654021 |
| 8 | 8.432839 | 9.214226 | 9.380014 | 9.549109 | 9.721573 | 9.897468 | 10.259803 |
| 9 | 9.559332 | 10.582795 | 10.802114 | 11.026564 | 11.256260 | 11.491316 | 11.977989 |
| 10 | 10.702722 | 12.006107 | 12.288209 | 12.577893 | 12.875354 | 13.180795 | 13.816448 |
| 11 | 11.863262 | 13.486351 | 13.841179 | 14.206787 | 14.583498 | 14.971643 | 15.783599 |
| 12 | 13.041211 | 15.025805 | 15.464032 | 15.917127 | 16.385591 | 16.869941 | 17.888451 |
| 13 | 14.236830 | 16.626838 | 17.159913 | 17.712983 | 18.286798 | 18.882138 | 20.140643 |
| 14 | 15.450382 | 18.291911 | 18.932109 | 19.598632 | 20.292572 | 21.015066 | 22.550488 |
| 15 | 16.682138 | 20.023588 | 20.784054 | 21.578564 | 22.409663 | 23.275970 | 25.129022 |
| 16 | 17.932370 | 21.824531 | 22.719337 | 23.657492 | 24.641140 | 25.672528 | 27.888054 |
| 17 | 19.201355 | 23.697512 | 24.741707 | 25.840366 | 26.996403 | 28.212880 | 30.840217 |
| 18 | 20.489376 | 25.645413 | 26.855084 | 28.132385 | 29.481205 | 30.905653 | 33.999033 |
| 19 | 21.796716 | 27.671229 | 29.063562 | 30.539001 | 32.102671 | 33.759992 | 37.378965 |
| 20 | 23.123667 | 29.778079 | 31.371423 | 33.065954 | 34.868318 | 36.785591 | 40.995492 |
| 21 | 24.470522 | 31.969202 | 33.783137 | 35.719252 | 37.786076 | 39.992727 | 44.865177 |
| 22 | 25.837580 | 34.247970 | 36.303378 | 38.505214 | 40.864310 | 43.392290 | 49.005739 |
| 23 | 27.225144 | 36.617889 | 38.937030 | 41.430475 | 44.111847 | 46.995828 | 53.436141 |
| 24 | 28.633521 | 39.082604 | 41.689196 | 44.501999 | 47.537998 | 50.815577 | 58.176671 |
| 25 | 30.063024 | 41.645908 | 44.565210 | 47.727099 | 51.152388 | 54.864512 | 63.249038 |
| 26 | 31.513969 | 44.311745 | 47.570645 | 51.113454 | 54.965981 | 59.156383 | 68.676470 |
| 27 | 32.986678 | 47.084214 | 50.711324 | 54.669126 | 58.989109 | 63.705766 | 74.483823 |
| 28 | 34.481479 | 49.967583 | 53.993333 | 58.402583 | 63.233510 | 68.528112 | 80.697691 |
| 29 | 35.998701 | 52.966286 | 57.423033 | 62.322712 | 67.711354 | 73.639798 | 87.346529 |
| 30 | 37.538681 | 56.084938 | 61.007070 | 66.438848 | 72.435478 | 79.058186 | 94.460786 |

| n | 8.0% | 9.0% | 10.0% | 12.0% | 14.0% | 16.0% | 18.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 2.080000 | 2.090000 | 2.100000 | 2.120000 | 2.140000 | 2.160000 | 2.180000 |
| 3 | 3.246400 | 3.278100 | 3.310000 | 3.374400 | 3.439600 | 3.505600 | 3.572400 |
| 4 | 4.506112 | 4.573129 | 4.641000 | 4.779328 | 4.921144 | 5.066496 | 5.215432 |
| 5 | 5.866601 | 5.984711 | 6.105100 | 6.352847 | 6.610104 | 6.877135 | 7.154210 |
| 6 | 7.335929 | 7.523335 | 7.715610 | 8.115189 | 8.535519 | 8.977477 | 9.441968 |
| 7 | 8.922803 | 9.200435 | 9.487171 | 10.089012 | 10.730491 | 11.413873 | 12.141522 |
| 8 | 10.636628 | 11.028474 | 11.435888 | 12.299693 | 13.232760 | 14.240093 | 15.326996 |
| 9 | 12.487558 | 13.021036 | 13.579477 | 14.775656 | 16.085347 | 17.518508 | 19.085855 |
| 10 | 14.486562 | 15.192930 | 15.937425 | 17.548735 | 19.337295 | 21.321469 | 23.521309 |
| 11 | 16.645487 | 17.560293 | 18.531167 | 20.654583 | 23.044516 | 25.732904 | 28.755144 |
| 12 | 18.977126 | 20.140720 | 21.384284 | 24.133133 | 27.270749 | 30.850169 | 34.931070 |
| 13 | 21.495297 | 22.953385 | 24.522712 | 28.029109 | 32.088654 | 36.786196 | 42.218663 |
| 14 | 24.214920 | 26.019189 | 27.974983 | 32.392602 | 37.581065 | 43.671987 | 50.818022 |
| 15 | 27.152114 | 29.360916 | 31.772482 | 37.279715 | 43.842414 | 51.659505 | 60.965266 |
| 16 | 30.324283 | 33.003399 | 35.949730 | 42.753280 | 50.980352 | 60.925026 | 72.939014 |
| 17 | 33.750226 | 36.973705 | 40.544703 | 48.883674 | 59.117601 | 71.673030 | 87.068036 |
| 18 | 37.450244 | 41.301338 | 45.599173 | 55.749715 | 68.394066 | 84.140715 | 103.740283 |
| 19 | 41.446263 | 46.018458 | 51.159090 | 63.439681 | 78.969235 | 98.603230 | 123.413534 |
| 20 | 45.761964 | 51.160120 | 57.274999 | 72.052442 | 91.024928 | 115.379747 | 146.627970 |
| 21 | 50.422921 | 56.764530 | 64.002499 | 81.698736 | 104.768418 | 134.840506 | 174.021005 |
| 22 | 55.456755 | 62.873338 | 71.402749 | 92.502584 | 120.435996 | 157.414987 | 206.344785 |
| 23 | 60.893296 | 69.531939 | 79.543024 | 104.602894 | 138.297035 | 183.601385 | 244.486847 |
| 24 | 66.764759 | 76.789813 | 88.497327 | 118.155241 | 158.658620 | 213.977607 | 289.494479 |
| 25 | 73.105940 | 84.700896 | 98.347059 | 133.333870 | 181.870827 | 249.214024 | 342.603486 |
| 26 | 79.954415 | 93.323977 | 109.181765 | 150.333934 | 208.332743 | 290.088267 | 405.272113 |
| 27 | 87.350768 | 102.723135 | 121.099942 | 169.374007 | 238.499327 | 337.502390 | 479.221093 |
| 28 | 95.338830 | 112.968217 | 134.209936 | 190.698887 | 272.889233 | 392.502773 | 566.480890 |
| 29 | 103.965936 | 124.135356 | 148.630930 | 214.582751 | 312.093725 | 456.303216 | 669.447450 |
| 30 | 113.283211 | 136.307539 | 164.494023 | 241.332684 | 356.786847 | 530.311731 | 790.9479 |

## جدول ۲ــ ارزش فعلی سالواره یک ریالی که در پایان هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

| n | 1.5% | 4.0% | 4.5% | 5.0% | 5.5% | 6.0% | 7.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.985222 | 0.961538 | 0.956938 | 0.952381 | 0.947867 | 0.943396 | 0.934579 |
| 2 | 1.955883 | 1.886095 | 1.872668 | 1.859410 | 1.846320 | 1.833393 | 1.808018 |
| 3 | 2.912200 | 2.775091 | 2.748964 | 2.723248 | 2.697933 | 2.673012 | 2.624316 |
| 4 | 3.854385 | 3.629895 | 3.587526 | 3.545951 | 3.505150 | 3.465106 | 3.387211 |
| 5 | 4.782645 | 4.451822 | 4.389977 | 4.329477 | 4.270284 | 4.212364 | 4.100197 |
| 6 | 5.697187 | 5.242137 | 5.157872 | 5.075692 | 4.995530 | 4.917324 | 4.766540 |
| 7 | 6.598214 | 6.002055 | 5.892701 | 5.786373 | 5.682967 | 5.582381 | 5.389289 |
| 8 | 7.485925 | 6.732745 | 6.595886 | 6.463213 | 6.334566 | 6.209794 | 5.971299 |
| 9 | 8.360517 | 7.435332 | 7.268791 | 7.107822 | 6.952195 | 6.801692 | 6.515232 |
| 10 | 9.222185 | 8.110896 | 7.912718 | 7.721735 | 7.537626 | 7.360087 | 7.023582 |
| 11 | 10.071118 | 8.760477 | 8.528917 | 8.306414 | 8.092536 | 7.886875 | 7.498674 |
| 12 | 10.907505 | 9.385074 | 9.118581 | 8.863252 | 8.618518 | 8.383844 | 7.942686 |
| 13 | 11.731532 | 9.985648 | 9.682852 | 9.393573 | 9.117079 | 8.852683 | 8.357651 |
| 14 | 12.543382 | 10.563123 | 10.222825 | 9.898641 | 9.589648 | 9.294984 | 8.745468 |
| 15 | 13.343233 | 11.118387 | 10.739546 | 10.379658 | 10.037581 | 9.712249 | 9.107914 |
| 16 | 14.131264 | 11.652296 | 11.234015 | 10.837770 | 10.462162 | 10.105895 | 9.446649 |
| 17 | 14.907649 | 12.165669 | 11.707191 | 11.274066 | 10.864609 | 10.477260 | 9.763223 |
| 18 | 15.672561 | 12.659297 | 12.159992 | 11.689587 | 11.246074 | 10.827603 | 10.059087 |
| 19 | 16.426168 | 13.133939 | 12.593294 | 12.085321 | 11.607654 | 11.158116 | 10.335595 |
| 20 | 17.168639 | 13.590326 | 13.007936 | 12.462210 | 11.950382 | 11.469921 | 10.594014 |
| 21 | 17.900137 | 14.029160 | 13.404724 | 12.821153 | 12.275244 | 11.764077 | 10.835527 |
| 22 | 18.620824 | 14.451115 | 13.784125 | 13.163003 | 12.583170 | 12.041582 | 11.061240 |
| 23 | 19.330861 | 14.856842 | 14.147775 | 13.488574 | 12.875042 | 12.303379 | 11.272187 |
| 24 | 20.030405 | 15.246963 | 14.495478 | 13.798642 | 13.151699 | 12.550358 | 11.469334 |
| 25 | 20.719611 | 15.622080 | 14.828209 | 14.093945 | 13.413933 | 12.783356 | 11.653583 |
| 26 | 21.398632 | 15.982769 | 15.146611 | 14.375185 | 13.662495 | 13.003166 | 11.825779 |
| 27 | 22.067617 | 16.329586 | 15.451303 | 14.643034 | 13.898100 | 13.210534 | 11.986709 |
| 28 | 22.726717 | 16.663063 | 15.742874 | 14.898127 | 14.121422 | 13.406164 | 12.137111 |
| 29 | 23.376076 | 16.983715 | 16.021889 | 15.141074 | 14.333101 | 13.590721 | 12.277674 |
| 30 | 24.015838 | 17.292033 | 16.288889 | 15.372451 | 14.533745 | 13.764831 | 12.409041 |

| n | 8.0% | 9.0% | 10.0% | 12.0% | 14.0% | 16.0% | 18.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.925926 | 0.917431 | 0.909091 | 0.892857 | 0.877193 | 0.862069 | 0.847458 |
| 2 | 1.783265 | 1.759111 | 1.735537 | 1.690051 | 1.646661 | 1.605232 | 1.565642 |
| 3 | 2.577097 | 2.531295 | 2.486852 | 2.401831 | 2.321632 | 2.245890 | 7.174273 |
| 4 | 3.312127 | 3.239720 | 3.169865 | 3.037349 | 2.913712 | 2.798181 | 2.690062 |
| 5 | 3.992710 | 3.889651 | 3.790787 | 3.604776 | 3.433081 | 3.274294 | 3.127171 |
| 6 | 4.622880 | 4.485919 | 4.355261 | 4.111407 | 3.888668 | 3.684736 | 3.497603 |
| 7 | 5.206370 | 5.032953 | 4.868419 | 4.563757 | 4.288305 | 4.038565 | 3.811528 |
| 8 | 5.746639 | 5.534819 | 5.334926 | 4.967640 | 4.638864 | 4.343591 | 4.077566 |
| 9 | 6.246888 | 5.995247 | 5.759024 | 5.328250 | 4.946372 | 4.606544 | 4.303022 |
| 10 | 6.710081 | 6.417658 | 6.144567 | 5.650223 | 5.216116 | 4.833227 | 4.494086 |
| 11 | 7.138964 | 6.805191 | 6.495061 | 5.937699 | 5.452733 | 5.028644 | 4.656005 |
| 12 | 7.536078 | 7.160725 | 6.813692 | 6.194374 | 5.660292 | 5.197107 | 4.793225 |
| 13 | 7.903776 | 7.486904 | 7.103356 | 6.423548 | 5.842362 | 5.342334 | 4.909513 |
| 14 | 8.244237 | 7.786150 | 7.366687 | 6.628168 | 6.002072 | 5.467529 | 5.008062 |
| 15 | 8.559479 | 8.060688 | 7.606080 | 6.810861 | 6.142168 | 5.575456 | 5.091578 |
| 16 | 8.851369 | 8.312558 | 7.823709 | 6.973986 | 6.265060 | 5.668497 | 5.162354 |
| 17 | 9.121638 | 8.543631 | 8.021553 | 7.119630 | 6.372859 | 5.748704 | 5.222334 |
| 18 | 9.371887 | 8.755625 | 8.201412 | 7.249670 | 6.467420 | 5.817848 | 5.273164 |
| 19 | 9.603599 | 8.950115 | 8.364920 | 7.365777 | 6.550369 | 5.877455 | 5.316241 |
| 20 | 9.818147 | 9.128546 | 8.513564 | 7.469444 | 6.623131 | 5.928841 | 5.352746 |
| 21 | 10.016803 | 9.292244 | 8.648694 | 7.562003 | 6.686957 | 5.973139 | 5.383683 |
| 22 | 10.200744 | 9.442425 | 8.771540 | 7.644646 | 6.742944 | 6.011326 | 5.409901 |
| 23 | 10.371059 | 9.580207 | 8.883218 | 7.718434 | 6.792056 | 6.044247 | 5.432120 |
| 24 | 10.528758 | 9.706612 | 8.984744 | 7.784316 | 6.835137 | 6.072627 | 5.450949 |
| 25 | 10.674776 | 9.822580 | 9.077040 | 7.843139 | 6.872927 | 6.097092 | 5.466906 |
| 26 | 10.809978 | 9.928972 | 9.160945 | 7.895660 | 6.906077 | 6.118183 | 5.480429 |
| 27 | 10.935165 | 10.026580 | 9.237223 | 7.942554 | 6.935155 | 6.136364 | 5.491889 |
| 28 | 11.051078 | 10.116128 | 9.306567 | 7.984423 | 6.960662 | 6.152038 | 5.501601 |
| 29 | 11.158406 | 10.198283 | 9.369606 | 8.021806 | 6.983037 | 6.165550 | 5.509831 |
| 30 | 11.257783 | 10.273654 | 9.426914 | 8.055184 | 7.002664 | 6.177198 | 5.516806 |

## جدول ۳ـــ ارزش فعلی اقساط مساوی یک ریالی را نشان می‌دهد که در ابتدای هر سال دریافت یا پرداخت می‌شود

| n | 1.5% | 4.0% | 4.5% | 5.0% | 5.5% | 6.0% | 7.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 1.985222 | 1.961538 | 1.956938 | 1.952381 | 1.947867 | 1.943396 | 1.934579 |
| 3 | 2.955883 | 2.886095 | 2.872668 | 2.859410 | 2.846320 | 2.833393 | 2.808018 |
| 4 | 3.912200 | 3.775091 | 3.748964 | 3.723248 | 3.697933 | 3.673012 | 3.624316 |
| 5 | 4.854385 | 4.629895 | 4.587526 | 4.545951 | 4.505150 | 4.465106 | 4.387211 |
| 6 | 5.782645 | 5.451822 | 5.389977 | 5.329477 | 5.270284 | 5.212364 | 5.100197 |
| 7 | 6.697187 | 6.242137 | 6.157872 | 6.075692 | 5.995530 | 5.917324 | 5.766540 |
| 8 | 7.598214 | 7.002055 | 6.892701 | 6.786373 | 6.682967 | 6.582381 | 6.389289 |
| 9 | 8.485925 | 7.732745 | 7.595886 | 7.463213 | 7.334566 | 7.209794 | 6.971299 |
| 10 | 9.360517 | 8.435332 | 8.268790 | 8.107822 | 7.952195 | 7.801692 | 7.515232 |
| 11 | 10.222185 | 9.110896 | 8.912718 | 8.721735 | 8.537626 | 8.360087 | 8.023582 |
| 12 | 11.071118 | 9.760477 | 9.528917 | 9.306414 | 9.092536 | 8.886875 | 8.498674 |
| 13 | 11.907505 | 10.385074 | 10.118581 | 9.863252 | 9.618518 | 9.383844 | 8.942686 |
| 14 | 12.731532 | 10.985648 | 10.682852 | 10.393573 | 10.117079 | 9.852683 | 9.357651 |
| 15 | 13.543382 | 11.563123 | 11.222825 | 10.898641 | 10.589648 | 10.294984 | 9.745468 |
| 16 | 14.343233 | 12.118387 | 11.739546 | 11.379658 | 11.037581 | 10.712249 | 10.107914 |
| 17 | 15.131264 | 12.652296 | 12.234015 | 11.837770 | 11.462162 | 11.105895 | 10.446649 |
| 18 | 15.907649 | 13.165669 | 12.707191 | 12.274066 | 11.864609 | 11.477260 | 10.763223 |
| 19 | 16.672561 | 13.659297 | 13.159992 | 12.689587 | 12.246074 | 11.827603 | 11.059087 |
| 20 | 17.426168 | 14.133939 | 13.593294 | 13.085321 | 12.607654 | 12.158116 | 11.335595 |
| 21 | 18.168639 | 14.590326 | 14.007936 | 13.462210 | 12.950382 | 12.469921 | 11.594014 |
| 22 | 18.900137 | 15.029160 | 14.404724 | 13.821153 | 13.275244 | 12.764077 | 11.835527 |
| 23 | 19.620824 | 15.451115 | 14.784425 | 14.163003 | 13.583170 | 13.041582 | 12.061240 |
| 24 | 20.330861 | 15.856842 | 15.147775 | 14.488574 | 13.875042 | 13.303379 | 12.272187 |
| 25 | 21.030405 | 16.246963 | 15.495478 | 14.798642 | 14.151699 | 13.550358 | 12.469334 |
| 26 | 21.719611 | 16.622080 | 15.828209 | 15.093945 | 14.413933 | 13.783356 | 12.653583 |
| 27 | 22.398632 | 16.982769 | 16.146611 | 15.375185 | 14.662495 | 14.003166 | 12.825779 |
| 28 | 23.067617 | 17.329586 | 16.451303 | 15.643034 | 14.898100 | 14.210534 | 12.986709 |
| 29 | 23.726717 | 17.663063 | 16.742874 | 15.898127 | 15.121422 | 14.406164 | 13.137111 |
| 30 | 24.376076 | 17.983715 | 17.021889 | 16.141074 | 15.333101 | 14.590721 | 13.277674 |

| n | 8.0% | 9.0% | 10.0% | 12.0% | 14.0% | 16.0% | 18.0% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 | 1.000000 |
| 2 | 1.925926 | 1.917431 | 1.909091 | 1.892857 | 1.877193 | 1.862069 | 1.847458 |
| 3 | 2.783265 | 2.759111 | 2.735537 | 2.690051 | 2.646661 | 2.605232 | 2.565642 |
| 4 | 3.577097 | 3.531295 | 3.486852 | 3.401831 | 3.321632 | 3.245890 | 3.174273 |
| 5 | 4.312127 | 4.239720 | 4.169865 | 4.037349 | 3.913712 | 3.798181 | 3.690062 |
| 6 | 4.992710 | 4.889651 | 4.790787 | 4.604776 | 4.433081 | 4.274294 | 4.127171 |
| 7 | 5.622880 | 5.485919 | 5.355261 | 5.111407 | 4.888668 | 4.684736 | 4.497603 |
| 8 | 6.206370 | 6.032953 | 5.868419 | 5.563757 | 5.288305 | 5.038565 | 4.811528 |
| 9 | 6.746639 | 6.534819 | 6.334926 | 5.967640 | 5.638864 | 5.343591 | 5.077566 |
| 10 | 7.246888 | 6.995247 | 6.759024 | 6.328250 | 5.946372 | 5.606544 | 5.303022 |
| 11 | 7.710081 | 7.417658 | 7.144567 | 6.650223 | 6.216116 | 5.833227 | 5.494086 |
| 12 | 8.138964 | 7.805191 | 7.495061 | 6.937699 | 6.452733 | 6.028644 | 5.656005 |
| 13 | 8.536078 | 8.160725 | 7.813692 | 7.194374 | 6.660292 | 6.197107 | 5.793225 |
| 14 | 8.903776 | 8.486904 | 8.103356 | 7.423548 | 6.842362 | 6.342334 | 5.909513 |
| 15 | 9.244237 | 8.786150 | 8.366687 | 7.628168 | 7.002072 | 6.467529 | 6.008062 |
| 16 | 9.559479 | 9.060688 | 8.606080 | 7.810864 | 7.142168 | 6.575456 | 6.091578 |
| 17 | 9.851369 | 9.312558 | 8.823709 | 7.973986 | 7.265060 | 6.668497 | 6.162354 |
| 18 | 10.121638 | 9.543631 | 9.021553 | 8.119630 | 7.372859 | 6.748704 | 6.222334 |
| 19 | 10.371887 | 9.755625 | 9.201412 | 8.249670 | 7.467420 | 6.817848 | 6.273164 |
| 20 | 10.603599 | 9.950115 | 9.364920 | 8.365777 | 7.550369 | 6.877455 | 6.316241 |
| 21 | 10.818147 | 10.128546 | 9.513564 | 8.469444 | 7.623131 | 6.928841 | 6.352746 |
| 22 | 11.016803 | 10.292244 | 9.648694 | 8.562003 | 7.686957 | 6.973139 | 6.383683 |
| 23 | 11.200744 | 10.442425 | 9.771540 | 8.644646 | 7.742944 | 7.011326 | 6.409901 |
| 24 | 11.371059 | 10.580207 | 9.883218 | 8.718434 | 7.792056 | 7.044247 | 6.432120 |
| 25 | 11.528758 | 10.706612 | 9.984744 | 8.784316 | 7.835137 | 7.072627 | 6.450949 |
| 26 | 11.674776 | 10.822580 | 10.077040 | 8.843139 | 7.872927 | 7.097092 | 6.466906 |
| 27 | 11.809978 | 10.928972 | 10.160945 | 8.895660 | 7.906077 | 7.118183 | 6.480429 |
| 28 | 11.935165 | 11.026580 | 10.237223 | 8.942554 | 7.935155 | 7.136364 | 6.491889 |
| 29 | 12.051078 | 11.116128 | 10.306567 | 8.984423 | 7.960662 | 7.152038 | 6.501601 |
| 30 | 12.158406 | 11.198283 | 10.369606 | 9.021806 | 7.983037 | 7.165550 | 6.509831 |

# فهرست منابع و مآخذ


اصغرپور، محمدجواد، **برنامه‌ریزی خطی**، دانشگاه الزهرا، ۱۳۶۳

پترویچ دوموریاد، الکساندر، **در قلمرو ریاضیات**، پرویز شهریاری (مترجم) امیرکبیر، ۱۳۴۸

تقوی، مهدی، **مقدمه‌ای بر تجزیه و تحلیل اقتصاد میکرو**، مؤسسه‌ی عالی علوم سیاسی و امور حزبی، ۱۳۵۴

جلیلی، میرزا، فرشید مین باشیان، **ریاضیات جدید**، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۶۷

دانش نارونی، غلامرضا، میرزا جلیلی، **ریاضیات جدید**، شرکت چاپ و نشر ایران، ۱۳۷۲

رودلف مک‌شین، آن‌کاتلر، **روش سریع تراختنبرگ در حساب**، محمد باقری، (مترجم) دانشمند، ۱۳۷۱

قربانی، ابوالقاسم، **جبر**، چاپخانه‌ی آرین، ۱۳۶۶

مصاحب، غلامحسین، **تئوری مقدماتی اعداد**، سروش، ۱۳۵۸

مولوی،رضا،**نظریه و مسائل ماتریس‌ها**،انتشارات میلاد، تهران،۱۳۷۴

وبر، اجین، **تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی**، حسین علی‌پور کاظمی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ۱۳۶۷

حافظی نسب، مصطفی، **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت**، نشر آروین، ۱۳۷۷

جوادی، حسین، مصطفی، حافظی نسب، **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت**، انتشارات اندرز، ۱۳۷۵

Gosling,"maths for Business and Finance" ,1995, Pascal Press