بسم الله الرحمن الرحیم

استاتیک و دینامیک مقدماتی

رشتهٔ مکانیک موتورهای دریایی

گروه تحصیلی علوم و فنون دریایی

زمینهٔ صنعت

شاخهٔ آموزش فنی و حرفه‌ای

شمارهٔ درس ۲۹۹۸

۱۳۹۵

همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :
پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی‌وحرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.

پیام‌نگار (ایمیل) info@tvoccd.sch.ir
وب‌گاه (وب‌سایت) www.tvoccd.sch.ir

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش**

نام کتاب : **استاتیک و دینامیک مقدماتی ـ ۴۶۳/۹**

مؤلفان : **وحید طاووسی، فرهاد میریانی و حمید یزدانی**

اعضای کمیسیون تخصصی : **حمید یزدانی، جواد سقای سعیدی، فرهاد میریانی، محمد تاجر قزوینی، جعفر تذکر و جواد داداش‌زاده**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت : www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ : **لیدا نیک‌روش**

طراح جلد : **طاهره حسن‌زاده**

صفحه‌آرا : **فاطمه سادات‌قوامی‌درو**

حروفچین : **فاطمه باقری‌مهر**

مصحح : **علی مظاهری نظری‌فر، سیدکیوان حسینی**

امور آماده‌سازی خبر : **سپیده ملک‌ایزدی**

امور فنی رایانه‌ای : **طوبیٰ عطایی، ناهید خیام‌باشی**

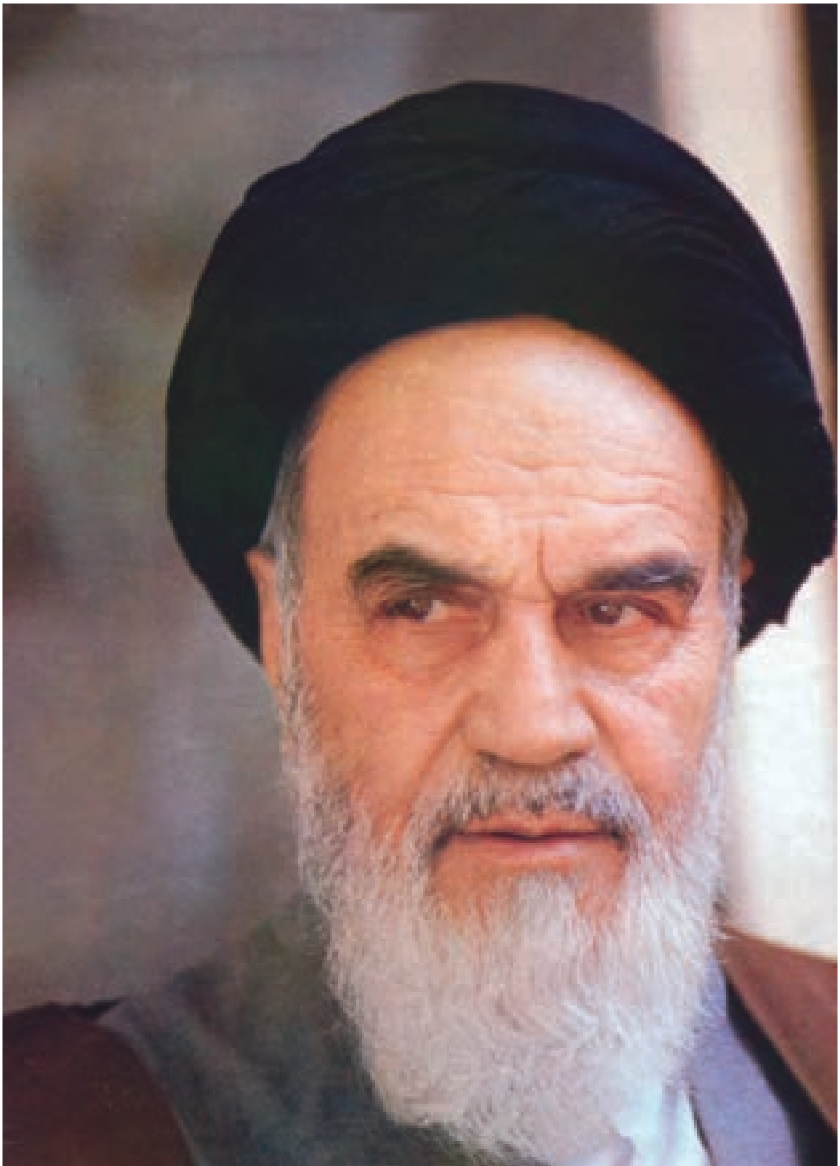
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ دوم ۱۳۹۵**

شابک ۵-۲۳۳۱-۰۵-۹۶۴-۹۷۸ ISBN 978-964-05-2331-5



اسلام، طبیعت را مهار می‌کند برای واقعیت و همه را رو به وحدت و توحید می‌برد.

امام خمینی (ره) صحیفهٔ نور، ج ۸ ، ص۶

فهرست

مقدمه

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

مقدمه

امروزه دریانوردی نیز مانند همهٔ امور روزمره به یک دانش تبدیل شده است. دانشی که فراگیری و کنکاش در آن به بهبود کیفیت و کمیت این امر منجر می‌شود. امروزه کمتر پدیدهٔ فیزیکی را می‌توان یافت که توجیهی علمی در پس آن موجود نباشد. برای مثال در مورد حرکت یک شناور در آب، روابط ریاضی و توجیهات فیزیکی مختلف بیان شده و کتاب‌های مختلفی در این زمینه نگارش شده است. در مورد موتورهای محرک این وسایل معمولاً غول پیکر و یا سایر تجهیزات آنها نیز می‌توان پدیده‌های فیزیکی را به شکل فرمول‌های ریاضی در آورده و توجیه کرد. برای فهم درست این پدیده‌ها و روابط فیزیکی آنها لازم است با بنیان‌های نظری ساخت آنها آشنا شویم.

شما هنرجویان این رشته نیز نیاز دارید که از معادلات حاکم بر سامانه‌های دریایی درک درستی داشته باشید و استدلال‌های فیزیکی مناسبی را برای پدیده‌های پیرامون بحث شناورهای دریایی و تجهیزات وابسته ارائه دهید. از این‌رو برآن شدیم تا با نگارش کتابی در زمینهٔ ایستایی و حرکت شناسی، بخشی از دانش روز و الفبای مورد نیاز آن را در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. امیدواریم که خواندن این کتاب برایتان مفید واقع شود و شما را در این زمینه پویاتر و کنجکاوتر سازد. در این کتاب در فصول مختلف مطالب موردنیاز ارائه شده است.

فصل اوّل این کتاب آشنایی مختصری است با مثلثات و کاربرد آن در علوم فیزیکی همچون ایستایی و حرکت شناسی. از ابتدا همواره مهندسی با هندسه همراه و عجین بوده است. در فصل دوم کتاب از دانسته‌های فصل اوّل کمک گرفته شده و مطالبی در مورد بردارها ارائه شده است. از آنجا که کمیت‌های فیزیکی مربوط به مباحث این کتاب اغلب از نوع برداری هستند، تحلیل‌های برداری کاربرد زیادی در فهم و حل مسائل ایستایی و حرکت شناسی دارد. در فصل بعدی یعنی بخش سوم این کتاب آشنایی مختصری با ایستایی‌شناسی ارائه شده است. در کشتی‌ها و بنادر عناصر سازه‌ای بسیار پرکاربرد هستند. به عنوان مثال می‌توان جرثقیل‌های غول پیکری را نام برد که از سازه‌های خرپایی ساخته می‌شوند. دانستن استاتیک در تحلیل و به‌کارگیری اینگونه سازه‌ها بسیار مفید است.

در دو فصل انتهایی کتاب برخی اجزا و دستگاه‌های پرکاربرد در کشتی، از جمله تسمه‌ها و پولی‌ها، چرخ دنده‌ها، قرقره‌ها و اهرم‌ها معرفی شده‌اند. برای اینکه بتوان محاسبات اوّلیه و کاربردی لازم جهت استفادهٔ صحیح از این ابزارها را به‌خوبی انجام داد، هنرجویان نیاز دارند کمی با اصول دینامیک آشنا شوند. دینامیک شاخه تحلیل حرکت در فیزیک است.

مؤلفان

فصل ۱

کاربرد ریاضی در مکانیک

هدف کلی

بهره‌برداری از ریاضیات در مکانیک

هدف‌های رفتاری

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :
۱ــ هدف‌های کلی علم مکانیک را بیان کند.
۲ــ ایستایی را توضیح دهد.
۳ــ حرکت‌شناسی را توضیح دهد.
۴ــ برای تعیین اندازهٔ اضلاع و زوایا، دانش مثلثات را به‌کارگیرد.

۱ــ۱ــ مکانیک

دانشمندان مسلمان ایرانی، از جمله ابولوفاء بوزجانی و خواجه‌نصیرالدین‌طوسی از اولین دانشمندانی بودند که مثلثات و ریاضیات را در علوم دیگر به‌کار گرفتند و توسعه دادند. اینان در بسیاری از موارد با الهام از آموزه‌های اسلامی و فرهنگ غنی ایرانی توانستند به ریاضیات چهره‌ای کاربردی ببخشند و از آن در علم طراحی سازه‌ها و دستگاه‌های آن زمان استفاده کردند.

مکانیک به‌وسیلهٔ ریاضیدان‌ها و فیزیک‌دان‌ها توسعه یافت. این گروه از دانشمندان عمدتاً به‌توضیح منطقی مشاهده‌های خود پرداختند و به مطالعهٔ اهرم، قرقره، سقوط آزاد و حرکت سیاره‌ها اقدام کردند. نتیجهٔ کار هر محقق در قالب یک تئوری جدید یا تصحیح تئوری پیشینیان به گنجینهٔ دانش بشر افزوده شد. در سال ۱۶۸۷ میلادی با کشف نیروی جاذبه و اعلام قوانین حرکت به‌وسیلهٔ اسحاق نیوتون دانش مکانیک در موقعیتی جدید قرار گرفت.

اهمیت علوم را می‌توان با نوع کاربرد آنها ارزیابی کرد. ملاحظه می‌شود طراحی و ساخت ساختمان، پل، خودرو، هواپیما و کشتی با تحلیل‌های اولیه بر مبنای اصول مکانیک انجام می‌شود. بنابراین نقش مکانیک و کاربرد آن در زندگی بشر بسیار مؤثر است. ایستایی و حرکت شناسی دو شاخهٔ مکانیک هستند که در این کتاب معرفی می‌شوند و کاربرد آنها به طور مجزا و توام بررسی می‌شود.

استاتیک[۱] یا ایستایی شاخه‌ای از علم مکانیک و علوم مهندسی است که به بحث و مطالعهٔ پیرامون سامانه‌های فیزیکی در حال تعادل ایستا (تعادل استاتیکی) می‌پردازد. تعادل ایستا حالتی است که در آن، مکان نسبی اجزاء سامانه‌ها نسبت به هم تغییر نکند، یا آنکه اجزاء و سازه‌ها در اثر اعمال نیروهای خارجی در حالت ایستایی یا سکون باقی بمانند. برای مثال ایستایی به سؤالات زیر پاسخ می‌دهد :

✓ چه مقدار بار بر یک ستون وارد می‌شود؟

۱ــ Static

✓ نیروی کششی در کابل‌های یک پل چقدر است؟

✓ توزیع نیروها در اجزاء یک جرثقیل چگونه است؟

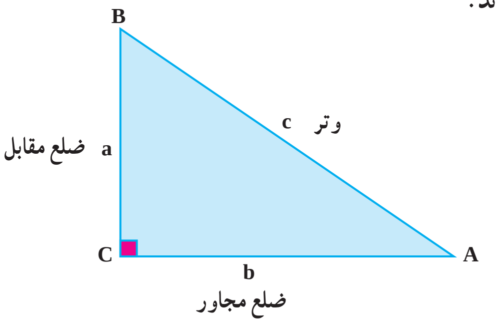
✓ مزیت مکانیکی مجموعه طناب و قرقره چه میزان است؟

حرکت‌شناسی[۱] شامل مطالعهٔ هندسی حرکت (سینماتیک) و نیروهای لازم برای ایجاد حرکت (سینتیک) است. هدف‌نهایی حرکت‌شناسی تعیین نیروهای لازم برای ایجاد حرکت و تغییر حرکت است. به‌عنوان مثال می‌توان به مطالعهٔ حرکت یک شناور در آب یا یک خودروی روی جاده اشاره کرد. برای فهم این حرکت‌ها لازم است معادلات حرکت‌شناسی (دینامیکی) این سامانه‌ها استخراج و تحلیل شود.

۲ــ۱ــ استفاده از ریاضیات در مکانیک

مکانیک موضوعی تحلیلی است. در مکانیک از شاخه‌های مختلف ریاضیات مانند جبر، هندسه و مثلثات استفادهٔ بسیار می‌شود. هدف این کتاب آموختن ریاضیات نیست ولی یک شاخهٔ آن، یعنی مثلثات کاربرد فراوانی در این کتاب دارد. در واقع علوم ریاضی مانند الفبای آموزش علم مکانیک است.

۱ــ۲ــ۱ــ مثلث‌های راست گوشه : مثلث راست گوشه شکل سه ضلعی بسته‌ای است که یک زاویهٔ نود درجه دارد، ضلعی که مقابل زاویهٔ نود درجه است وتر نامیده می‌شود. دو ضلع دیگر با توجه به سایر زوایا نامگذاری می‌شوند. مثلاً اگر $\hat{A}$ زاویهٔ مورد نظر باشد ضلع BC در شکل ۱ــ۱ ضلع مقابل و ضلع AC ضلع مجاور نامگذاری می‌شوند.



ضلع AB به طول c وتر[۲]

ضلع BC به طول a ضلع مقابل[۳]

ضلع AC به طول b ضلع مجاور[۴]

شکل ۱ــ۱ــ مثلث راست گوشه و تعاریف آن

برای اضلاع این مثلث راست گوشه شش نسبت می‌توان نوشت. این نسبت ها روابط مثلثاتی نام دارند و برای زاویه $\hat{A}$ در جدول ۱ــ۱ نشان داده می‌شوند :

۱ــ Dynamic

۲ــ Hypotenuse

۳ــ Opposite side

۴ــ Adjacent side

جدول ۱ــ۱ــ تعاریف نسبت‌های مثلثاتی

سینوس $\sin(\hat{A})=\frac{a}{c}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$	کسینوس $\cos(\hat{A})=\frac{b}{c}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$
تانژانت $\tan(\hat{A})=\frac{a}{b}=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$	کتانژانت $\cot(\hat{A})=\frac{b}{a}=\frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}}$
سکانت $\sec(\hat{A})=\frac{c}{a}=\frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$	کسکانت $\operatorname{cosec}(\hat{A})=\frac{c}{b}=\frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$

از این شش رابطهٔ مثلثاتی مشخص می‌شود که برای یک زاویهٔ معین θ، نسبت‌های طولی اضلاع در یک مثلث راست گوشه مقادیری ثابت هستند. مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت زوایایی که کاربرد بیشتری نسبت به سایر زوایا دارند (زوایای صفر، ۳۰ ، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه) در جدول۲ــ۱ درج شده است. مقادیر مثلثاتی زوایا (۱درجه تا ۹۰ درجه) در جدول پایانی کتاب (پیوست الف) وجود دارد.

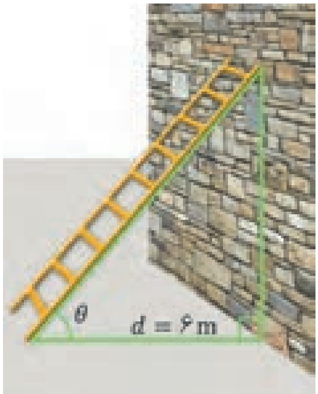
جدول ۲ــ۱ــ مقادیر نسبت‌های مثلثاتی

زاویه (درجه)	Sin	Cos	tan
۰	۰	۱	۰
۳۰	$\frac{۱}{۲}$=۰/۵	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$=۰/۸۶۶	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$=۰/۵۷۷
۴۵	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$=۰/۷۰۷	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$=۰/۷۰۷	۱
۶۰	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$=۰/۸۶۶	$\frac{۱}{۲}$=۰/۵	$\sqrt{۳}$=۱/۷۳۲
۹۰	۱	۰	بی‌نهایت
۱۸۰	۰	۱−	۰
۲۷۰	۱−	۰	منفی بی‌نهایت
۳۶۰	۰	۱	۰

یک مثلث راست گوشه دارای پنج متغیر است (سه ضلع و دو زاویه). اگر مقدار دو متغیر معین باشد سه متغیر دیگر به آسانی قابل تعیین است.

مثال ۱ : یک نردبان ۶ متری مطابق شکل ۲ــ۱ قرار داده شده است. اگر θ برابر ۴۵ درجه باشد، فاصلهٔ d (از پایه نردبان تا دیوار) چند متر است؟

حل : سینوس ۴۵ درجه نسبت طول d و وتر را تعیین می‌کند.



شکل ۲ــ۱ــ نردبانی که به دیوار تکیه کرده است.

$$\sin\theta=\sin ۴۵^\circ=\frac{d}{۶}$$

$$d=۶\times\sin ۴۵^\circ=۴/۲۴۲$$

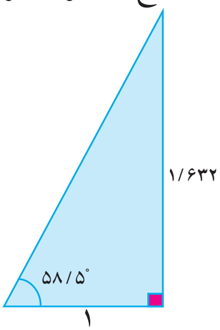
با استفاده از جدول ۲–۱ مقدار Sin ۴۵° به دست می‌آید و در نتیجه فاصله d برابر ۴/۲۴۲ متر است.

مثال ۲ : با استفاده از قوانین مثلثاتی، دو پاره‌خط رسم کنید که با هم زاویه ۵۸/۵ درجه بسازند.

حل : از رابطهٔ تانژانت برای رسم و یا اندازه‌گیری دقیق زوایا استفاده می‌شود. مثلاً برای رسم زاویهٔ ۵۸/۵ درجه، ابتدا مقدار تانژانت زاویهٔ ۵۸/۵ درجه از جداول مثلثات یادداشت می‌شود (برابر ۱/۶۳۲) و سپس یک مثلث راست گوشه (مانند شکل ۳ــ۱) رسم می‌شود، طوری که نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور برابر با تانژانت زاویهٔ ۵۸/۵ درجه باشد (در این مثال نسبت عدد ۱/۶۳۲ به عدد یک).

دقت زاویهٔ رسم شده به دقت رسم طول اضلاع بستگی دارد. مثلاً دقت زاویهٔ مثلثی که اضلاع آن به ترتیب برابر با ۱۶/۳۲ و ۱۰ می‌باشد بسیار بیشتر از زاویهٔ مثلثی است که اضلاع آن به‌ترتیب برابر ۱/۶۳ و یک است.

برای تعیین اندازهٔ یک زاویه، طول مناسبی برای ضلع مجاور انتخاب می‌شود و ضلع مقابل اندازه‌گیری می‌شود. از نسبت طول دو ضلع اندازهٔ تانژانت به دست می‌آید. با مراجعه به جداول مثلثات اندازهٔ زاویهٔ مقابل قابل تعیین است.



شکل ۳ــ۱ــ مثلث مثال ۲

۲ـ۲ـ۱ـ روابط مثلثاتی کمکی : روابط مختلفی بین نسبت‌های مثلثاتی برقرار است که می‌توان برای ساده‌سازی محاسبات از آن استفاده کرد. در رابطهٔ (۱ـ۱) رابطه‌ای برای مجموع زوایا آمده‌است که می‌توان از آن روابط (۱ـ۲) و (۱ـ۳) را نیز به‌دست آورد.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\times\cos\beta\pm\cos\alpha\times\sin\beta$ $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\times\cos\beta\mp\sin\alpha\times\sin\beta$	(۱ـ۱)
$\sin(180-\theta)=\sin\theta$ $\cos(180-\theta)=-\cos\theta$	(۱ـ۲)
$\sin 2x=2\sin x\times\cos x=\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$ $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$	(۱ـ۳)

فعالیت کلاسی ۱

به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، سعی کنید از رابطهٔ (۱ـ۱) روابط (۱ـ۲) و (۱ـ۳) را استخراج کنید.

مثال ۳ : با استفاده از مقادیر جدول ۱ـ۱ نسبت‌های مثلثاتی و روابط بالا، زوایای زیر را به‌دست آورید.

$$\theta=15^\circ\Rightarrow\theta=45^\circ-30^\circ\Rightarrow\begin{cases}\sin(15)=\sin(45-30)=\sin45\cos30-\\ \sin30\cos45=0/258\\ \cos(15)=\cos(45-30)=\cos45\cos30+\\ \sin45\sin30=0/969\end{cases}$$

$$\theta=135^\circ\Rightarrow\theta=180^\circ-45^\circ\Rightarrow\begin{cases}\sin(135)=\sin(180-45)=\sin45=0/707\\ \cos(135)=\cos(180-45)=-\cos45=0/707\end{cases}$$

فعالیت ۱-۱

شما در نزدیکی یک برج بلند ایستاده‌اید. اگر فاصلهٔ شما تا برج ۱۰ متر باشد و ارتفاع چشمان شما از سطح زمین ۱/۷ متر باشد و خط دید شما با افق زاویه ۸۳ درجه بسازد، ارتفاع برج را محاسبه کنید.

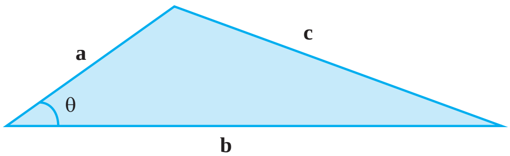
فعالیت کلاسی ۲

به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، و با استفاده از ابزارهای ترسیمی، مانند نقاله، خط کش، پرگار، متر و ....، ارتفاع ساختمان‌های مدرسه و همسایه را تخمین بزنید.

۳ــ۲ــ۱ــ قانون کسینوس‌ها : در مکانیک کاربردی در اکثر موارد اندازهٔ دو ضلع یک مثلث و زاویهٔ بین آنها مشخص است و ضرورت دارد اندازهٔ ضلع سوم محاسبه شود. مناسب‌ترین روش برای محاسبه ضلع سوم استفاده از قانون کسینوس است. مطابق این قانون اگر a و b اندازهٔ دو ضلع معین و θزاویهٔ بین آنها باشد، می‌توان اندازهٔ ضلع سوم (c) را با استفاده از رابطهٔ (۴ــ۱) به‌دست آورد.

$$c=\sqrt{a^{2}+b^{2}-\quad ab\times\cos\theta} \quad \text{یا} \quad c^{2}=a^{2}+b^{2}-2ab\times\cos\theta \qquad (۱ـ۴)$$

مثال ۴ : اندازهٔ ضلع c در مثلث شکل ۵ــ۱ چقدر است؟



شکل ۴ــ۱ــ یک مثلث با دو ضلع و یک زاویه معلوم

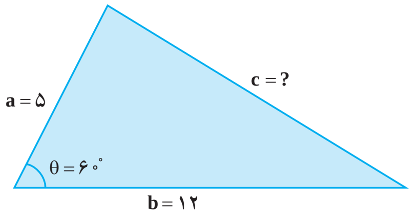
حل : از رابطهٔ (۴ــ۱) یا همان قانون کسینوس‌ها می‌توان به‌سادگی این مسئله را حل نمود :

$$c=\sqrt{a^{2}+b^{2}-2ab\times\cos\theta}$$

$$c=\sqrt{5^{2}+12^{2}-2(5)(12)\times\cos 60}$$

$$=\sqrt{25+144-2(5)(12)\times 0/5}=\sqrt{109}$$

$$=10/4$$



شکل ۵ــ۱

مثال ۵ : اندازهٔ اضلاع در شکل ۶ــ۱ مشخص شده است، زاویه θ را بیابید.

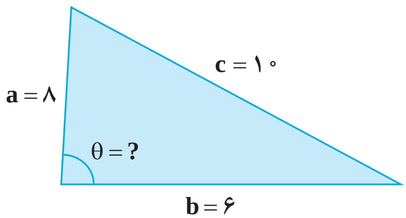
حل : از رابطهٔ (۴ــ۱) یا همان قانون کسینوس‌ها می‌توان به‌دست آورد که :

$$\cos\theta = \frac{a^{۲}+b^{۲}-c^{۲}}{۲ab}$$

در نتیجه :

$$\cos\theta = \frac{۳۶+۶۴-۱۰۰}{۲\times۶\times۸} \Rightarrow \cos\theta=۰ \Rightarrow$$

$$\theta=۹۰^{\circ}$$



شکل ۶ــ۱

توجه! : اگر در قانون کسینوس‌ها مقدار زاویه بین دوضلع ۹۰ درجه باشد، قانون کسینوس‌ها معادل قضیه فیثاغورث خواهد بود زیرا می‌دانیم : $\cos ۹۰=۰$

پس :

$$c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۲ab\times\cos\theta} \xrightarrow{\cos۹۰=۰} c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۲ab\times۰} \Rightarrow c=\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}$$

در واقع قضیه فیثاغورث شکل خاصی از قانون کسینوس‌ها است. هرجا که یکی از زوایا ۹۰ درجه باشد می‌توان به‌جای استفاده از روابط (۴ــ۱) از قضیه فیثاغورث بهره جست.

مثال ۶ : اندازهٔ ضلع c در مثلث شکل ۷ــ۱ چند متر است؟

حل : با کمک از رابطهٔ (۴ـ۱) و رابطه (۲ـ۱) می‌توان این مسئله را حل نمود :

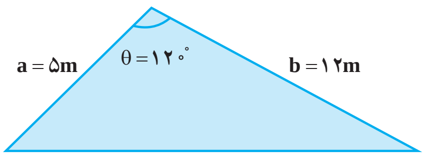
$$\cos ۱۲۰ = -\cos ۶۰ = -۰/۵$$

$$c = \sqrt{۵^۲ + ۱۲^۲ - ۲(۵)(۱۲)\times\cos ۱۲۰}$$

$$= \sqrt{۲۵ + ۱۴۴ - ۲(۵)(۱۲)\times(-۰/۵)}$$

$$= \sqrt{۲۵ + ۱۴۴ + ۶۰} = \sqrt{۲۲۹} = ۱۵/۱ \text{ m}$$

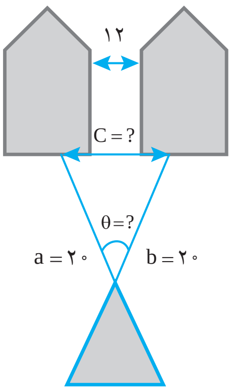
یعنی طول ضلع سوم برابر ۱۵/۱ متر خواهد بود.



شکل ۷ـ۱

مثال ۷ : دو یدک‌کش به پهنای ۸ متر یک کشتی بزرگ را یدک می‌کنند. طول کابل هر یدک‌کش برابر ۲۰ متر است. برای اینکه یدک کش‌ها با هم برخورد نکنند باید با فاصلهٔ ایمن ۱۲ متر از یکدیگر حرکت کنند. زاویه به‌وجود آمده بین کابل‌ها را حساب کنید (شکل ۸ ـ ۱).

حل : ابتدا باید با توجه به شکل فاصلهٔ واقعی انتهای کابل‌ها را بیابیم.



شکل ۸ ـ ۱

$$c = ۱۲ + ۲\times\frac{۸}{۲} = ۲۰\text{m}$$

a و b هم که ۲۰ متر هستند :

$$a = b = ۲۰\text{m}$$

از مثال ۵ داریم :

$$\cos\theta = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲ab}$$

در نتیجه :

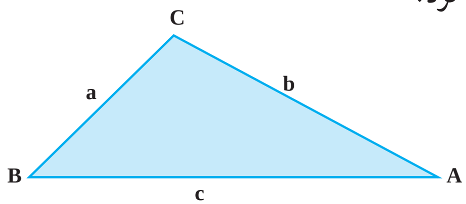
$$\cos\theta = \frac{۴۰۰ + ۴۰۰ - ۴۰۰}{۲\times۲۰\times۲۰} = ۰/۵ \xrightarrow[\text{جدول ۱ـ۱}]{\text{با استفاده از}}$$

$$\theta = ۶۰^\circ$$

۴ــ۲ــ۱ــ قانون سینوس‌ها : این قانون کاربرد وسیعی در مکانیک دارد. مطابق این قانون در مثلثی مانند مثلث شکل ۹ــ۱ ارتباط و تناسب اندازهٔ اضلاع و زوایا به شرح زیر (رابطهٔ ۵ــ۱) می‌باشد.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}}=\frac{b}{\sin \hat{B}}=\frac{c}{\sin \hat{C}} \qquad (۱ــ۵)$$

از قانون سینوس‌ها برای تعیین اندازهٔ ضلع سوم یک مثلث وقتی که اندازهٔ دو ضلع دیگر و یک زاویهٔ مقابل معین هستند استفاده می‌شود. همچنین وقتی که دو زاویه و یک ضلع معین هستند اندازهٔ ضلع سوم را می‌توان تعیین کرد.



شکل ۹ــ۱ــ مثلث

مثال ۸ : در شکل ۹ــ۱ با فرض اینکه اندازهٔ b برابر ۱۲ متر، $\hat{A}=۴۲^\circ$ و $\hat{C}=۳۵^\circ$ باشد، اندازهٔ اضلاع a و c چندمتر است؟

حل : مجموع زوایای یک مثلث برابر با ۱۸۰ درجه است. یعنی $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ ، پس $\hat{B}=۱۰۲^\circ$ است. لذا مطابق قانون سینوس‌ها :

$$\frac{a}{\sin \hat{A}}=\frac{b}{\sin \hat{B}}=\frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$\frac{a}{\sin ۴۲}=\frac{۱۲}{\sin ۱۰۲} \text{ و } \frac{c}{\sin ۳۵}=\frac{۱۲}{\sin ۱۰۲}$$

در صورتی که اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$ بین ۹۰ و ۱۸۰ درجه باشد مقدار sin آن از رابطهٔ (۲ــ۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\sin(۱۸۰-\theta)=\sin\theta \Rightarrow \sin ۱۰۲=\sin(۱۸۰-۷۸)=\sin ۷۸$$

مقادیر سینوس زاویهٔ ۷۸ و ۴۲ درجه از جداول مثلثات یادداشت می‌شود، که به ترتیب برابر با ۰/۹۷۸ و ۰/۶۸۲ هستند.

$$\frac{a}{۰/۶۸۲}=\frac{۱۲}{۰/۹۷۸}\Rightarrow a=\frac{۱۲\times ۰/۶۸۲}{۰/۹۷۸}=۸/۳۷m$$

با تکرار همین روش برای محاسبه c خواهیم داشت :

$$\frac{c}{\sin ۳۵}=\frac{۱۲}{\sin ۱۰۲}\Rightarrow c=\frac{۱۲\times \sin ۳۵}{۰/۹۷۸}=۷/۰۴m$$

مثال ۹ : در مثلث متساوی الساقین شکل ۱۰ــ۱ زاویه بین دو ساق ۳۰ درجه و طول قاعده مثلث ۲ متر است. ارتفاع مثلث را به دست آورید.

حل : ابتدا با توجه به متساوی‌الساقین بودن مثلث زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را می‌یابیم.

$$\hat{C}=\hat{B} \text{ و } \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰\Longrightarrow ۱۸۰=۲\hat{B}+۳۰$$

$$\hat{B}=\frac{۱۸۰-۳۰}{۲}=۷۵^\circ$$

با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم : $\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}$

با ساده سازی داریم :

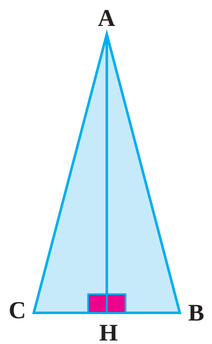
$$b=\frac{a\sin\hat{B}}{\sin\hat{A}}=۳/۸۶m\Rightarrow c=۳/۸۶m$$

می‌دانیم که در مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه قاعده برابرند پس CH=BH=۱m است.

حال می‌توانیم با استفاده از قضیه فیثاغورث در مثلث AHB اندازهٔ ضلع AH را به‌دست آوریم.

$$b^۲=AH^۲+CH^۲\Rightarrow AH=\sqrt{b^۲-CH^۲}$$

$$AH=\sqrt{۳/۸۶^۲-۱}=۳/۷۳$$



شکل ۱۰ــ۱

یادآوری (برای مطالعه)

این بخش از کتاب در سایر مسائل بسیار پرکاربرد است. پس فراموش نکنید که این بخش را به خوبی فرابگیرید.

۳ــ۱ــ دستگاه بین المللی یکاها

دستگاه بین المللی یکاها با علامت اختصاری SI به‌طور کامل در کتاب درسی فیزیک مکانیک معرفی شده است. ولی با توجه به کاربردهای آن در این کتاب مواردی به‌طور مختصر توضیح داده می‌شود.

در این دستگاه از حاصل ضرب یا تقسیم کمیت دو یکا، کمیت سوم در یکای دیگر حاصل می‌شود. این دستگاه بر مبنای شش یکای اصلی ایجاد شده است که به‌ترتیب عبارت‌اند از : متر(واحد طول) ، کیلوگرم (واحدجرم)، ثانیه (واحدزمان)، کلوین (واحد دما)، آمپر(واحد شدت جریان برق) و شمع (واحد شدت روشنایی). (در این کتاب پیرامون دما، شدت جریان برق و شدت روشنایی بحث نمی‌شود ولی به‌منظور شرح کامل دستگاه بین‌المللی یکاها به‌طور خلاصه معرفی شدند.)

از حاصل‌ضرب یک واحد طول (یک‌متر) در یک واحد طول (یک‌متر)، واحد سطح (یک مترمربع) حاصل می‌شود.

$$۱m\times۱m=۱m^{۲}$$

از تقسیم یک واحد طول یا فاصلهٔ (یک‌متر) بر یک واحد زمان (یک ثانیه) یک واحد سرعت (یک متر بر ثانیه) حاصل می‌شود.

$$۱m\div۱s=۱\ \frac{m}{s}$$

از حاصل‌ضرب یک واحد جرم (یک‌کیلوگرم) با یک واحد شتاب (یک‌متر بر مجذورثانیه) یک واحد نیوتون (یک‌نیوتون) حاصل می‌شود.

$$۱Kg\times۱m.s^{-۲}=۱\ \frac{kg.m}{s^{۲}}\ =۱N$$

از نتیجهٔ اعمال یک واحد نیرو (یک نیوتون) در یک واحد فاصله (یک متر) یک واحد کار (یک ژول) حاصل می‌شود.

$$۱N\times۱m=۱J$$

یکاهای مورد استفاده در این کتاب اعم از یکاهای اصلی و یکاهای مشتق و مرتبط با یکاهای اصلی در جدول ۳ــ۱ معرفی می‌شوند.
یکاهایی که یادآور اشخاص معروف هستند با حروف بزرگ لاتین نشان داده می‌شوند (مانند N برای نیوتون، W برای وات، Hz برای هرتز، J برای ژول) و سایر یکاها با حروف کوچک لاتین نشان داده می‌شوند.

۴ــ۱ــ توان‌های ۱۰

گاهی مقادیر مربوط به یک کمیت بسیار کوچک و یا بزرگ هستند، به‌نحوی که نمایش کامل آنها به‌دلیل زیاد بودن تعداد ارقام مطلوب نیست و باعث ایجاد خطا در زمان خوانش آنها می‌شود. برای ساده‌سازی نمایش آنها از پیشوندهایی استفاده می‌شود که نماینده توان‌های ۱۰ است.

جدول ۳ــ۱

ضرب عامل	استاندارد نگارش	پیشوند	علامت
۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	$۱۰^{۱۲}$	tera (ترا)	T
۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰	$۱۰^{۹}$	giga (گیگا)	G
۱/۰۰۰/۰۰۰	$۱۰^{۶}$	mega (مگا)	M
۱/۰۰۰	$۱۰^{۳}$	kilo (کیلو)	K
۱۰۰	$۱۰^{۲}$	hecto (هکتو)	h
۱۰	$۱۰^{۱}$	deca (دکا)	da
۰/۱	$۱۰^{-۱}$	deci (دسی)	d
۰/۰۱	$۱۰^{-۲}$	centi (سانتی)	c
۰/۰۰۱	$۱۰^{-۳}$	milli (میلی)	m
۰/۰۰۰۰۰۱	$۱۰^{-۶}$	micro (میکرو)	μ
۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱	$۱۰^{-۹}$	nano (نانو)	n
۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱	$۱۰^{-۱۲}$	picco (پیکو)	p

مثال ۱۰ : نیروی وارد بر یک تیر برابر ۲۳۵۰۰N است که نمایش این عدد را می‌توان به شکل $۲۳/۵ \times ۱۰^{۳}$N یا ۲۳/۵KN نمایش داد.

۵ــ۱ــ مقایسه کمیت‌ها در دستگاه‌های مختلف

با وجود گسترش تجهیزات و سیستم‌های متریک هنوز در برخی کشتی‌ها تجهیزاتی وجود دارند که بر مبنای واحدهای اندازه‌گیری غیرمتریک طراحی و ساخته شده‌اند.

بسیاری از اوقات ضرورت دارد واحدهای اندازه‌گیری به یکدیگر تبدیل شوند. برخی مقایسه‌ها و تبدیل‌ها به شرح زیر است.

طول :	نیرو :
۱in (اینچ) =۲/۵۴cm=۲۵/۴mm	۱ lbf (پوند نیرو) =۴/۴۴۸ N
۰/۳۰۴۸ m=۱ft (فوت)	۱ tonf (تن نیرو) = ۹/۹۶۴ KN
۰/۹۱۴۴m =۱ yd. (یارد)	**فشار :**
۱/۶۰۹ km =۱mile (مایل)	۱ lbf.ft$^{-۲}$ = ۴۷/۸۸ N.m$^{-۲}$ (پاسکال Pa)
۱/۸۵۲ km =۱ مایل دریایی (بین‌المللی)	۱ bar = ۱۰۰ KN.m$^{-۲}$
	۱/۰۱۳ bar = ۱atm (اتمسفر)

تحقیق : با استفاده از منابع مکتوبی که هنرآموزان معرفی می‌کند سایر تبدیل‌ها را به‌دست آورید و آنها را در جدولی که به همین منظور در ادامه قرار دارد، بنویسید.

جدول تحقیقی ۴ــ۱ــ تبدیل واحدهای متریک به سایر واحدهای عرف در کشتی!

جرم	
حجم	
توان	
انرژی	

خودآزمایی فصل اول

۱ــ جاهای خالی را پر کنید.

الف) سینوس یک زاویه برابر است با نسبت ضلع ــــــــــ به ــــــــــ.

ب) ــــــــــ یک زاویه برابر است با نسبت ضلع مقابل زاویه بر ضلع مجاور زاویه.

ج) ۱ اینچ برابر ــــــــــ میلی‌متر است.

۲ــ گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.

الف) طول وتر یک مثلث راست گوشه ۲۰ سانتی‌متر و یک زاویهٔ آن ۶۰ درجه است. طول ضلع مجاور این زاویه چقدر است؟

۱ــ ۱۷/۳   ۲ــ ۱۰   ۳ــ ۲۰   ۴ــ ۳۰

ب) در مثال قبل طول ضلع مقابل زاویه را بیابید.

۱ــ ۱۷/۳   ۲ــ ۱۰   ۳ــ ۲۰   ۴ــ ۳۰

ج) دو ضلع یک مثلث راست گوشه به ترتیب ۶ و ۴ واحد است. زاویه بین وتر و ضلع کوتاه‌تر چند درجه است؟

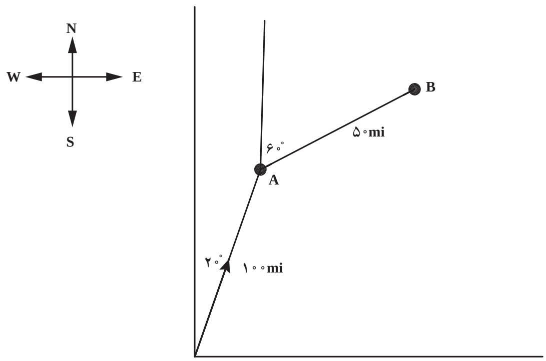
۱ــ ۳۲/۷   ۲ــ ۳۰   ۳ــ ۵۶/۳   ۴ــ ۷۰

د) در یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه طول ساق‌ها ۱۲ واحد است. طول وتر تقریباً چقدر است؟

۱ــ ۱۴۴   ۲ــ ۲۸۸   ۳ــ ۱۷   ۴ــ ۱۲

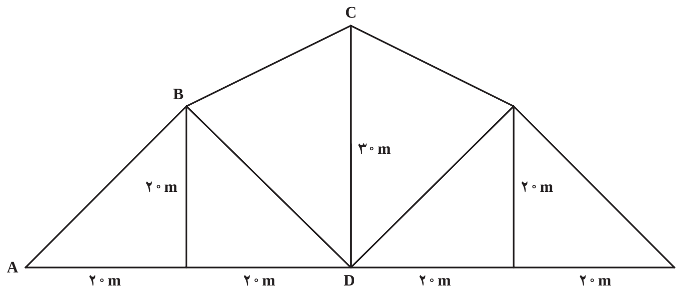
۴ــ یک نردبان ۵ متری با زاویهٔ ۳۵ درجه نسبت به دیوار قرار داده شده است. فاصلهٔ نقطهٔ بالایی نردبان تا کف زمین چقدر است؟

۵ــ یک کشتی فاصلهٔ ۱۰۰ مایل را در مسیر ۲۰ درجه شمال شرقی و سپس فاصلهٔ ۵۰ مایل را در مسیر ۶۰ درجه شمال شرقی مطابق شکل ۱۱ــ۱ دریانوردی می‌کند. فاصلهٔ کشتی از نقطهٔ شروع چقدر است؟



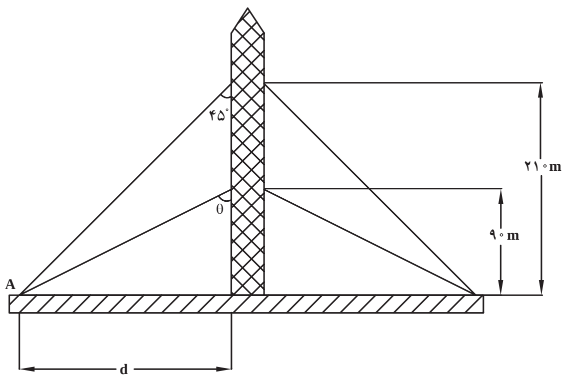
شکل ۱۱ـ۱

۶ـ خرپای یک سقف دارای اعضایی با اندازه‌های شکل ۱۲ـ۱ است. اندازهٔ زوایای DBC و BCD چقدر است ؟طول ضلع BC چقدر است ؟



شکل ۱۲ـ۱

۷ـ یک آنتن فرستندهٔ تلویزیون به ارتفاع ۳۰۰ متر مطابق شکل ۱۳ـ۱ با کابل‌های فلزی مهار شده است. فاصلهٔ تکیه‌گاه A تا آنتن (فاصلهٔ d) و اندازهٔ زاویهٔ θ (زاویهٔ بین کابل‌های مهار تحتانی و آنتن) چقدر است؟

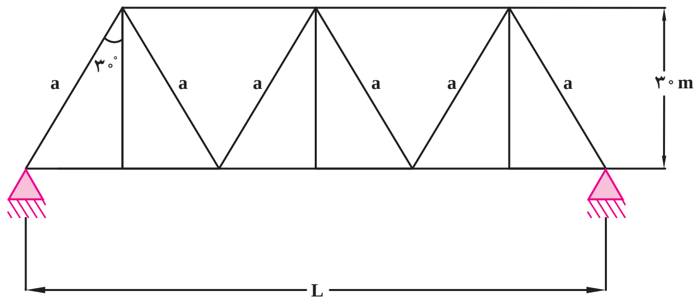


شکل ۱۳ـ۱

۸ــ ارتفاع یک مثلث راست گوشه ۴۰ سانتی‌متر و قاعده آن ۹۰ سانتی‌متر است. طول وتر و زاویهٔ بین وتر و قاعده چقدر است؟

۹ــ چنانچه ارتفاع یک مثلث متساوی الساقین ۵۰ سانتی‌متر و اندازهٔ قاعده آن ۲۵ سانتی‌متر باشد اندازهٔ دو ضلع مساوی و زاویهٔ آنها با قاعده چقدر است؟

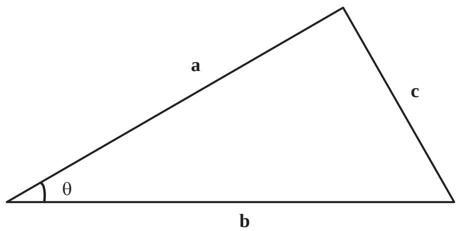
۱۰ــ فاصلهٔ L در شکل ۱۴ــ۱ چقدر است؟



شکل ۱۴ــ۱

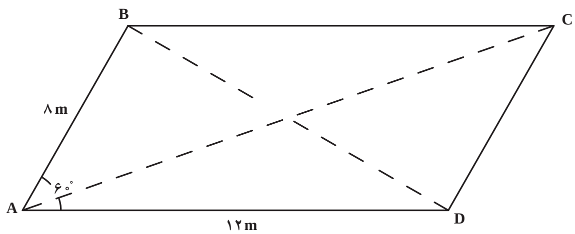
۱۱ــ با استفاده از روش تانژانت خطی رسم کنید که با یک خط افقی مبنا زاویهٔ ۵۷/۲ درجه تشکیل دهد.

۱۲ــ در شکل ۱۵ــ۱ در صورتی که a =۵cm ، b =۱۰cm و θ=۳۰ درجه باشد اندازهٔ ضلع c چقدر است؟



شکل ۱۵ــ۱

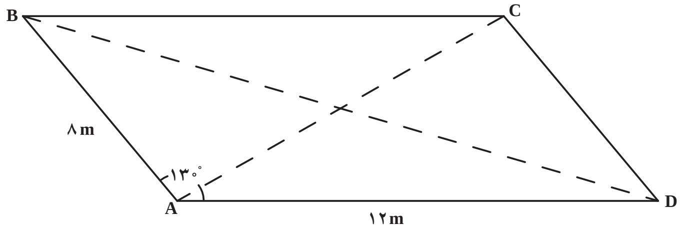
۱۳ــ اندازهٔ قطرهای BD و AC در متوازی الاضلاع شکل ۱۶ــ۱ چقدر است؟



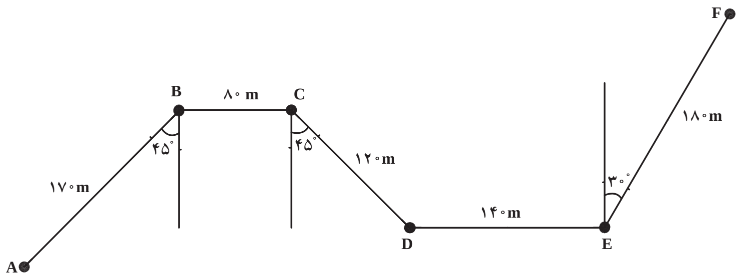
شکل ۱۶ــ۱

۱۴ــ اندازهٔ قطرهای BD و AC در متوازی الاضلاع شکل ۱۷ــ۱ چقدر است؟

۱۵ــ یک قایق مسیر زیگزاگ را از نقطهٔ A تا نقطهٔ F مطابق شکل ۱۸ــ۱ می‌پیماید. خط AF را رسم کرده و اندازهٔ آن را تعیین کنید.



شکل ۱۷ــ۱



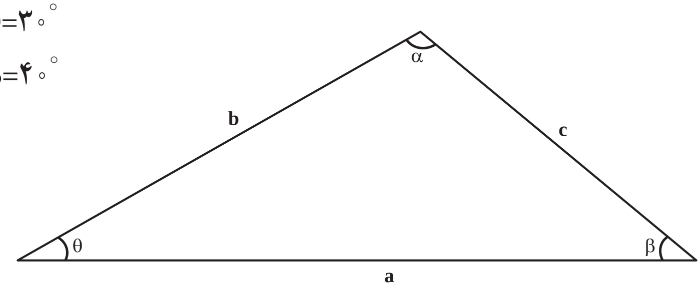
شکل ۱۸ــ۱

۱۶ــ در مثلث شکل ۱۹ــ۱ اندازهٔ ضلع و زوایای معین نشده، چقدر است؟

a=۱۰۰cm

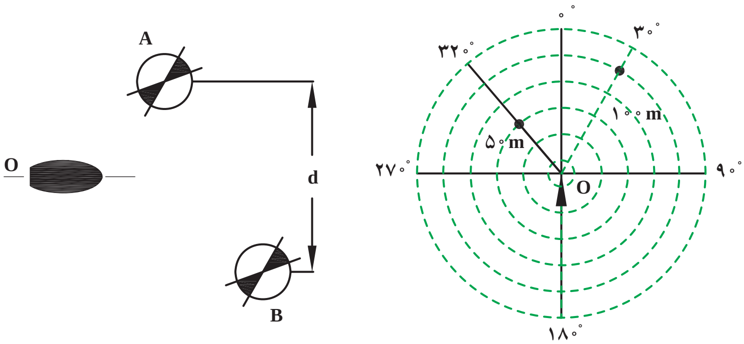
θ=۳۰°

β=۴۰°



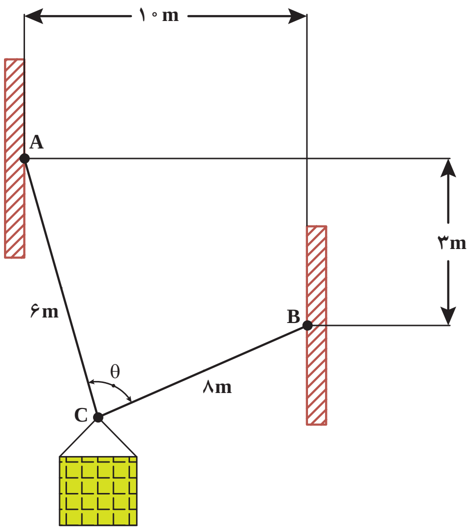
شکل ۱۹ــ۱

۱۷ــ یک کشتی مطابق شکل ۲۰ــ۱ باید از بین دو بویه A و B بگذرد. فواصل A و B از کشتی به ترتیب ۵۰ و ۱۰۰ متر است. اندازهٔ d چقدر است؟



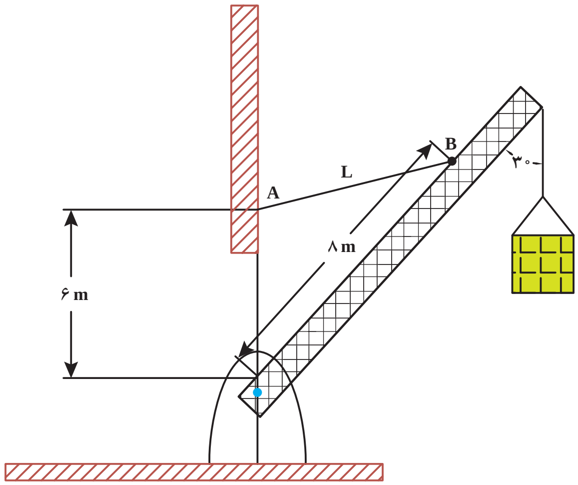
شکل ۲۰ــ۱

۱۸ــ وزنه‌ای مطابق شکل ۲۱ــ۱ از کابل‌های AC و BC آویزان است. زاویهٔ θ بین این دو کابل چقدر است؟



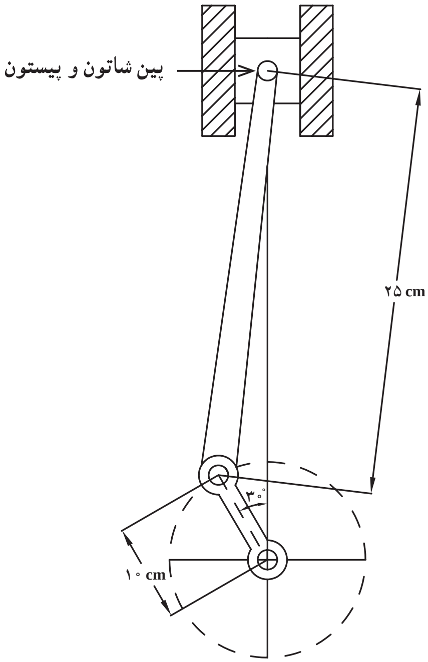
شکل ۲۱ــ۱

۱۹ــ بوم جرثقیل شکل ۲۲ــ۱ به‌وسیلهٔ کابل AB مهار شده است. طول کابل L و زاویهٔ بین کابل و بوم چقدر است؟



شکل ۲۲ـ۱

۲۰ــ در شکل ۲۳ــ۱ فاصلهٔ پین شاتون و پیستون در این لحظه تا نقطهٔ مرگ بالا برای همین پین چقدر است؟ فاصلهٔ بین نقطهٔ مرگ بالا و پایین برای این پین چقدر است؟



شکل ۲۳ــ۱

فصل ۲

استفاده از بردار برای تحلیل نیروها

هدف کلی

استفاده از بردار در تحلیل‌های نیرویی

هدف‌های رفتاری

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

۱ــ بردار را تعریف کند.

۲ــ کمیت‌های برداری و نرده‌ای را تشخیص دهد.

۳ــ جمع برداری را به روش **ترسیمی** و **تحلیلی** انجام دهد.

۴ــ ضرب داخلی و خارجی را بر روی بردارهای ۲ بعدی انجام دهد.

۱ــ۲ــ کمیت‌های برداری

شما در دوران راهنمایی و ابتدایی با مبحث محورهای مختصات و بردار آشنا شده‌اید. اما شاید تاکنون به کاربرد آنها فکر نکرده‌اید یا با آنها برخوردی نداشته‌اید. در این کتاب به‌وفور از محاسبات برداری و مختصاتی در علم مکانیک استفاده شده است. اما بهتر است قبل از آن بدانیم چرا این محاسبات در علم استاتیک و دینامیک کاربرد دارد.

در فیزیک سال گذشته با کمیت‌های فراوانی روبه‌رو شدید. برخی از این کمیت‌ها فقط مقدار دارند، مثل کار[۱]، جرم[۲]، دما[۳]، فاصله[۴] و تندی[۵]. این‌گونه کمیت‌ها را کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای می‌نامند.

امّا برخی کمیت‌ها هستند که علاوه براندازه، راستا و جهت نیز دارند. به عنوان مثال فاصلهٔ جزیره قشم (از بندر قشم) تا بندر عباس ۱۰/۸ مایل (۲۰ کیلومتر) است. اما آیا به نظر شما برای طی کردن یک مسافت دریایی دانستن فاصله به تنهایی کافی است؟ مسلماً برای دانستن موقعیت این دو بندر نسبت به هم لازم است، طول و عرض جغرافیایی هردو و یا راستا و جهت حرکت از بندری به بندر دیگر مشخص شود. به همین دلیل است که در کشتی‌ها از وسایل جهت‌یابی مختلفی استفاده می‌شود. برای مثالی دیگر می‌توان به نیرو اشاره کرد. اگر یک جعبه را با نیروی ۱۰۰ نیوتن روی زمین بکشید، به کدام طرف حرکت می‌کند؟ باید اول معلوم کنید که این نیرو در چه جهت و در چه راستایی وارد شده است. مثلاً اگر نیرو به سمت پایین وارد شود اصلاً جعبه از جایش تکان نمی‌خورد بلکه به زمین فشرده می‌شود.

۱ــ work　　۲ــ mass　　۳ــ temperature

۴ــ distance　　۵ــ speed

شکل ۱ــ۲ــ سرعت‌سنج کشتی قدیمی

شکل ۲ــ۲ــ سرعت‌سنج دریایی دیجیتال

شکل ۱ــ۲و شکل ۲ــ۲ سرعت سنج‌های دریایی را نشان می‌دهد. در واقع این سرعت سنج‌ها فقط تندی را نشان می‌دهند و اطلاعاتی در مورد جهت در اختیار نمی‌گذارند. (در واقع شکل ۱ــ۲یک دسته تلگراف است و نه یک سرعت سنج واقعی به‌این معنی که فقط سرعت دلخواه ناخدا را نمایش می‌دهد نه سرعتی که کشتی واقعاً به‌آن رسیده‌است.) به همین دلیل از دیرباز ملوانان از وسایلی همچون قطب‌نما[۱] (شکل ۳ــ۲) و یا نشان‌دهنده راه کشتی[۲] (شکل ۴ــ۲) استفاده کرده‌اند.

شکل ۳ــ۲ــ قطب نمای معمولی

شکل ۴ــ۲ــ قطب نمای دیجیتال یا نشان‌دهنده راه کشتی

۱ــ compass

۲ــ cruise indicator

توضیح

سرعت[1] به دلیل اینکه جهت و راستای حرکت را نشان می‌دهد، یک کمیت برداری و تندی به دلیل اینکه صرفاً مسافت طی شده در زمان را نشان می‌دهد یک کمیت نرده‌ای است.

جدول ۲ــ۱ کمیت‌های برداری و نرده‌ای را که در این کتاب کاربرد دارند، فهرست کرده است.

جدول ۲ــ۱ــ کمیت‌های برداری و نرده‌ای

کمیت	نوع	واحد	نماد
نیرو	برداری	N نیوتن	$\vec{F}$
زمان	نرده‌ای	s ثانیه	t
شتاب	برداری	متر بر مجذور ثانیه $m.s^{-2}$	$\vec{a}$
سرعت	برداری	متر بر ثانیه $m.s^{-1}$	$\vec{v}$
تندی	نرده‌ای	متر بر ثانیه $m.s^{-1}$	V
مسافت	نرده‌ای	m متر	d یا s
جابه‌جایی	برداری	m متر	$\Delta\vec{R}$

دقت داشته باشید که ممکن است در کتاب‌های دیگر و یا در بخش‌های دیگر همین کتاب از نمادهای دیگری برای این کمیت‌ها استفاده شود و یا برای ساده سازی از نوشتن علامت بردار در بالای آن نماد خودداری شود. در این موارد باید به توضیحات توجه کرد و حل مناسب را با توجه به برداری یا نرده‌ای بودن آن کمیت، ارائه کرد.

تعریف بردار : کمیتی را که هم اندازه و هم راستا و جهت داشته باشد، بردار می‌گویند. در این کتاب فقط بردارهایی که در مختصات دوبعدی هستند مورد بحث قرار می‌گیرد.

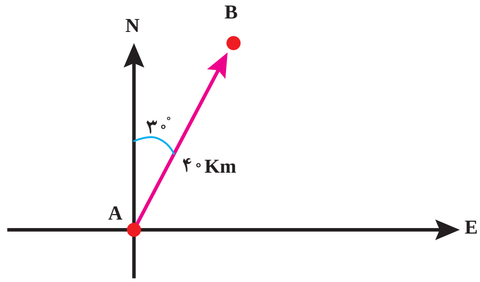
۱ــ Velocity

۲ــ۲ــ محاسبات برداری

قبل از اینکه به نحوه محاسبات برداری بپردازیم باید خواص بردار و نحوهٔ نمایش آن یادآوری شود. بردار را می‌توان با بزرگی و جهت آن تعریف کرد.

مثال ۱ : یک کشتی فاصلهٔ شهر A تا B را به اندازهٔ ۴۰ کیلومتر و در جهت ۳۰ درجه نسبت به شمال و به سمت شرق حرکت کرده است بردار این جابجایی را رسم کنید (شکل ۵ــ۲).

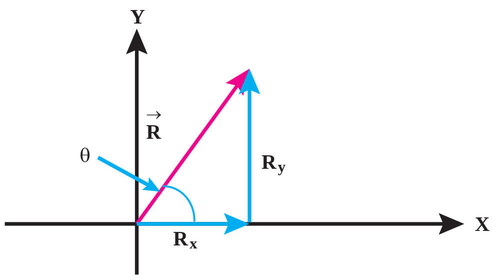
حل : ابتدا برای رسم این بردار دو محور مختصات رسم می‌کنیم. خطی در امتداد زاویهٔ ۳۰ درجه از محور شمال رسم می‌کنیم. با مقیاس‌بندی مناسب طول مورد نظر معادل ۴۰ کیلومتر را جدا می‌کنیم.



شکل ۵ــ۲ــ بردار جابه‌جایی یک کشتی

می‌توان بردار را با مؤلفه‌های طول و عرض (X و Y) نیز نمایش داد. فرض کنید برداری به اندازهٔ $|\vec{R}|$ داریم. این بردار با محور X زاویه θ می‌سازد. تصویر بردار $\vec{R}$ روی محور Xها را مؤلفهٔ R_x و تصویر بردار روی محور Y را مؤلفهٔ R_y می‌نامیم.

این دو نوع تعریف با استفاده از آموزه‌های فصل قبل به یکدیگر تبدیل خواهند شد.



شکل ۶ــ۲ــ مؤلفه‌های یک بردار

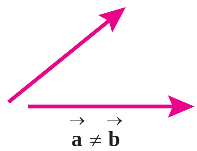
در این‌جا می‌توان بردار $\vec{R}$ را به‌جای بزرگی و زاویه، به کمک مؤلفه‌های R_x و R_y تعریف کرد. یعنی بگوییم به اندازهٔ R_x در جهت X و سپس به اندازهٔ R_y در جهت Y، بردار $\vec{R}$ را تشکیل می‌دهد.

فعالیت کلاسی ۱

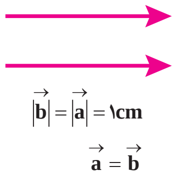
به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، سعی کنید از روابطی که در فصل ۱ خوانده‌اید استفاده کنید و مؤلفه‌های برداری شکل ۶ــ۲ را برحسب بزرگی و زاویه بردار به‌دست آورید.

۱ــ۲ــ۲ــ خواص بردار : خواص زیر برای بردارهای مفروض است :

۱ــ اگر دو بردار جهت، راستا و اندازهٔ مساوی داشته باشند آن دو بردار را همسنگ می‌نامند. به زبان شیواتر، آن دو بردار با هم برابرند. فقط ممکن است مبدأ آنها متفاوت باشد.



شکل ۷ــ۲ــ الف ــ دو بردار هم‌اندازه ناهمسنگ



شکل ۷ــ۲ــ ب ــ دو بردار همسنگ

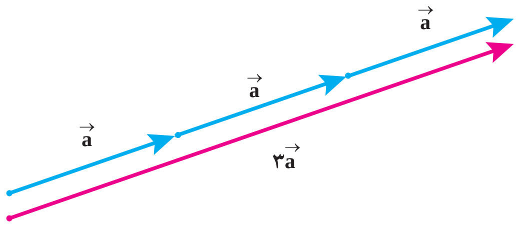
۲ــ حاصل جمع دو بردار با هم یک بردار جدید خواهد بود. (در مورد تفریق هم همین‌طور است.)

۳ــ حاصل ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار یک بردار خواهد بود، به شکلی که بزرگی آن چند برابر می‌شود، راستای آن ثابت می‌ماند و اگر کمیت نرده‌ای علامت مثبت داشته باشد، جهت ثابت می‌ماند وگرنه جهت نیز تغییر خواهد کرد. یعنی :

$$|a \times \vec{A}| = |a| \times |\vec{A}| \qquad (۱ــ۲)$$

و

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Leftrightarrow a \times \vec{A} = a \times \vec{A}_x + a \times \vec{A}_y \qquad (۲ــ۲)$$

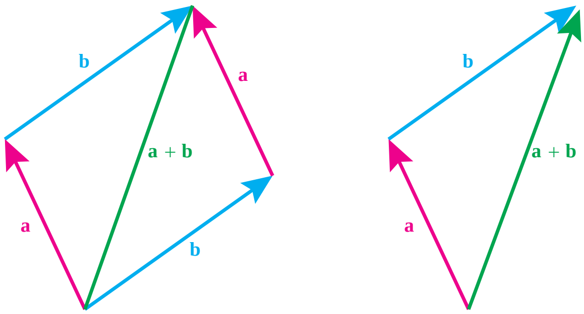


شکل ۷ــ۲ــ ج ــ ضرب مقدار عددی در بردار

۴ــ برای ضرب بردارها دو نوع ضرب تعریف می‌شود. ضرب داخلی یا نقطه‌ای و ضرب خارجی یا کراس. حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار یک کمیت نرده‌ای خواهد بود و حاصل‌ضرب خارجی دوبردار یک کمیت برداری.

۲ــ۲ــ۲ــ جمع برداری : همان‌طور که در سال‌های گذشته آموخته‌اید، بردارها را می‌توان به دو روش با هم جمع کرد. روش ترسیمی و روش تحلیلی. روش ترسیمی به منظور دست‌یابی سریع و بدون استفاده از محاسبات پیچیده به پاسخ مورد نظر کاربرد دارد و روش تحلیلی به منظور دست‌یابی به پاسخ دقیق به‌کار می‌رود. در روش ترسیمی از دو روش متوازی‌الاضلاع و روش مثلث استفاده می‌شود. شکل ۸ــ۲ــ الف، جمع به روش مثلث و شکل ۸ــ۲ــ ب، جمع به روش متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد.

الف) روش مثلث : در این روش انتهای یکی از بردارها (در این‌جا $\vec{a}$) را روی ابتدای بردار دیگر (در این‌جا $\vec{b}$) می‌گذاریم. سپس ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کنیم. پاره خط جدید بردار برآیند جمع دو بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ است.



شکل ۸ــ۲ــ ب ــ جمع به روش متوازی‌الاضلاع

شکل ۸ــ۲ــ الف ــ جمع به روش مثلث

ب) روش متوازی‌الاضلاع: در این روش ابتدای آنها را روی هم قرار می‌دهیم. سپس از انتهای آنها بردار همسنگ بردار دیگر را رسم می‌کنیم. مثلاً در این‌جا از انتهای بردار $\vec{b}$ همسنگ بردار $\vec{a}$ را رسم می‌کنیم. یک متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. قطر این چهار ضلعی برابر بردار برآیند جمع دو بردار است.

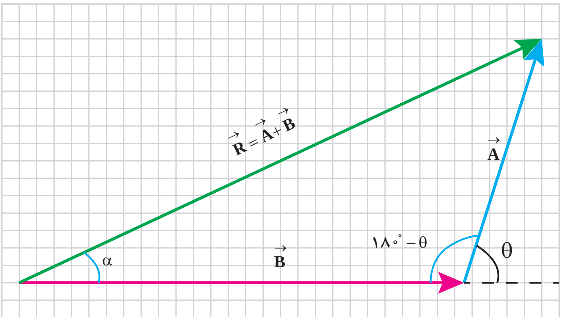
فکر می‌کنید چه موقع از روش مثلث و چه زمانی از روش متوازی‌الاضلاع باید استفاده کرد؟

برای استفاده از روش ترسیمی استفاده از نقاله و خط کش الزامی است.

مثال ۲ : بردار برآیند دو بردار A و B را رسم کنید، طول بردار برآیند و زاویه‌ای که با بردار B می‌سازد را محاسبه کنید.

$|\vec{A}|=۱۵/۸$ و $|\vec{B}|=۲۶$ ، زاویهٔ بین دو بردار $\theta = ۷۱/۷^\circ$

حل : ابتدا با استفاده از خط کش و نقاله بردارها را رسم می‌کنیم. یک‌بار برای حل با روش مثلث (شکل ۹ـ۲) و یک‌بار برای حل با روش متوازی‌الاضلاع (شکل ۱۰ـ۲) رسم را کامل می‌کنیم.



شکل ۹ـ۲ـ رسم بردارهای مثال ۲

داریم : $۱۸۰ - \theta = ۱۰۸/۳^\circ$

با استفاده از این رابطه و قاعدهٔ کسینوس‌ها اندازهٔ بردار برآیند به دست می‌آید :

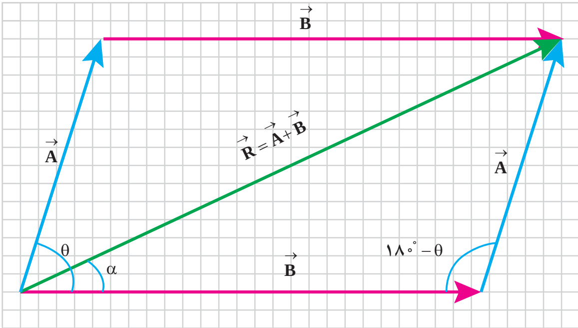
$$|\vec{R}|=\sqrt{|\vec{A}|^۲+|\vec{B}|^۲-۲\times|\vec{A}||\vec{B}|\cos(۱۸۰-\theta)}=\sqrt{۱۱۸۶}=۳۴/۴$$

با استفاده از قانون سینوس‌ها نیز می‌توانیم زاویه بین بردار برآیند و بردار B را محاسبه کنیم.

می‌توان برای ساده‌سازی در زمان نمایش طول بردار، علامت بردار و قدرمطلق را حذف کرد.

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(۱۸۰-\theta)}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{A}{R}\sin(۱۸۰-\theta)=\frac{۱۵/۸}{۳۴/۴}\times ۰/۹۵=۰/۴۳۶\Rightarrow \alpha=۲۵/۹^\circ$$

اگر از روش متوازی‌الاضلاع هم استفاده کنیم باز به نتیجه مشابه می‌رسیم. این روش در شکل ۱۰ـ۲ رسم شده است.



شکل ۱۰ــ۲ــ رسم بردارهای مثال ۲

فعالیت ۱-۲

ــ برآیند دو بردار به طول‌های ۱۰ و ۱۵ واحد را در ۳ حالات زیر حساب کنید.
از هر دو روش ترسیمی استفاده کنید. چه نکته خاصی در هر یک از این حالات وجود دارد؟

ــ دو بردار بر هم عمود باشند.

ــ دو بردار با یکدیگر زاویه ۳۰ درجه بسازند.

ــ دو بردار با هم زاویه ۲۱۰ درجه بسازند.

ــ دو بردار هم راستا و هم‌جهت باشند.

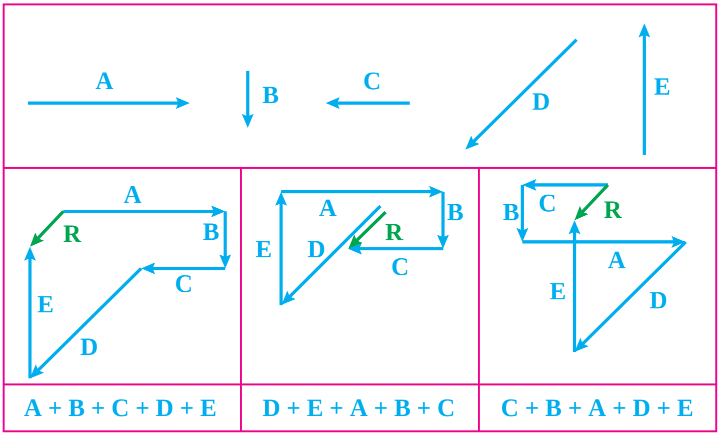
ــ دو بردار هم راستا و در خلاف جهت هم باشند.

جمع بیش از ۲ بردار: برای جمع بیش از ۲ بردار می‌توانید ابتدا دو بردار را به‌عنوان بردارهای اول انتخاب کنید و سپس با هم جمع کنید و در مرحله بعد بردار برآیند دوبردار اول را با بردار سوم جمع نمایید. این‌کار را تا به دست آوردن بردار برآیند کل بردارها ادامه دهید.

اما روش دیگری وجود دارد به نام روش چند ضلعی، در این روش ابتدای هر بردار را در انتهای بردار قبلی قرار می‌دهید تا یک چند ضلعی باز تشکیل شود. ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کنید. پاره خط به‌دست آمده، برآیند کل بردارها است. ترتیب انتخاب بردارها در هیچ یک از روش‌ها تأثیری روی پاسخ ندارد.

در شکل ۱۱ــ۲ نمونه‌ای از جمع چند بردار به روش چند ضلعی آمده‌است. در این شکل ۳

ترتیب مختلف برای جمع بردارها در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌کنید که در هر سه حالت، پاسخ‌ها یکسان است.



شکل ۱۱ــ۲ــ بردار برآیند ۵ بردار به روش ترسیمی

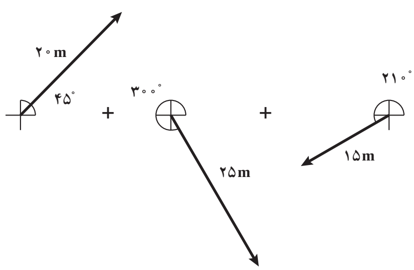
مثال ۳ : فرض کنید در یک مسابقه شنا شرکت کرده‌اید. در مسابقه به شما می‌گویند در سه جهت و به طول‌های مشخص باید شنا کنید. انتخاب اولویت مسیرها با خودتان است. اطلاعات مسئله به شکل زیر است :

(زوایای اعلام شده برحسب درجه است)

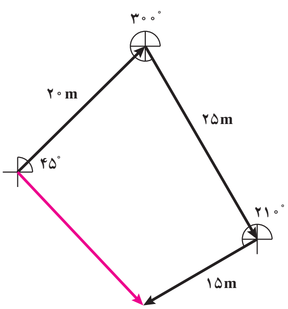
۱۵متر	۲۵ متر	۲۰ متر
۲۱۰ درجه	۳۰۰ درجه	۴۵ درجه

نقطه نهایی در چه فاصله‌ای از مبدأ واقع شده‌است.

حل : ابتدا شکل را رسم می‌کنیم.



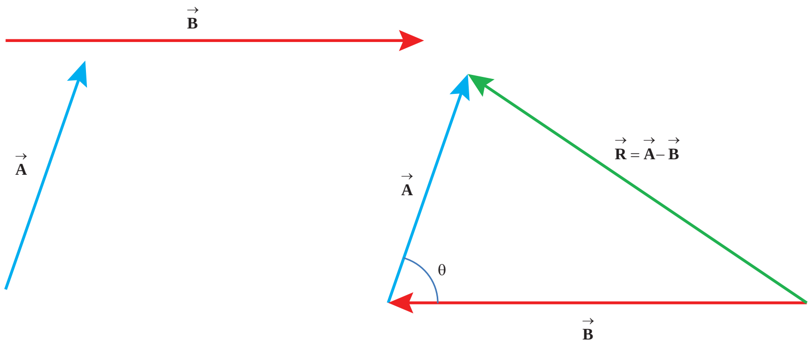
شکل ۱۲ــ۲ــ الف ــ بردارهای مثال ۳



شکل ۱۲ــ۲ــ ب ــ جمع بردارهای مثال ۳

همان‌طور که در متن درس آمده است فرقی نمی‌کند که ابتدا کدام مسیر را انتخاب کنید. لذا پاسخی که با انتخاب در شکل ۱۲ــ۲ــ ب به‌دست آمده است تنها پاسخ این مسئله می‌باشد.

۳ــ۲ــ۲ــ تفریق بردارها : برای تفریق دو بردار کاملاً مانند جمع در روش مثلث عمل می‌شود. به عنوان مثال در شکل ۱۳ــ۲ می‌خواهیم برآیند $\vec{R}=\vec{A}-\vec{B}$ را محاسبه کنیم. برای این‌کار کافی است معادله را به این شکل بازنویسی کنیم : $\vec{R}=\vec{A}+(-\vec{B})$ در نتیجه به یک جمع می‌رسیم که در آن بردار B معکوس شده‌است.



شکل ۱۳ــ۲ــ تفریق بردارها

فعالیت ۲-۲

در مثال ۲ به جای جمع بردارها، $\vec{A}-\vec{B}$ را محاسبه کنید.

۴ــ۲ــ۲ــ تجزیه بردار : همان‌طور که در فعالیت کلاسی ۱ آمد، می‌توان هر بردار (۲ بعدی) را به دو مؤلفه در راستای محورهای X و Y تجزیه کرد. برای اینکه بتوان از این تجزیه در محاسبات استفاده کرد، برداری به نام بردار یکه تعریف شده است.

بردار یکه :

برداری است به طول واحد در راستای یکی از محورهای مختصات.

بردار یکه در راستای محور X را بردار یکهٔ $\hat{i}$ می‌نامند.

بردار یکه در راستای محور Y را بردار یکهٔ $\hat{j}$ می‌نامند.

حال می‌توان بردارهای مؤلفهٔ بردار R در شکل ۶ــ۲ را به این شکل نوشت :

$\overrightarrow{R_x}=R_x\hat{i}$ و $\overrightarrow{R_y}=R_y\hat{j}$

در نتیجه بردار R را می‌توان به دو مؤلفهٔ برداری خود به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\vec{R}=R_x\hat{i}+R_y\hat{j} \qquad (۲\_۳)$$

از طرفی در فعالیت کلاسی ۱ مقادیر مؤلفه‌ها به شکل زیر به‌دست آمد:

$$\begin{aligned} R_x &= |\vec{R}|\cos\theta \\ R_y &= |\vec{R}|\sin\theta \end{aligned} \qquad (۲\_۴)$$

حال می‌توان از معادله ۳ـ۲ و ۴ـ۲به خوبی برای جمع و تفریق برداری استفاده کرد. همچنین می‌توان برای نمایش یک بردار به جای داشتن یک زاویه و یک طول از دو مؤلفهٔ آن استفاده کرد.

مثلاً:

بردار R به طول ۵ واحد و زاویه ۳۷ درجه نسبت به محور X را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$R_x=|\vec{R}|\cos\theta=۵\cos(۳۷)=۵\times ۰/۸=۴$$

$$R_y=|\vec{R}|\sin\theta=۵\sin(۳۷)=۵\times ۰/۶=۳$$

$$\vec{R}=R_x\hat{i}+R_y\hat{j}=۴\hat{i}+۳\hat{j} \text{ یا } \vec{R}=(۴,۳)$$

برای جمع دو بردار نیز می‌توان از رابطهٔ (۵ـ۲) استفاده کرد:

$$\vec{C}=\vec{B}+\vec{A}\Rightarrow\begin{Bmatrix} C_x=B_x+A_x \\ C_y=B_y+A_y \end{Bmatrix} \qquad (۲\_۵)$$

با استفاده از فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$|\vec{R}|=\sqrt{{R_x}^۲+{R_y}^۲} \qquad (۲\_۶)$$

و همچنین با استفاده از رابطه (۴ـ۲) و روابط موجود در فصل ۱ می‌توان رابطهٔ زیر را به‌دست آورد:

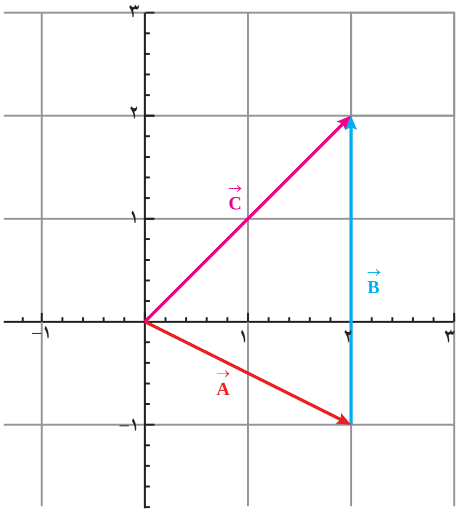
$$\tan(\theta)=\frac{R_y}{R_x} \qquad (۲\_۷)$$

مثال ۴ : جمع دو بردار $\vec{A}=۲\hat{i}-۱\hat{j}$ و $\vec{B}=۰\hat{i}-۳\hat{j}$ را محاسبه کنید.

حل : توجه کنید که برای حل این مثال ساده می‌توان از دو روش استفاده کرد. روش اول استفاده از ترسیم است و روش دوم روش تجزیه بردار و استفاده از روابط (۴ــ۲) و (۵ــ۲) (یا روش تحلیلی) که در ادامه خواهد آمد.

$$\vec{B}=۰\hat{i}-۳\hat{j}$$
$$\vec{A}=۲\hat{i}-۱\hat{j}$$
$$\vec{C}=\vec{B}+\vec{A}\Rightarrow\begin{cases}C_x=B_x+A_x\\C_y=B_y+A_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_x=۲\hat{i}-۰\hat{i}\\C_y=۳\hat{j}-۱\hat{j}\end{cases}\Rightarrow\vec{C}=۲\hat{i}+۲\hat{j}$$

هر دو روش نیاز به ترسیم دارد. اما در روش تحلیلی ترسیم فقط به فهم بهتر مسئله کمک می‌کند. لذا شما هم در حل مسائل برداری در صورت استفاده از روش تحلیلی، ترسیم را فراموش نکنید. اما نیازی به دقت بالا در ترسیم و ابزارهای ترسیمیِ خاص وجود ندارد.



شکل ۱۴ــ۲ــ بردارهای مثال ۴

مثال ۵ : یک کشتی از بندر A به سمت بندر B و سپس از بندر B به سمت بندر C حرکت می‌کند. فاصلهٔ AB برابر ۱۲۰۰Km و در جهت ۳۰ درجه نسبت به شرق و فاصلهٔ BC برابر ۶۰۰Km و در جهت ۴۵− درجه نسبت به محور شرق است. بردار جابه‌جایی AC را از روش تحلیلی محاسبه کنید.

حل : برای شروع به حل باید بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را به مؤلفه‌های عمودی و افقی تجزیه کنیم.

برای این‌کار از رابطهٔ (۴ــ۲) کمک می‌گیریم.

$$\overrightarrow{AB}_x = ۱۲۰۰ \times \cos(۳۰)\hat{i} = ۱۰۳۹/۲\hat{i}$$
$$\overrightarrow{AB}_y = ۱۲۰۰ \times \sin(۳۰)\hat{j} = ۶۰۰\hat{j}$$
$$\overrightarrow{BC}_x = ۱۲۰۰ \times \cos(-۴۵)\hat{i} = ۴۲۴/۳\hat{i}$$
$$\overrightarrow{BC}_y = ۱۲۰۰ \times \sin(-۴۵)\hat{j} = -۴۲۴/۳\hat{j}$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۵ــ۲) بردارها را جمع می‌کنیم :

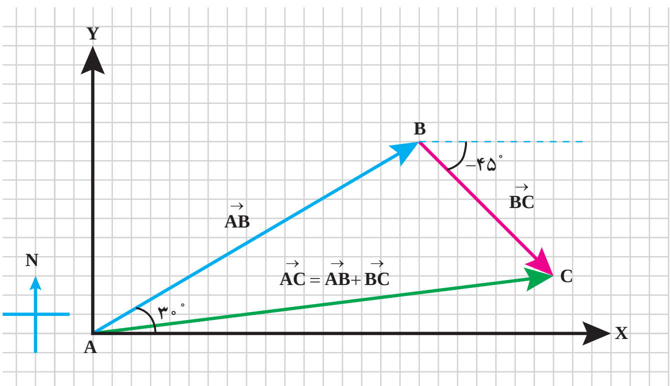
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}_x = \overrightarrow{AB}_x + \overrightarrow{BC}_x = ۱۴۶۳/۵\hat{i} \\ \overrightarrow{AC}_y = \overrightarrow{AB}_y + \overrightarrow{BC}_y = ۱۷۵/۷\hat{j} \end{cases}$$

در نتیجه بردار جابه‌جایی کشتی که همان بردار AC باشد به شکل زیر به‌دست می‌آید :

$$\overrightarrow{AC} = ۱۴۶۳/۵\hat{i} + ۱۷۵/۷\hat{j}$$

با استفاده از فیثاغورث (یعنی رابطهٔ ۶ــ۲) طول این بردار را می‌توان محاسبه کرد :

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۱۴۶۳/۵^۲ + ۱۷۵/۷^۲} = ۱۴۷۴\text{km}$$



شکل ۱۵ــ۲ــ بردارهای مثال ۵

و با استفاده از روابط مثلثاتی (یعنی رابطهٔ ۷ــ۲) می‌توان به راحتی زاویه بردار نسبت به محور شرق را یافت :

$$\tan(\theta)=\frac{R_y}{R_x}=\frac{۱۷۵/۷}{۱۴۶۳/۵}=۰/۱۲$$

با استفاده از جدول مقادیر مثلثاتی در انتهای کتاب و یا استفاده از ماشین حساب می‌توان زاویه مورد نظر را یافت : $\theta = ۶/۸^{\circ}$

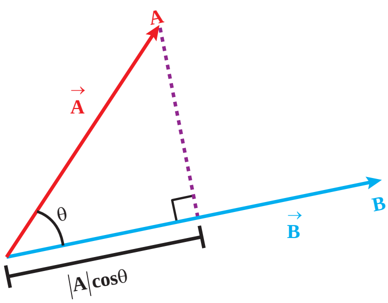
فعالیت ۳-۲

فرض کنید در مثال ۵ فاصلهٔ A تا B برابر ۸۰۰ کیلومتر و فاصلهٔ B تا C برابر ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. در انتها نیز به شهر D برود که تا C، ۵۰۰ کیلومتر فاصله دارد و در امتداد شرقی شهر C واقع شده است. بردار برآیند جابجایی از A تا D را محاسبه کنید.

۵ــ۲ــ۲ــ ضرب بردارها : در کل دو نوع ضرب برداری داریم. ضرب در بردارها با ضرب در کمیت‌های نرده‌ای متفاوت است. شاید این موضوع را بتوان با ذکر مثالی، روشن کرد. در بحث کار و انرژی، مقدار کار در اصل نوعی حاصل‌ضرب بردارهای جابه‌جایی و نیرو است. مقدار کار به‌دست آمده از این طریق یک بردار نیست و بلکه یک کمیت نرده‌ای است. به این نوع ضرب ضرب برداری می‌گویند. یا درمورد گشتاور، که در فصل آینده با آن آشنا می‌شوید، در ضربی مشابه بحث کار و انرژی اما ضرب از نوع خارجی یا برداری، حاصل‌ضرب که همان گشتاور باشد، یک بردار است.

ضرب داخلی : همان‌طور که گفته شد حاصل‌ضرب این نوع ضرب یک بردار نیست، بلکه یک کمیت نرده‌ای (اسکالر) است. رابطهٔ (۸ــ۲) که با توجه به شکل ۱۶ــ۲نوشته شده است، ضرب داخلی دو بردار A و B را نشان می‌دهد.

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta) \qquad (۲ــ۸)$$



شکل ۱۶ــ۲ــ ضرب داخلی

در واقع ضرب داخلی حاصل ضرب طول تصویر بردار A بر روی بردار B، ضرب‌در طول بردار B است. همچنین داریم :

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$$

این نوع ضرب به دلیل علامت ضربی که بین دو بردار قرار می‌گیرد به ضرب نقطه‌ای مشهور است.

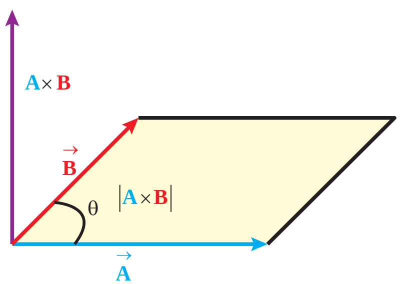
یادآوری

مقدار کار انجام شده توسط نیرو درجابه‌جایی یک جسم توسط رابطهٔ $W = F.d\cos(\theta)$ به‌دست می‌آید. حالا به خوبی متوجه شده‌اید که در واقع این رابطه همان ضرب داخلی دوبردار نیرو و جابه‌جایی‌است.

ضرب خارجی: در ضرب خارجی حاصل ضرب یک بردار است. اما محاسبهٔ بردار حاصله از حوصله کتاب خارج است و مورد نیاز فعالیت‌های بعدی نیز نیست. لذا در این‌جا فقط به رابطه‌ای برای محاسبهٔ مقدار یا طول بردار حاصله از این ضرب بسنده می‌شود. همان‌طور که از شکل ۱۷ــ۲و رابطهٔ (۹ــ۲) بر می‌آید، حاصل ضرب خارجی برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط دو بردار.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta) \qquad (۲\_۹)$$

این ضرب در فیزیک و مکانیک بسیار پرکاربرد است. فراموش نکنید که رابطهٔ (۹ــ۲) فقط و فقط مقدار یا طول بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار را نشان می‌دهد، نه خود بردار حاصل‌ضرب را.



شکل ۱۷ــ۲ــ ضرب خارجی

مثال۶ : با استفاده از روابطی که در بالا آمد، ضرب داخلی و طول بردار ضرب خارجی دو بردار A و B را که به ترتیب به طول‌های ۱۰ واحد و ۱۵ واحد دارند و با هم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند، محاسبه کنید.

حل : با استفاده از رابطهٔ (۸ــ۲) ضرب داخلی را محاسبه می‌کنیم.

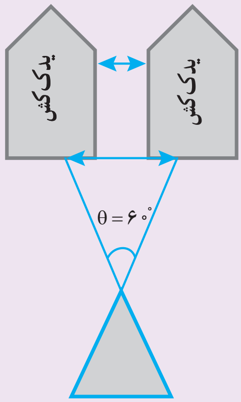
$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)=۱۰\times۱۵\times\cos(۶۰)=۱۵۰\times۰/۵=۷۵$$

با استفاده از رابطهٔ (۹ــ۲) نیز حاصل طول بردار ضرب خارجی به‌دست خواهد آمد.

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta)=۱۰\times۱۵\times\sin(۶۰)=۱۵۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۷۵\sqrt{۳}=۱۲۹/۹$$

فعالیت ۴-۲

در مثال ۶ از فصل ۱، اگر کشتی بزرگ ۳۰۰۰۰ تن جرم داشته باشد و یدک‌کش‌ها هر کدام با نیروی ۵۰ کیلونیوتن در امتداد کابل‌ها کشتی را یدک کنند. در صورتی که کشتی به‌این وسیله ۲ کیلومتر جابه‌جا شود مقدار کار انجام شده روی کشتی چقدر است.



خودآزمایی فصل دوم

۱ــ روش‌های جمع برداری را نام ببرید.

۲ــ آیا حاصل جمع دوبردار، یک کمیت برداری خواهد شد یا نرده‌ای؟

۳ــ جای خالی را پر کنید.

الف) نیرو یک کمیت ______ است.

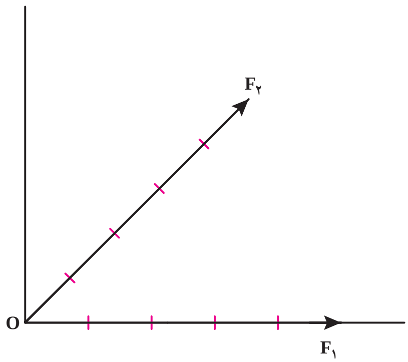
ب) جرم یک کمیت ______ و وزن یک کمیت ______ است.

پ) جابه‌جایی تقسیم بر تغییرات زمان ______ نام دارد که یک کمیت ______ و مسافت تقسیم بر زمان ______ نام دارد که یک کمیت ______ است.

۴ــ الف) برآیند دو بردار عمود بر هم به طول ۳ واحد (افقی) و ۴ واحد (عمودی) را با استفاده از روش‌های ترسیمی و ریاضی تعیین کنید. (بردارها را در جهت مثبت محور فرض کنید)

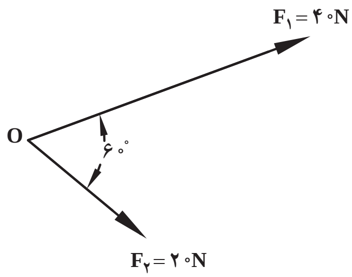
ب) زاویه بردار برآیند با محور افقی را به روش ترسیمی و روش ریاضی به‌دست آورید.

۵ــ دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ مطابق شکل ۱۸ــ۲ بر نقطهٔ O وارد می‌شوند. زاویهٔ بین دو نیرو ۴۵ درجه است. طول بردار برآیند و زاویه بردار برآیند با محور افق را بیابید.



شکل ۱۸ــ۲

۶ــ برآیند دو بردار $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ در شکل ۱۹ــ۲ چقدر است؟ از روش مثلث برای ترسیم استفاده کنید و پاسخ آن را با روش متوازی‌الاضلاع و روش ریاضی مقایسه کنید.



شکل ۱۹ــ ۲

۷ــ حاصل‌ضرب داخلی دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.

۸ــ حاصل‌ضرب خارجی (اندازه) دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.

۹ــ یک قایق تفریحی مسیر زیر را در یک ساعت می‌پیماید :

۵ کیلومتر به طرف شمال

۴ کیلومتر به طرف شرق

۳ کیلومتر به طرف شمال

۸ کیلومتر به طرف جنوب

الف) با مقیاس‌گذاری مناسب مسیر این قایق را رسم کنید، بردار برآیند جابجایی را به‌دست آورید.

ب) مسافت پیموده شده قایق را حساب کنید.

ج) سرعت و تندی متوسط قایق را برای این مسیر حساب کنید.

فصل ۳

نیرو و ایستایی

هدف کلی

تحلیل نیروها در حالت‌های ایستا

هدف‌های رفتاری

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

۱ــ نیرو را تعریف کند.

۲ــ شرایط ایستایی را توصیف کند.

۳ــ تفاوت قاب و خرپا را توضیح دهد.

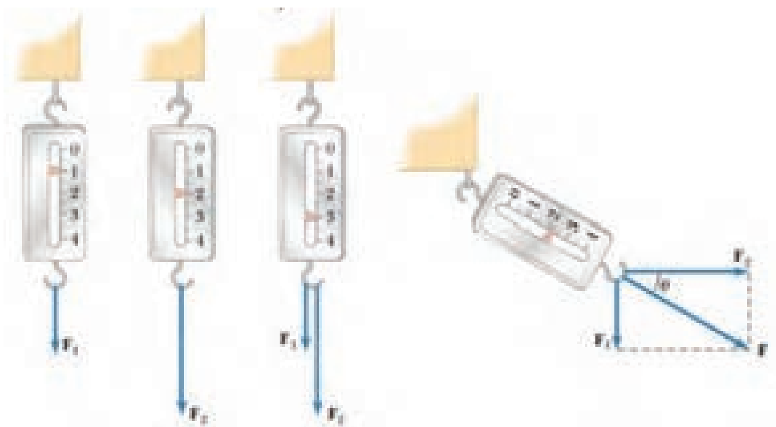
۴ــ معادلات یک سامانهٔ ایستا را حل کند.

۱ــ۳ــ نیرو

در کتاب‌های فیزیک سال اول و دوم با مبحث نیرو و قوانین نیوتن آشنا شدید. نیرو یکی از معدود کمیت‌هایی است که ما می‌توانیم به کمک حواس پنجگانه آن را حس کنیم. در تعریف نیرو گفته‌اند، کشش یا فشاری است که در دستان خود موقع حمل یک بار حس می‌کنیم.

نیرو یک بردار است و خواص برداری آن مشهود است. فرض کنید نیروی $F_۱$ برابر ۱ نیوتن و $F_۲$ برابر ۲ نیوتن را به یک نیرو سنج وارد کنیم. اگر هر بار یکی را وارد کنیم نیروسنج همان مقدار را نشان می‌دهد و اگر هر دور را همزمان با هم و در جهت نیروسنج وارد کنیم این بار نیروسنج جمع بزرگی دو نیرو را نشان می‌دهد. در آزمایش بعدی اگر نیروی $F_۱$ را عمودی و $F_۲$ را افقی وارد کنیم می‌بینیم که نیرو سنج زاویه می‌گیرد و مقداری که نشان می‌دهد برابر بزرگی برآیند برداری دو نیرو است (شکل ۱ــ۳) یعنی :

$$|F| = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲} = \sqrt{۱+۴} = ۲/۲۴N$$



شکل ۱ــ۳ــ نیرو یک بردار است.

● می‌دانیم که تا بر جسمی نیرو وارد نشود بردار سرعت آن جسم تغییر نخواهد کرد، این موضوع را قانون اول نیوتن می‌نامند.

● اگر بردار سرعت یک جسم تغییر کند یعنی $\Delta\vec{V}/\Delta t \neq 0$ باشد به این معنی است که حرکت آن جسم شتاب‌دار است. قانون دوم نیوتن می‌گوید که مقدار شتابی که یک جسم می‌گیرد $(\vec{a} = \Delta\vec{V}/\Delta t)$ با نیروی وارد بر آن جسم رابطهٔ مستقیم و با جرم آن رابطهٔ عکس دارد، یعنی $\vec{a} = \vec{F}/m$. هرچه جرم جسم بیشتر باشد لخت‌تر است و در برابر شتاب گرفتن مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد. حال اگر تعداد زیادی نیرو بر یک جسم وارد شود چه اتفاقی می‌افتد؟ جسم به اندازهٔ برآیند بردار نیروهای وارد شده شتاب خواهد گرفت.

● وقتی روی یک قایق سعی کنیم فرد دیگری از یک قایق دیگر را به سمت خود بکشیم (یا هل دهیم) هر دو قایق به هم نزدیک (یا دور) می‌شوند. قانون سوم نیوتن این پدیده را توجیه می‌کند. این قانون می‌گوید هر نیرویی که جسم ۱ به جسم ۲ وارد کند، به همان میزان، ولی در خلاف جهت، جسم ۲ به جسم ۱ وارد می‌کند (شکل ۲ــ۳).

شکل ۲ــ۳ ــ الف ــ نیرویی که بین میخ و چکش است.

شکل ۲ــ۳ــ ب ــ قانون سوم را در تیراندازی توضیح دهید.

یادآوری

جرم جسم با وزن آن دو تعریف جداگانه دارند. جرم به محیط وابسته نیست و برای یک جسم کاملاً یکتا است. اما وزن برای یک جسم روی کرات مختلف آسمانی مقادیر مختلفی دارد و حتی روی کره زمین متغیر است.

حال می‌توانیم از این قوانین در بحث‌های این کتاب استفاده کنیم.

فعالیت کلاسی ۱

ــ آیا اگر جسمی در حال سکون باشد به این معنی است که نیرویی برآن وارد نمی‌شود؟ با ذکر مثال توضیح دهید.

ــ یک شناور که با سرعت ثابت در حال حرکت در آب است چطور؟ اگر این جسم یک ذرهٔ معلق در هوا باشد چطور؟

۱ــ۱ــ۳ــ حل مسائل حرکت شناسی و ایستایی به کمک قوانین نیوتن : برای حل مسائل دینامیک و ایستایی به کمک قوانین نیوتن باید موارد زیر را به خوبی اجرا کنید :

۱ــ رسم شکل مناسب

۲ــ پیدا کردن تمام نیروهای وارد بر جسم مورد تحلیل

۳ــ رسم نمودار جسم آزاد

۴ــ نوشتن معادلات نیرو و شتاب (قانون دوم) ترجیحاً در راستای x و y به‌طور مجزا.

در انجام مراحل بالا نیز نکاتی را نباید فراموش کرد. برخی از این نکات در زیر فهرست شده است :

✓ فقط جایی نیرو وجود دارد که حداقل دو جسم وجود دارد. یعنی اگر نیرویی بر جسمی وارد شد حتماً جسم دومی وجود دارد و در غیر این صورت نیرویی که در نظر گرفته‌اید اشتباه است.

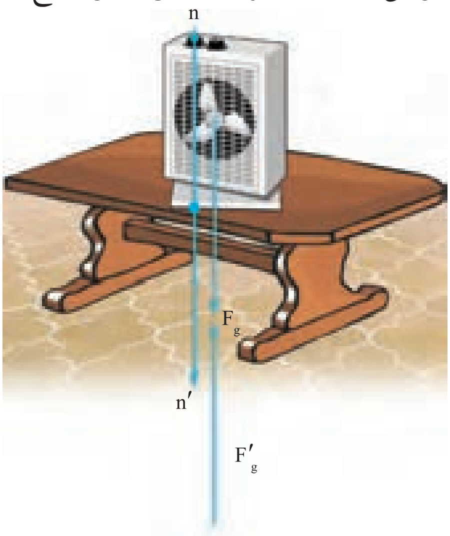
✓ نیروهای کنش و واکنش همزمان وجود دارند ولی از آنجایی که این نیروها به ۲ جسم مختلف وارد می‌شوند همدیگر را خنثی نمی‌کنند.

✓ برای بررسی حرکت یا حرکت نکردن یک جسم باید همهٔ نیروهای وارد بر آن جسم را به‌حساب بیاوریم. به فعالیت کلاسی ۱ مراجعه کنید.

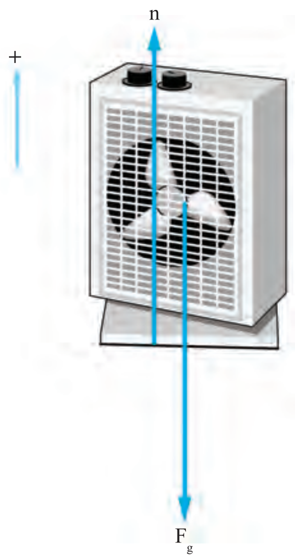
۲ــ۱ــ۳ــ رسم نمودار جسم آزاد : برای اینکه بتوان تمام نیروهای وارد بر جسم را به‌خوبی از هم تفکیک کرد و برآیند آنها را محاسبه کرد لازم است که این نیروها در شکلی کاملاً از هم تفکیک شده رسم شوند. به این شکل «نمودار جسم آزاد» می‌گویند. در نمودار جسم آزاد، فقط جسم مورد نظر را رسم می‌کنند و سایر اجسام حذف می‌شوند و فقط اثر نیرویی آنها در شکل باقی می‌ماند. به شکل ۳ــ۳ توجه کنید.

در شکل ۳ــ۳ــ الف نیروهای بین پنکه، میز و کره زمین رسم شده است. F_g نیروی جاذبه بین زمین و پنکه است و n نیروی عکس العمل سطح است که میز به پنکه وارد می‌کند. نیروهای قانون سوم نیز با علامت پریم مشخص شده اند. یعنی F'_g نیرویی است که پنکه به کره زمین وارد می‌کند و n' نیز نیروی عکس العمل سطح است که جسم به میز وارد می‌کند.

در شکل ۳ــ۳ــ ب جسم‌های غیر از پنکه حذف شده‌اند و فقط اثر آنها باقی مانده است. به این رسم نمودار جسم آزاد می‌گویند. یعنی مثلاً میز که پنکه را در موقعیتش نگه می‌داشته و در واقع آن را به بالا هل می‌داده با یک نیروی عکس العمل سطح جایگزین شده است.



شکل ۳ــ۳ــ الف ــ نیروهای وارده برپنکه، میز و کره زمین



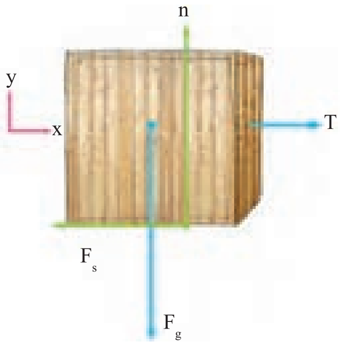
شکل ۳ــ۳ــ ب ــ نمودار جسم آزاد (پنکه)

می‌دانیم که پنکه در جایش ایستاده است. پس ایستا است. طبق قانون‌های اول و دوم نیوتن باید برآیند نیروهای وارد بر این جسم صفر باشد. پس داریم :

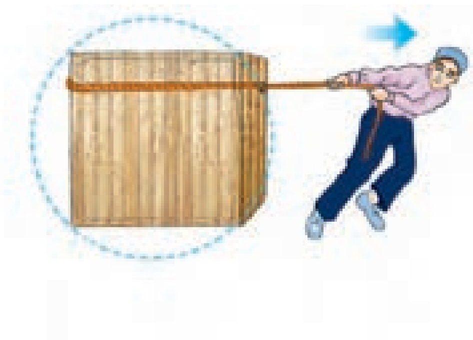
$$n - F_g = ۰ \Rightarrow n = F_g$$

مثال ۱ : یک جعبه توسط یک طناب روی زمین کشیده می‌شود. مقدار اصطکاک چقدر باشد تا جسم ساکن بماند؟

حل : ابتدا شکل و سپس نمودار آزاد جعبه را رسم می‌کنیم. از آنجا که جسم ساکن است باید در هر دو جهت عمودی و افقی برآیند نیروهای وارد بر آن صفر شود.



شکل ۴ــ۳ــ ب ــ نمودار جسم آزاد (جعبه)



شکل ۴ــ۳ــ الف ــ فردی سعی دارد جعبه را بکشد!

در شکل ۴ــ۳، T نیروی طناب و F_s نیروی اصطکاک ایستایی است که از طرف زمین بر جعبه وارد می‌شود.

حال معادلات سامانه را به‌طور مجزا و در جهت‌های x و y که در شکل فرض کرده‌ایم، می‌نویسیم.

$$x:\ T - F_s = ma_x = 0 \Longrightarrow T = F_s$$

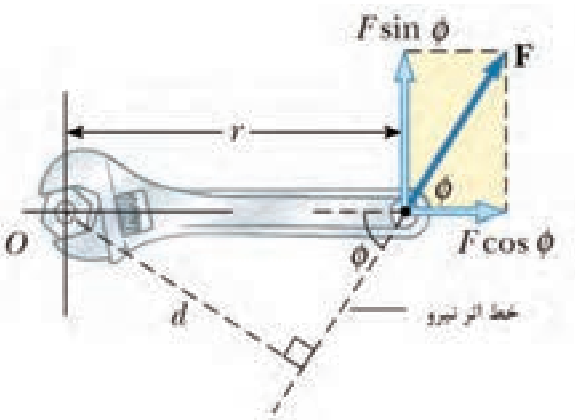
$$y:\ n - F_g = ma_y = 0 \Longrightarrow n = F_g$$

که در آن g_x شتاب در راستای x و g_y شتاب در راستای y است. پس می‌بینیم تا زمانی که جعبه به حرکت در نیامده نیروی اصطکاک ایستایی دقیقاً برابر نیرویی است که ما بر جعبه وارد می‌کنیم.

۳ــ۱ــ۳ــ گشتاور : همان‌طورکه در فیزیک سال گذشته خوانده‌اید به اثر گرداننده نیرو، گشتاور می‌گوییم. وقتی نیرو در خارج از تکیه‌گاه یا خارج از مرکز جرم جسم به آن وارد می‌شود، اثر گشتاوری خود را نشان می‌دهد. گشتاور می‌تواند مانند نیرو موجب تغییر شکل و یا به حرکت در آمدن یک جسم شود.

قوانین نیوتن با کمی تفاوت برای گشتاور نیز کاربرد دارد. قانون اول به همان شکل است. یعنی تا بردار سرعت جسمی تغییر نکند گشتاوری برآن وارد نشده یا برآیند گشتاورهای وارد برآن صفر است.

قانون دوم نیز در فصل ۴ توضیح داده شده است. اما در مورد قانون سوم نمی‌توان به همان شکل استناد کرد، زیرا در واقع، گشتاور ناشی از یک نیرو و یک بازو است. پس ممکن است عکس‌العمل آن به دلیل متفاوت بودن بازو و نیرویی یکسان، به گشتاوری متفاوت منجر شود. گشتاور وارد بر یک جسم از طریق ضرب خارجی بازو در نیرو به‌دست می‌آید. گشتاور یک بردار است که بزرگی آن از رابطهٔ (۱ــ۳) که بر اساس متغیرهای شکل ۵ــ۳ نوشته شده، به‌دست آمده و جهت آن از قانون دست راست به‌دست می‌آید.



شکل ۵ــ۳ــ نیروی خارج از مرکز گشتاور ایجاد می‌کند.

همان‌طور که گفته شد، برای محاسبهٔ مقدار گشتاور از ضرب خارجی استفاده می‌کنیم. البته می‌توان همانند شکل ۵ــ۳، امتداد خط اثر نیرو را رسم کرد و سپس از نقطه‌ای که می‌خواهیم گشتاور را حول آن حساب کنیم خطی فرضی برآن عمود کنیم. طول پاره خط برابر d است. مقدار d از روابط مثلثاتی برابر $r.\cos(\theta)$ خواهد بود. همچنین می‌توان مؤلفهٔ عمود بردار نیرو را بر بردار بازو پیدا کرد. این مؤلفهٔ عمودی برابر $F.\sin(\theta)$ است. هر ۳ روش در واقع به یک رابطه ختم می‌شود :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rF.\sin(\theta) \qquad (۱ــ۳)$$

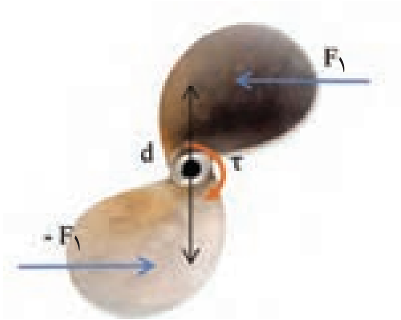
که در این رابطه $\vec{\tau}$ بردار گشتاور را نشان می‌دهد.

واحد گشتاور از رابطهٔ بالا برابر می‌شود با نیوتن در متر یا به اختصار نیوتن متر (N.m) و با وجود شباهت رابطه به رابطهٔ کار و انرژی این واحد با ژول متفاوت است و واحدی مستقل است.

قانون دست راست : هرگاه انگشتان دست راست را ابتدا در جهت بازوی گشتاور نگه‌دارید و سپس به سمت نیرو مشت کنید، انگشت شست شما جهت بردار گشتاور را نشان می‌دهد. (این روش در ضرب‌های خارجی برداری کاربرد دارد). در اینجا برای ساده‌سازی از حالت ضرب خارجی برداری برای بیان گشتاور اجتناب شده است (شکل ۶ــ۳).


شکل ۶ــ۳ــ قانون دست راست

گشتاور جفت نیرو : هنگامی که دو نیرو، که از نظر اندازه با هم برابرند ولی در خلاف جهت هم هستند و خط اثری متفاوت دارند همزمان بر یک جسم وارد شوند، باعث ایجاد گشتاور جفت نیرو می‌شوند و باعث جابه‌جایی یا شتاب گرفتن خطی جسم نخواهند شد. پرهٔ یک قایق را که در شکل ۷ــ۳ آمده است فرض کنید.



شکل ۷ــ۳ــ جفت نیروی وارد بر یک پروانه قایق

اگر برآیند این نیروها صفر نبود باعث می‌شد که قایق به یک طرف (سمت یکی از نیروها) کشیده شود. اما می‌بینیم که این نیروها فقط باعث دوران جسم می‌شوند (در اینجا این نیروها باعث ثابت ماندن سرعت دورانی جسم می‌شوند). پس برآیند نیروهای وارده صفر است ولی گشتاور از رابطهٔ (۲ــ۳) به‌دست می‌آید.

$$\tau = d.F_{۱} \qquad (۳ــ۲)$$

مثال ۲ : در اطلاعات فنی مونتاژ یک سرسیلندر نوشته شده است که پیچ‌های آن باید با گشتاور ۱۲۰ نیوتن‌متر سفت شوند. برای این‌کار از یک آچار ترک‌متر[1] به طول بازوی ۸۰ سانتی‌متر استفاده می‌شود. با فرض اینکه نیروی دست عمود بر دسته آچار وارد شود نیرویی که ما باید بر آچار وارد کنیم را بیابید؟

حل : از آنجا که نیرو به صورت عمود وارد شده است، مسئله به راحتی قابل حل است. داریم :

$\tau = ۱۲۰ N.m$ ، $r = ۰/۸ m$ و $\theta = ۹۰^\circ$

پس از رابطهٔ ۱ــ۳ خواهیم داشت :

$$F = \frac{\tau}{r.\sin(\theta)} = \frac{۱۲۰}{۰/۸} = ۱۵۰ N$$

۱ــ Torque meter

۲ــ۳ــ ایستایی

هرگاه جسمی با وجود تمام نیروها و گشتاورهای وارده ثابت باشد به آن ایستا می‌گوییم و محدوده حل مسئله آن را نیز مسئله ایستایی می‌نامیم. در این حالت طبق قانون دوم نیوتن برآیند نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم صفر است یعنی :

$$\sum \vec{F} = ۰ \qquad (۳ــ۳)$$

$$\sum \vec{\tau} = ۰ \qquad (۳ــ۴)$$

رابطهٔ (۳ــ۳) برای حالت برداری نیرو نوشته شده است، برای حل راحت‌تر مسائل، این رابطه را به مؤلفه‌های اصلی تجزیه می‌کنیم. رابطهٔ (۵ــ۳) شکل مؤلفه‌ای این رابطه را برای مسائل ۲ بعدی نشان می‌دهد.

$$\sum \overrightarrow{F_x} = ۰ \quad \text{و} \quad \sum \overrightarrow{F_y} = ۰ \qquad (۳ــ۵)$$

فراموش نکنید که رابطهٔ (۴ــ۳) نیز در مورد یک نقطهٔ خاص نوشته می‌شود. معمولاً برای این‌کار یکی از تکیه‌گاه‌ها یا مرکز جرم جسم را در نظر می‌گیرند.

یادآوری

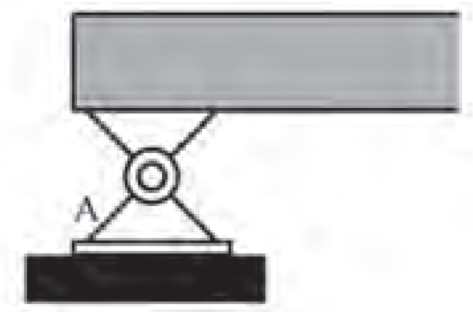
دقت داشته باشید که اگر جسمی با سرعت ثابت و نیز در حرکت باشند برآیند نیروها و گشتاورهای وارد بر آن صفر است.

۱ــ۲ــ۳ــ انواع تکیه‌گاه : برای اینکه یک سازه، تحت تأثیر نیروهای خارجی یا وزن خود حرکت نکند، باید توسط قیدهایی به محیط (زمین یا هر جسم دیگر) متصل شود. به این قیدها، تکیه‌گاه[۱] می‌گویند. تکیه‌گاه‌ها بر حسب قیدی که در مقابل حرکت به وجود می‌آورند، به انواع مختلفی دسته‌بندی می‌شوند. در ادامه، سه نمونه از معروفترین و کاربردی‌ترین آنها فهرست شده است.

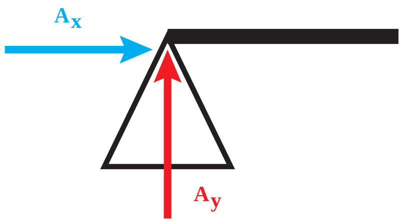
تکیه‌گاه مفصلی ثابت (لولایی) : تکیه‌گاه مفصلی ثابت یا تکیه‌گاه لولایی[۲] نوعی از تکیه‌گاه‌است که از تغییر مکان نقطهٔ تکیه‌گاهی (در فضا و یا در صفحه) جلوگیری به‌عمل می‌آورد، ولی هیچ‌گونه مقاومتی در برابر دوران سازه، حول محورهای تکیه‌گاه ندارد. بنابراین چنانچه سازه‌ای به این نوع تکیه‌گاه متکی باشد، در مقابل چرخش آن حول محورهای پایه، هیچ گونه گشتاور واکنشی ایجاد نمی‌شود و به علت محدود شدن دو امتداد حرکت در صفحه، درحالت کلی دو مؤلفه واکنش تکیه‌گاهی

۱ــ Support
۲ــ Hinged Support

در صفحه ایجاد می‌شود. لولای در، یک نمونه از این تکیه‌گاه است. شکل ۸ـ۳ـ الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۸ـ۳ـ ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.

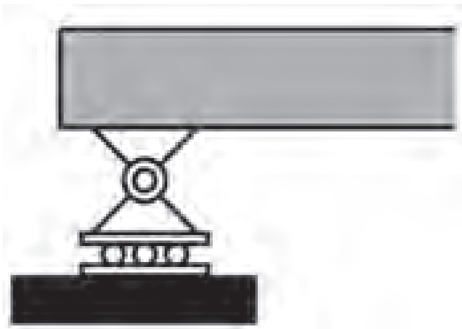


شکل ۸ـ۳ـ الف ـ تکیه‌گاه لولایی

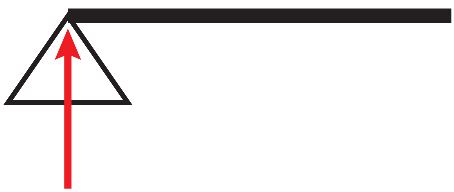


شکل ۸ـ۳ـ ب ـ نمودار آزاد تکیه‌گاه لولایی

تکیه‌گاه مفصلی متحرک (غلتکی) : تکیه‌گاه غلتکی[1] یا تکیه‌گاه مفصلی متحرک[2] کاملاً شبیه تکیه‌گاه لولایی است، با این تفاوت که نسبت به آن درجهٔ آزادی بیشتری دارد. این درجهٔ آزادی، همان حرکت پایه در امتداد حرکت غلتک‌هاست. در واقع در این نوع تکیه‌گاه‌ها تنها یک امتداد حرکت محدود می‌شود و در نتیجه واکنش تکیه‌گاهی ایجاد شده، در امتدادی است که از حرکت پایه در آن امتداد جلوگیری شده‌است. این واکنش تکیه‌گاهی، عمود بر امتداد قابل حرکت تکیه‌گاه‌است که از مرکز مفصل هم می‌گذرد. وقتی یک انتهای خط‌کش را روی لبه میز می‌گذارید چیزی شبیه به تکیه‌گاه غلتکی تشکیل می‌شود. شکل ۹ـ۳ـ الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۹ـ۳ـ ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.



شکل ۹ـ۳ـ الف ـ تکیه‌گاه غلتکی

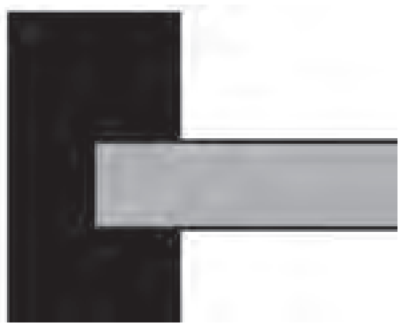


شکل ۹ـ۳ـ ب ـ نمودار آزاد تکیه‌گاه غلتکی

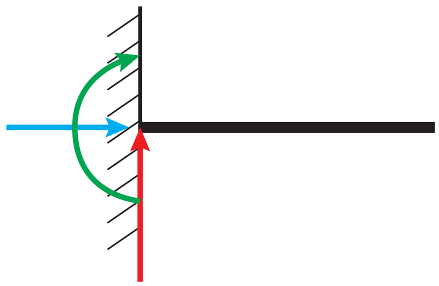
۱ـ Roller Support

۲ـ Movable Support

تکیه‌گاه گیردار[۱] (طره‌ای) : تکیه‌گاه گیردار از حرکت نقطهٔ تکیه‌گاهی در امتداد محورهای x و y و همچنین از دوران جسم حول نقطهٔ تکیه‌گاهی جلوگیری می‌کند. بنابر این سه مؤلفه واکنش تکیه‌گاهی در این نوع تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. اگر جسمی فقط یک تکیه‌گاه گیردار داشته باشد کاملاً پایدار خواهد بود. برای مثال از این نوع تکیه‌گاه می‌توان به میلهٔ پرچم در پایهٔ آن اشاره کرد. شکل ۱۰ــ۳ــ الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۱۰ــ۳ــ ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه گاه را نشان می‌دهد.



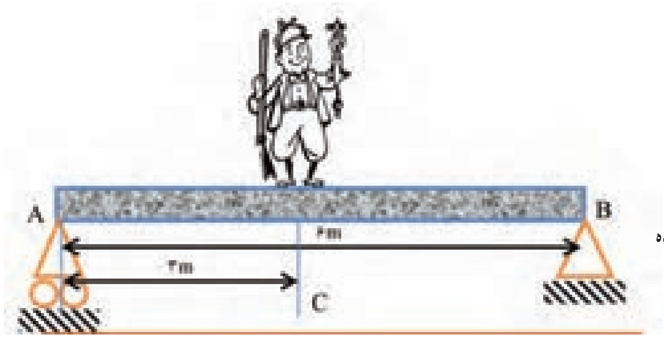
شکل ۱۰ــ۳ــ الف ــ تکیه‌گاه طره‌ای



شکل ۱۰ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد تکیه‌گاه طره‌ای

۲ــ۲ــ۳ــ حل مسائل ایستایی جسم صلب : حل مسائل استاتیکی با دانستن معادلات (۳ــ۳) الی (۵ــ۳)، دانسته‌های بند ۱ــ۱ــ۳ و بند ۲ــ۱ــ۳ و آشنا شدن با نمودار آزاد انواع تکیه‌گاه بسیار ساده خواهد بود.

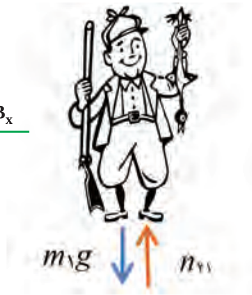
مثال ۳ : از یک تیرآهن به جرم ۲۰۰ کیلوگرم برای برقراری ارتباط بین دو ساحل رودخانه به فاصلهٔ ۶ متر، استفاده می‌کنند. یک شکارچی، که به همراه شکار و ادوات شکارش ۱۲۰ کیلوگرم جرم دارد در حال عبور از این پل است (شکل ۱۱ــ۳). وقتی که شکارچی به مرکز پل می‌رسد، عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را محاسبه کنید. تکیه‌گاه سمت راست از نوع مفصلی و سمت چپ از نوع غلتکی است.



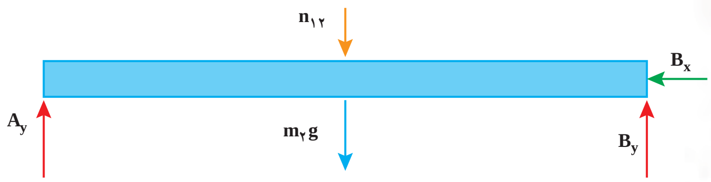
شکل ۱۱ــ۳ــ یک پل ساخته شده از تیرآهن

۱ــ Fixed Support

حل : باید نمودار آزاد همهٔ اجسام داده شده در شکل رسم شود. شکارچی را جرم شماره ۱ و تیرآهن را جرم شماره ۲ می‌نامیم.



شکل ۱۲ــ۳ــ الف ــ نمودار آزاد شکارچی



شکل ۱۲ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد تیرآهن (پل)

نمودار آزاد شکارچی در شکل ۱۲ــ۳ــ الف رسم شده است می‌بینیم که تنها نیروهای موجود فقط در راستای عمودی هستند. پس معادله ایستایی را برای این جسم می‌نویسیم :

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \Rightarrow n_{21} - m_1 g = 0 \Rightarrow n_{21} = m_1 g = 120 \times 10 \Rightarrow n_{21} = 1200\,\mathrm{N}$$

حال معادلات تعادل را برای تیر می‌نویسیم، فراموش نکنیم که $n_{12} = n_{21}$:

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \Rightarrow A_y + B_y - n_{12} - m_2 g = 0 \Rightarrow A_y + B_y = n_{12} + m_2 g$$

$$\Rightarrow A_y + B_y = 1200 + 2000 = 3200\,\mathrm{N} \quad \text{(I) معادله}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

برای محاسبهٔ تعادل گشتاوری ابتدا نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم و گشتاور نیروها حول آن را محاسبه می‌کنیم، در اینجا نقطهٔ A را انتخاب کرده‌ایم :

$$\sum \overrightarrow{\tau_A} = 0 \Rightarrow B_y \times AB - n_{12} \times AC - m_2 g \times AC = 0 \quad \text{(II) معادله}$$

حال دو معادله داریم و دو مجهول. نیروهای تکیه‌گاه‌ها مجهول‌اند و معادله (I) و معادله (II) معادلاتی که برای یافتن مجهولات به آنها نیاز داریم.

$$\text{(II) معادله} \Rightarrow 6B_y = 3 \times 3200 \Rightarrow B_y = \frac{9600}{6} = 1600\,\mathrm{N}$$

با جای گذاری B_y در معادله (I) مقدار نیروی عکس العمل تکیه‌گاه دوم نیز به دست می‌آید.

$$A_y = 3200 - B_y = 1600\,\mathrm{N}$$

البته شاید پاسخ این مسئله از ابتدا هم مشخص بود اما مهم این بود که شما روش حل را بیاموزید. حال به سراغ فعالیت ۱ــ۳ بروید و آموزه‌های خود را محک بزنید.

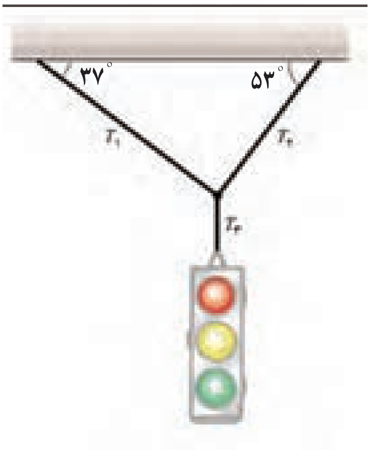
فعالیت ۱-۳

در مثال قبل فرض کنید شکارچی در ۱ متری تکیه‌گاه A باشد. حال نیروهای تکیه‌گاهی را بیابید.

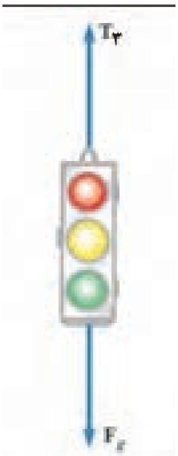
مسائل خاص: در برخی مسائل خاص، ممکن است نیروها هم‌رأس باشند (یعنی امتدادشان از یک نقطه عبور کند) این اتفاق بیشتر در مورد سازه‌هایی که از طناب ساخته شده‌اند رخ می‌دهد. وقتی که نیروها هم رأس باشند طبعاً برآیند گشتاور آنها صفر است. زیرا با گشتاور گیری حول نقطهٔ تقاطع این نیروها مقدار بازوی گشتاور همهٔ آنها صفر خواهد بود و در نتیجه گشتاور نیز برابر صفر خواهد شد.

از طرفی به دلیل حالت هندسی خاص، دیگر نیازی به تجزیه نیروها به مؤلفه‌هایشان نخواهد بود. بلکه می‌توان از روش‌هایی مثل قانون سینوس‌ها استفاده کرد. مثال بعدی به خوبی این قضیه را نشان می دهد. البته برای استفاده از این روش‌ها شرط ایستایی یا تعادل سامانه الزامی است.

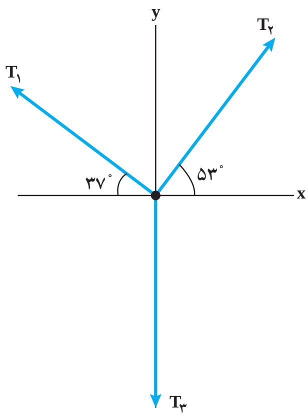
مثال ۴ : یک چراغ راهنمایی به وزن ۱۰۰ نیوتن، مطابق شکل ۱۳ــ۳ــ الف به کمک دو طناب آویزان شده است. نیروی کشش طناب‌ها را بیابید.



شکل ۱۳ــ۳ــ الف ــ چراغ راهنمایی که به کمک ۳ طناب معلق شده است.



شکل ۱۳ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد چراغ راهنمایی



شکل ۱۳ــ۳ــ پ ــ نمودار آزاد گره اتصال ۳ طناب

حل اول : روش نوشتن معادلات تعادل را پی می‌گیریم. ابتدا نمودار آزاد اجسام را مطابق شکل ۱۳ــ۳ــ ب و ۱۳ــ۳ــ پ رسم می‌کنیم. سپس معادلات تعادل را از نمودار آزاد، استخراج می‌کنیم. از آنجا که برای این‌کار نیاز به مؤلفه‌های نیروی طناب‌ها داریم باید بردارهای نیروی T_1 و T_2 را تجزیه کنیم. T_3 در راستای محور عمودی است و با توجه به شکل ۱۳ــ۳ــ ب به سادگی در می‌یابیم که برابر F_g یا وزن چراغ راهنمایی خواهد بود.

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \Rightarrow T_1.\sin(37) + T_2.\sin(53) - T_3 = 0 \Rightarrow 0/6T_1 + 0/8T_2 - 100 = 0 \quad (I)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \Rightarrow -T_1.\cos(37) + T_2.\sin(53) = 0 \Rightarrow -0/8T_1 + 0/6T_2 = 0 \quad (II)$$

با استفاده از معادلهٔ (II) داریم :

$$T_1 = \frac{0/6}{0/8}T_2 = 0/75T_2$$

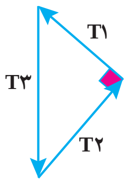
با جای‌گذاری این معادله در معادله (I) خواهیم داشت :

$$0/6 \times 0/75T_2 + 0/8T_2 - 100 = 0 \Longrightarrow T_2 = 80N \text{ و } T_1 = 0/75 \times 80 = 60N$$

حل دوم : استفاده از روش سینوس‌ها در حل به جای مؤلفه‌گیری :

زاویه بین دوبردار T_1 و T_2 برابر ۹۰ درجه است، زاویه بین T_1 و T_3 ، ۵۳ درجه است و زاویه بین T_3 و T_2 برابر ۳۷ درجه است.

با نوشتن قاعده سینوس‌ها داریم :



$$\frac{T_3}{\sin 90} = \frac{T_1}{\sin 37}$$

مشهود است که با حل معادله بالا همان پاسخ‌ها به‌دست می‌آید. اما خیلی سریع‌تر و ساده‌تر.

۳ــ۲ــ۳ ــ خرپا : در هندسهٔ سال‌های پیش می‌خواندیم اگر بین دو مثلث سه متغیر با هم برابر باشند هر دو مثلث با هم برابرند و مثلاً اگر ۲ مثلث سه ضلع یک به یک برابر داشته باشند، می‌گفتیم مثلث‌ها به حالت سه **ضلع** با هم برابرند. اما در دو چهار ضلعی با داشتن چهار متغیر، مثلاً طول چهار ضلع، نمی‌توانستیم بگوییم این اَشکال برابرند. حال اگر به کمک ۳ میله که در انتها به هم لولا (مفصل) شده‌اند یک سازه بسازیم، مثلثی تشکیل خواهند داد که این مثلث از نظر هندسی یکتا است. یعنی با اعمال نیروی خارجی به مثلث دیگری تبدیل نخواهد شد. به این مثلث پایدار **خرپا** می گوییم.

ــ خرپا سازه‌ای صلب از واحدهای مثلثی شکل است که از اتصال اجزای باریک و بلند ساخته شده است. خرپاها توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری را دارند.

ــ خرپاها از جملۀ ساده‌ترین اعضای باربر سازه‌ها هستند، که در کل، به‌صورت اعضای خمشی عمل نموده و در سقف‌ها، پل‌ها و سازه‌های هوا و فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این‌گونه سازه‌ها به علت نبودن نیروی برشی و لنگر خمشی در تک تک اعضای متشکله مثلث‌ها، اتصالات باید به‌صورت مفصلی در نظر گرفته شود.

خرپا بر حسب تعریف از مجموعه‌ای از اعضایی به‌وجود می‌آید که همگی در یک صفحه قرار دارند و ترکیب آنها یک شبکه مثلثی ایجاد می‌نماید. چون در خرپاها فرض می‌شود که اعضا در انتهای خود به اعضای دیگر لولا شده‌اند بنابراین شکل مثلثی تنها شکل پایدار خواهد بود. به شکل ۱۴ــ۳ نگاه کنید. می‌بینید که اضلاع متوازی‌الاضلاع و مستطیل دو به دو با هم برابرند ولی شکل‌ها یکسان نیستند. اما مثلث‌ها کاملاً با هم برابرند.

شکل ۱۴ــ۳ــ دو مثلث با سه ضلع برابر با هم، برابرند اما دو چهارضلعی خیر!

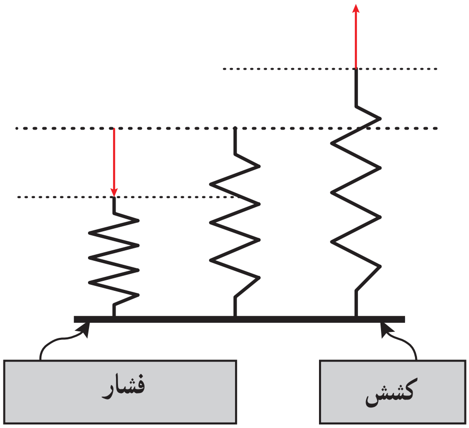
در شکل ۱۵ــ۳ پل بزرگ کارون آمده است. این پل که تماماً توسط مهندسان ایرانی طراحی و اجرا شده است در قوس زیرین خود دارای تعداد زیادی خرپا است.

به دلیل اینکه در خرپاها، میله‌ها (یا لینک‌ها) فقط در دو انتهای آن، به صورت مفصلی با هم در ارتباط هستند، اعضای آنها فقط می‌توانند تحت کشش یا فشار قرار گیرند. به این اعضا عضو دو نیرویی می‌گویند.

شکل ۱۵ــ۳ــ پل بزرگ کارون در جنوب کشور، قوس زیرین آن از خرپا ساخته شده است.

فشار (Compression): نیرویی که تمایل دارد عضو تحت اثرش را فشرده یا کوتاه کند (شکل ۱۶ــ۳).

کشش (Tension): نیرویی که تمایل دارد عضو تحت اثرش را طویل یا گسترده کند.



شکل ۱۶ــ۳ــ تعریف کشش و فشار

۴ــ۲ــ۳ــ پایداری سازه: با اجرای یک آزمون بسیار ساده می‌توان فهمید که یک سازه خرپا است یا خیر. خرپا بودن به معنی پایدار بودن سازه است. رابطهٔ (۶ــ۳) می‌تواند تعداد مجهولات را در یک سازه تعیین کند.

$$K = ۲J - R \qquad (۶ــ۳)$$

که در آن

K= تعداد مجهولات

J= تعداد مفاصل

M= تعداد اعضا

R = ۳ (تعداد اضلاع مثلث)

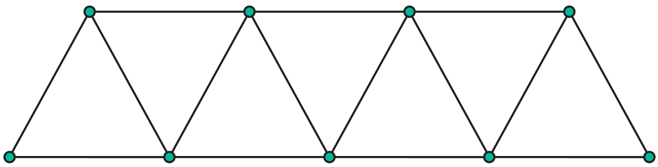
حال با توجه به شرایط زیر، پایداری و قابل حل بودن سازه مشخص می‌شود:

اگر M = K باشد سازه خرپا است، یعنی پایدار و قابل حل است.

اگر M < K باشد سازه نه پایدار است نه قابل حل.

اگر M > K باشد سازه پایدار است اما معادلات آن، قابل حل نیست.

مثال ۵ : تعیین کنید که آیا شکل ۱۷ـ۳ خرپا است یا خیر؟

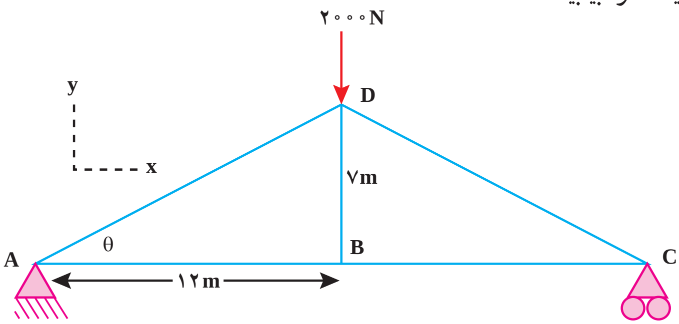


شکل ۱۷ــ۳ــ یک سازه با ۱۵ عضو

حل : J=۹ و M=۱۵ است پس ۱۵ = ۳ − (۹) ۲ = K، با توجه به شرایط ذکر شده، سازه خرپا است (پایدار و قابل حل است.).

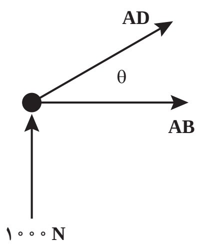
حل خرپا : برای حل معادلات یک خرپا پس از اینکه بررسی کردیم و متوجه خرپا بودن آن شدیم، کافی است معادلات تعادل را یک‌بار برای کل و یک‌بار برای تک تک مفاصل بنویسیم. در مثال زیر با این روش آشنا می شوید. دقت کنید که در نوشتن معادلات برای یک مفصل نیازی به نوشتن معادلات مربوط به گشتاور نیست زیرا همهٔ نیروها از یک نقطه می‌گذرند.

مثال ۶ : آیا سازهٔ زیر خرپا است؟ نیروهای وارد بر اعضا، کششی یا فشاری بودن آنها و عکس‌العمل تکیه‌گاه را بیابید.



حل : با توجه به تقارن داریم : Ay = Cy = ۱۰۰۰N و به سمت مثبت محور y معادله تعادل را برای نقطهٔ A می‌نویسیم :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{۷}{۱۲} = ۳۰/۳^\circ$$



$$\begin{cases} \sum F_y = \circ \Rightarrow AD\sin ۳۰/۳ + ۱۰۰۰ = \circ \Rightarrow AD = -۱۹۸۵N \\ \sum F_x = \frac{\circ \Rightarrow AD\cos ۳۰}{۳} + AB = \circ \Rightarrow AB = ۱۷۱۴N \end{cases}$$

از اینکه مقدار نیروی AD منفی شد نتیجه می‌گیریم که جهت این نیرو را در شکل اشتباه گرفته‌ایم. یعنی این نیرو کششی نیست بلکه فشاری است. اما نیروی AB همان نیروی کششی است، که از ابتدا حدس زده‌ایم. به‌دلیل تقارن، نیروی DC برابر نیروی AD خواهد بود. نیروی BC هم برابر نیروی AB.

با نوشتن معادله در نقطهٔ B هم متوجه می‌شویم که $DB = ۰$ است، زیرا تنها نیروی راستای عمود نیروی DB است و برآیند نیروهای عمودی و افقی هردو صفر است.

بیشتر بدانیم

هر ساله در سراسر ایران و جهان مسابقاتی با عنوان سازه‌های ماکارونی برگزار می شود. در این مسابقات هر شرکت کننده یک سازهٔ ماکارونی را طبق قوانین ساخته و تحت بارگذاری قرار می‌دهد. معمولاً سازه‌هایی که در حین سبک‌تر بودن بار بیشتری را تحمل کنند برنده خواهند شد.

هدف از برگزاری این مسابقات، شبیه‌سازی سازه‌ها و خرپاهای واقعی به روشی ارزان و مقرون به‌صرفه است. علاوه بر آن دانش فنی دانش‌آموزان و دانشجویان در رابطه با مسائل مربوط به ایستایی ومقاومت مصالح محک می‌خورد.

چگونه سازه ماکارونی بسازیم

ابتدا خوب است که یک مسابقه تعریف کنیم. فرض کنید می‌خواهید یک پل از جنس ماکارونی بسازید دهانه این پل ۳۰ سانتی متر است و قرار است که یک بار ۲ کیلوگرمی را تحمل کند. عرض پل نمی‌تواند از ۱۰ سانتی‌متر تجاوز کند و ارتفاع آن نیز نباید از ۲۰ سانتی‌متر بیشتر باشد.

نکات اولیهٔ طراحی:

- وقتی که دهانه ۳۰ سانتی‌متر است شما باید پل را به شکلی بسازید که حداقل طول آن بیشتر از ۳۰ سانتی‌متر باشد تا به خوبی روی تکیه‌گاه قرار بگیرد.
- نقشه پل باید طوری باشد که بار را از وسط گرفته و به سمت تکیه‌گاه هدایت کند.
- همه قسمت‌ها باید به شکل خرپا باشد. وجود مربع یعنی که یک قسمت خرپا نیست.

● برای قسمت‌هایی که نیروی فشاری تحمل می‌کنند از ماکارونی‌های ضخیم (۲/۸ میلی‌متری) و برای اجزاء تحت کشش از ماکارونی نازک استفاده کنید. در طراحی سازه‌ها، عضوهای فشاری به دلیل طول زیاد ممکن است دچار پدیدهٔ کمانش شوند و فرو بریزند. بنابراین سعی کنید تا جای ممکن طول آنها را کم و قطر آنها را زیاد کنید.

● ماکارونی‌های ضخیم را با طول‌های مختلف تحت فشار قراردهید و ببینید هر طول تحمل چه نیرویی را دارد.

● نقشه‌خود را تحلیل کنید و ببینید که به عضوهای فشاری چه نیرویی وارد می‌شود. طول عضو را طوری انتخاب کنید که تحمل آن نیرو را داشته باشد.

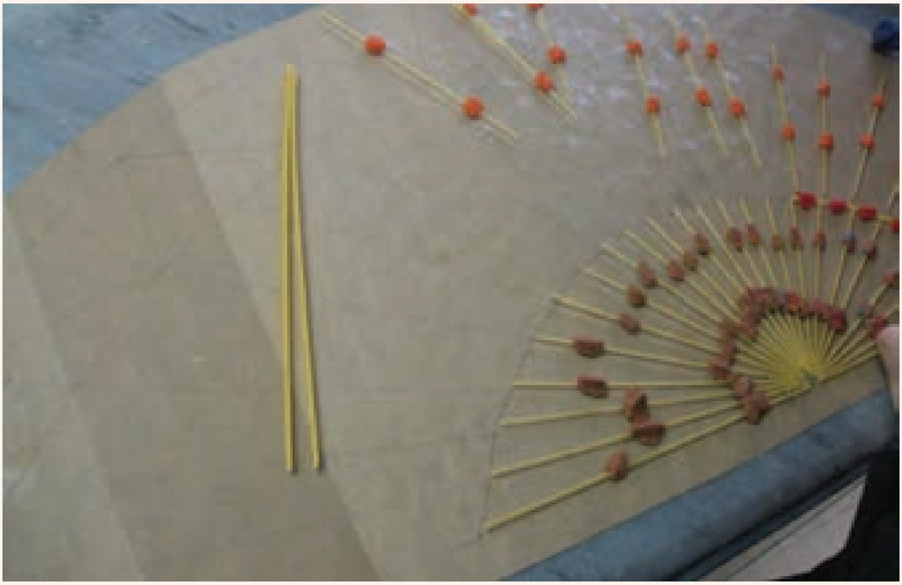
● هر پل از دو صفحه دوبعدی و یک سازه عرضی برای اتصال صفحات ساخته می‌شود.

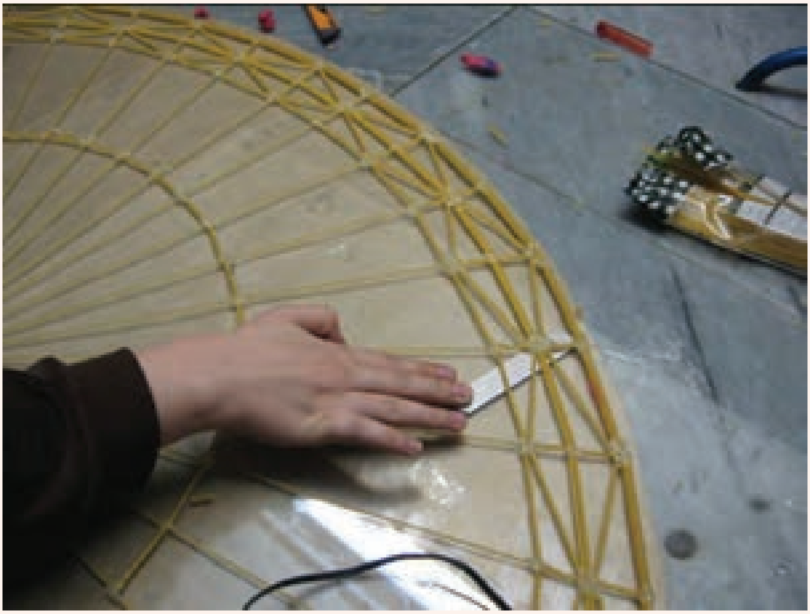
● نقشه صفحه ۲ بعدی را روی کاغذ رسم کنید.

● ترجیحاً نقشه را زیر یک شیشه ۶ میلی‌متری بچسبانید.

● ماکارونی‌ها را روی نقشه بچینید و بچسبانید. پس از تکمیل هر دو صفحه آنها را در جهت عرضی به هم بچسبانید. بادبندهای عرضی را فراموش نکنید.

بیشتر بدانیم






SH 1

خودآزمایی فصل سوم

۱ــ خرپا را تعریف کنید.

۲ــ جاهای خالی را پر کنید :

الف) هر کنشی را واکنشی است ______ و در خلاف جهت آن.

ب) جرم جسم به محیط وابسته ______ و برای یک جسم در سطح زمین ______ است.

۳ــ گزینهٔ صحیح را علامت بزنید :

الف) وزن برای یک جسم روی کرات مختلف آسمانی مقادیر ______ دارد و حتی روی کرهٔ زمین ______ است.

۱ــ ثابت، متغیر　　　　۲ــ مختلف، ثابت

۳ــ ثابت، ثابت　　　　۴ــ مختلف، متغیر

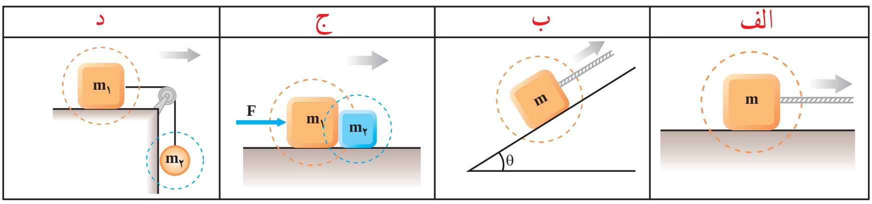
ب) تا بر جسمی نیرو وارد ______ بردار سرعت آن تغییر ______.

۱ــ نشود، نمی‌کند.　　　　۲ــ بشود، نمی‌کند.

۳ــ بشود، می‌کند.　　　　۴ــ گزینه های ۱ و ۳

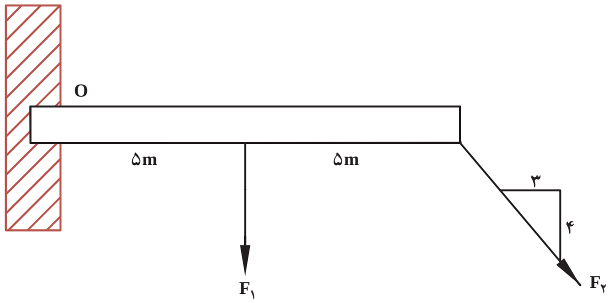
۴ــ انواع تکیه‌گاه را نام ببرید.

۵ــ نمودار آزاد اجسام زیر را که در شکل ۱۸ــ۳ آمده‌اند، تحت نیروهای نشان داده شده رسم کنید. در همهٔ موارد اصطکاک وجود دارد.



شکل ۱۸ــ۳

۶ــ دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ مطابق شکل ۱۹ــ۳ بر تیر وارد می‌شوند. گشتاور هر یک از نیروها در محل تکیه‌گاه چقدر است؟

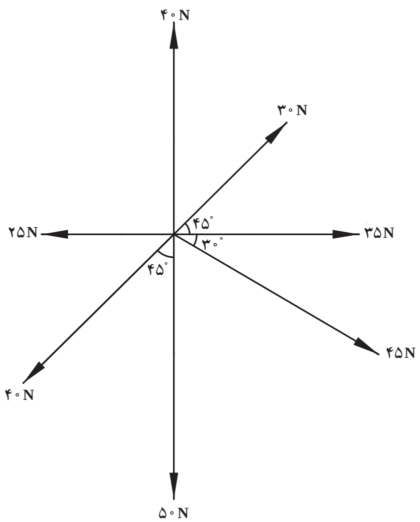


شکل ۱۹ــ۳

۷ــ در مسئله قبل عکس‌العمل تکیه‌گاه را محاسبه کنید.

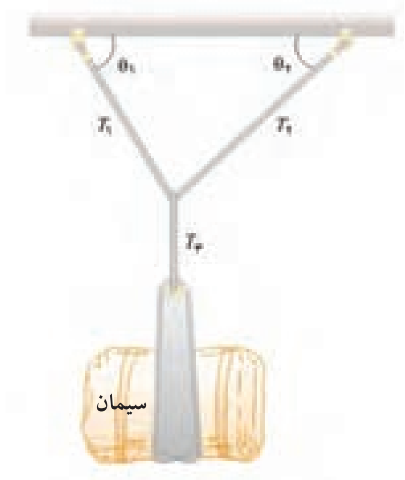
۸ــ چند نیرو مطابق شکل ۲۰ــ۳ بر نقطه‌ای عمل می‌کنند. با استفاده از روش رسم، اندازه و جهت نیروی برآیند را بیابید.

۹ــ برآیند نیروهای شکل ۲۰ــ۳ را از روش تحلیلی محاسبه کنید.



شکل ۲۰ــ۳

۱۰ــ یک کیسه ۵۰ کیلوگرمی سیمان از دو طناب مانند شکل ۲۱ــ۳ آویخته شده‌است. نیروی هر یک از طناب‌ها را بیابید. ($\theta_1=60^\circ$ و $\theta_2=37^\circ$)

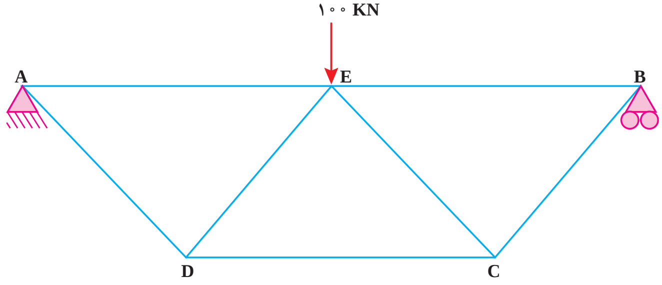


شکل ۲۱ــ۳

۱۱ــ یک پروانهٔ کشتی برای گشتن در سرعت مورد نظر نیاز به گشتاور ۳۰۰ نیوتن متر دارد. با فرض آنکه نقطهٔ اثر نیروی آب روی پروانه در فاصلهٔ ۱/۲ متری از مرکز پروانه باشد، نیروی متوسط وارد شده بر هر پره را بیابید.

۱۲ــ شافتی به جرم ۵/۰۹۷ تن به‌وسیله دو زنجیر از یک قلاب جرثقیل آویزان می‌باشد. طول هر زنجیر ۴ متر و فاصلهٔ بین نقاط اتصال زنجیرها به شافت نیز ۴ متر است. فاصلهٔ مرکز ثقل شافت از یکی از نقاط اتصال شافت و زنجیر ۱/۲۵ متر است. نیروی کششی در هر زنجیر چقدر است؟

۱۳ــ در سازهٔ شکل ۲۲ــ۳ کلیه عضوهای مورّب دارای زاویه ۴۵ درجه با عضو مجاورخود هستند. باری به اندازهٔ ۱۰۰ KN در وسط سازه قرار دارد. نمودار برداری نیروهای موجود در عضوها را رسم و اندازه‌گیری کنید. اندازهٔ نیروها و ماهیت آنها (کششی یا فشاری) را در یک جدول بنویسید.



شکل ۲۲ــ۳

فصل ۴

دینامیک ماشین‌ها

هدف کلی

تحلیل‌های هندسی و حرکتی قطعات مکانیکی

هدف‌های رفتاری

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

۱ــ سرعت دَوَرانی را تعریف کند.

۲ــ سرعت زاویه‌ای را تعریف کند.

۳ــ سرعت دورانی را به زوایه‌ای و بالعکس تبدیل کند.

۴ــ سرعت زاویه‌ای و دورانی را در در دستگاه‌ها به سرعت خطی تبدیل نماید.

۵ــ بر اساس نیروهای خارجی گشتاور مورد نیاز دستگاه را محاسبه کند.

۶ــ برخی قطعات مکانیکی پرکاربرد و هندسهٔ آنها را بشناسد.

۷ــ درجهٔ آزادی را تعریف کند.

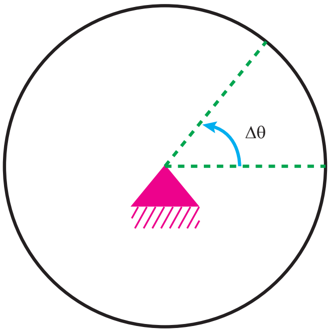
۱ــ۴ــ حرکت دورانی

در درس فیزیک سال‌های گذشته کمیتی برداری به نام سرعت برای جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند تعریف شد. این کمیت برداری از تقسیم بردار جابه‌جایی بر واحد زمان (یا تغییرات زمان) به‌دست می‌آید. اما گاهی اجسام حرکت دارند اما نه از نوع مستقیم، بلکه حول محور خود دوران می‌کنند. در این حالت نیز می‌توان برای جسم، سرعتی در نظر گرفت. این سرعت بسته به نوع تعریف «سرعت دورانی» یا «سرعت زاویه‌ای» نام دارد.

۱ــ۱ــ۴ــ سرعت زاویه‌ای : فرض کنید جسمی در زمان Δt به اندازهٔ $\Delta\theta$ (دقت کنید که این تغییرات زاویه در دستگاه SI برحسب رادیان است.) حول محور خود دوران کند (شکل ۱ــ۴).

سرعت زاویه‌ای آن طبق رابطهٔ ۱ــ۴ تعریف می‌شود :

$$\omega=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\left(\frac{rad}{s}\right) \qquad (۱ــ۴)$$



شکل ۱ــ۴ــ دوران یک جسم حول محورش

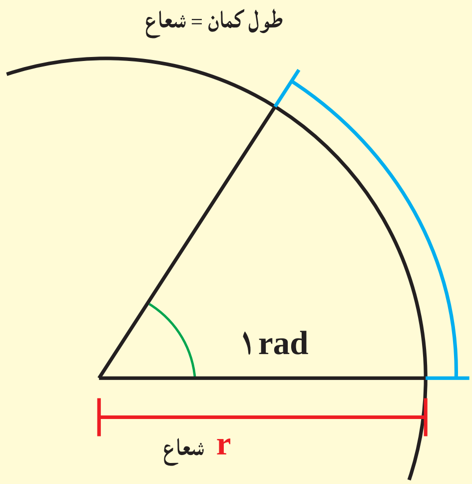
در واقع ω (امگا) حاصل تقسیم تغییرات زاویه بر تغییرات زمان است. البته فراموش نشود که سرعت زاویه‌ای یک بردار است. راستای این بردار عمود بر صفحه دوران است و جهتش از قانون دست راست به‌دست می‌آید.

یادآوری

اگر دایره‌ای رسم کنیم و کمانی را به اندازهٔ (طول) شعاع از آن جدا کنیم و از دو انتهای کمان به مرکز دایره وصل کنیم، زاویه‌ای تشکیل می‌شود. این زاویه برابر یک رادیان است. یک نیم دایره (۱۸۰ درجه) برابر π رادیان و یک دایره کامل (۳۶۰ درجه) برابر 2π رادیان است. هر رادیان برابر $\frac{180}{\pi}$ درجه است. از این نسبت برای تبدیل واحد زوایا می‌توان استفاده کرد.

جدول زیر برخی تبدیل‌های معروف را ارائه می‌کند.

درجه	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
رادیان	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	2π



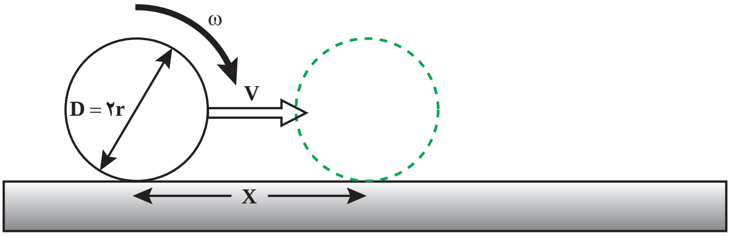
۲ـ۱ـ۴ـ سرعت دورانی : اگر بخواهیم تعداد دوری را که یک جسم حول محورش می‌زند، بیان کنیم از سرعت دورانی استفاده می‌کنیم. در کاربردهای مهندسی معمولاً از سرعت دورانی به صورت دور بر دقیقه یا rpm[۱] استفاده می‌شود. سرعت دورانی و سرعت زاویه‌ای به راحتی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. در این کتاب سرعت دورانی را باحرف N نمایش می‌دهیم.

هر دور برابر ۲π رادیان تغییرات زاویه‌است. همچنین هر دقیقه برابر ۶۰ ثانیه است. لذا می‌توان با استفاده از رابطهٔ (۲ـ۴) به راحتی این دو واحد را به یکدیگر تبدیل کرد. از آنجا که این واحد یک واحد SI نیست نمی‌توان در محاسبات SI از این واحد استفاده کرد.

$$N = \omega \times \frac{۶۰}{۲\pi} \qquad (۲ـ۴)$$

$$N \cong \omega \times ۱۰$$

۳ـ۱ـ۴ـ رابطهٔ سرعت خطی و زاویه‌ای : فرض کنید یک استوانه (مثلاً چرخ یک گاری) در زمان Δt یک دور روی زمین بچرخد. در این حالت استوانه به اندازهٔ محیطش حرکت کرده (شکل ۲ـ۴) و به اندازهٔ $x = ۲\pi r$ به جلو رفته است. از اینجا می‌توان به رابطهٔ (۳ـ۴) و (۴ـ۴) دست یافت.



شکل ۲ـ۴ـ جابه‌جایی مرکز جرم در اثر دوران

$$v = \frac{۲\pi r}{t} \qquad (۳ـ۴)$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{t} \qquad (۴ـ۴)$$

با داشتن (۳ـ۴) و (۴ـ۴) و مشاهده مشترکات آنها، رابطهٔ (۵ـ۴) که مهم‌ترین موضوع این قسمت از درس است حاصل می‌شود.

$$v = r\omega \qquad (۵ـ۴)$$

۱ـ Round per minute

مثال ۱ : یک گاری با سرعت ۳۰ سانتی‌متر در هر ثانیه، حرکت می‌کند. اگر شعاع چرخ‌های آن برابر ۱۵ سانتی‌متر باشد، سرعت زاویه‌ای و سرعت دورانی چرخ‌ها را بیابید.

حل : ابتدا باید تبدیل واحدهای لازم برای حل مسئله را محاسبه کنیم.

$$v = ۳۰ cm.s^{-۱} = ۰/۳ m.s^{-۱}$$

$$r = ۱۵ cm = ۰/۱۵ m.$$

حال داده‌های مسئله را در معادله (۵ــ۴) جای‌گذاری می‌کنیم.

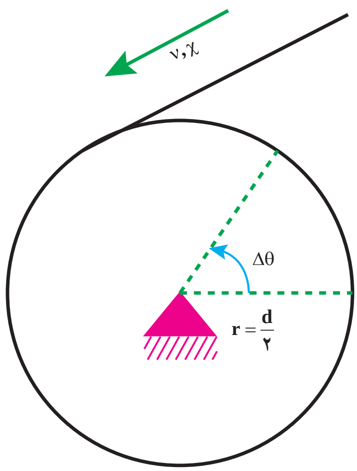
سرعت زاویه‌ای $v = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{۰/۳}{۰/۱۵} = ۲\frac{rad}{s}$

با استفاده از رابطهٔ (۲ــ۴) سرعت زاویه‌ای به سرعت دورانی تبدیل می‌شود.

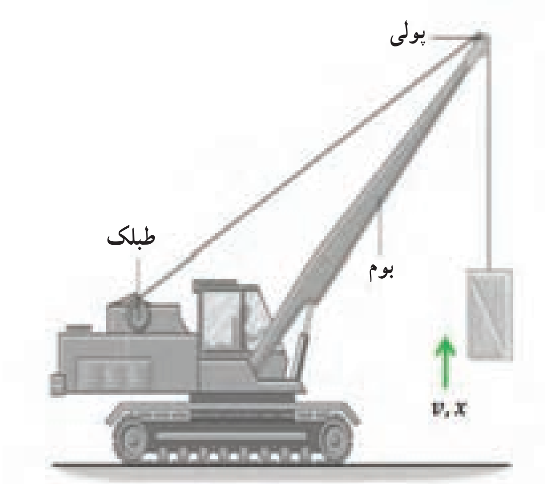
$$N \cong \omega \times ۱۰ = ۲۰ rpm$$

مثال ۲ : طبلک یک جرثقیل با سرعت ۵۰rpm می‌چرخد. اگر قطر این طبلک ۴۰ سانتی‌متر باشد سرعت بالابری این جرثقیل چقدر خواهد بود؟

حل : هر بار که طبلک به‌دور خود می‌پیچد کابل جرثقیل را به اندازهٔ یک محیط، به دور خود می‌پیچد. پولی بالای بوم نیز صرفاً جهت تغییر جهت است. پس با هر مقدار کشیده شدن کابل، جسم به همان مقدار بالا کشیده می‌شود. در واقع با هر دور پیچیدن طبلک، جسم به اندازهٔ یک محیط طبلک جابه‌جا می‌شود.



شکل ۳ــ۴ــ ب ــ طبلک جرثقیل



شکل ۳ــ۴ــ الف ــ جرثقیل

برای هر دور دوران طبلک جابه‌جایی برابر است با : $x = ۲\pi r = ۲\pi\frac{d}{۲} = \pi d = ۱۲۵/۶cm$

از طرفی در هر دقیقه، طبلک ۵۰ دور می‌زند پس جابه‌جایی طناب در یک دقیقه کار جرثقیل برابر خواهد بود با : $x_{دقیقه} = x \times ۵۰ = ۶۲۸۰cm = ۶۲/۸m$ حال می‌توان با تقسیم جابه‌جایی بر زمان، سرعت خطی v را برای جسم محاسبه کرد.

سرعت خطی جسمی که جرثقیل بلند می‌کند : $v = \frac{x_{دقیقه}}{۶۰} = ۱/۰۵m.s^{-۱}$

فعالیت ۱-۴

با استفاده از رابطهٔ ۲ــ۴ و ۵ــ۴ مثال ۲ را دوباره حل کنید و پاسخ خود را با پاسخ حل مثال ۲ مقایسه کنید.

۴ــ۱ــ۴ــ گشتاور : در فصل ۳ کتاب خواندید که اگر نیرویی روی بازویی وارد شود، بسته به فاصلهٔ محل اثر نیرو تا محل تکیه‌گاه تأثیر متفاوتی ایجاد می‌کند و این تأثیر را گشتاور نامیدیم. گشتاور، چیزی است که می‌خواهد اجسام را به حرکت دورانی وادارد. قوانین نیوتن که برای تعریف رابطهٔ نیرو و حرکت خطی اجسام کاربرد داشت، در مورد گشتاور و حرکت دورانی اجسام نیز کاربرد دارد. جهت بردار گشتاور از قانون دست راست تعیین می‌شود. به این شکل که ابتدا انگشتان دست راست را در جهت بازوی گشتاور قرار می‌دهیم و به سمت بردار نیرو خم می‌کنیم. انگشت شست دست راست جهت بردار گشتاور را نشان می‌دهد.

برای مطالعه

همان‌طور که در حرکت خطی برای اجسام، شتاب خطی، تعریف می‌شد در حرکت دورانی نیز شتاب دورانی تعریف می‌شود. شتاب دورانی برابر است با تغییرات سرعت دورانی بر تغییرات زمان یعنی :

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}(rad.s^{-۲})$$

همچنین در قانون اول و دوم نیوتن برای اجسام در حرکت خطی یک لختی تعریف می‌شد. لختی به معنی مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت تعریف می‌شد. در

حرکت دورانی نیز لختی دورانی تعریف می‌شود. لختی دورانی به معنی مقاومت جسم در برابر تغییرات سرعت دورانی (یا زاویه‌ای) جسم است. رابطهٔ قانون دوم نیوتن برای گشتاور، لختی دورانی و شتاب دورانی به شکل زیر بازنویسی می‌شود :

$$\vec{\tau} = I.\vec{\alpha}$$

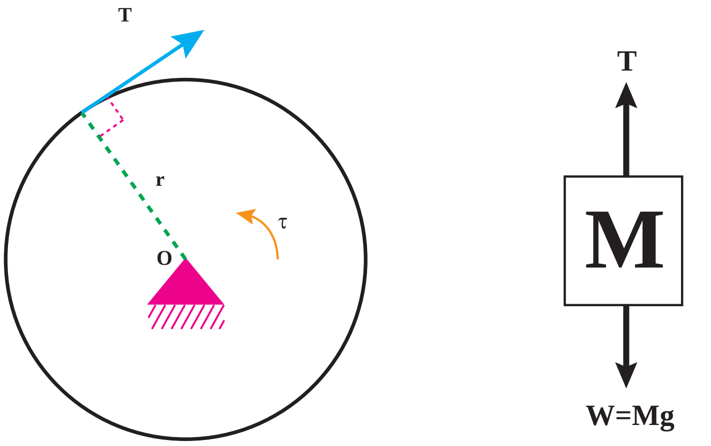
معمولاً دو مشخصه برای هر موتور، اعم از الکتریکی، پنوماتیکی، هیدورلیکی یا احتراقی بسیار حائز اهمیت است و همواره به همراه اطلاعات موتور ارائه می‌شود. اولین مؤلفهٔ سرعت دورانی و دومین آن، گشتاور تولیدی موتور است.

در کاربردهای مسائل این کتاب، از تغییرات سرعت دورانی و وجود لختی دورانی برای اجسام صرف‌نظر شده است. اما فراموش نشود که در مسائل حساس و مهم مهندسی باید این پارامترها لحاظ شوند. چیزی که در اینجا بیشتر مد نظر است، محاسبهٔ گشتاور لازم برای یک موتور برای ایجاد حرکت در اجسام در ماشین‌ها می‌باشد.

برای بهتر فهمیدن مبحث گشتاور، از چند مثال ساده استفاده می‌کنیم.

مثال ۳ : اگر جرثقیل مثال ۲ قرار باشد وزنه‌ای به جرم ۱۰۰۰۰ کیلوگرم را بالا بکشد، حداقل گشتاور ورودی طبلک باید چقدر باشد؟

حل : ابتدا نمودار جسم آزاد وزنه و طبلک را رسم می‌کنیم (شکل ۴ــ۴).



شکل ۴ــ۴ــ ب ــ نمودار آزاد طبلک

شکل ۴ــ۴ــ الف ــ نمودار آزاد وزنه

دقت کنید که در این گونه مسائل اگر اشاره‌ای به حرکت شتاب‌دار نشده باشد به این معنی است که حرکت با سرعت ثابت مفروض است. پس می‌توان شرایط ایستایی را برای وزنه و طبلک به صورت جداگانه نوشت.

با توجه به نمودار آزاد وزنه داریم :

$$\sum F=0 \Rightarrow W-T=0\,,\ W=Mg \Rightarrow T=Mg=10\times10^{4}\,N$$

از طرفی برای طبلک داریم :

$$\sum M_{0}=0 \Rightarrow \tau - rT=0 \Rightarrow \tau=10\times10^{4}\,N\times0/2m=2\times10^{4}\,N.m$$

مقدار گشتاور به‌دست آمده، حداقل گشتاور مورد نیاز در طبلک را نشان می‌دهد. معمولاً این گشتاور توسط یک موتور الکتریکی مجهز به جعبه دنده تأمین می‌شود. اما در جرثقیل‌های سیار موتور خودرو، می‌تواند منبع تأمین این گشتاور باشد.

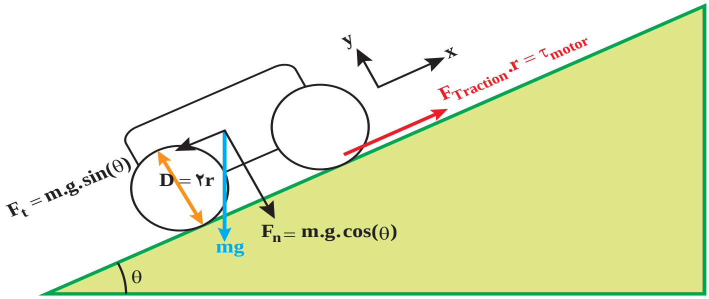
در ادامه با مثالی پیچیده‌تر مفهوم تأمین گشتاور برای حرکت ارائه می‌شود. دقت کنید که در این مثال نیز از شتاب‌گیری خطی و زاویه‌ای صرف‌نظر شده است. همچنین برای ساده‌سازی از اصطکاک غلتشی نیز چشم‌پوشی شده است.

اصطکاک غلتشی نیروی مقاومی است که در برابر چرخیدن اجسام روی سطوح مختلف ظاهر می‌شود. مقدار این اصطکاک معمولاً به مراتب کمتر از اصطکاک لغزشی (جنبشی یا ایستایی) است.

مثال ۴ : یک روبات نظامی جستجوگر به جرم ۱۵ کیلوگرم و با چرخ‌هایی به قطر ۳۰ سانتی‌متر قرار است از تپه‌ای با حداکثر شیب ۳۷ درجه بالا رود. این روبات چهار چرخ دارد که هر کدام از این چرخ‌ها مستقلاً از یک موتور و گیربکس الکتریکی نیرو می‌گیرد. حداقل گشتاور خروجی هر یک از این موتور و گیربکس‌های الکتریکی چقدر باشد تا روبات قادر به بالا رفتن از تپه باشد؟ (شکل ۵ــ۴ مثالی از این نوع روبات را نشان می‌دهد).

شکل ۵ــ۴ــ یک روبات جستجوگر آزمایشی ایرانی

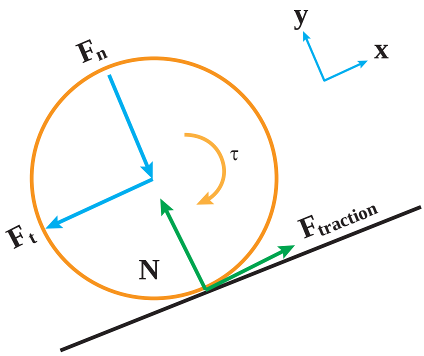
حل : ابتدا شکل شماتیک و نیروهای وارده را رسم می‌کنیم. به‌دلیل استفاده از لاستیک‌های آج‌دار و زبری بالای محل عبور، ضریب اصطکاک در حدود یک فرض می‌شود. در واقع گشتاور تولیدی موتورها به دلیل وجود اصطکاک لغزشی از نوع ایستایی، باعث حرکت رو به جلوی روبات می‌شود (نمودار آزاد روبات در شکل ۶ــ۴ رسم شده است).



بیشینه $(F_{Traction}) = N.\mu$

شکل ۶ــ۴ــ شماتیک حرکت روبات روی تپه

برای ساده‌سازی، محاسبات را فقط روی یک چرخ اعمال می‌کنیم. به این شکل که گشتاور موتورها، نیروی عمود بر سطح و نیروی مماسی که روبات را به پایین می‌راند بر روی یک چرخ درنظر می‌گیریم و در انتها بر تعداد چرخ‌ها تقسیم می‌کنیم. پس نمودار آزاد را می‌توان به شکل زیر ساده‌سازی کرد (شکل ۷ــ۴).



شکل ۷ــ۴ــ نمودار آزاد روبات (با فرض یک چرخ)

همان‌طور که در بالا گفته شد، نیروی چسبندگی تایر $(F_{Traction})$ از جنس نیروی اصطکاک لغزشی است. یعنی بیشینهٔ آن برابر بیشینهٔ اصطکاک ایستایی است، اما وجود آن به دلیل گشتاور موجود در چرخ‌ها و تمایل آنها به حرکت است. از طرفی مقادیر نیروهای عمودی و مماسی نیز که

مؤلفه‌های نیروی وزن در مختصات جدید هستند نیز مشخص است. در نتیجه داریم :

$$F_{Traction} \cdot r = \tau_{motors}$$

$F_t = m \cdot g \cdot \sin(\theta) = ۱۵ \times ۹/۸ \times ۰/۶ = ۸۸/۲N$ و $F_n = ۱۵ \times ۹/۸ \times ۰/۸ = ۱۱۷/۶N$

حال با نوشتن معادلات تعادل از روی شکل ادامه می‌دهیم.

$$\sum F_x = ۰ \Rightarrow F_{traction} - F_t = ۰ \Rightarrow F_{traction} = F_t = m.g.\sin(\theta) \Rightarrow F_{traction} = ۸۸/۲N$$

$$\sum F_y = ۰ \Rightarrow F_n - N = ۰ \Rightarrow N = mg.\cos(\theta) \Rightarrow N = ۱۱۷/۶N$$

بیشینه $(F_{traction}) = N \cdot \mu_s$

به دلیل استفاده از چرخ‌های مناسب و بالا بودن اصطکاک چرخ‌ها با سطح تپه، ضریب اصطکاک ایستایی μ_s بیشینه برابر ۱ فرض می‌شود.

بیشینه $(F_{traction}) = ۱۱۷/۶\,N$

پس می‌توان نتیجه گرفت که نیروی چسبندگی تایر از حداکثر مجاز آن تجاوز نمی‌کند.

$$\sum M = ۰ \Rightarrow \tau - F_{traction} \cdot r = ۰ \Rightarrow \tau = ۱۳/۲۳N.m$$

با تقسیم گشتاور به‌دست آمده بر چهار (تعداد چرخ‌ها) پاسخ تقریبی مسئله به‌دست می‌آید. گشتاور مورد نیاز برای هر موتور برابر است با :

$$\tau_{motor} = \frac{\tau}{۴} = ۳/۳N.m$$

۵ــ۱ــ۴ــ موتورهای دیزل و الکتریکی : معمولاً موتورهای دیزل رنج سرعتی در حدود ۵۰۰ تا ۲۵۰۰ دور بر دقیقه دارند و گشتاور آنها نیز بسته به ابعاد و توان در رنج بسیار متنوعی قرار می‌گیرد. البته گشتاور خروجی مستقیم از موتور، معمولاً از مقدار دلخواه طراحان پایین‌تر است.

در مورد موتورهای الکتریکی نیز همین موضوع صحت دارد. دور موتورهای الکتریکی از ۱۰۰۰ دور بر دقیقه تا چندین هزار دور بر دقیقه متغیر است که به نوع و کاربرد موتور بستگی دارد (موتور AC/DC و....) و نسبتاً گشتاور پایینی را تولید می‌کنند.

از این موارد می‌توان نتیجه گرفت که لازم است با روشی دور موتورها کاهش یافته و گشتاور خروجی آنها افزایش یابد.

۲ــ۴ــ چرخ دنده

۱ــ۲ــ۴ــ چرخ‌دنده‌های صاف یا ساده[۱] : این چرخ‌دنده‌ها ساده‌ترین چرخ‌دنده‌هایی هستند که مورد استفاده قرار می‌گیرند. آنها دندانه‌های مستقیم دارند و محور دو چرخ نیز موازی با یکدیگر قرار

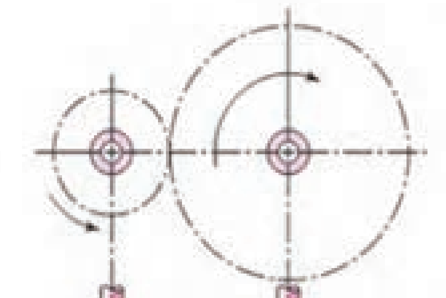
۱ــ spur gears

گرفته‌اند. گاهی تعداد زیادی از آنها را در کنار هم قرار می‌دهند تا سرعت را کاهش و قدرت را افزایش دهند. در تعداد زیادی از وسایل از این چرخ‌دنده‌ها استفاده می‌شود. مثلاً در ساعت‌های کوکی، ساعت‌های اتوماتیک، ماشین لباسشویی، پنکه و... . اما این چرخ‌دنده‌ها در خودرو و وسایل‌نقلیه به‌کار نمی‌آیند، چون سر و صدای زیادی دارند. هر بار که دندانه یک چرخ‌دنده به دندانه چرخ روبرو می‌رسد، صدای کوچکی در اثر برخورد ایجاد می‌شود. می‌توانید مجسم کنید وقتی تعداد زیادی از این چرخ‌دنده‌ها با هم کار کنند، چه سر و صدایی راه می‌اندازند؟ نکتهٔ دیگر اینکه این برخوردها در درازمدت، باعث شکستن دندانه‌ها می‌شود. برای کاهش سر و صدا و افزایش عمر چرخ‌دنده‌ها در بیشتر اتومبیل‌ها از چرخ‌دنده‌های مارپیچ استفاده می‌کنند.

از چرخ‌دنده‌های ساده برای انتقال حرکت از یک میله محور به میلهٔ محور موازی آن استفاده می‌شود و دنده‌های آنها با محورشان موازی است. (به شکل ۸ــ۴ و ۹ــ۴ مراجعه کنید.)

شکل ۸ــ۴ــ الف ــ یک جفت چرخ‌دنده ساده

شکل ۸ــ۴ــ ب ــ یک چرخ‌دنده ساده



شکل ۹ــ۴ــ چرخ‌دنده صاف برای انتقال حرکت دورانی بین میل محور موازی به‌کار می‌رود.

۲ــ۲ــ۴ــ چرخ‌دنده‌های مارپیچ[1] : دندانه این چرخ‌دنده‌ها مایل است. وقتی یکی از آنها می‌چرخد، ابتدا نوک دندانه‌ها با هم تماس پیدا می‌کنند سپس به‌تدریج دو دندانه کاملاً در هم جفت می‌شوند. این درگیری تدریجی همان چیزی است که هم سر و صدا را کم می‌کند و هم باعث می‌شود که این چرخ‌دنده‌ها نرم‌تر کار کنند (شکل ۱۰ــ۴).

شکل ۱۰ــ۴ــ یک جفت چرخ‌دنده مارپیچ

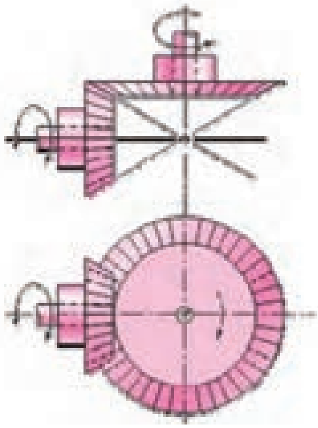
در وسایل نقلیه تعداد زیادی چرخ‌دندهٔ مارپیچ وجود دارد. به خاطر مایل بودن دندانه‌ها، هنگام درگیری نیروی زیادی به آنها وارد می‌شود. به همین علت در وسایلی که از چرخ‌دنده‌های مارپیچی استفاده می‌کنند بلبرینگ هایی تعبیه شده است تا این فشار را تحمل کند. اگر زاویه دندانه‌ها را به دقت تنظیم کنیم، می‌توان دو چرخ‌دنده را به دو محور عمود بر هم وصل کرد تا جهت چرخش ۹۰ درجه تغییر کند یعنی برای انتقال دو محور ناموازی (متنافر) نیز به‌کار می‌روند. این خاصیت در شکل ۱۱ــ۴ به نمایش درآمده است.

شکل ۱۱ــ۴ــ یک جفت چرخ‌دنده مارپیچ با محور موازی و متنافر

۱ــ helical gears

۳ـ۲ـ۴ـ چرخ‌دنده‌های مخروطی[1] : این چرخ‌دنده‌ها، دنده‌هایی روی سطوح مخروطی دارند و بیشتر برای انتقال حرکت بین میل محورهای متقاطع به‌کار می‌روند (شکل ۱۲ـ۴). شکل ۱۳ـ۴ انواع این چرخ‌دنده را به تصویر کشیده است.

در دیفرانسیل بسیاری از خودروها از این چرخ‌دنده‌ها استفاده می‌شود.



شکل ۱۲ـ۴ـ چرخ‌دنده مخروطی برای انتقال حرکت بین میله محورهای متقاطع به‌کار می‌رود.

شکل ۱۳ـ۴ـ الف ـ چرخ‌دنده مخروطی با دندانه‌های مارپیچ

شکل ۱۳ـ۴ـ ب ـ چرخ‌دنده مخروطی با دندانه‌های ساده

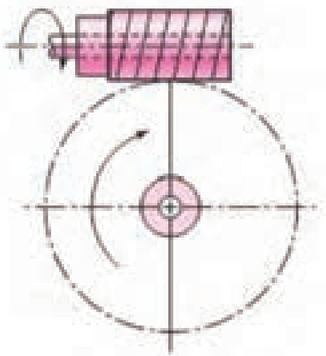
۴ـ۲ـ۴ـ چرخ‌دنده‌های حلزونی[2] : این چرخ‌دنده‌ها زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که بخواهیم در سرعت یا قدرت تغییر زیادی ایجاد کنیم. معمولاً نسبت شعاع دو چرخ‌دنده ۱ : ۲۰ است و گاهی حتی به ۱ : ۳۰۰ و بیشتر نیز می‌رسد (در ادامه با نسبت تبدیل آشنا خواهید شد (شکل ۱۴ـ۴).

۱ـ bevel gears

۲ـ worm gears

این چرخ‌دنده‌ها خاصیت جالبی هم دارند که در هیچ چرخ‌دندهٔ دیگری پیدا نمی‌شود. چرخ بالایی (حلزون) می‌تواند به راحتی چرخ دیگر (چرخ‌دندهٔ حلزونی) را حرکت دهد، ولی اکثراً چرخ پایینی نمی‌تواند حلزون را بچرخاند. زاویهٔ دنده‌های روی حلزون آن‌قدر کوچک است که وقتی چرخ پایینی بخواهد آن را بچرخاند، اصطکاک آن‌چنان زیاد می‌شود که از حرکت حلزون جلوگیری می‌کند. این ویژگی استفاده از این چرخ‌دنده‌ها را در جاهایی که به یک قفل خودکار نیاز داریم ممکن می‌سازد. فرض کنید از این چرخ‌دنده در یک بالابر استفاده کرده‌ایم؛ وقتی موتور بالابر از کار بیافتد، چرخ‌دنده‌ها قفل می‌شوند و نمی‌گذارند بار پایین بیاید. به این خاصیت «خودقفلی» می‌گویند. معمولاً در دیفرانسیل کامیون‌ها و خودروهای سنگین از این چرخ‌دنده‌ها استفاده می‌شود. همچنین در جرثقیل‌ها و بالابرها نیز از آن بهره می‌گیریم.

شکل ۱۴ــ۴ــ الف ــ یک جفت چرخ‌دنده مارپیچ حلزون



شکل ۱۴ــ۴ــ ب ــ نحوه گردش در چرخ‌دنده مارپیچ حلزون

۵ــ۲ــ۴ــ چرخ‌دندهٔ شانه‌ای[1] : این چرخ‌دنده‌ها برای تبدیل حرکت دورانی به حرکت خطی استفاده می‌شوند. یک مثال خوب برای این چرخ‌دنده‌ها فرمان اتومبیل است. فرمان، چرخ‌دنده‌ای را می‌چرخاند که با میلهٔ شانه‌ای در تماس است. وقتی شما فرمان را می‌چرخانید، با توجه به جهت چرخش فرمان، شانه به سمت چپ و یا راست حرکت می‌کند و باعث حرکت چرخ‌ها می‌شود. در برخی از ترازوها نیز برای چرخاندن عقربه از سامانهٔ مشابهی استفاده می‌شود (شکل ۱۵ــ۴).

شکل ۱۵ــ۴ــ چرخ‌دنده میله شانه‌ای با دندانه‌های ساده

۱ــ pinion and rack

۶ــ۲ــ۴ــ محاسن چرخ‌دنده‌ها : محاسن چرخ‌دنده‌ها را می‌توان به شکل زیر برشمرد.

۱ــ انتقال نیروی زیاد : در مقایسه با چرخ تسمه و چرخ زنجیر و محرک‌های (درایوهای) مشابه دیگر، در صورت استفاده از چرخ‌دنده می‌توان سرعت یا قدرت زیادی (بیشتر از روش‌های دیگر) را انتقال داد. همچنین هنگام استفاده از چرخ‌دنده اتلاف نیرو کمتر است و در نهایت دوام و عمر مجموعه بیشتر خواهد بود.

۲ــ انتقال نیرو درجهت های مختلف : از چرخ‌دنده‌ها می‌توان برای انتقال نیرو در محورهای موازی و متنافر و متقاطع تحت زوایای مختلف استفاده نمود.

۳ــ شکستن نسبت‌ها : یعنی می‌توان برای نسبت‌های بالا از چند جفت چرخ‌دنده کمک گرفت و همچنین نسبت‌هایی با ضریب عدد غیر صحیح به‌دست آورد.

۴ــ تبدیل حرکت دورانی به خطی و بالعکس با استفاده از چرخ‌دنده شانه‌ای.

۷ــ۲ــ۴ــ معایب چرخ‌دنده‌ها : از معایب چرخ‌دنده‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱ــ حرارت ایجاد شده بین دو چرخ‌دنده : به علت رعایت نکردن لقی استاندارد بین دو چرخ‌دنده وعدم روغن‌کاری مناسب پیش می‌آید.

۲ــ صداهای ناهنجار : در چرخ‌دنده‌های ساده صدا بیشتر و در چرخ‌دنده‌های مارپیچ و جناغی صدا کمتر است.

۳ــ ترک خوردن و پوسته پوسته شدن : اغلب در چرخ‌دنده‌های آبکاری شده به‌وجود می‌آید.

۴ــ سائیدگی دندانه‌ها : دراغلب مواردی که دو چرخ‌دنده با هم درگیر می‌شوند چرخ‌دنده‌ای که قطرش کوچک‌تر است زودتر سائیده می‌شود. به همین دلیل چرخ‌دندهٔ کوچک‌تر باید سخت‌تر انتخاب شود.

۸ــ۲ــ۴ــ شرایط فیزیکی لازم در چرخ‌دنده‌ها : برای عملکرد موفقیت‌آمیز چرخ‌دنده‌ها چند شرط زیر باید اعمال شود :

۱ــ مقطع حقیقی دندانه‌ها باید با مقطع تئوری یکی باشد (ساخت و طراحی باید یکسان باشد).

۲ــ فاصلهٔ دندانه‌ها باید یکسان و درست باشد.

۳ــ دایرهٔ گام حقیقی باید بر دایره گام تئوری منطبق و با محور چرخش چرخ‌دنده هم‌مرکز باشد. همچنین نقطهٔ تماس دو چرخ‌دندهٔ درگیر، در دایره گام (قطر متوسط چرخ‌دنده) باشد.

۴ــ سطح پیشانی و دامنهٔ دندانه‌ها باید برای مقاومت در مقابل سایش و جلوگیری از ایجاد صدا در هنگام چرخش، صاف و دارای سختی کافی باشند.

۵ــ محورهای مرکزی و یاتاقان‌ها دارای استحکام کافی باشند تا در اثر بارهای وارد شده، هنگام کار بتوانند فاصلهٔ مرکز تا مرکز مطلوب را حفظ کنند.

۹ــ۲ــ۴ــ روش ساخت چرخ‌دنده‌ها : روش‌های مختلفی برای ساخت چرخ‌دنده وجود دارد که هرکدام دارای معایب و مزایایی هستند و باید با توجه به نوع چرخ‌دنده، جنس، دقت مورد نیاز، امکانات موجود و هزینه ساخت بهترین روش را انتخاب کرد.

تعدادی ازاین روش‌ها عبارت‌اند از :

۱ــ توسط فرزهای افقی وعمودی (به کمک دستگاه تایکوف)؛

۲ــ توسط دستگاه‌های هابینگ؛

۳ــ توسط دستگاه‌های مخصوص دنده زنی؛

۴ــ توسط دستگاه‌های صفحه تراش و کله زنی؛

۵ــ توسط دستگاه‌های اسپارک؛

۶ــ توسط دستگاه‌های خانکشی؛

۷ــ توسط ریخته‌گری؛

۸ــ توسط قالب‌ها.

فعالیت کلاسی ۱

به کمک هنرآموز خود و با استفاده از کتب مرجع و اینترنت در مورد روش‌های بالا مطالبی را جمع آوری کنید و در کلاس ارائه دهید.

۱۰ــ۲ــ۴ــ هندسهٔ چرخ‌دنده‌ها

دایره گام[۱] : دایرهٔ فرضی است که همهٔ محاسبات همیشه بر پایهٔ قطر آن ،که قطر گام باشد، انجام می شود. دوایر گام یک جفت چرخ‌دنده به هنگام کار با یکدیگر مماس هستند. از دو چرخ‌دندهٔ درگیر آن، که کوچک‌تر است، چرخ کوچک[۲] و آن، که بزرگ‌تر است را معمولاً چرخ‌دنده[۳] گویند.

۱ــ pitch circle

۲ــ pinion

۳ــ gear

مدول m[1] : نسبت قطر گام به تعداد دنده‌هاست. واحد طولی که در اینجا به‌کار می‌رود میلی‌متر است. مدول همان مشخصه اندازهٔ دنده در دستگاه استاندارد بین المللی SI (اس آی) است.

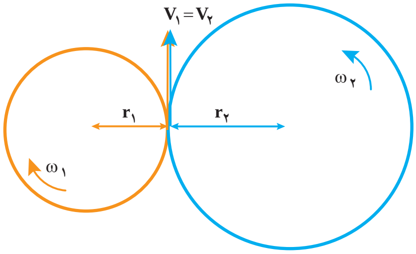
$$m=\frac{d}{N} \qquad (۴\_۶)$$

که در آن :

m = مدول به میلی‌متر

d = قطر دایرهٔ گام به میلی‌متر

نسبت تبدیل سرعت : هنگامی که دو چرخ‌دنده درگیرند، دوایر گام آنها نسبت به یکدیگر بدون لغزش می‌غلتند. شعاع و دوایر گام را به ترتیب $r_۱$ و $r_۲$ و سرعت زاویه‌ای آنها را $\omega_۱$ و $\omega_۲$ در نظر می‌گیریم (شکل ۱۶ــ۴).



شکل ۱۶ــ۴ــ نسبت سرعت در چرخ‌دنده‌ها

بنابراین سرعت خطی دایره گام آنها برابر است با :

$$V_۱=V_۲ \Rightarrow r_۱\omega_۱=r_۲\omega_۲ \qquad (۴\_۷)$$

پس رابطهٔ بین شعاع‌ها و سرعت‌های زاویه‌ای برابر است با :

$$\frac{\omega_۱}{\omega_۲}=\frac{r_۲}{r_۱} \qquad (۴\_۸)$$

مثال ۵ : فرض کنید بخواهیم در یک جعبه دنده سرعت ورودی ۱۸۰۰rpm و سرعت خروجی ۱۲۰۰ rpm باشد. نسبت آنها ۲ :۳ است و نسبت قطر گام نیز همین است، مثلاً اگر قطر چرخ کوچک ۱۰۰ میلی‌متر باشد ، قطر چرخ‌دنده بزرگ ۱۵۰ میلی‌متر خواهد بود. ابعاد دیگر چرخ‌دنده نیز همیشه بر مبنای دوایر گام است.

حال اگر تعداد دنده‌های چرخ‌دنده چرخ کوچک را ۱۸ دنده و چرخ‌دنده بزرگ درگیر با آن را ۳۰ دنده تعیین کنیم طوری‌که مدول این ارتباط چرخ‌دنده‌ای ۱۲ میلی‌متر باشد. سپس از رابطهٔ (۶ــ۴) اقطار گام چرخ کوچک وچرخ بزرگ به ترتیب چنین می‌شود :

$$d_۱=mN_۱=۱۲(۱۸)=۲۱۶\ mm \qquad d_۲=mN_۲=۱۲(۳۰)=۳۶۰\ mm$$

۱ــ module

فعالیت ۲-۴

یک چرخ‌دندهٔ صاف کوچک ۱۷ دنده با مدول ۳ میلی‌متر ، با سرعت ۱۱۲۰ دور در دقیقه می‌چرخد وچرخ‌دندهٔ بزرگ را با سرعت ۵۴۴ دور در دقیقه می‌گرداند. تعداد دنده‌های چرخ بزرگ و فاصلهٔ تئوریک مرکزین را پیدا کنید؟

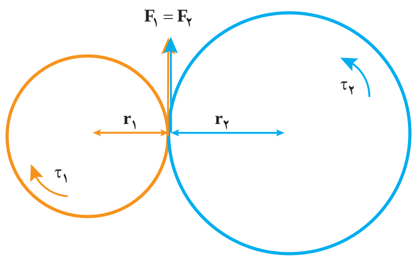
فاصلهٔ تئوریک جمع بین قطرهای گام خواهد بود.

نسبت تبدیل گشتاور: از آنجا که حرکت دندانه‌ها شتاب دار نیست، طبق قانون سوم نیوتن نیروی بین دندانه‌های دو جفت چرخ‌دنده با هم برابر است، پس می‌توان نوشت :

$$\tau_1=F_1.r_1 \quad \text{و} \quad \tau_2=F_2.r_2 \qquad (۴\_۹)$$

و $F_1 = F_2$ در نتیجه :

$$\frac{\tau_1}{r_1}=\frac{\tau_2}{r_2} \qquad (۴\_۱۰)$$



شکل ۱۷ــ۴ــ نسبت گشتاور در چرخ‌دنده‌ها

مثال ۶ : در مثال ۵ اگر گشتاور ورودی ۱۰ نیوتن متر باشد گشتاور خروجی چقدر خواهد بود؟

حل : کافی است رابطهٔ (۱۰ــ۴) را بازنویسی کنیم :

$$\frac{\tau_1}{r_1}=\frac{\tau_2}{r_2}\Rightarrow\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{r_1}{r_2}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow \tau_2=۱۵\text{N.m}$$

۳ــ۴ــ اجزای مکانیکی انعطاف‌پذیر

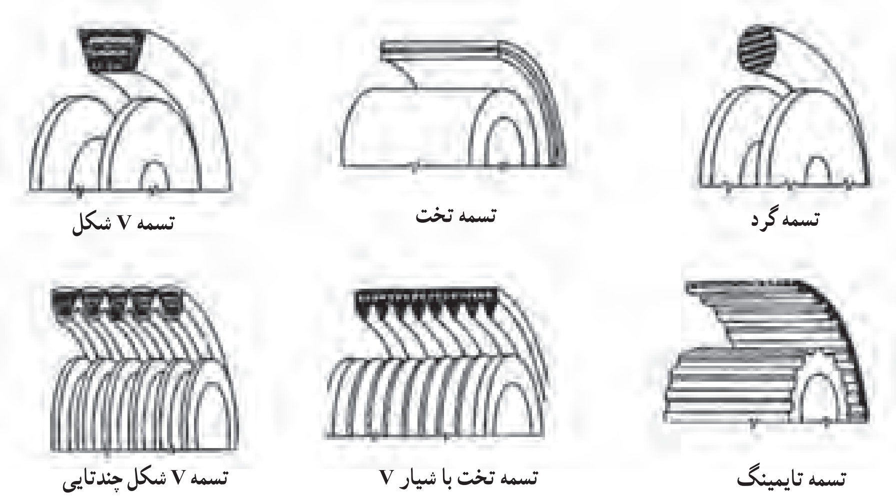
تسمه‌ها، طناب‌ها، زنجیرها و دیگر اجزای انعطاف‌پذیر برای دستگاه‌های تسمه نقاله مواد و انتقال توان در فواصل نسبتاً زیاد به کار می‌روند. اغلب پیش می‌آید که این اجزا را می‌توان به‌جای چرخ‌دنده‌ها، میله‌محورها و دیگر وسایل انتقال توان به‌کار برد. در بسیاری موارد کاربرد آنها طرح

ماشین را ساده و هزینه ساخت را کاهش می‌دهند. در کنار اینها، این اجزا کشسان و به‌طور معمول بلند هستند و در جذب بارهای تکان‌دار و فرو نشاندن اثرات لرزش وظیفهٔ مهمی دارند که این خود یک مزیت مهم برای عمر دستگاه محسوب می‌شود.

توجه! : بیشتر اجزای انعطاف‌پذیر، عمر دائمی ندارند و هرجا که به‌کار روند برای پیشگیری از سایش، فرسودگی و کاهش راندمان باید آنها را پس از مدت زمان معینی، تعویض کرد.

۱ــ۳ــ۴ــ تسمه و پولی : شش گونهٔ اصلی تسمه‌ها را در شکل ۱۸ــ۴ می‌بینید.

وسیله‌ای را که تسمه روی آن قرار می‌گیرد و به همراه آن به چرخش درمی‌آید پولی، طبلک یا قرقره می‌نامند. از پولی‌های تاجدار برای تسمه‌های تخت و پولی‌های شیاردار برای تسمه‌های V شکل و از پولی یا چرخ دندانه‌دار (تایمینگ) برای گروه تسمه‌های دندانه‌دار (تایمینگ) استفاده می‌شود.



شکل ۱۸ــ۴ــ انواع تسمه و پولی

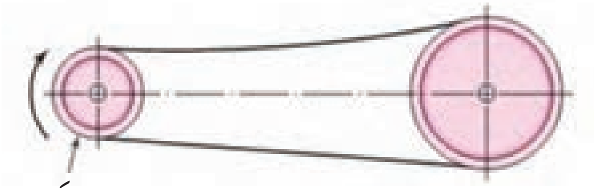
ویژگی‌های تسمه‌ها : برای استفاده از تسمه می‌توان مزایای زیر را نام برد :

۱ــ می‌توان از آنها برای فواصل زیاد استفاده نمود.

۲ــ به‌جز تسمه‌های دندانه‌دار بقیهٔ آنها روی قرقره مقداری لغزش خواهند داشت.

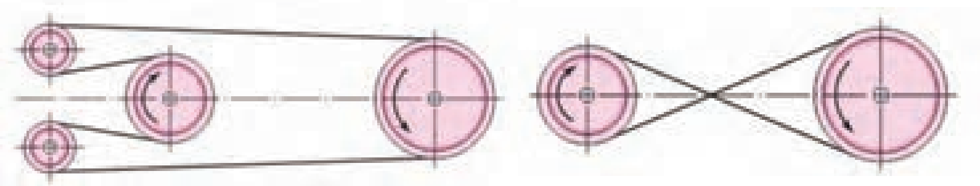
۳ــ در برخی از موارد برای دوری جستن از تنظیم فاصلهٔ بین قرقره‌ها که به علت شل‌شدن تسمه ضمن کار یا هنگام سوار کردن تسمه تازه ضرورت دارد، می‌توان از یک قرقرهٔ هرزگرد استفاده نمود.

شکل زیر یک گرداننده تسمه‌ای باز معمولی را نشان می‌دهد. برای تسمهٔ تخت همان‌طور که در شکل می‌بینید مقدار کشش چنان است که هنگام کار، سمت شل تسمه آشکار است (شکل ۱۹ــ۴). اگرچه بهتر است که طرف شل در بالا باشد ولی برای گونه‌های دیگر تسمه می‌توان بالا یا پایین را به‌کار برد زیرا معمولاً کشش آغازین در آنها بیشتر است. در واقع سمتی که تحت کشش است کاملاً سفت می‌شود و سمت دیگر شل می‌شود و شکم می‌دهد. حتی اگر تسمه را خوب سفت کرده باشید باز هم این اتفاق می‌افتد. پولی‌ای که به تولیدکنندهٔ توان متصل است پولی محرک و دیگری را متحرک می‌نامند. پولی‌هایی را که برای سفت کردن تسمه به‌کار می‌روند «پولی هرزگرد» می‌نامند.



شکل ۱۹ــ۴ ــ پولی محرک و متحرک و شل شدن تسمه

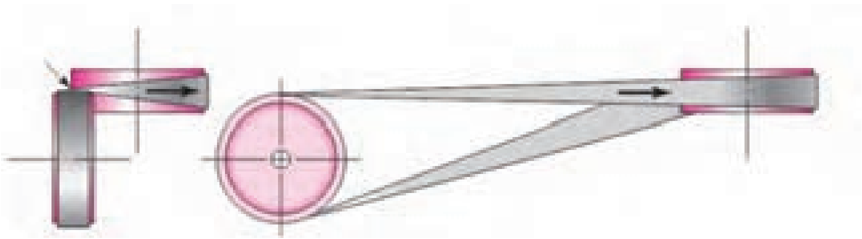
دو شیوهٔ تعویض جهت دوران را در شکل‌های پایین می‌بینید. این کار فقط با تسمه‌های تخت و گرد امکان‌پذیر است.



شکل ۲۰ــ۴ــ تعویض جهت گردش به کمک تسمه تخت

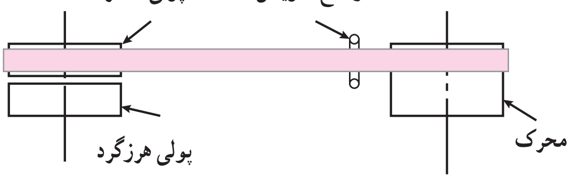
در هر دو شکل دو طرف تسمه (زیر و روی آن) با پولی در تماس است. پس نتیجه می‌گیریم که تسمه‌های V شکل یا دندانه‌دار را نمی‌توان برای چنین طرح‌هایی به‌کار برد.

در شکل پایین یک محرک تسمه تخت را می‌بینیم که برای پولی‌های ناهم‌صفحه (یا محور ناموازی) به‌کار رفته است (اجباری به متعامد بودن میل محورها آن‌چنان که در شکل می‌بینید، نیست). جای پولی‌ها باید چنان باشد که تسمهٔ هر پولی را در وسط سطح پولی دیگر ترک کند طرح های دیگری نیز می‌توان به‌کار برد ولی احتمالاً به پولی‌های راهنما یا هرزگرد نیاز باشد.



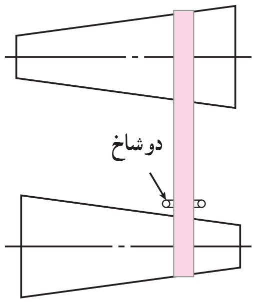
شکل ۲۱ ــ۴ــ تسمه و پولی با محور غیرموازی

خوبی دیگر تسمه های تخت در شکل زیر دیده می‌شود که در آن عمل کلاچ‌گیری با جابه‌جا کردن تسمه‌ها از یک طبلک شل به یک طبلک سفت یا رانده به دست می‌آید. شکل ۲۲ــ۴ نمونه‌ای از این روش را به تصویر کشیده است.



شکل ۲۲ــ۴ــ کلاچ‌گیری به کمک تسمه و پولی

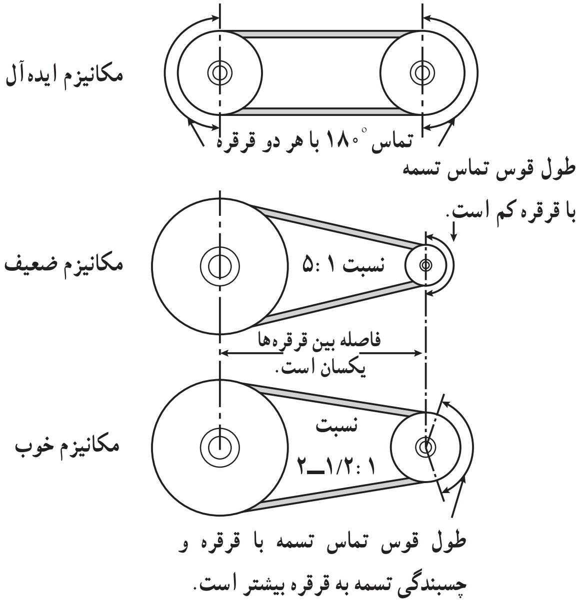
در شکل زیر دو گرداننده با سرعت متغیر می‌بینیم که اولی فقط برای تسمهٔ تخت به‌کار می‌رود و دومی که نمونه آن را در دریل عمودی می‌توان مشاهده کرد، به کمک پولی‌های شیاردار و با استفاده از تسمهٔ V شکل یا گرد به‌کار می‌رود. این خاصیت یکی از مزایای تسمه و پولی نسبت به گیربکس‌های چرخ‌دنده‌ای است. در خودروهای جدید از این مزیت برای تعویض دنده پیوسته (یا نسبت تبدیل پیوسته) استفاده می‌شود.



شکل۲۳ــ۴ ــ الف ــ نسبت تبدیل پیوسته

شکل ۲۳ــ۴ــ ب ــ نسبت تبدیل گسسته

چگونه ابعاد قرقره بر بازده توان تأثیر می‌گذارد: برای به دست آوردن حداکثر توان از تسمه، نسبت بین قرقره‌ها باید حداکثر ۳ به ۱ یا کمتر باشد (شکل ۲۴ــ۴).



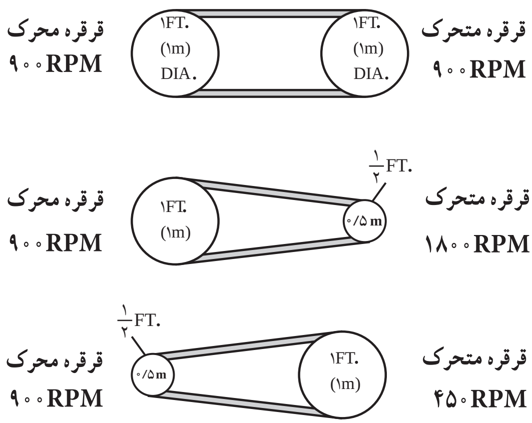
شکل ۲۴ــ۴ــ سطح تماس در پولی‌ها

نسبت‌های بیشتر طول قوس تماس را کاهش می‌دهد و موجب بکسوات (لغزش) تسمه و کاهش بازده توان خواهند شد. در قرقره‌های کوچک می‌توان با دور کردن محور قرقره‌ها از یکدیگر طول قوس تماس را اندکی افزایش داد. اگر قرقرهٔ بزرگی نیاز باشد بهترین روش استفاده از یک مکانیزم دو مرحله‌ای (با محور واسطه) است، تا از مکانیزم های یک مرحله‌ای با نسبت قرقرهٔ خیلی بزرگ یا یک قرقرهٔ بسیار کوچک اجتناب شود.

سرعت خروجی نسبی در مکانیزم‌های تسمه‌ای: اگر قطر دو قرقره یکی باشد هردو با سرعت یکسان خواهند چرخید.

اگر قطر قرقرهٔ متحرک کوچک‌تر از قطر قرقرهٔ محرک باشد قرقرهٔ متحرک سریع‌تر خواهد چرخید (شکل ۲۵ــ۴).

اگر قطر قرقرهٔ محرک کوچک‌تر از قطر قرقرهٔ متحرک باشد قرقرهٔ متحرک کندتر خواهد چرخید.



شکل ۲۵ـ۴ــ نسبت تبدیل دور در تسمه و پولی

رابطه زیر برای نسبت سرعت قرقره‌ها وجود دارد :

سرعت دوران قرقرهٔ متحرک × قطر قرقرهٔ متحرک = سرعت دوران قرقرهٔ محرک × قطر قرقرهٔ محرک

در شکل ۲۵ـ۴ نسبت سرعت، به ترتیب زیر است (از بالا به پایین) :

$$۱ \times ۹۰۰ = ۱ \times ۹۰۰$$

$$۱ \times ۹۰۰ = ۱/۲ \times ۱۸۰۰$$

$$۱/۲ \times ۹۰۰ = ۱ \times ۴۵۰$$

مثال ۷ : یک سامانهٔ تسمه و پولی با پولی محرک به قطر ۱۵ سانتی متر ($D_۱$=۱۵ cm) و دور ورودی ۲۴۰۰ دور بر دقیقه داریم، سیستم را به‌گونه‌ای طراحی کنید که دور خروجی ۴۰۰ دور بر دقیقه باشد.

حل : همان‌طور که گفته شد بهتر است نسبت تبدیل از ۱ :۳ فراتر نرود. اما در اینجا با تقسیم ۲۴۰۰ بر ۴۰۰ نسبت تبدیل ۱ :۶ به‌دست می‌آید. برای اینکه بتوان به این نسبت دست یافت از دو سری پولی و تسمه استفاده می‌کنیم. در واقع ۴ پولی نیاز داریم. که در آنها : $N_۱$=۲۴۰۰ rpm و $N_۴$=۴۰۰ rpm و $N_۳ = N_۲$ باشد.

مرحله اول را با نسبت ۱ :۳ و مرحله دوم را با نسبت ۱ :۲ در نظر می‌گیریم. پس :

$$N_۳ = N_۲ = \frac{۱}{۳} \times N_۱ = ۸۰۰ rpm$$

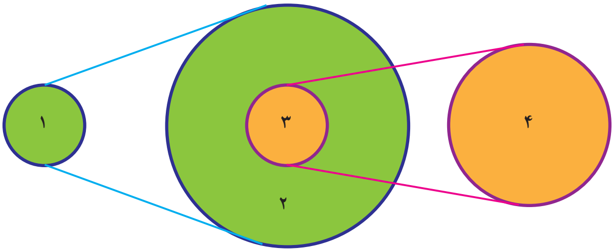
قطر پولی دوم برابر خواهد شد با : $D_2 = D_1 \times 3 = 45\ cm$

پولی سوم را می‌توان هم‌قطر پولی اول درنظر گرفت. بنابراین داریم :

$D_3=D_1=15\ cm$ و با توجه به نسبت تبدیل مرحله دوم قطر پولی چهارم برابر می‌شود با :

$D_4=D_3 \times 2 = 30\ cm$

شکل ۲۶ــ۴ به صورت نمادین این سامانه را نشان می‌دهد.



شکل ۲۶ــ۴ــ سامانه تسمه و پولی دومرحله‌ای

۴ــ۴ــ درجهٔ آزادی مکانیکی

درجهٔ آزادی یعنی حداقل تعداد متغیرهای یک سامانه، که با دانستن آنها حالت کلی آن سامانه مشخص شود.

هر ذرهٔ آزاد در فضا ۳ درجهٔ آزادی مکانیکی دارد. طول، عرض و ارتفاع متغیرهایی هستند که دانستن آنها برای دانستن موقعیت و وضعیت دقیق ذره لازم است. اما اگر بخواهیم موقعیت دقیق همان ذره را در یک صفحه بدانیم (مثلاً صفحهٔ XY) دیگر نیازی برای دانستن هر ۳ بعد احساس نمی‌شود (مثلاً Z) و تنها داشتن دو متغیر برای دانستن وضعیت آن لازم و کافی است. به تعداد متغیر مکانی (و حتی سرعت) لازم برای دانستن موقعیت یک جسم در فضا یا در صفحه، درجات آزادی مکانیکی آن می‌گویند.

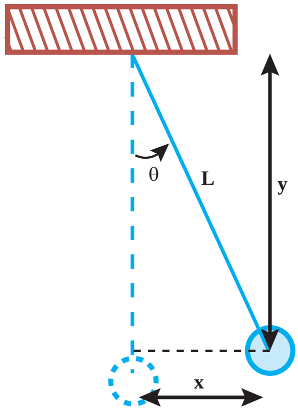
مثال ۸ : یک ذره بر روی یک خط در حال حرکت است. تعداد درجات آزادی آن را بیان کنید.

حل : این ذره یک درجهٔ آزادی دارد زیرا در حرکت روی یک خط، هندسه خط حرکت را محدود می‌کند و فقط دانستن موقعیت ذره نسبت به مبدأ حرکت برای دانستن حالت آن ذره کافی است.

مثال ۹ : با توجه به شکل ۲۷ــ۴، یک آونگ چند درجهٔ آزادی دارد؟

حل : با توجه به شکل ممکن است فکر کنید که این آونگ سه درجهٔ آزادی دارد. اما با دقت بیشتر می‌توان فهمید که این آونگ تنها یک درجهٔ آزادی دارد. زیرا :

$x = L.\sin(\theta)$ و $y = L.\cos(\theta)$



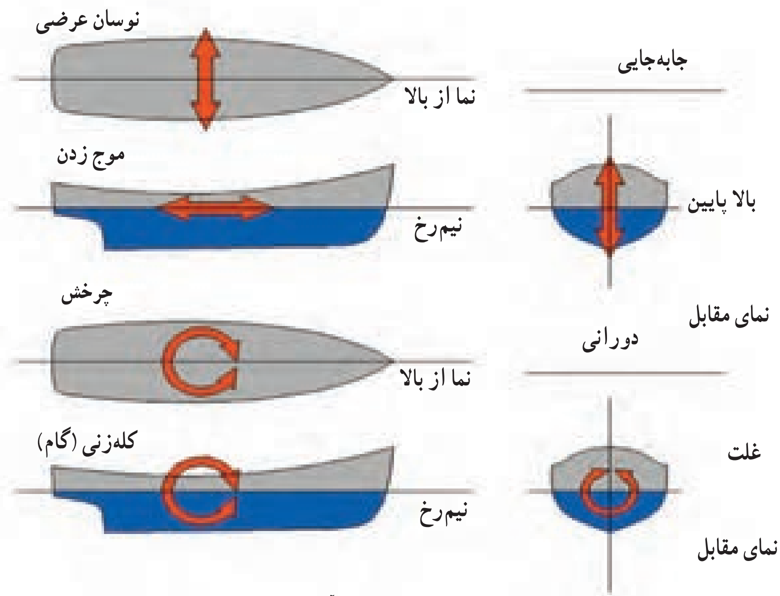
شکل ۲۷ــ۴ــ یک آونگ ساده

از معادله بالا می‌توان دریافت که تنها با دانستن موقعیت زاویه‌ای (θ) آونگ می‌توان x و y آن را نیز محاسبه کرد. پس این آونگ یک درجهٔ آزادی دارد.

۱ــ۴ــ۴ــ درجات آزادی اجسام صلب : اجسام صلب بر خلاف ذرات حجم دارند یعنی اینکه فقط دانستن موقعیت مکانی برای توصیف حالت آنها کافی نیست بلکه لازم است موقعیت‌های زاویه‌ای آنها نیز در دسترس باشد. برای مثال یک جعبهٔ مکعب مستطیل در فضا شش درجهٔ آزادی دارد. یعنی هم باید موقعیت مکانی آن (x و y و z) آن مشخص باشد و هم زاویه‌ای که هر وجه آن با یکی از صفحات مختصات می‌سازد.

۲ــ۴ــ۴ــ درجات آزادی کشتی : برای یک کشتی می‌توان ۶ درجهٔ آزادی در نظر گرفت. درجات آزادی کشتی در شکل ۲۸ــ۴ نشان داده شده است. این درجات براساس تعریف انجمن طراحان کشتی و مهندسان دریا[1] ارائه شده است.

۱ــ Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME)



شکل ۲۸ــ۴ــ درجات آزادی شناور

سه عدد از این درجات آزادی مربوط به جابه‌جایی کشتی و ۳تای دیگر مربوط به دوران کشتی حول محورهای جابه‌جایی می‌باشد.

فعالیت کلاسی ۲

این درجات آزادی در مورد شناورها را در کلاس به بحث بگذارید و آنها را با درجات آزادی در خودرو و وسایل پرنده مقایسه کنید. این وسایل برای ناوبری به چند ابزار نیاز دارند؟ هرکدام از این وسایل ناوبری بر روی کدام درجهٔ آزادی تأثیر دارد؟

فعالیت ۳-۴

یک جرثقیل دروازه‌ای بیابید و بگویید که این جرثقیل چند (فاصله space)درجهٔ آزادی دارد و کاربر این وسیله برای راهبری آن به چند اهرم یا وسیلهٔ راهبری نیاز دارد. این وسایل راهبری را با تعداد درجات آزادی مقایسه کنید. نتیجه را در گروه‌های ۲ نفره به بحث بگذارید و به کلاس ارائه دهید.

فعالیت کلاسی ۳

در یک قایق که از نظر فیزیکی ۶ درجهٔ آزادی دارد، کنترل چند درجهٔ آزادی می‌تواند به‌دست شما باشد؟ آیا تعداد کنترل‌ها بیشتر است یا تعداد درجات آزادی غیرقابل کنترل؟

۵ــ۴ ــ سرعت نسبی

در حرکت اجسام نسبت به هم، همان‌طور که جابه‌جایی نسبی سنجیده می‌شود، تغییرات آن نیز نسبی است. یعنی اگر دو جسم با سرعت‌های مختلف به هم نزدیک شوند و سرعتی که ناظر خارجی از آنها می‌بیند برای جسم اول V_1 و برای جسم دوم V_2 باشد، سرعتی که آنها نسبت به هم می‌بینند (یعنی ناظر روی جسم اول نسبت به جسم دوم و بالعکس) V_1+V_2 (و در صورت هم جهت بودن V_1-V_2) خواهد بود. با یک مثال این موضوع را روشن می‌کنیم.

مثال ۱۰ : یک یدک کش با سرعت ۳۰ گره دریایی به سمت شمال و یک نفت‌کش با سرعت ۲۰ گره دریایی به سمت جنوب و در همان مسیر یدک‌کش در حرکت است. ملوانان روی کشتی نفت‌کش می‌بینند که یدک‌کش با سرعت به آنها نزدیک می‌شود. سرعت نزدیک شدن یدک‌کش به نفت‌کش را بیابید.

حل : حل این مسئله بسیار ساده است. از دید ناظر روی کشتی نفت‌کش (جسم شماره ۲) سرعت نزدیک شدن یدک کش (جسم شماره ۱) برابر خواهد بود با :

$$V_{1/2} = V_1 + V_2 = ۳۰+۲۰=۵۰ \text{ knot}$$

مثال ۱۱ : در مثال قبل اگر این کشتی دوم نیز به سمت شمال در حرکت باشد، کارکنان این کشتی سرعت یدک‌کش را چقدر می‌بینند؟

حل : وقتی که هر دو کشتی در یک جهت در حرکت باشند، کارکنان کشتی ۲ می‌بینند که کشتی ۱ با سرعتی برابر سرعت نسبی بین آنها از کنارشان می‌گذرد. از آنجا که هر دو هم‌جهت هستند سرعت نسبی که آنها می‌بینند از مثال قبل خیلی کمتر است و برابر است با :

$$V_{1/2} = V_1 - V_2 = ۳۰-۲۰ = ۱۰ \text{ knot}$$

فراموش نکنید که سرعت یک کمیت برداری است و سرعت نسبی نیز یک خاصیت برداری خواهد بود. رابطه ۱۱ــ۴ یک رابطهٔ کلی برای سرعت به‌صورت برداری است.

$$\vec{V}_{1/2} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \qquad (۴ــ۱۱)$$

مثال ۱۲ : یک کشتی یدک‌کش با سرعت ۳۰ گره دریایی به سمت شمال‌شرق و یک ناوشکن نظامی با همان سرعت ولی در جهت شمال‌غرب در حرکت هستند (شکل ۲۹ــ۴). سرعت نسبی آنها نسبت به هم چقدر است؟ (یعنی سرعت دور شدن یا نزدیک شدن آنها نسبت به هم)

حل : ابتدا یک شکل نمادین رسم می‌کنیم تا مسئله را بهتر درک کنیم. سپس رابطه ۷ــ۴ را بازنویسی می‌کنیم. دقت کنید که شمال‌غرب و شمال‌شرق به معنی زاویه ۴۵ درجه با محور شمال است.

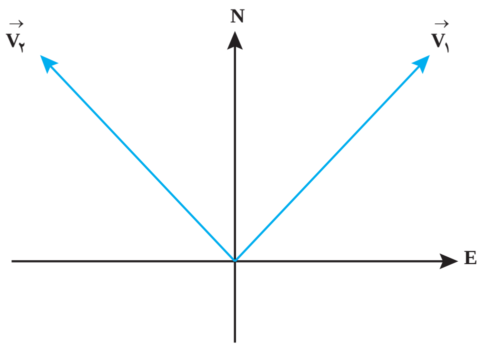
$$\vec{V}_{۱} = ۳۰\sin(۴۵)i + ۳۰\cos(۴۵)j$$

$$\vec{V}_{۲} = -۳۰\sin(۴۵)i + ۳۰\cos(۴۵)j$$

$$\vec{V}_{۱/۲} = \vec{V}_{۱} + \vec{V}_{۲} = ۰i + ۶۰\cos(۴۵)j = ۴۲/۴۳j$$

۱ــ۵ــ۴ــ تأثیر جریان آب بر سرعت و راه : اگر کشتی‌ای که در آب آرام حرکت می‌کند وارد محیطی با «جریان آب» شود سرعت و راه کشتی تغییر می‌کند. به این صورت که سرعت و راه جدید کشتی برآیند کار پروانه و تیغه سکان در آب آرام به علاوه سرعت جریان آب می‌باشد.

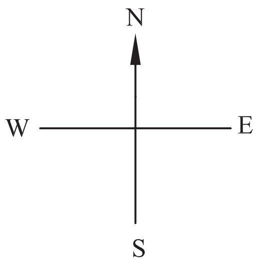
واژهٔ «سرعت» دارای دو مشخصهٔ تندی و جهت است. این دو مشخصه قابل اندازه‌گیری بوده و در نتیجه «سرعت» یک کمیت‌برداری است (در فصل قبل نیز به این مطلب اشاره شده است) و با بردار نشان داده می‌شود. طول «بردار سرعت» طوری اندازه‌گیری می‌شود که تندی را نشان دهد. در واقع نمودار بردار سرعت مانند نمودار بردار نیرو رسم می‌شود.



شکل ۲۹ــ۴ــ شکل مثال ۱۲

مثال ۱۳ : یک کشتی با سرعت ۱۶ گره دریایی در جهت شمال وارد محیطی با جریان آب به‌سرعت ۴ گره دریایی به سمت جنوب شرقی می‌شود (شکل ۳۰ــ۴). مطلوب است برآیند سرعت و راه کشتی.

حل : مطلب مهم در این مثال جهت جریان آب است. وقتی گفته شود جهت جریان جنوب شرقی است به این معنی است که جهت جریان با محور افقی در ناحیه SE دارای زاویه ۴۵ درجه است (البته چون زاویه ۴۵ درجه نصف زاویه ۹۰ درجه است در این مثال زاویه جریان با محور عمودی هم ۴۵ درجه می‌باشد). بنابراین نمودار فضایی مطابق شکل ۳۰ــ۴ رسم می‌شود.

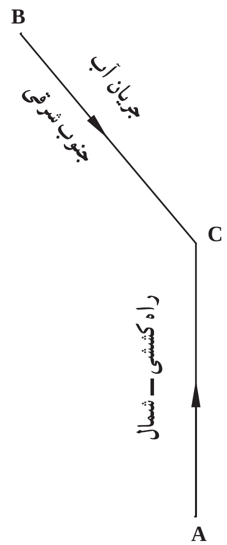


شکل ۳۰ــ۴ــ شکل مثال ۱۳

نمودار برداری مطابق شکل ۳۱ــ۴ قابل رسم است. نمودار برداری سرعت و جهت اولیه کشتی (یعنی سرعت و جهت در آب آرام) و سرعت و جهت جریان آب که کشتی وارد آن می‌شود را نشان می‌دهد.

در نمودار برداری دو ضلع مثلث و زاویه بین آنها معلوم و معین هستند. با استفاده از قانون کسینوس اندازهٔ ضلع سوم و با استفاده از قانون سینوس جهت (زاویه بین بردار برآیند و محور عمودی) محاسبه می‌شوند. مطابق قانون کسینوس می‌توان نوشت :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



شکل ۳۱ــ۴

قانون کسینوس و سینوس‌ها برای مثلث شکل ۳۲ـ۴ به‌صورت زیر نوشته می‌شود :

$$(ac)^{۲} = (ab)^{۲} + (bc)^{۲} - ۲(ab)(bc)\cos\beta$$

$$= ۱۶^{۲} + ۴^{۲} - ۲ \times ۱۶ \times ۴\cos ۴۵^{\circ}$$

$$= ۲۵۶ + ۱۶ - ۹۰/۵۱ = \sqrt{۱۸۱/۴۹}$$

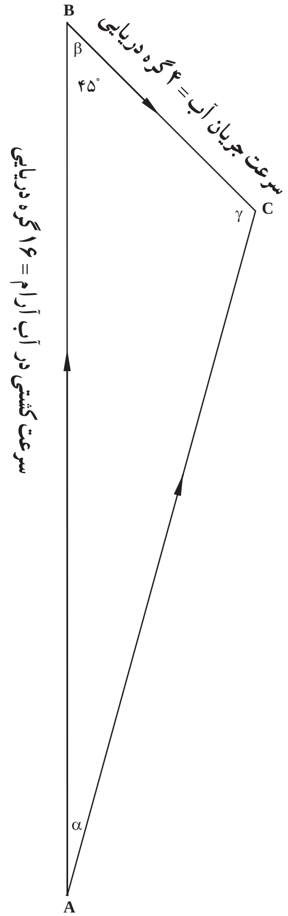
$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{۴}{\sin} = \dfrac{۱۳ \quad ۴۷}{\sin ۴۵} \Rightarrow \sin\alpha = ۰/۲۱ \\ \alpha = ۱۲^{\circ}۷' \end{cases}$$

$\Longrightarrow ac = ۱۳/۴۷$ گره دریایی

بنابراین تندی (سرعت کشتی در جریان آب) و راه کشتی به شرح زیر می‌باشد :

گره دریایی۱۳/۴۷ = تندی کشتی در جریان آب

$۱۲^{\circ}۷'$ = راه کشتی در جریان آب



شکل ۳۲ـ۴ــ شکل مثال ۱۳

خودآزمایی فصل چهارم

۱ــ سرعت زاویه‌ای را تعریف کنید.

۲ــ دو واحد مختلف سرعت دورانی چیست؟

۳ــ انواع چرخ‌دنده را نام ببرید.

۴ــ شکل ۳۳ــ۴ چه نوع چرخ‌دنده‌ای را نشان می‌دهد.

الف) چرخ‌دندهٔ ساده

ب) چرخ‌دندهٔ مارپیچ

ج) چرخ‌دندهٔ حلزونی

د) چرخ‌دندهٔ مخروطی

شکل ۳۳ــ۴

۵ــ جاهای خالی را پر کنید.

الف) چرخ‌دنده‌ها ______ زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که بخواهیم تغییر زیادی در سرعت و یا قدرت ایجاد کنیم.

ب) خاصیت مهم چرخ‌دنده‌های حلزونی نسبت تبدیل ______ و ______ است.

ج) کاربرد اصلی چرخ‌دنده‌های مخروطی در ______ خودروها است.

د) سامانه چرخ‌دنده شانه‌ای برای تبدیل حرکت ______ به حرکت ______ استفاده می‌شود.

هـ) ______ها، ______ها و ______ها از اجزای انعطاف پذیر هستند.

و) اجزای مکانیکی انعطاف پذیر در دستگاه‌های ______ و انتقال توان در فواصل نسبتاً ______ به کار می‌روند.

ز) به‌جز تسمه‌های ______ بقیه آنها روی قرقره مقداری لغزش خواهند داشت.

ح) در برخی از موارد برای دوری جستن از تنظیم فاصلهٔ بین قرقره‌ها که به علت شل‌شدن تسمه

ضمن کار یا هنگام سوار کردن تسمه تازه ضرورت دارد، می‌توان از یک ــــــــــــ استفاده نمود.

ط) یک آونگ ــــــــ درجهٔ آزادی دارد.

۶ــ درجات آزادی یک کشتی را نام ببرید.

۷ــ یک جرثقیل یک تنی وزنهٔ یک تنی را با سرعت ۱ متر بر ثانیه به بالا می‌کشد. اگر جعبه دنده آن شامل ۳ جفت چرخ‌دنده و یک تسمه و پولی به شرح زیر باشد، سرعت و گشتاور موتور لازم برای جرثقیل را حساب کنید.

تسمه و پولی : قطر پولی کوچک ۱۰ سانتی‌متر و قطر پولی بزرگ ۲۵ سانتی‌متر

چرخ‌دنده حلزونی (جفت اول) : با نسبت 1:15

جفت دوم : چرخ‌دنده ساده قطر گام چرخ‌دندهٔ کوچک ۵ سانتی متر قطر گام چرخ‌دنده بزرگ ۸ سانتی‌متر

جفت سوم : چرخ‌دنده ساده با مدول ۵، چرخ‌دنده اول ۲۰ دنده و چرخ‌دنده دوم ۳۵ دنده.

قطر طبلک : ۲۰ سانتی‌متر

۸ــ تندی زاویه‌ای میانگین پروانه یک موتور برون نصب را که در عرض ۲۰ دقیقه ۱۰۰۰۰ دور می‌چرخد برحسب rad/s تعیین کنید.

۹ــ یک شبانه‌روز در سیارهٔ زهره تقریباً ۳۰ ساعت است. در صورتی که قطر سیاره ۱۲۳۹۰ کیلومتر باشد تندی زاویه‌ای و سرعت خطی نقطه‌ای روی دایره مرکزی آن را محاسبه کنید.

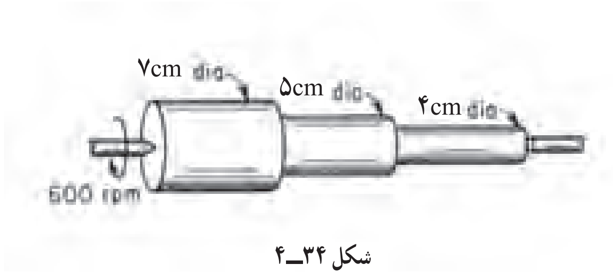
۱۰ــ قطر سیاره مشتری (بزرگ‌ترین سیاره منظومه شمسی) ۹۱۶۰۰ کیلومتر است. این سیاره هر ۹/۹ ساعت یک مرتبه دور خود می‌گردد. سرعت خطی یک نقطه روی خط استوای آن را تعیین کنید.

۱۱ــ میله پله‌دار شکل ۳۴ــ۴ با سرعت ۶۰۰ RPM در یک دستگاه تراش می‌چرخد. تندی خطی یک نقطه را برحسب متر بر ثانیه در موارد زیر محاسبه کنید :

(۱) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۷ سانتی‌متر است.

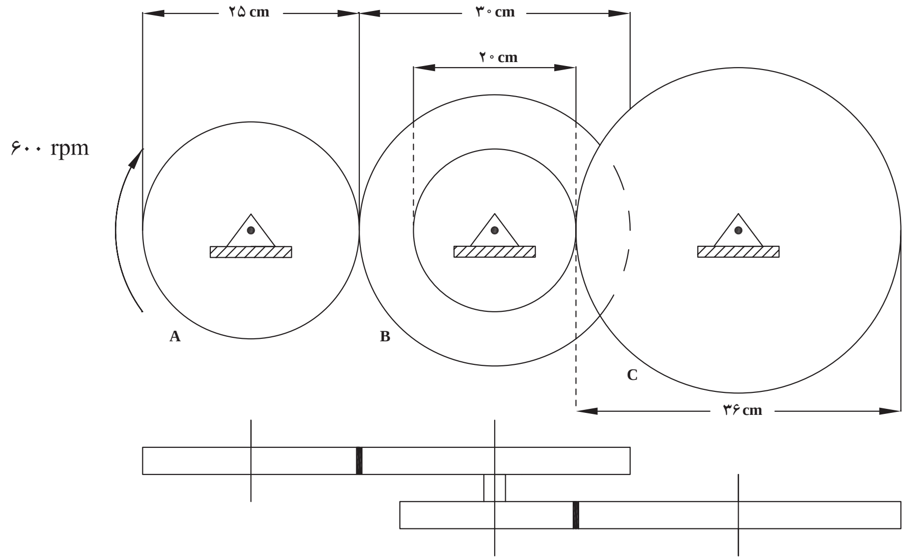
(۲) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۵ سانتی‌متر است.

(۳) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۴ سانتی‌متر است.



شکل ۴ـ۳۴

۱۲ـ چرخ‌دندهٔ A در مجموعه انتقال نیروی شکل ۴ـ۳۵ با تندی زاویه‌ای ۶۰۰RPM می‌چرخد. تندی زاویه‌ای چرخ‌دنده‌های B و C را تعیین کنید.



شکل ۴ـ۳۵

فصل ۵

ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

هدف کلی

محاسبات ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

هدف‌های رفتاری

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

۱ــ اهرم‌ها را تجزیه و تحلیل کند.

۲ــ قرقره و طناب را تجزیه و تحلیل کند.

۳ــ ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را استفاده کند.

۴ــ نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را محاسبه کند.

۵ــ قرقره زنجیری را تجزیه و تحلیل کند.

۶ــ چرخ و محور را تجزیه و تحلیل کند.

۷ــ حلزون و چرخ حلزون بالابر را تجزیه و تحلیل کند.

۱ــ۵ــ تجزیه و تحلیل ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

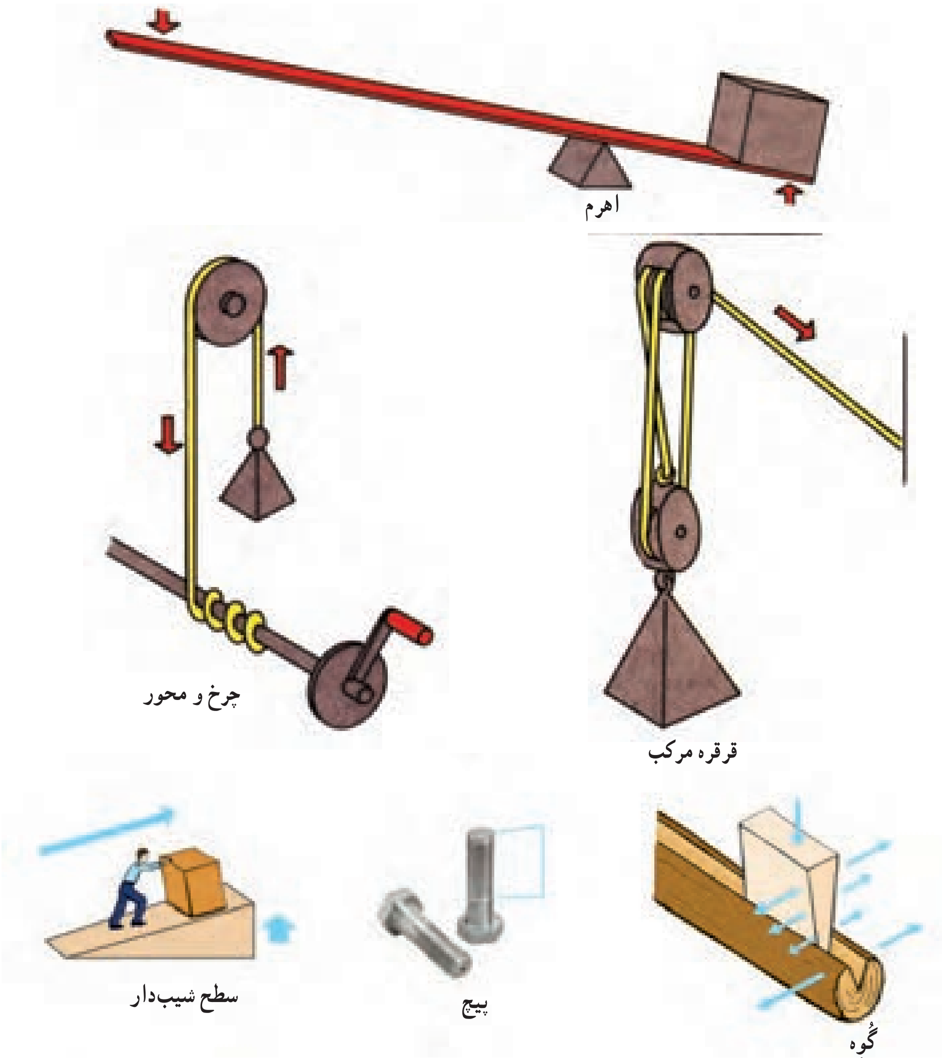
ابزارها توانایی بشر را برای انجام فرایندها افزایش می‌دهند. ماشین‌ها را می‌توان نوعی ابزار و یا مجموعه‌ای از ابزارها تلقی نمود. ابزارها موجب افزایش قدرت، سرعت، راندمان، دقت و بهره‌وری می‌شوند. ما نمی‌توانیم میخ را با دست خالی در یک تخته چوبی فرو کنیم ولی با کمک چکش دستی (یعنی یک ابزار ساده) انجام این فرایند امکان‌پذیر می‌شود. به‌طور کلی می‌توان ابزارها را تحت‌عنوان ابزارهای دستی، ابزارهای دستی برقی و ماشین‌ها طبقه‌بندی نمود. ابزارهای دستی ساده‌ترین نوع ابزارند طوری که نیروی لازم برای اجرای فرایند به وسیله بشر و بدون کمک وسایل دیگر تأمین می‌شود. ارّه دستی و پیچ گوشتی از این قبیل ابزارها هستند. ابزارهای دستی برقی نوع بهبود یافته ابزار دستی‌اند. در این نوع ابزار، دست بشر برای نگهداری و حرکت دادن آن به‌کار می‌رود ولی قدرت به وسیله یک موتور الکتریکی تأمین می‌شود. ارّه برقی دستی نمونه‌ای از این نوع ابزار است.

ماشین‌های ساده مبنای کار ماشین‌ها و سیستم‌های مرکب می‌باشند. اهرم‌ها، قرقره‌ها، چرخ‌دنده‌ها، سطوح شیب‌دار، پیچ‌ها و گوه‌ها که نمونه‌ای از آنها در شکل ۱ــ۵ ملاحظه می‌شود جزء ماشین‌های ساده هستند.

ماشین‌های ساده بدون تغییر در مقدار کار، اجرای فرایند را آسان می‌کنند. در واقع بهره مکانیکی را افزایش می‌دهند طوری که در نهایت اندازهٔ نیرو در حین انجام کار افزایش می‌یابد. افزایش بهره مکانیکی (یا بزرگ شدن نیرو در حین انجام کار) به‌تدریج توضیح داده می‌شود. در واقع در ماشین‌ها

مقدار کار ورودی و خروجی برابر است و فقط مقدار نیرو و جابه‌جایی تغییر می‌کند.

بدون یک چکش دستی بشر نمی‌تواند میخ را در دیوار فرو کند. با گرفتن چکش در دست و بالا بردن دست، اهرم ایجاد می‌شود. اهرم بهره مکانیکی را برای ورود نیرو به میخ افزایش می‌دهد و میخ با عملکرد گوه‌ای به دیوار فرو می‌رود. برای بیرون کشیدن میخ از میخ‌کش استفاده می‌شود. دست بشر نیروی کمی بر دسته میخ‌کش وارد می‌کند ولی به علت ایجاد اهرم، نیروی بزرگی در چنگال میخ‌کش موجب بیرون کشیدن میخ می‌شود.



شکل ۱ـ۵ـ ماشین‌های ساده

وقتی با مبانی کار ماشین‌های ساده آشنا شویم، می‌توانیم طرز کار ماشین‌های مرکب را درک کنیم. در واقع هر ماشین مرکب ترکیبی از دو یا چند ماشین ساده است.

۲ـ۵ـ اهرم[۱]

همهٔ ما از کودکی با اهرم آشنا می‌شویم، الاکلنگ نوعی اهرم است که در دو سر آن دو نیرو وارد می‌شود. اهرم دارای سه عامل مهم است.

۱ـ نیروی ورودی یا نیروی کارگر[۲] (E)

۲ـ نقطه اتکا یا مرکز دوران یا تکیه‌گاه[۳](F)

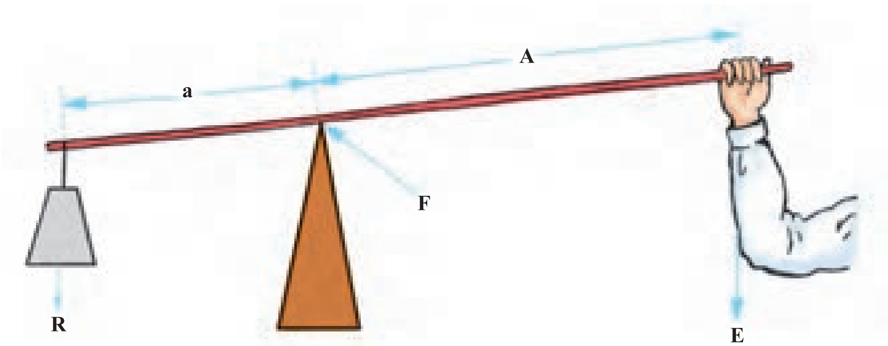
۳ـ نیروی مقاوم یا نیروی بار یا بار[۴] (R)

در شکل ۲ـ۵ یک اهرم ساده ملاحظه می‌شود. نیروی کارگر (E) در یک سر اهرم در فاصله A با نقطه اتکا (یا مرکز دوران) (F) عمل می‌کند و موجب جابه‌جایی بار (R) می‌شود. در این اهرم اندازهٔ کار از رابطهٔ ۱ـ۵ به‌دست می‌آید.

$$W = R \times a = E \times A \qquad (۱ـ۵)$$

با توجه به اینکه a کوچک‌تر از A است، بنابراین مقدار بار بزرگ‌تر از نیروی کارگر است. ملاحظه می‌شود اهرم سادهٔ مزبور دارای بهره مکانیکی است که در مثال به آن می‌پردازیم.

مثال ۱ : در اهرم سادهٔ شکل ۲ـ۵ فاصله A برابر ۰/۵ متر و فاصله a مساوی ۰/۱ متر است. اگر مقدار بار ۴۹۰ نیوتون باشد مقدار نیروی کارگر (E) چقدر است؟



شکل ۲ـ۵ـ ماشین‌های ساده

۱ـ Lever

۲ـ Effort

۳ـ Fulcrum

۴ـ Resistance

حل :

$$R \times a = E \times A$$

$$۴۹۰ \times ۰/۱ = ۰/۵ \times E$$

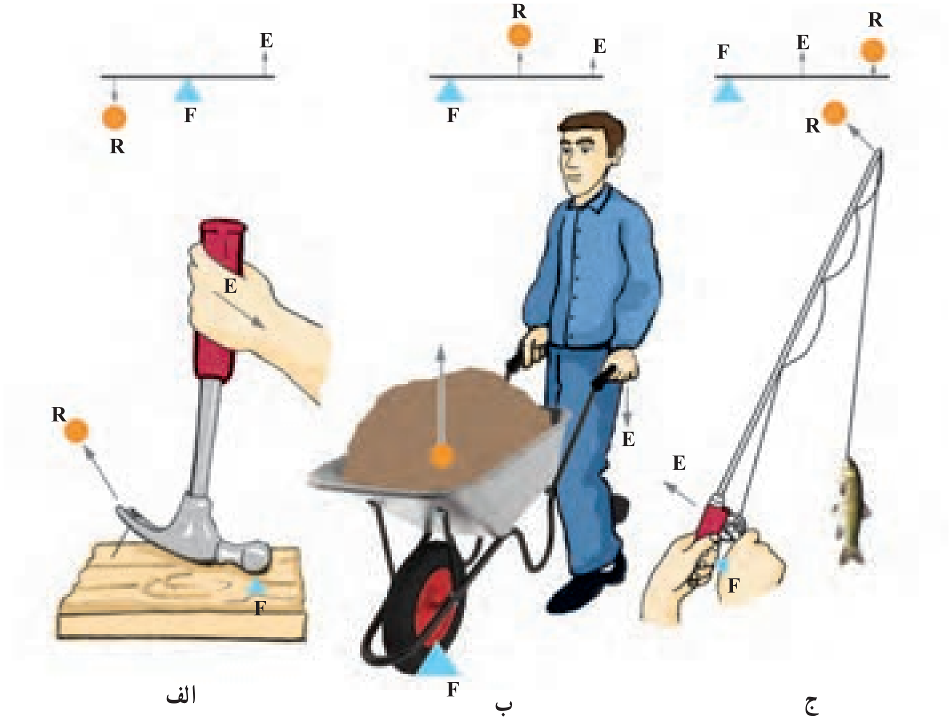
$E =$ ۹۸ نیوتون

فعالیت ۱-۵

رابطه ۱ــ۵ را با استفاده از روابط مربوط به گشتاور اثبات کنید.

۳ــ۵ــ انواع اهرم

در شکل ۳ــ۵ سه نوع اهرم نشان داده شده است. نوع اهرم با توجه به محل قرارگیری نقطه اتکا یا مرکز دوران نسبت به نیروی کارگر و نیروی بار تعیین می‌شود.



شکل ۳ــ۵ــ انواع سه‌گانه اهرم

۱ــ۳ــ۵ــ اهرم نوع اول : در اهرم نوع اول (مطابق بخش الف در شکل ۳ــ۵) نقطهٔ اتکا بین نیروی کارگر و نیروی مقاوم (بار) قرار دارد. در شکل ۳ــ۵ ــ ج از چکش میخ‌کش برای بیرون کشیدن میخ استفاده می‌شود.

الاکلنگ نمونه خوبی از اهرم نوع اول است. در این نوع اهرم مقدار نیروی بار و فاصله آن از نقطه اتکا (یا تکیه‌گاه) با توجه به نیاز فرایند قابل تغییر است. مثال‌های زیر این مطلب را توضیح می‌دهد.

مثال ۲ : شخصی به وزن ۷۰۰ نیوتون در یک سر الاکلنگ نشسته است. طول الاکلنگ دو متر است و تکیه‌گاه در فاصله نیم متری این شخص قرار دارد. شخصی با وزن ۵۰۰ نیوتون در طرف دیگر الاکلنگ می‌نشیند. برای ایجاد موازنه، باید فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه چقدر باشد؟

حل : با توجه به رابطهٔ ۱ــ۵ می‌توان نوشت :

$R \times a = E \times A$

E = وزن شخص اول = ۷۰۰ نیوتون

A = ۰/۵ متر

R = وزن شخص دوم = ۵۰۰ نیوتون

$۵۰۰ \times a = ۷۰۰ \times ۰/۵$

a = ۰/۷ متر

مثال ۳ : در صورتی که وزن شخص اول ۸۰۰ نیوتون باشد فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه باید چقدر باشد؟

حل :

$R \times a = E \times A$

E = وزن شخص اول = ۸۰۰ نیوتون

A = ۰/۵ متر

R = ۵۰۰ نیوتون

a = فاصله شخص دوم از تکیه‌گاه

$۵۰۰ \times a = ۸۰۰ \times ۰/۵$

a = ۰/۸ متر

بنابراین ملاحظه می‌شود با افزایش نیرو در یک سر الاکلنگ (اهرم نوع اول) فاصله بازوی نیروی مقاوم افزایش می‌یابد.

نمونه دیگر از اهرم نوع اول در شکل ۴ـ۵ ملاحظه می‌شود. در این شکل محل اتکا پارو بر قایق مرکز دوران اهرم می‌باشد. آب به‌عنوان نیروی مقاوم (بار) و نیروی بازوی ملوان به‌عنوان نیروی کارگر می‌باشند. بدین صورت پارو یک اهرم نوع اول محسوب می‌شود.

دیلم، قیچی و انبر دست نیز اهرم نوع اول محسوب می‌شوند.

شکل ۴ـ۵ ــ پارو اهرم نوع اول است.

۲ــ۳ــ۵ــ اهرم نوع دوم : در اهرم نوع دوم (مطابق بخش ب در شکل ۳ـ۵) نقطهٔ اتکا در انتها و نیروی کارگر در سر اهرم ولی نیروی مقاوم (بار) در بین نقطه اتکا و نیروی کارگر قرار دارد. در این شکل فرغون ملاحظه می‌شود.

مثال ۴ : اگر نیروی کارگر بر دسته‌های فرغون در شکل ۵ـ۵ برابر ۲۲۰ نیوتون در فاصله ۱/۲ متری از نقطه اتکا (چرخ فرغون) باشد و فاصله مرکز ثقل نیروی بار از نقطه اتکا برابر ۰/۳ متر باشد مقدار نیروی مقاوم (بار) که به وسیله ملوان قابل بلند کردن است چقدر است؟

حل : با توجه به رابطهٔ ۱ـ۵ داریم :

$$۲۲۰ \times ۱/۲ = R \times ۰/۳$$

$R = ۸۸۰$ نیوتون

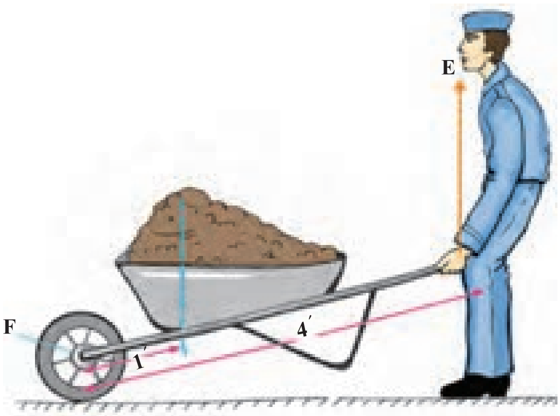
مثال ۵ : چنانچه فاصله مرکز ثقل بار از چرخ فرغون ۰/۳۵ متر شود اندازه نیروی کارگر باید چقدر باشد؟

حل :

$$۸۸۰ \times ۰/۴ = E \times ۱/۲$$

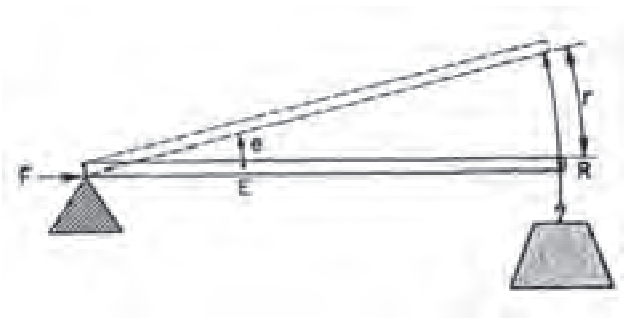
$E = ۲۹۳/۳$ نیوتون

بنابراین در صورت افزایش فاصله بار از نقطه اتکا نیروی کارگر باید افزایش یابد.



شکل ۵ــ۵ــ اهرم نوع دوم

۳ــ۳ــ۵ــ اهرم نوع سوم : در اهرم نوع سوم (مطابق بخش ج در شکل ۳ــ۵) نیروی کارگر بین نقطه اتکا و نیروی مقاوم (بار) قرار می‌گیرد. در این نوع اهرم سرعت حرکت بار زیاد است ولی نیروی کارگر باید بزرگ باشد. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود نقطه اتکا در محل نگه‌داشتن دسته قلاب ماهی‌گیری با دست راست صیاد قرار دارد. نیروی مقاوم (بار) که ماهی صید شده می‌باشد در انتهای اهرم است و نیروی کارگر که به‌وسیله دست چپ صیاد وارد می‌شود بین نقطه اتکا و بار قرار دارد. برای آسان‌تر شدن درک مطلب به شکل ۶ــ۵ مراجعه شود. همچنان که نیروی E فاصله e را می‌پیماید نیروی مقاوم (بار) R فاصله r را طی می‌کند. ملاحظه می‌شود فاصله r بزرگ‌تر از فاصله e می‌باشد. در نتیجه سرعت حرکت R باید بزرگ‌تر از سرعت حرکت E باشد زیرا R و E دو فاصلهٔ مختلف را در مدت زمان مشابه و معین طی می‌کنند. این پدیده عیناً در مورد صیاد و ماهی به وجود می‌آید.



شکل ۶ــ۵ــ اهرم نوع سوم

حال به شکل ۷ــ۵ نگاه کنید. گلوله R به وسیله انگشتان و کف دست نگه‌داشته شده است. نقطه اتکا F در آرنج قرار دارد و محل اجرای نیروی کارگر E بین آرنج و کف دست است.

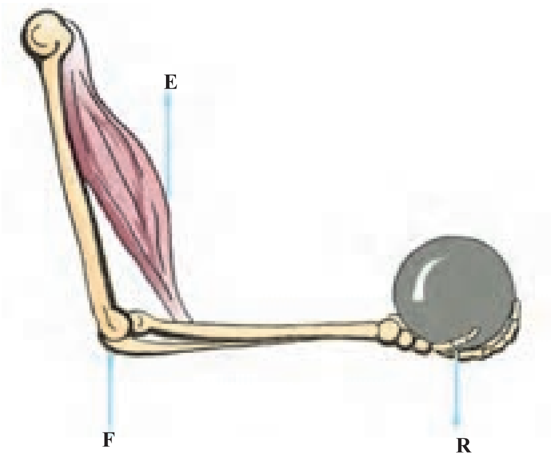
مثال ۶ : چنانچه در شکل ۶ــ۵ فاصله E و R از F به‌ترتیب ۲/۵ و ۴۵ سانتی‌متر و مقدار R برابر ۴۰ نیوتون باشد. مقدار نیروی E چقدر است؟

حل :

E × ۲/۵ = ۴۰ × ۴۵

E = ۷۲۰ نیوتون

نتیجه می‌گیریم در اهرم نوع سوم نیروی کارگر بزرگ‌تر از نیروی مقاوم (بار) است.



شکل ۷ــ۵ــ بازو اهرم نوع سوم است.

۴ــ۳ــ۵ــ بهرهٔ مکانیکی[1] : ملاحظه شد که در اهرم‌های نوع اول و دوم مقدار بار بزرگ‌تر از مقدار نیروی کارگر می‌شود. افزایش نیروها در اهرم نوع اول و دوم به بهره مکانیکی مثبت موسوم است. اهرم نوع سوم بهره مکانیکی مثبت ندارد ولی می‌تواند سرعت یا مسافت جابجایی را افزایش دهد. در اهرم نوع سوم نیروی کارگر بیشتر از نیروی مقاوم (بار) است. بهرهٔ مکانیکی به صورت رابطهٔ زیر نشان داده می‌شود :

$$\text{بهرهٔ مکانیکی} = \frac{\text{بار}}{\text{نیروی کارگر}} \quad \text{یا} \quad MA = \frac{R}{E} \qquad (۵\text{ــ}۲)$$

۱ــ Mechanical Advantage

مثال ۷ : در مثال‌های ۴ و ۵ بهرهٔ مکانیکی را حساب کنید.

حل : با استفاده از رابطهٔ ۲ــ۵ برای مثال ۴ داریم :

$$MA=\frac{R}{E}=\frac{۸۸۰}{۲۲۰}=۴$$

با استفاده از رابطهٔ ۲ــ۵ برای مثال ۵ داریم :

$$MA=\frac{R}{E}=\frac{۸۸۰}{۲۹۳/۳}=۳$$

رابطهٔ ۲ــ۵ را می‌توان به شکل رابطهٔ ۳ــ۵ بازنویسی کرد. در این حالت نسبت بازوهای اهرم به‌عنوان بهرهٔ مکانیکی انتخاب می‌شود.

$$\text{بهرهٔ مکانیکی}=\frac{\text{بازوی نیروی کارگر}}{\text{بازوی مقاوم}} \quad \text{یا} \quad MA=\frac{A}{a} \qquad (۵\text{ــ}۳)$$

مثال ۸ : برای بازوی مثال ۶ بهرهٔ مکانیکی را محاسبه کنید.

حل : با استفاده از رابطهٔ ۳ــ۵ برای مثال ۶ داریم :

$$MA=\frac{A}{a}=\frac{۴۵}{۲/۵}=۱۸$$

دقت کنید که بهرهٔ مکانیکی یک کمیت اسکالر و بی‌بُعد است.

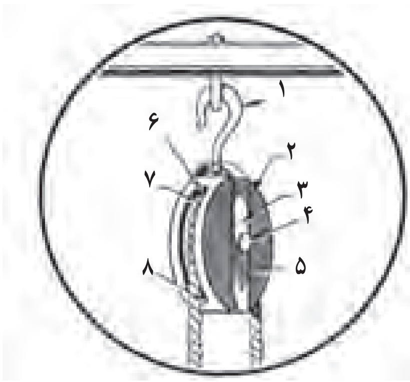
۴ــ۵ــ قرقره و طناب[۱]

قرقره وسیله مدوری است که حول محور خود حرکت دورانی دارد. روی محیط قرقره شیاری برای قرار گرفتن طناب وجود دارد. قسمت‌های مختلف یک قرقره در شکل ۸ــ۵ مشاهده می‌شود. در شکل ۹ــ۵ از قرقره ثابت تک شیاره برای بالا بردن پرچم استفاده شده است. همچنان‌که شخص طناب را پایین می‌کشد پرچم بالا می‌رود. این قرقره را قرقره تک شیاره ثابت می‌نامیم. در شکل ۱۰ــ۵همین قرقره در محل نصب مشاهده می‌شود. نیروی کارگر E در طناب A و نیروی مقاوم R در طناب B اعمال می‌شوند. مشاهده می‌شود که اندازهٔ بازوی EF مساوی بازوی FR است. در این دستگاه با اعمال نیروی کارگر کوچک، جهت کشش تغییر می‌کند.

قرقرهٔ ثابت تک شیاره نوعی اهرم نوع اول با بازوهای مساوی است. بنابراین اندازهٔ بهره مکانیکی در آن برابر با ۱ می‌باشد، لذا اگر در نقطه A طناب با یک نیروی ۵ نیوتونی پایین کشیده شود در نقطه B طناب با همان مقدار بالا می‌رود.

۱ــ Block and Tackle

(۱) قلاب
(۲) صفحه قرقره
(۳) نوار حافظ
(۴) پین
(۵) ورق بیرونی
(۶) محفظهٔ طناب بخور
(۷) شیار قرقره
(۸) نشیمنگاه قرقره



شکل ۸ــ۵ــ قسمت‌های مختلف قرقره

شکل ۱۰ــ۵ــ این قرقره فاقد بهره مکانیکی است.

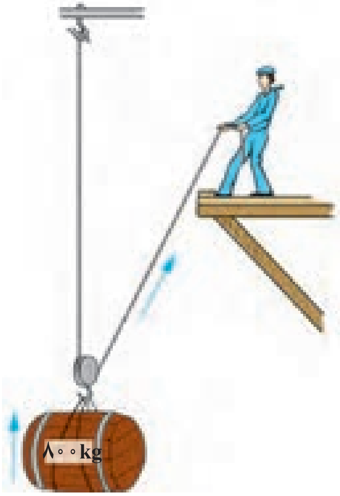

شکل ۹ــ۵ــ قرقره و طناب در قرقره ثابت تک‌شیاره

در شکل ۱۱ــ۵ همان قرقره به‌کار رفته است. در این شکل یک انتهای طناب از سقف آویزان است و انتهای دیگر در دست فرد است. بشکه‌ای به وزن ۸۰۰ نیوتون به وسیله قرقره و طناب تحمل می‌شود. با کشیدن طناب، قرقره و بشکه با هم بالا می‌آیند. وقتی قرقره و طناب به این صورت استفاده شود مجموعهٔ آن قرقره متحرک نامیده می‌شود. با توجه به اینکه وزن بشکه ۸۰۰ نیوتون است، هر نیمه از طناب به همراه قرقره ۴۰۰ نیوتون از بار را تحمل می‌کند. این موضوع با رسم نمودار آزاد جسم و نوشتن معادلات تعادل به‌دست می‌آید (فراموش نکنید معادلات تعادل در حالی نوشته می‌شود که جسم در حال سکون باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند.). از زاویه طناب در دست فرد با محور عمود صرف‌نظر کنید.

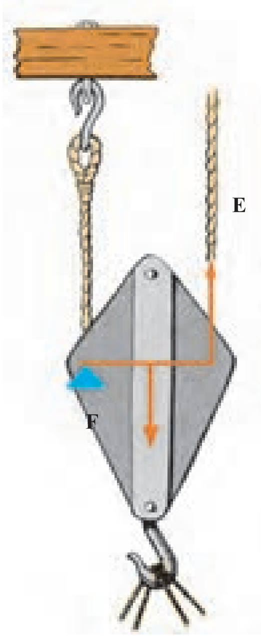
بهرهٔ مکانیکی برابر است با :

$$M.A.=\frac{R}{E}=\frac{۸۰۰}{۴۰۰}=۲$$

در این دستگاه، قرقرهٔ متحرک تک شیاره همانند اهرم نوع دوم عمل می‌کند. توضیح چگونگی اعمال نیروها در شکل ۱۲ــ۵ نشان‌داده شده‌است. نیروی E روی بازوی EF که قطر چرخ قرقره است وارد می‌شود. نیروی مقاوم (بار) R روی بازوی FR که شعاع چرخ قرقره است مقاومت می‌کند. با توجه به اینکه اندازهٔ قطر دو برابر شعاع است بنابراین بهره مکانیکی دستگاه برابر ۲ است. باید توجه کرد وقتی نیروی E به اندازه یک متر به طرف بالا حرکت می‌کند بار در محل R فقط به اندازهٔ نیم‌متر بالا می‌رود. اگرچه در این دستگاه بهره مکانیکی حاصل می‌شود ولی طول کابلی که به‌وسیله دست کارگر بالا کشیده می‌شود بیشتر از فاصله‌ای است که بار بالا می‌آید. البته استفاده از قرقره و طناب به‌صورت شکل ۱۱ــ۵ مشکل است و برای بالا کشیدن یک جسم مشابه، از دو قرقره مطابق شکل ۱۳ــ۵ بهره می‌گیرند. در این سیستم قرقره پایین متحرک و قرقره بالایی ثابت است. قرقره ثابت فقط جهت کشش را تغییر می‌دهد و قرقرهٔ متحرک بهرهٔ مکانیکی را دو برابر می‌کند.



شکل ۱۱ــ۵ــ قرقرهٔ متحرک



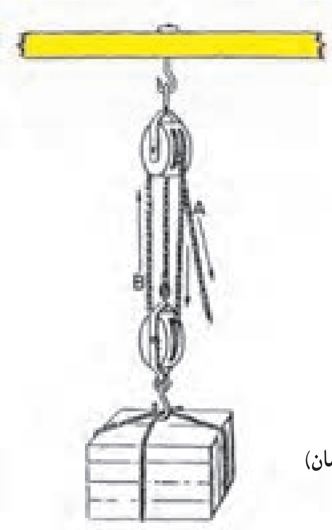
شکل ۱۲ــ۵ــ قرقرهٔ متحرک همانند اهرم نوع دوم


شکل ۱۳ــ۵ــ ترکیب قرقرهٔ ثابت و متحرک

برای مثال در شکل ۱۴ــ۵ مجموعهٔ قرقره و طناب متشکل از قرقره ثابت دو شیاره و قرقره متحرک تک شیاره مشاهده می‌شود. در این مجموعه بار از قرقره متحرک آویزان است. قرقره متحرک نیز به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌شود. هر بخش از طناب به اندازهٔ مساوی بار را تحمل می‌کنند. اگر وزن صندوق ۳۰۰۰ نیوتون باشد، هر طناب به اندازهٔ ۱۰۰۰ نیوتون از بار را تحمل می‌کند. اگر نیروی وارد بر طناب B برابر ۱۰۰۰ نیوتون باشد کارگر مجبور است یک نیروی ۱۰۰۰ نیوتون برای کشیدن طناب A وارد کند تا بتواند صندوق را بالا ببرد.

بهرهٔ مکانیکی برابر است با :

$$M.A.=\frac{R}{E}=\frac{۳۰۰۰}{۱۰۰۰}=۳$$



وقتی بار به وسیله دو بخش از طناب تحمل می‌شود، بهرهٔ مکانیکی برابر ۲ و وقتی به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌شود بهره مکانیکی برابر ۳ است. این نتیجه، راهنمای خوبی برای محاسبه بهره مکانیکی انواع مجموعه‌های قرقره و طناب است. به این ترتیب که تعداد بخش‌هایی از طناب که بار به‌وسیله آنها تحمل می‌شود مساوی بهره مکانیکی است. نکته مهم، اطمینان یافتن از استحکام و مناسب بودن طناب برای تحمل بار است.

شکل ۱۴ــ۵ــ مجموعه قرقره ثابت دو شیاره و قرقره متحرک تک‌شیاره (ناهمسان)

فعالیت کلاسی ۱

به کمک هنرآموز و گروه همکلاسی‌ها سعی کنید ترکیب‌های مختلفی از انواع قرقره را بیابید و بهرهٔ مکانیکی آنها را محاسبه کنید.

اکنون آنچه را که در مورد قرقره و طناب آموختیم به‌طور خلاصه در زیر می‌آوریم تا به‌طور عملی، در کشتی قابل استفاده باشد.

ــ تنها مزیت قرقره ثابت تک شیاره تغییر در جهت کشیدن طناب است و بهره مکانیکی آن برابر عدد یک است.

ـ در قرقره متحرک تک شیاره بهرهٔ مکانیکی برابر ۲ است.

ـ مجموعه قرقره و طناب را می‌توان به صورت‌های مختلف با ترکیب قرقره‌های تک شیاره، دو شیاره و سه شیاره و بهره مکانیکی بزرگ‌تر استفاده نمود.

ـ تعداد بخش‌های طناب که از یک قرقره متحرک می‌گذرند مشخص کنندهٔ تقریبی بهره مکانیکی آن هستند.

ـ اگر انتهای طناب به یک قرقره متحرک محکم شود بهرهٔ مکانیکی به اندازهٔ عدد یک افزایش می‌یابد.

۵ــ۵ــ راندمان ماشین

تاکنون آموختیم که مجموعه قرقره و طناب در واقع نوعی ماشین بالابر است. ماشین بالابر مکانیزمی برای جابه‌جایی بار در امتداد قائم و امتداد افقی و یا هر دو می‌باشد.

در این فرایند نیروهای ورودی و مصرفی به نیروی کارگر و نیروی مقاوم به بار موسوم است. کار انجام شده به‌وسیله یک ماشین نمی‌تواند بیش از کار ورودی به آن باشد. بنابراین هیچ ماشینی دارای راندمان صد در صد نیست و مقدار معینی از کار ورودی به علت اصطکاک بین اجزاء و قطعات از دست می‌رود.

روابط موجود برای کار ورودی، کار مفید و اصطکاک به شرح زیر است:

(۵ــ۴) کار ورودی به ماشین = کار از دست رفته به علت اصطکاک + کار مفید

(۵ــ۵) تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر × نیروی کارگر= کار ورودی

(۵ــ۶) تغییر مکان بار × بار= کار مفید

با صرف‌نظر از اصطکاک از روابط (۴ــ۵) تا (۶ــ۵) می‌توان رابطه (۷ــ۵) را استخراج کرد.

(۵ــ۷) تغییر مکان بار × بار= تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر × نیروی کارگر

نسبت تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر به تغییر مکان بار، به نسبتِ سرعت[1] یا به اختصار v.r. موسوم است. اندازهٔ نسبت سرعت برای هر ماشین خاص ثابت است و بستگی به طراحی آن دارد.

نسبت سرعت با انجام آزمایش به‌دست‌می‌آید. اما می‌توان رابطهٔ (۸ــ۵) را برای آن معرفی کرد.

$$\text{(v.r.)}\ \text{نسبت سرعت} = \frac{\text{تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}} \qquad (۵ـ۸ـ۱)$$

$$\text{(v.r.)}\ \text{نسبت سرعت} = \frac{A}{a} \qquad (۵ـ۸ـ۲)$$

۱ــ Velocity Ratio

همیشه راندمان ماشین‌ها به صورت نسبت کار خروجی یا کار مفید به کار ورودی تعریف می‌شود. هرچه راندمان یک دستگاه بالاتر باشد استفاده از این دستگاه مقرون به‌صرفه‌تر است. حداکثر راندمان یک ماشین می‌تواند ۱ باشد.

رابطهٔ (۹ــ۵) راندمان ماشین را تعریف می‌کند.

$$\text{راندمان} = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کار ورودی}} = \frac{\text{تغییر مکان بار} \times \text{بار}}{\text{تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر} \times \text{نیروی کارگر}} \quad (۱ــ۹ــ۵)$$

$$\text{راندمان} = \frac{R \times a}{E \times A} \quad (۲ــ۹ــ۵)$$

در بند ۴ــ۲ــ۵ از همین فصل آموختیم که بهرهٔ مکانیکی برابر است با نسبت بار به نیروی کارگر، لذا می‌توان رابطهٔ (۹ــ۵) را به‌صورت رابطهٔ (۱۰ــ۵) بازنویسی کرد.

$$\text{راندمان} = (M.A.) \times \frac{۱}{v.r.} = \frac{M.A.}{v.r.} = \frac{\text{بهره مکانیکی}}{\text{نسبت سرعت}} \quad (۱۰ــ۵)$$

راندمان در رابطه (۱۰ــ۵) به صورت کسری بیان شده است. برای بیان راندمان به صورت درصد، راندمان در عدد صد ضرب می‌شود.

در صورتی که از اصطکاک صرف‌نظر شود یا وجود نداشته باشد فقط نیروی کارگر باید بار را جابه‌جا کند. این‌گونه نیروی کارگر به نیروی کارگر مطلوب یا ایده‌آل موسوم است. اگر از لحاظ تئوری یک ماشین کاملاً بدون اصطکاک وجود داشته باشد، راندمان آن صددرصد یا مساوی عدد یک است.

در این‌گونه ماشین بهره مکانیکی مساوی با نسبت سرعت است و می‌توان نوشت:

$$M.A. = v.r. \text{ و } \frac{R}{E_۱} = v.r. \text{ و } E_۱ = \frac{R}{v.r.} \quad (۱۱ــ۵)$$

$E_۱$ نیروی کارگر مطلوب یا ایده‌آل است. البته با توجه به اینکه در ماشین‌های واقعی اصطکاک وجود دارد رابطهٔ زیر در هر ماشین واقعی برقرار است.

(۱ــ۱۲ــ۵) نیروی کارگر مطلوب − نیروی کارگر واقعی = نیروی کارگر برای جبران اصطکاک

$$\text{نیروی کارگر برای جبران اصطکاک} = E - \frac{R}{v.r.} \quad (۲ــ۱۲ــ۵)$$

بر فرض اینکه در ماشین اصطکاک وجود نداشته باشد، باری که به وسیله یک نیروی کارگر معین جابه‌جا می‌شود به بار مطلوب موسوم است و می‌توان نوشت:

$$\text{بار مطلوب} = E \times v.r. \quad (۱۳ــ۵)$$

از روابط فوق در حل مسائل نمونه استفاده خواهد شد.

مثال ۹ : مجموعه قرقره و طناب مطابق شکل ۱۵ــ۵ باری به وزن ۴۰۵ نیوتون را به فاصله یک متر بالا می‌کشد. اگر نیروی کارگر مساوی ۹۰ نیوتون باشد راندمان مجموعه چقدر است؟

حل : با توجه به اینکه بار به وسیله پنج بخش از طناب تحمل می‌شود بنابراین فاصله طی شده به‌وسیله نیروی کارگر برابر ۵ متر و فاصله طی شده به‌وسیله بار مساوی یک متر است.

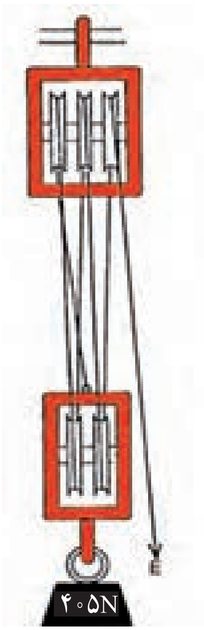
$$\text{v.r.}\ (\text{نسبت سرعت}) = \frac{۵}{۱} = ۵$$

$$(\text{M.A.})\ \text{بهرهٔ مکانیکی} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{۴۰۵}{۹۰} = ۴\ ۵$$

$$\text{راندمان} = \frac{\text{M.A.}}{\text{v.r.}} \times ۱۰۰$$

$$\text{راندمان} = \frac{۴/۵}{۵} \times ۱۰۰$$

$$\text{راندمان} = ٪۹۰$$



شکل ۱۵ــ۵ــ مجموعه قرقره مثال ۹

۶ــ۵ــ قرقره زنجیری[۱]

قرقره زنجیری که قرقره اختلافی[۲] نیز نامیده می‌شود معمولاً از سقف موتور خانه کشتی و یا کارگاه ساحلی به وسیله رورَوک آویزان است و برای جابه‌جایی عمودی و افقی اجسام و بارهای سنگین استفاده می‌شود. قرقره مزبور در شکل ۱۷ــ ۵ نشان داده شده است. ماشین شامل دو قرقره متحدالمرکز به عنوان قرقرهٔ ثابت و یک قرقره تک شیاره متحرک می‌باشد. هر دو قرقره فوقانی هم‌زمان با هم می‌چرخند.

وقتی نیروی کارگر بر زنجیر وارد می‌شود یک سوی قرقره متحرک به طرف قرقره بزرگ A کشیده می‌شود ولی سوی دیگر آن با چرخیدن قرقره کوچک B پایین می‌آید. در نتیجه جابه‌جایی قرقره رو به بالا خواهد بود.

۱ــ Chain hoist

۲ــ Differential Pulley

اگر D و d به ترتیب قطر قرقره بزرگ A و قرقره کوچک B باشند، با یک دور چرخش کامل قرقره ثابت داریم :

$$\text{تغییر مکان بار} = \frac{(\pi D - \pi d)}{۲}$$

$$\text{نسبت سرعت (v.r.)} = \frac{\text{تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}}$$

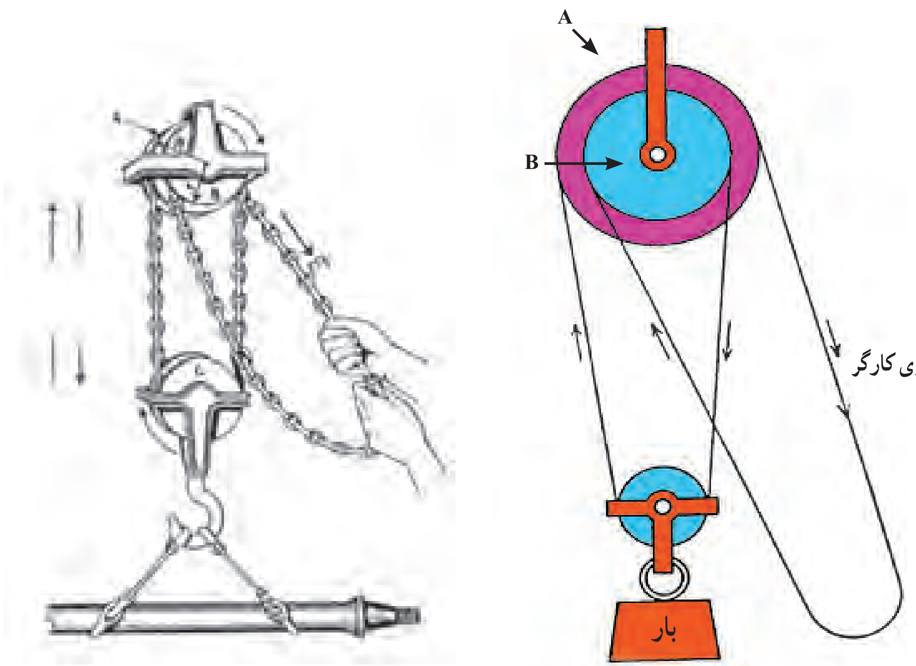
$$\text{نسبت سرعت (v.r.)} = \frac{\pi D}{\frac{۱}{۲}(\pi D - \pi d)}$$

$$(v.r.) = \frac{۲\pi D}{(\pi D - \pi d)} = \frac{۲\pi(۲R)}{۲\pi R - ۲\pi r} = \frac{۲R}{R - r} \qquad (۵\text{ـ}۱۴)$$

رابطهٔ (۱۴ــ۵) نسبت سرعت را در یک قرقرهٔ زنجیری نشان می‌دهد. در این رابطه R شعاع قرقرهٔ بزرگ و r شعاع قرقرهٔ کوچک است.

مثال ۱۰ : چنانچه در شکل ۱۶ــ۵ شعاع قرقره بزرگ R برابر ۱۶ سانتی‌متر و شعاع قرقره کوچک r مساوی ۱۴ سانتی‌متر باشد نسبت سرعت ماشین چقدر است؟

$$v.r. = \frac{۲(۱۶)}{۱۶ - ۱۴} = \frac{۳۲}{۲} = ۱۶$$



شکل ۱۶ــ۵ــ مجموعهٔ قرقره زنجیری

اگرچه نسبت سرعت بزرگ حاکی از بهرهٔ مکانیکی بزرگ می‌باشد ولی این ماشین دارای اصطکاک نسبتاً زیادی است لذا بهره مکانیکی واقعی آن بسیار کوچک‌تر از بهره مکانیکی مطلوب است.

در این ماشین از زنجیر استفاده می‌شود. قرقره‌ها دارای دندانه هستند طوری که زنجیر قابل استفاده باشد. گام دندانه‌ها ثابت است لذا داریم :

$$\text{(v.r.) نسبت سرعت} = \frac{\text{دو برابر تعداد دندانه‌ها در قرقره بزرگ}}{\text{تفاوت تعداد دندانه‌ها در دو قرقره}}$$

$$\text{v.r.} = \frac{۲D}{D-d} = \frac{۲R}{R-r}$$

مثال ۱۱ : قطر قرقره‌های بزرگ و کوچک در یک قرقره زنجیری به ترتیب ۱۲۰ و ۱۱۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۲/۴ کیلو نیوتون نیروی کارگر به مقدار ۲۵۰ نیوتون لازم است. نسبت سرعت، بهره مکانیکی و راندمان را تعیین کنید. همچنین مقدار نیروی کارگر که برای جبران اصطکاک مصرف می‌شود را محاسبه کنید.

حل :

$$\text{v.r.} = \frac{۲D}{D-d} = \frac{۲\times۱۲۰}{۱۲۰-۱۱۰} = ۲۴$$

$$\text{M.A.} = \frac{R}{E} = \frac{۲۴۰۰}{۲۵۰} = ۹/۶$$

$$\text{راندمان} = \frac{\text{M.A.}}{\text{v.r.}} = \frac{۹/۶}{۲۴} = ۰/۴ \text{ یا } ٪۴۰$$

$$\text{نیروی کارگر مطلوب} = \frac{R}{\text{v.r.}} = \frac{۲۴۰۰}{۲۴} = ۱۰۰ \text{ نیوتون}$$

نیروی کارگر مطلوب − نیروی کارگر حقیقی = نیروی کارگر مصرف شده برای اصطکاک

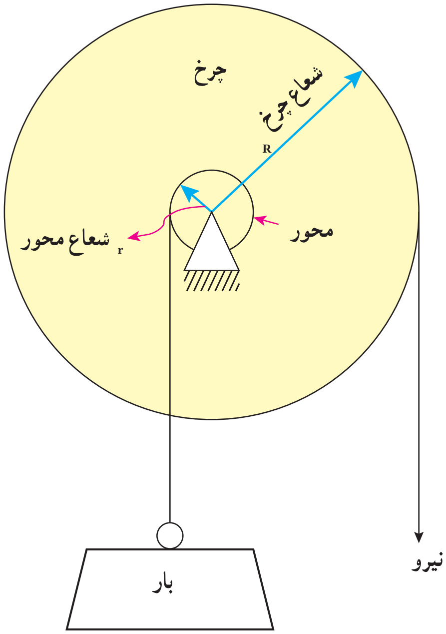
= ۲۵۰ − ۱۰۰ = ۱۵۰ نیوتون

۷ــ۵ــ چرخ و محور[1]

این ماشین شامل یک قرقره تک شیاره به همراه یک محور است. یک سر طناب یا سیمی که قلاب بار از آن آویزان می‌شود به محور متصل و محکم شده و به دور آن می‌پیچد. یک سر طناب یا سیمی

۱ــ The Wheel and Axle

که نیروی کارگر آن را می‌کشد به دور قرقره می‌پیچد.
این ماشین در شکل ۱۷ــ۵ نشان داده شده است.
طناب بار و طناب نیروی کارگر در دو جهت مخالف به دور محور و قرقره پیچیده می‌شوند. با اعمال نیروی کارگر قرقره می‌چرخد و طناب به طرف کارگر کشیده می‌شود. هم‌زمان طناب بار در جهت مخالف به دور محور می‌پیچد و بار بالا می‌رود. البته ممکن است به جای طناب کارگر از یک دسته به‌عنوان اهرم استفاده شود. این سامانه در چرخ چاه دیده می‌شود.



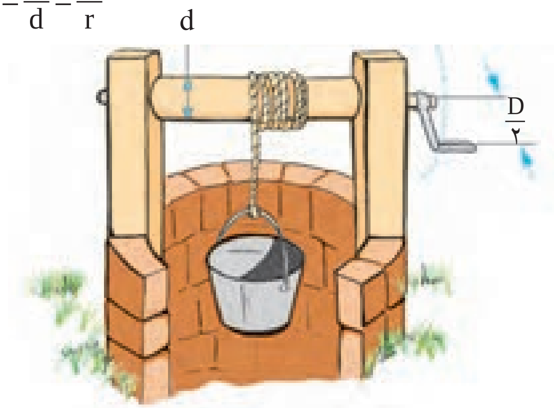
شکل ۱۷ــ۵ــ چرخ و محور

در صورتی که D و R به ترتیب قطر و شعاع قرقره و d و r قطر و شعاع محور باشند و با فرض اینکه نیروی کارگر، قرقره و محور را یک دور کامل بچرخاند می‌توان نوشت :

$$\frac{\text{طول محیط قرقره}}{\text{طول محیط محور}} = \frac{\text{تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}} = \text{(v.r.) نسبت سرعت}$$

از نسبت بالا می‌توان رابطهٔ (۱۵ــ۵) را نتیجه گرفت :

$$(v.r.) = \frac{\pi D}{\pi d} = \frac{D}{d} = \frac{R}{r} \qquad (۵ــ۱۵)$$



شکل ۱۸ــ۵ــ چرخ چاه

دقت کنید در صورتی که ضخامت طناب در مسئله ذکر شود باید ضخامت آن را به قطر مؤثر افزود. شکل ۱۸ــ۵ نیز نوعی ماشین چرخ و محور را نشان می‌دهد که نیروی کارگر به‌جای وارد شدن به طناب به یک دسته وارد می‌شود.

مثال ۱۲ : در یک ماشین چرخ و محور، قطر قرقره و محور به‌ترتیب ۲۲۰ و ۴۰ میلی‌متر است. قطر طناب‌های بار و نیروی کارگر به ترتیب ۱۰ و ۵ میلی‌متر است. در صورتی که راندمان ماشین ۰/۹۲ باشد مقدار نیروی کارگر برای بالا بردن باری به مقدار ۴۰۰ نیوتون را محاسبه کنید.

حل :

قطر مؤثر قرقره = قطر قرقره + قطر طناب نیروی کارگر

= ۲۲۰ + ۵ = ۲۲۵ میلی‌متر

قطر مؤثر محور = قطر محور + قطر طناب بار

= ۴۰ + ۱۰ = ۵۰ میلی‌متر

نسبت سرعت (v.r.) = $\frac{D}{d}$ = $\frac{۲۲۵}{۵۰}$ = ۴/۵

بهره مکانیکی (M.A.) = راندمان ماشین × v.r.

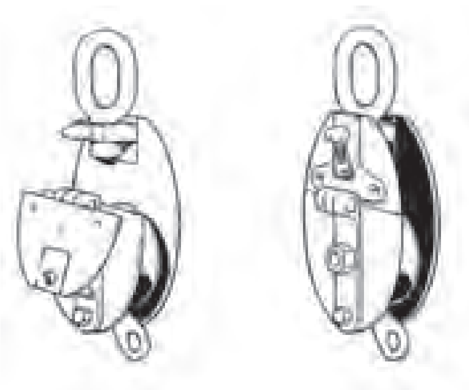
= ۰/۹۲ × ۴/۵

= ۴/۱۴

نیروی کارگر = E = $\frac{R}{M.A.}$ = $\frac{۴۰۰N}{۴/۱۴}$ = ۹۶/۶۱N

۸ــ۵ــ قرقره سگکی[1]

در بسیاری از ماشین‌های بالابر به‌جای آویزان شدن بار از طناب بار، از قرقره سگکی برای آویزان کردن بار استفاده می‌شود. این نوع قرقره دارای یک شیار است. مطابق شکل ۱۹ــ۵ با باز کردن سگک می‌توان طناب را در داخل قرقره قرار داد. یک سر طناب به ماشین بالابر محکم است و از داخل قرقره می‌گذرد و سر آزاد طناب به وسیله نیروی کارگر بالا کشیده می‌شود. قرقرهٔ سگکی معمولاً به صورت قرقرهٔ متحرک استفاده می‌شود.



شکل ۱۹ــ۵ ــ قرقره سگکی

۱ــ Snath Block

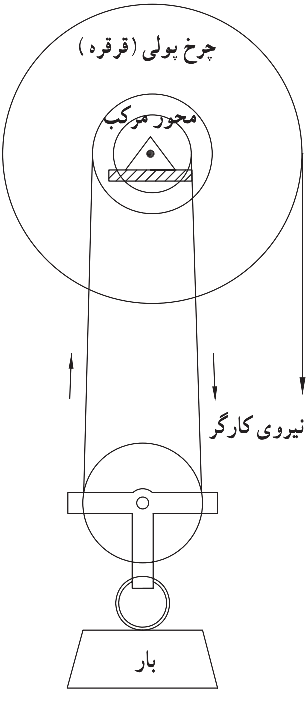
۹ــ۵ــ چرخ و محور دو پله‌ای[1]

این ماشین مشابه چرخ و محور است با این فرق که محور این ماشین از دو محور متحدالمرکز با دو قطر متفاوت تشکیل شده است. مطابق شکل ۲۰ــ۵ با چرخش قرقره کارگر به وسیله طناب نیروی کارگر و همزمان با پیچیده شدن طناب به دور محور بزرگ‌تر، طناب از دور محور کوچک‌تر باز می‌شود. طناب محورها از داخل یک قرقره سگکی می‌گذرد و بار به وسیله قرقره سگکی تحمل می‌شود.

D قطر قرقره کارگر، d_1 قطر محور بزرگ‌تر و d_2 قطر محور کوچک‌تر است. با یک دور چرخش قرقره کارگر، طناب بالارو به اندازهٔ πd_1 بالا می‌رود و طناب پایین‌رو به اندازهٔ محیط محور کوچک‌تر πd_2 پایین می‌آید. بنابراین طناب حامل قرقره سگکی به اندازهٔ $\pi d_1-\pi d_2$ کوتاه می‌شود.

با توجه به اینکه تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر در یک دور چرخش کامل قرقره کارگر به اندازه است، بنابراین می‌توان رابطهٔ (۱۶ــ۵) را به این شکل نوشت :

$$\text{(v.r.) نسبت سرعت} = \frac{\text{تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}}$$



شکل ۲۰ــ۵ــ چرخ و محور

$$v.r.=\frac{\pi D}{\frac{1}{2}(\pi d_1-\pi d_2)}=\frac{2D}{\pi d_1-\pi d_2}$$

$$=\frac{2D}{d_1-d_2}=\frac{2R}{r_1-r_2} \qquad (۵ــ۱۶)$$

می‌توان مانند چرخ و محور معمولی (بخش ۷ــ۵) از یک دسته به‌جای قرقرهٔ کارگر استفاده کرد. در این صورت فاصله مرکز محور تا دسته چرخش معادل شعاع قرقره کارگر خواهد بود.

مثال ۱۳ : مطابق شکل ۲۰ــ۵ شعاع قرقره کارگر برابر ۳۰ سانتی‌متر، شعاع محور بزرگ‌تر (r_1) مساوی ۱۰ سانتی‌متر و شعاع محور کوچک‌تر (r_2) برابر ۶ سانتی‌متر است. در صورتی که نیروی کارگر به مقدار ۵۰ نیوتون باشد چه مقدار بار را می‌توان بالا برد؟ راندمان دستگاه ۰/۹ است.

۱ــ Wheel and Differential Axle

حل : با استفاده از رابطهٔ (۱۶ــ۵) می‌نویسیم :

$$v.r.=\frac{۲R}{r_۱-r_۲}=\frac{۲\times۳۰}{۱۰-۶}=\frac{۶۰}{۴}=۱۵$$

(M.A.) بهره مکانیکی = راندمان دستگاه × v.r.

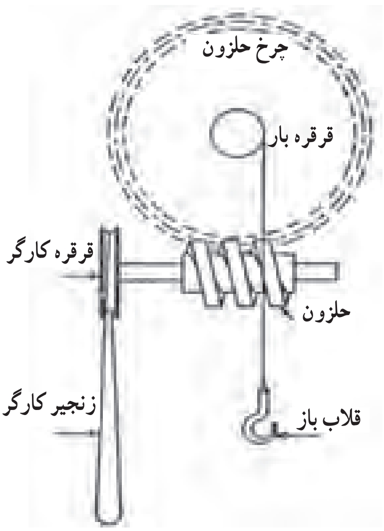
= ۰/۹ × ۱۵ = ۱۳/۵

E = نیروی کارگر = ۵۰ نیوتون

$$E=\frac{R}{M.A.}\Rightarrow R=E\times M.A.=۵۰\times۱۳/۵=۶۷۵$$ نیوتون

۱۰ــ۵ــ میله حلزون و چرخ حلزون بالابر[1]

مطابق شکل ۲۱ــ۵ ماشین بالابر میله حلزون و چرخ حلزون (که به حلزون و چرخ حلزون معروف است) شامل حلزون یا میلهٔ حلزون، چرخ حلزون ، قرقرهٔ بار، قرقرهٔ کارگر، زنجیر کارگر، قلاب بار و زنجیر یا کابل بار می‌شود. برخی موارد به جای قلاب بار از قرقره سگکی استفاده می‌شود. در این موارد یک سر کابل قرقرهٔ سگکی به بدنهٔ ماشین متصل و محکم می‌شود. با اعمال نیروی کارگر بر زنجیر کارگر، قرقره کارگر و سپس میله حلزون، چرخ حلزون و قرقره بار به چرخش درمی‌آیند و بار بالا می‌رود.



شکل ۲۱ــ۵ــ میله حلزون و چرخ حلزون بالابر

در این ماشین D قطر قرقرهٔ کارگر، d قطر قرقرهٔ بار و N تعداد دندانه‌های چرخ حلزون است. معمولاً از میلهٔ حلزون یک راهه استفاده می‌شود. به‌ازای یک دور گردش چرخ حلزون، میله حلزون باید N مرتبه بچرخد. برای یک دور گردش چرخ حلزون تغییر مکان به وسیلهٔ نیروی کارگر برابر πDN و تغییر مکان بار به اندازهٔ πd است :

در صورت استفاده از قلاب بار : (v.r.) نسبت سرعت = $\frac{\text{تغییر مکان به‌وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}}$

$$=\frac{\pi DN}{\pi d}=\frac{DN}{d}$$

در صورت استفاده از قرقرهٔ سگکی : (v.r.) نسبت سرعت $=\frac{۲DN}{d}$

۱ــ Worm and Worm Wheel Lifting Gear

خودآزمایی فصل پنجم

۱ــ راندمان مکانیکی را تعریف کنید.

۲ــ بهرۀ مکانیکی را تعریف کنید.

۳ــ در هنگام جارو زدن از چه نوع اهرمی استفاده می‌کنید؟

۴ــ در یک مجموعه قرقره و طناب شامل قرقره سه شیاره در بالا و قرقره دو شیاره در پایین، نیروی کارگر به مقدار ۳۰۰ نیوتون برای بالا بردن باری به مقدار ۱/۲۶ کیلو نیوتون مصرف می‌شود. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را در این حالت تعیین کنید.

۵ــ یک مجموعه قرقره و طناب شامل دو قرقره ۴ شیاره در بالا و پایین است. راندمان ماشین برای بالا بردن باری به مقدار ۲/۸ کیلو نیوتون برابر ۷۰٪ است. نیروی کارگر چقدر است؟

۶ــ در یک ماشین بالابر نوع چرخ و محور دوپله‌ای از دسته اهرم به طول ۲۴۰ میلی‌متر به‌جای قرقره کارگر استفاده می‌شود. قطر محورهای دوپله‌ای به ترتیب ۱۱۰ و ۸۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۱/۱۲ کیلو نیوتون به نیروی کارگر معادل ۸۰ نیوتون نیاز است. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را تعیین کنید.

۷ــ راندمان یک قرقره زنجیری (اختلافی) در بالا بردن یک بار ۱/۸۹ کیلو نیوتونی برابر ۳۵ درصد است. تعداد دندانه‌های قرقره‌های بزرگ و کوچک به ترتیب ۲۷ و ۲۴ عدد است. نیروی کارگر برای بالا بردن بار چقدر است؟

۸ــ قطر قرقره کوچک یک مجموعه قرقره زنجیری (اختلافی) ۱۳۰ میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار ۵۶۰ نیوتون نیروی کارگر به مقدار ۵۰ نیوتون لازم است. در صورتی که راندمان ماشین ۴۰ درصد باشد. قطر قرقره بزرگ چقدر است؟

۹ــ قطر قرقره کارگر یک ماشین حلزون و چرخ حلزون ۲۰۰ میلی‌متر است. میلۀ حلزون یک راهه و چرخ حلزون دارای ۴۰ دندانه است. قطر قرقره بار ۱۲۵ میلی‌متر است و بار به وسیله قرقره سگگی تحمل می‌شود. نیروی کارگر ۱۵۰ نیوتونی برای بالا بردن باری به مقدار ۶/۷۲ کیلو نیوتون لازم است. راندمان ماشین برای بالا بردن این بار چقدر است؟

نیروی کارگر مطلوب و نیروی مصرف شده برای جبران اصطکاک چقدر است؟

پیوست الف ــ جدول روابط مثلثاتی

tan()	cos()	sin()	[illegible]	tan()	cos()	sin()	[illegible]
1.150	0.656	0.755	49	0.000	1.000	0.000	0
1.192	0.643	0.766	50	0.017	1.000	0.017	1
1.235	0.629	0.777	51	0.035	0.999	0.035	2
1.280	0.616	0.788	52	0.052	0.999	0.052	3
1.327	0.602	0.799	53	0.070	0.998	0.070	4
1.376	0.588	0.809	54	0.087	0.996	0.087	5
1.428	0.574	0.819	55	0.105	0.995	0.105	6
1.483	0.559	0.829	56	0.123	0.993	0.122	7
1.540	0.545	0.839	57	0.141	0.990	0.139	8
1.600	0.530	0.848	58	0.158	0.988	0.156	9
1.664	0.515	0.857	59	0.176	0.985	0.174	10
1.732	0.500	0.866	60	0.194	0.982	0.191	11
1.804	0.485	0.875	61	0.213	0.978	0.208	12
1.881	0.469	0.883	62	0.231	0.974	0.225	13
1.963	0.454	0.891	63	0.249	0.970	0.242	14
2.050	0.438	0.899	64	0.268	0.966	0.259	15
2.145	0.423	0.906	65	0.287	0.961	0.276	16
2.246	0.407	0.914	66	0.306	0.956	0.292	17
2.356	0.391	0.921	67	0.325	0.951	0.309	18
2.475	0.375	0.927	68	0.344	0.946	0.326	19
2.605	0.358	0.934	69	0.364	0.940	0.342	20
2.747	0.342	0.940	70	0.384	0.934	0.358	21
2.904	0.326	0.946	71	0.404	0.927	0.375	22
3.078	0.309	0.951	72	0.424	0.921	0.391	23
3.271	0.292	0.956	73	0.445	0.914	0.407	24
3.487	0.276	0.961	74	0.466	0.906	0.423	25
3.732	0.259	0.966	75	0.488	0.899	0.438	26
4.011	0.242	0.970	76	0.510	0.891	0.454	27
4.331	0.225	0.974	77	0.532	0.883	0.469	28
4.705	0.208	0.978	78	0.554	0.875	0.485	29
5.145	0.191	0.982	79	0.577	0.866	0.500	30
5.671	0.174	0.985	80	0.601	0.857	0.515	31
6.314	0.156	0.988	81	0.625	0.848	0.530	32
7.115	0.139	0.990	82	0.649	0.839	0.545	33
8.144	0.122	0.993	83	0.675	0.829	0.559	34
9.514	0.105	0.995	84	0.700	0.819	0.574	35
11.430	0.087	0.996	85	0.727	0.809	0.588	36
14.301	0.070	0.998	86	0.754	0.799	0.602	37
19.081	0.052	0.999	87	0.781	0.788	0.616	38
28.636	0.035	0.999	88	0.810	0.777	0.629	39
57.290	0.017	1.000	89	0.839	0.766	0.643	40
[illegible]	0.000	1.000	90	0.869	0.755	0.656	41
				0.900	0.743	0.669	42
				0.933	0.731	0.682	43
				0.966	0.719	0.695	44
				1.000	0.707	0.707	45
				1.036	0.695	0.719	46
				1.072	0.682	0.731	47
				1.111	0.669	0.743	48

مراجع

١ــ دانشنامهٔ آزاد (Wikipedia.org)

2– Beer, Ferdinand (2004). Vector Statics For Engineers. McGraw Hill. ISBN 0–07–121830–0.

3– Mariam Rozhanskaya and I. S. Levinova (1996), "Statics", p. 642, in (Morelon & Rashed 1996, pp. 614–642):

4– J.L. Meriam, L.G. Kraige. Engineering Mechanics Volume 2: Dynamics, John Wiley & Sons., New York, 1986.

5– F.P. Beer, E.R. Johnston, J.T. DeWolf, Mechanics of Materials, McGraw–Hill, New York, 1981.

6– Richard Budynas, J. Nisbett, Shigley's Mechanical Engineering Design, 8th ed., New York: McGraw–Hill, ISBN 978–0–07–312193–2.