

۲

فصل

استفاده از بردار برای تحلیل نیروها

هدف کلی

استفاده از بردار در تحلیل‌های نیرویی

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

- ۱- بردار را تعریف کند.
- ۲- کمیت‌های برداری و نرده‌ای را تشخیص دهد.
- ۳- جمع برداری را به روش ترسیمی و تحلیلی انجام دهد.
- ۴- ضرب داخلی و خارجی را بر روی بردارهای ۲ بعدی انجام دهد.

۱-۲- کمیت‌های برداری

شما در دوران راهنمایی و ابتدایی با مبحث محورهای مختصات و بردار آشنا شده‌اید. اما شاید تاکنون به کاربرد آنها فکر نکرده‌اید یا با آنها برخوردی نداشته‌اید. در این کتاب به‌وفور از محاسبات برداری و مختصاتی در علم مکانیک استفاده شده است. اما بهتر است قبل از آن بدانیم چرا این محاسبات در علم استاتیک و دینامیک کاربرد دارد.

در فیزیک سال گذشته با کمیت‌های فراوانی روبه‌رو شدید. برخی از این کمیت‌ها فقط مقدار دارند، مثل کار^۱، جرم^۲، دما^۳، فاصله^۴ و تندی^۵. این گونه کمیت‌ها را کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای می‌نامند.

اما برخی کمیت‌ها هستند که علاوه بر اندازه، راستا و جهت نیز دارند. به عنوان مثال فاصله جزیره قشم (از بندر قشم) تا بندر عباس ۸/۱۰ مایل (۲۰ کیلومتر) است. اما آیا به نظر شما برای طی کردن یک مسافت دریایی دانستن فاصله به تنهایی کافی است؟ مسلماً برای دانستن موقعیت این دو بندر نسبت به هم لازم است، طول و عرض جغرافیایی هردو و یا راستا و جهت حرکت از بندری به بندر دیگر مشخص شود. به همین دلیل است که در کشتی‌ها از وسایل جهت‌یابی مختلفی استفاده می‌شود. برای مثالی دیگر می‌توان به نیرو اشاره کرد. اگر یک جعبه را با نیروی ۱۰۰ نیوتن روی زمین بکشید، به کدام طرف حرکت می‌کند؟ باید اول معلوم کنید که این نیرو در چه جهت و در چه راستایی وارد شده است. مثلاً اگر نیرو به سمت پایین وارد شود اصلاً جعبه از جایش تکان نمی‌خورد بلکه به زمین فشرده می‌شود.

۱- work

۲- mass

۳- temperature

۴- distance

۵- speed



شکل ۲-۲- سرعت سنج دریایی دیجیتال



شکل ۲-۱- سرعت سنج کشتی قدیمی

شکل ۲-۱ و شکل ۲-۲ سرعت سنج‌های دریایی را نشان می‌دهد. در واقع این سرعت سنج‌ها فقط تندی را نشان می‌دهند و اطلاعاتی در مورد جهت در اختیار نمی‌گذارند. (در واقع شکل ۲-۱ یک دسته تلگراف است و نه یک سرعت سنج واقعی به این معنی که فقط سرعت دلخواه ناخدا را نمایش می‌دهد نه سرعتی که کشتی واقعاً به آن رسیده است.) به همین دلیل از دیرباز ملوانان از وسایلی همچون قطب‌نما^۱ (شکل ۲-۳) و یا نشان‌دهنده راه کشتی^۲ (شکل ۲-۴) استفاده کرده‌اند.



شکل ۲-۴- قطب‌نمای دیجیتال یا نشان‌دهنده راه کشتی



شکل ۲-۳- قطب‌نمای معمولی

۱- compass

۲- cruise indicator

توضیح

سرعت^۱ به دلیل اینکه جهت و راستای حرکت را نشان می‌دهد، یک کمیت برداری و تندی به دلیل اینکه صرفاً مسافت طی شده در زمان را نشان می‌دهد یک کمیت نرده‌ای است.

جدول ۱-۲ کمیت‌های برداری و نرده‌ای را که در این کتاب کاربرد دارند، فهرست کرده است.

جدول ۱-۲- کمیت‌های برداری و نرده‌ای

| کمیت | نوع | واحد | نماد |
|-----------|---------|-------------------------------------|------------------|
| نیرو | برداری | N نیوتن | \vec{F} |
| زمان | نرده‌ای | s ثانیه | t |
| شتاب | برداری | متر بر مجذور ثانیه $m \cdot s^{-2}$ | \vec{a} |
| سرعت | برداری | $m \cdot s^{-1}$ متر بر ثانیه | \vec{v} |
| تندی | نرده‌ای | $m \cdot s^{-1}$ متر بر ثانیه | V |
| مسافت | نرده‌ای | m متر | s یا d |
| جابه‌جایی | برداری | m متر | $\vec{\Delta R}$ |

دقت داشته باشید که ممکن است در کتاب‌های دیگر و یا در بخش‌های دیگر همین کتاب از نمادهای دیگری برای این کمیت‌ها استفاده شود و یا برای ساده سازی از نوشتن علامت بردار در بالای آن نماد خودداری شود. در این موارد باید به توضیحات توجه کرد و حل مناسب را با توجه به برداری یا نرده‌ای بودن آن کمیت، ارائه کرد.

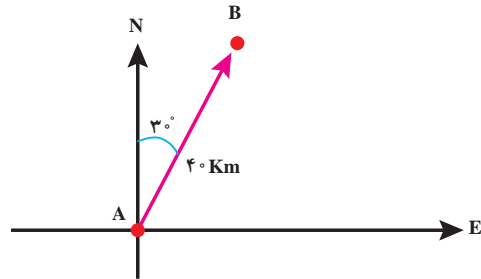
تعریف بردار: کمیتی را که هم اندازه و هم راستا و جهت داشته باشد، بردار می‌گویند. در این کتاب فقط بردارهایی که در مختصات دوی بعدی هستند مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲-۲ محاسبات برداری

قبل از اینکه به نحوه محاسبات برداری بپردازیم باید خواص بردار و نحوه نمایش آن یادآوری شود. بردار را می‌توان با بزرگی و جهت آن تعریف کرد.

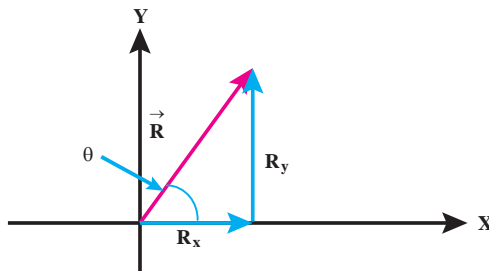
مثال ۱: یک کشتی فاصله شهر A تا B را به اندازه ۴۰ کیلومتر و در جهت ۳۰ درجه نسبت به شمال و به سمت شرق حرکت کرده است بردار این جابجایی را رسم کنید (شکل ۲-۵).

حل: ابتدا برای رسم این بردار دو محور مختصات رسم می‌کنیم. خطی در امتداد زاویه ۳۰ درجه از محور شمال رسم می‌کنیم. با مقیاس‌بندی مناسب طول مورد نظر معادل ۴۰ کیلومتر را جدا می‌کنیم.



شکل ۲-۵ بردار جابجایی یک کشتی

می‌توان بردار را با مؤلفه‌های طول و عرض (X و Y) نیز نمایش داد. فرض کنید برداری به اندازه $|\vec{R}|$ داریم. این بردار با محور X زاویه θ می‌سازد. تصویر بردار \vec{R} روی محور X ها را مؤلفه R_x و تصویر بردار روی محور Y را مؤلفه R_y می‌نامیم. این دو نوع تعریف با استفاده از آموزه‌های فصل قبل به یکدیگر تبدیل خواهند شد.



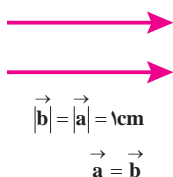
شکل ۲-۶ مؤلفه‌های یک بردار

در این جا می‌توان بردار \vec{R} را به جای بزرگی و زاویه، به کمک مؤلفه‌های R_x و R_y تعریف کرد. یعنی بگوییم به اندازه R_x در جهت X و سپس به اندازه R_y در جهت Y ، بردار \vec{R} را تشکیل می‌دهد.

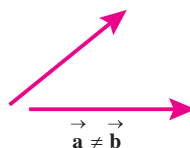
به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، سعی کنید از روابطی که در فصل ۱ خوانده‌اید استفاده کنید و مؤلفه‌های برداری شکل ۶-۲ را برحسب بزرگی و زاویه بردار به‌دست آورید.

۱-۲-۲- خواص بردار: خواص زیر برای بردارهای مفروض است:

- اگر دو بردار جهت، راستا و اندازه مساوی داشته باشند آن دو بردار را همسنگ می‌نامند. به زبان شیواتر، آن دو بردار با هم برابرند. فقط ممکن است مبدأ آنها متفاوت باشد.



شکل ۷-۲- ب- دو بردار همسنگ



شکل ۷-۲- الف- دو بردار هم اندازه ناهمسنگ

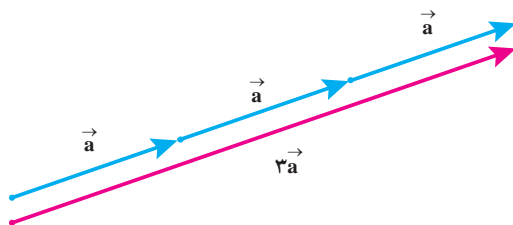
- حاصل جمع دو بردار با هم یک بردار جدید خواهد بود. (در مورد تفریق هم همین‌طور است.)

- حاصل ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار یک بردار خواهد بود، به شکلی که بزرگی آن چند برابر می‌شود، راستای آن ثابت می‌ماند و اگر کمیت نرده‌ای علامت مثبت داشته باشد، جهت ثابت می‌ماند و گرنه جهت نیز تغییر خواهد کرد. یعنی:

$$|a \times \vec{A}| = |a| \times |\vec{A}| \quad (2-1)$$

و

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Leftrightarrow a \times \vec{A} = a \times \vec{A}_x + a \times \vec{A}_y \quad (2-2)$$

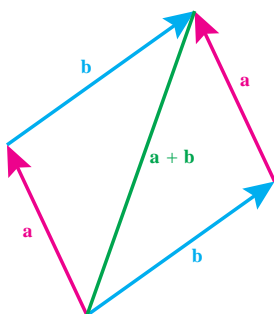


شکل ۷-۲- ج- ضرب مقدار عددی در بردار

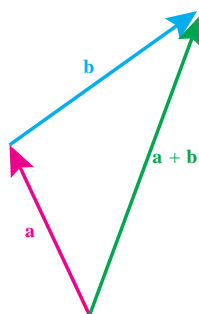
۴- برای ضرب بردارها دو نوع ضرب تعریف می‌شود. ضرب داخلی یا نقطه‌ای و ضرب خارجی یا کراس. حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار یک کمیت نرده‌ای خواهد بود و حاصل ضرب خارجی دو بردار یک کمیت برداری.

۲-۲-۲ جمع برداری: همان‌طور که در سال‌های گذشته آموخته‌اید، بردارها را می‌توان به دو روش با هم جمع کرد. روش ترسیمی و روش تحلیلی. روش ترسیمی به منظور دست‌یابی سریع و بدون استفاده از محاسبات پیچیده به پاسخ مورد نظر کاربرد دارد و روش تحلیلی به منظور دست‌یابی به پاسخ دقیق به کار می‌رود. در روش ترسیمی از دو روش متوازی‌الاضلاع و روش مثلث استفاده می‌شود. شکل ۸-۲ الف، جمع به روش مثلث و شکل ۸-۲ ب، جمع به روش متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد.

الف) روش مثلث: در این روش انتهای یکی از بردارها (در این جا \vec{a}) را روی ابتدای بردار دیگر (در این جا \vec{b}) می‌گذاریم. سپس ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کنیم. پاره خط جدید بردار برآیند جمع دو بردار $(\vec{a} + \vec{b})$ است.



شکل ۸-۲ ب - جمع به روش متوازی‌الاضلاع



شکل ۸-۲ الف - جمع به روش مثلث

ب) روش متوازی‌الاضلاع: در این روش ابتدای آنها را روی هم قرار می‌دهیم. سپس از انتهای آنها بردار همسنگ بردار دیگر را رسم می‌کنیم. مثلاً در این جا از انتهای بردار \vec{b} همسنگ بردار \vec{a} را رسم می‌کنیم. یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید. قطر این چهار ضلعی برابر بردار برآیند جمع دو بردار است.

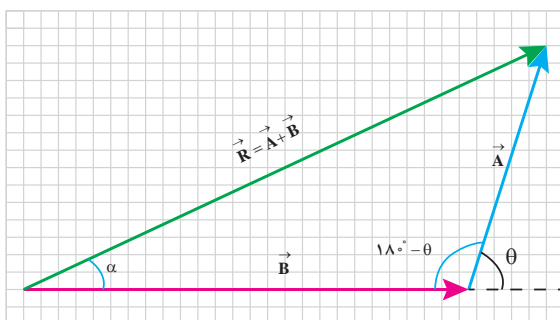
فکر می‌کنید چه موقع از روش مثلث و چه زمانی از روش متوازی‌الاضلاع باید استفاده کرد؟

برای استفاده از روش ترسیمی استفاده از نقاله و خط کش الزامی است.

مثال ۲: بردار برآیند دو بردار A و B را رسم کنید، طول بردار برآیند و زاویه‌ای که با بردار B می‌سازد را محاسبه کنید.

$$|\vec{A}| = 15/8 \text{ و } |\vec{B}| = 26, \text{ زاویه بین دو بردار } \theta = 71/7^\circ$$

حل: ابتدا با استفاده از خط کش و نقاله بردارها را رسم می‌کنیم. یک‌بار برای حل با روش مثلث (شکل ۲-۹) و یک‌بار برای حل با روش متوازی‌الاضلاع (شکل ۲-۱۰) رسم را کامل می‌کنیم.



شکل ۲-۹- رسم بردارهای مثال ۲

داریم: $180^\circ - \theta = 108/3^\circ$

با استفاده از این رابطه و قاعده کسینوس‌ها اندازه بردار برآیند به دست می‌آید:

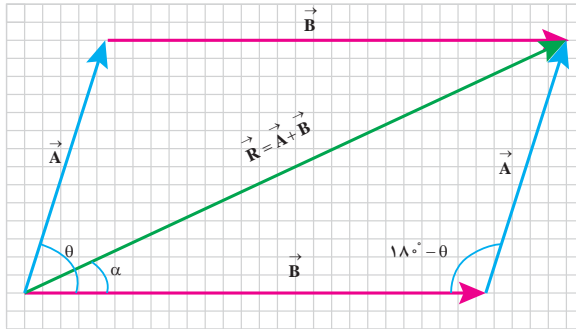
$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2 \times |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(180^\circ - \theta)} = \sqrt{1186} = 34/4$$

با استفاده از قانون سینوس‌ها نیز می‌توانیم زاویه بین بردار برآیند و بردار B را محاسبه کنیم.

می‌توان برای ساده‌سازی در زمان نمایش طول بردار، علامت بردار و قدرمطلق را حذف کرد.

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \theta)} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{A}{R} \sin(180^\circ - \theta) = \frac{15/8}{34/4} \times 0/95 = 0/436 \Rightarrow \alpha = 25/9^\circ$$

اگر از روش متوازی‌الاضلاع هم استفاده کنیم باز به نتیجه مشابه می‌رسیم. این روش در شکل ۲-۱۰ رسم شده است.



شکل ۱-۲- رسم بردارهای مثال ۲

فعالیت ۲-۱

– برآیند دو بردار به طول‌های ۱۰° و ۱۵° واحد را در ۳ حالات زیر حساب کنید.
از هر دو روش ترسیمی استفاده کنید. چه نکته خاصی در هر یک از این حالات وجود دارد؟

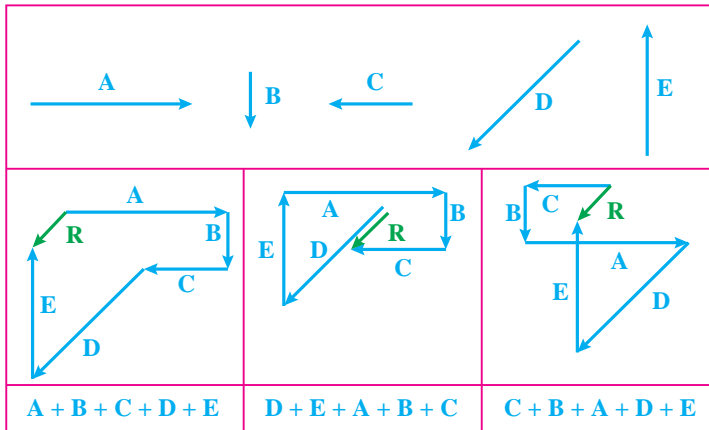
- دو بردار بر هم عمود باشند.
- دو بردار با یکدیگر زاویه ۳۰° درجه بسازند.
- دو بردار با هم زاویه ۲۱° درجه بسازند.
- دو بردار هم راستا و هم جهت باشند.
- دو بردار هم راستا و در خلاف جهت هم باشند.

جمع بیش از ۲ بردار: برای جمع بیش از ۲ بردار می‌توانید ابتدا دو بردار را به‌عنوان بردارهای اول انتخاب کنید و سپس با هم جمع کنید و در مرحله بعد بردار برآیند دوبردار اول را با بردار سوم جمع نمایید. این کار را تا به دست آوردن بردار برآیند کل بردارها ادامه دهید.

اما روش دیگری وجود دارد به نام روش چند ضلعی، در این روش ابتدای هر بردار را در انتهای بردار قبلی قرار می‌دهید تا یک چند ضلعی باز تشکیل شود. ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کنید. پاره خط به‌دست آمده، برآیند کل بردارها است. ترتیب انتخاب بردارها در هیچ یک از روش‌ها تأثیری روی پاسخ ندارد.

در شکل ۱۱-۲ نمونه‌ای از جمع چند بردار به روش چند ضلعی آمده‌است. در این شکل ۳

ترتیب مختلف برای جمع بردارها در نظر گرفته شده است. مشاهده می کنید که در هر سه حالت، پاسخها یکسان است.



شکل ۱۱-۲- بردار برآیند ۵ بردار به روش ترسیمی

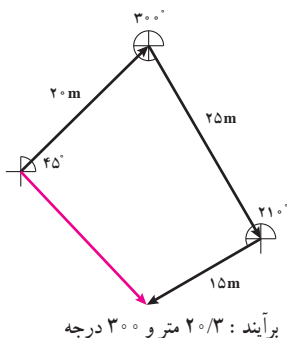
مثال ۳: فرض کنید در یک مسابقه شنا شرکت کرده اید. در مسابقه به شما می گویند در سه جهت و به طول های مشخص باید شنا کنید. انتخاب اولویت مسیرها با خودتان است. اطلاعات مسئله به شکل زیر است:

(زوایای اعلام شده بر حسب درجه است)

| | | |
|---------|----------|----------|
| ۲۰ متر | ۲۵ متر | ۱۵ متر |
| ۴۵ درجه | ۳۰۰ درجه | ۲۱۰ درجه |

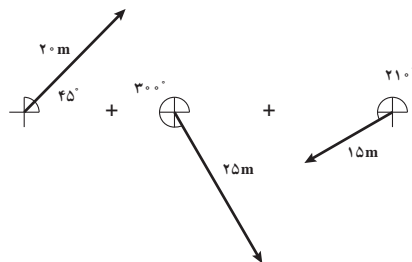
نقطه نهایی در چه فاصله ای از مبدأ واقع شده است.

حل: ابتدا شکل را رسم می کنیم.



برآیند: ۲۰/۳ متر و ۳۰۰ درجه

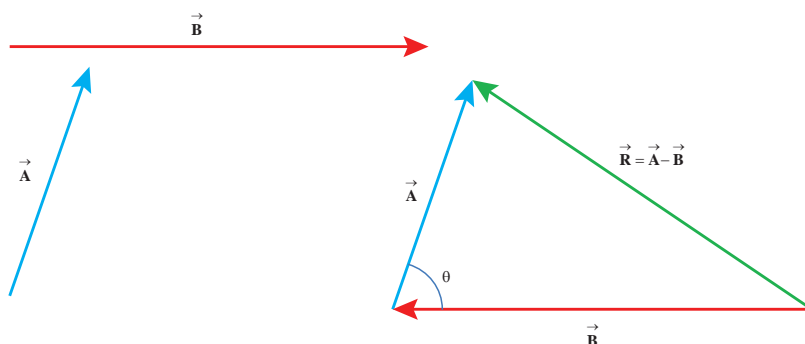
شکل ۱۲-۲- ب- جمع بردارهای مثال ۳



شکل ۱۲-۲- الف- بردارهای مثال ۳

همان‌طور که در متن درس آمده است فرقی نمی‌کند که ابتدا کدام مسیر را انتخاب کنید. لذا پاسخی که با انتخاب در شکل ۲-۱۲-ب به دست آمده است تنها پاسخ این مسئله می‌باشد.

۲-۲-۳- تفریق بردارها: برای تفریق دو بردار کاملاً مانند جمع در روش مثلث عمل می‌شود. به عنوان مثال در شکل ۲-۱۳ می‌خواهیم برآیند $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ را محاسبه کنیم. برای این کار کافی است معادله را به این شکل بازنویسی کنیم: $\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$ در نتیجه به یک جمع می‌رسیم که در آن بردار B معکوس شده است.



شکل ۲-۱۳- تفریق بردارها

فعالیت ۲-۲

در مثال ۲ به جای جمع بردارها، $\vec{A} - \vec{B}$ را محاسبه کنید.

۲-۲-۴- تجزیه بردار: همان‌طور که در فعالیت کلاسی ۱ آمد، می‌توان هر بردار (۲ بعدی) را به دو مؤلفه در راستای محورهای X و Y تجزیه کرد. برای اینکه بتوان از این تجزیه در محاسبات استفاده کرد، برداری به نام بردار یکه تعریف شده است.

بردار یکه:

برداری است به طول واحد در راستای یکی از محورهای مختصات.

بردار یکه در راستای محور X را بردار یکه \hat{i} می‌نامند.

بردار یکه در راستای محور Y را بردار یکه \hat{j} می‌نامند.

حال می‌توان بردارهای مؤلفه بردار R در شکل ۲-۶ را به این شکل نوشت:

$$\vec{R}_x = R_x \hat{i} \text{ و } \vec{R}_y = R_y \hat{j}$$

در نتیجه بردار R را می‌توان به دو مؤلفه برداری خود به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} \quad (2-3)$$

از طرفی در فعالیت کلاسی ۱ مقادیر مؤلفه‌ها به شکل زیر به دست آمد:

$$R_x = |\vec{R}| \cos \theta \quad (2-4)$$

$$R_y = |\vec{R}| \sin \theta$$

حال می‌توان از معادله ۲-۳ و ۲-۴ به خوبی برای جمع و تفریق برداری استفاده کرد. همچنین می‌توان برای نمایش یک بردار به جای داشتن یک زاویه و یک طول از دو مؤلفه آن استفاده کرد. مثلاً:

بردار R به طول ۵ واحد و زاویه ۳۷ درجه نسبت به محور X را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$R_x = |\vec{R}| \cos \theta = 5 \cos(37) = 5 \times 0.8 = 4$$

$$R_y = |\vec{R}| \sin \theta = 5 \sin(37) = 5 \times 0.6 = 3$$

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = 4\hat{i} + 3\hat{j} \quad \text{یا} \quad \vec{R} = (4, 3)$$

برای جمع دو بردار نیز می‌توان از رابطه (۲-۵) استفاده کرد:

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} C_x = B_x + A_x \\ C_y = B_y + A_y \end{cases} \quad (2-5)$$

با استفاده از فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2-6)$$

و همچنین با استفاده از رابطه (۲-۴) و روابط موجود در فصل ۱ می‌توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} \quad (2-7)$$

مثال ۴: جمع دو بردار $\vec{A} = 2\hat{i} - 1\hat{j}$ و $\vec{B} = 0\hat{i} - 3\hat{j}$ را محاسبه کنید.

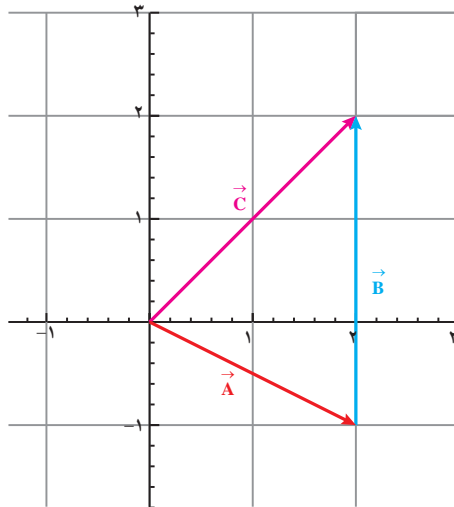
حل: توجه کنید که برای حل این مثال ساده می‌توان از دو روش استفاده کرد. روش اول استفاده از ترسیم است و روش دوم روش تجزیه بردار و استفاده از روابط $(2-4)$ و $(2-5)$ (یا روش تحلیلی) که در ادامه خواهد آمد.

$$\vec{B} = 0\hat{i} - 3\hat{j}$$

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 1\hat{j}$$

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} C_x = B_x + A_x \\ C_y = B_y + A_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_x = 2\hat{i} - 0\hat{i} \\ C_y = 3\hat{j} - 1\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

هر دو روش نیاز به ترسیم دارد. اما در روش تحلیلی ترسیم فقط به فهم مسئله کمک می‌کند. لذا شما هم در حل مسائل برداری در صورت استفاده از روش تحلیلی، ترسیم را فراموش نکنید. اما نیازی به دقت بالا در ترسیم و ابزارهای ترسیمی خاص وجود ندارد.



شکل ۱۴-۲- بردارهای مثال ۴

مثال ۵: یک کشتی از بندر A به سمت بندر B و سپس از بندر B به سمت بندر C حرکت می‌کند. فاصله AB برابر 120° Km و در جهت 3° درجه نسبت به شرق و فاصله BC برابر 60° Km و در جهت 45° - درجه نسبت به محور شرق است. بردار جابه جایی AC را از روش تحلیلی محاسبه کنید.

حل : برای شروع به حل باید بردارهای \overrightarrow{AB} و \overrightarrow{BC} را به مؤلفه‌های عمودی و افقی تجزیه کنیم.

برای این کار از رابطه (۲-۴) کمک می‌گیریم.

$$\overrightarrow{AB}_x = 120^\circ \times \cos(30^\circ) \hat{i} = 103.9 / 21 \hat{i}$$

$$\overrightarrow{AB}_y = 120^\circ \times \sin(30^\circ) \hat{j} = 60^\circ \hat{j}$$

$$\overrightarrow{BC}_x = 120^\circ \times \cos(-45^\circ) \hat{i} = 84.8 / 31 \hat{i}$$

$$\overrightarrow{BC}_y = 120^\circ \times \sin(-45^\circ) \hat{j} = -84.8 / 31 \hat{j}$$

حال با استفاده از رابطه (۲-۵) بردارها را جمع می‌کنیم :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

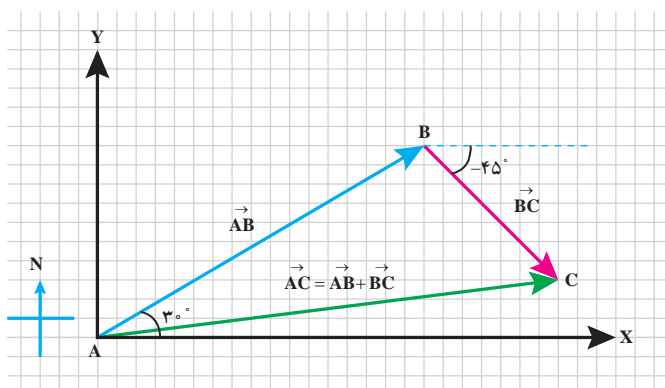
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}_x = \overrightarrow{AB}_x + \overrightarrow{BC}_x = 188.7 / 52 \hat{i} \\ \overrightarrow{AC}_y = \overrightarrow{AB}_y + \overrightarrow{BC}_y = 169.6 / 62 \hat{j} \end{cases}$$

در نتیجه بردار جابه‌جایی کشتی که همان بردار \overrightarrow{AC} باشد به شکل زیر به دست می‌آید :

$$\overrightarrow{AC} = 188.7 / 52 \hat{i} + 169.6 / 62 \hat{j}$$

با استفاده از فیثاغورث (یعنی رابطه ۲-۶) طول این بردار را می‌توان محاسبه کرد :

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{188.7^2 / 52^2 + 169.6^2 / 62^2} = 247.4 \text{ km}$$



شکل ۲-۱۵- بردارهای مثال ۵

و با استفاده از روابط مثلثاتی (یعنی رابطه ۷-۲) می‌توان به راحتی زاویه بردار نسبت به محور شرق را یافت :

$$\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{175/7}{1463/5} = 0.12$$

با استفاده از جدول مقادیر مثلثاتی در انتهای کتاب و یا استفاده از ماشین حساب می‌توان زاویه مورد نظر را یافت : $\theta = 6.8^\circ$

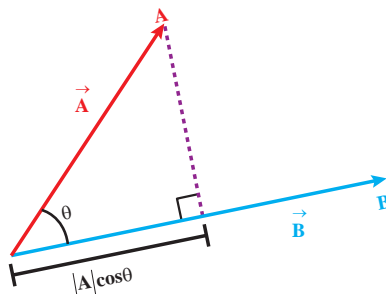
فعالیت ۲-۳

فرض کنید در مثال ۵ فاصله A تا B برابر 800 کیلومتر و فاصله B تا C برابر 1000 کیلومتر باشد. در انتها نیز به شهر D بروید که تا C، 500 کیلومتر فاصله دارد و در امتداد شرقی شهر C واقع شده است. بردار برآیند جابجایی از A تا D را محاسبه کنید.

۵-۲-۲- ضرب بردارها : در کل دو نوع ضرب برداری داریم. ضرب در بردارها با ضرب در کمیت‌های نرده‌ای متفاوت است. شاید این موضوع را بتوان با ذکر مثالی، روشن کرد. در بحث کار و انرژی، مقدار کار در اصل نوعی حاصل ضرب بردارهای جابه‌جایی و نیرو است. مقدار کار به دست آمده از این طریق یک بردار نیست و بلکه یک کمیت نرده‌ای است. به این نوع ضرب ضرب برداری می‌گویند. یا در مورد گشتاور، که در فصل آینده با آن آشنا می‌شوید، در ضربی مشابه بحث کار و انرژی اما ضرب از نوع خارجی یا برداری، حاصل ضرب که همان گشتاور باشد، یک بردار است.

ضرب داخلی : همان‌طور که گفته شد حاصل ضرب این نوع ضرب یک بردار نیست، بلکه یک کمیت نرده‌ای (اسکالر) است. رابطه (۸-۲) که با توجه به شکل ۱۶-۲ نوشته شده است، ضرب داخلی دو بردار A و B را نشان می‌دهد.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) \quad (2-8)$$



شکل ۱۶-۲- ضرب داخلی

در واقع ضرب داخلی حاصل ضرب طول تصویر بردار A بر روی بردار B ، ضرب در طول بردار B است. همچنین داریم:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

این نوع ضرب به دلیل علامت ضربی که بین دو بردار قرار می‌گیرد به ضرب نقطه‌ای مشهور است.

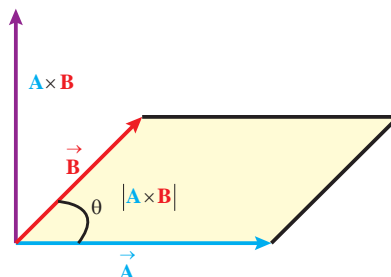
یادآوری

مقدار کار انجام شده توسط نیرو در جابه‌جایی یک جسم توسط رابطه $W = F \cdot d \cos(\theta)$ به دست می‌آید. حالا به خوبی متوجه شده‌اید که در واقع این رابطه همان ضرب داخلی دو بردار نیرو و جابه‌جایی است.

ضرب خارجی: در ضرب خارجی حاصل ضرب یک بردار است. اما محاسبه بردار حاصله از حوصله کتاب خارج است و مورد نیاز فعالیت‌های بعدی نیز نیست. لذا در این جا فقط به رابطه‌ای برای محاسبه مقدار یا طول بردار حاصله از این ضرب بسنده می‌شود. همان‌طور که از شکل ۲-۱۷ و رابطه (۲-۹) بر می‌آید، حاصل ضرب خارجی برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط دو بردار.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta) \quad (2-9)$$

این ضرب در فیزیک و مکانیک بسیار پرکاربرد است. فراموش نکنید که رابطه (۲-۹) فقط و فقط مقدار یا طول بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار را نشان می‌دهد، نه خود بردار حاصل ضرب را.



شکل ۲-۱۷- ضرب خارجی

مثال ۶: با استفاده از روابطی که در بالا آمد، ضرب داخلی و طول بردار ضرب خارجی دو بردار A و B را که به ترتیب به طول‌های 1° واحد و 15° واحد دارند و با هم زاویه 6° درجه می‌سازند، محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه (۲-۸) ضرب داخلی را محاسبه می‌کنیم.

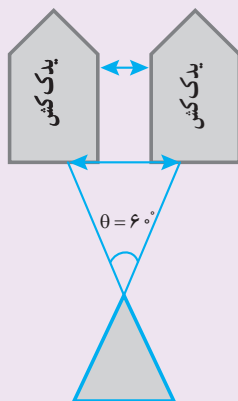
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = 1^\circ \times 15^\circ \times \cos(6^\circ) = 15^\circ \times 0.9945 = 14.9175$$

با استفاده از رابطه (۲-۹) نیز حاصل طول بردار ضرب خارجی به دست خواهد آمد.

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta) = 1^\circ \times 15^\circ \times \sin(6^\circ) = 15^\circ \times 0.1042 = 1.563$$

فعالیت ۲-۴

در مثال ۶ از فصل ۱، اگر کشتی بزرگ 30000 تن جرم داشته باشد و یدک‌کش‌ها هر کدام با نیروی 5° کیلونیوتن در امتداد کابل‌ها کشتی را یدک کنند. در صورتی که کشتی به این وسیله 2 کیلومتر جابه‌جا شود مقدار کار انجام شده روی کشتی چقدر است.





خودآزمایی فصل دوم

۱- روش‌های جمع برداری را نام ببرید.

۲- آیا حاصل جمع دو بردار، یک کمیت برداری خواهد

شد یا نرده‌ای؟

۳- جای خالی را پر کنید.

الف) نیرو یک کمیت _____ است.

ب) جرم یک کمیت _____ و وزن یک کمیت _____ است.

پ) جابه‌جایی تقسیم بر تغییرات زمان _____ نام دارد که یک کمیت _____ و مسافت

تقسیم بر زمان _____ نام دارد که یک کمیت _____ است.

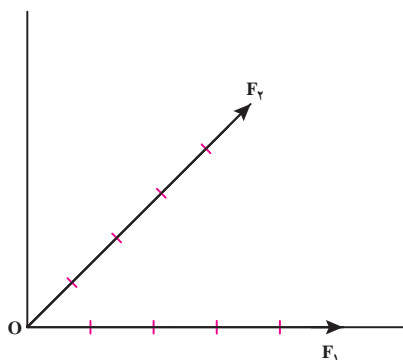
۴- الف) برآیند دو بردار عمود بر هم به طول ۳ واحد (افقی) و ۴ واحد (عمودی) را با استفاده

از روش‌های ترسیمی و ریاضی تعیین کنید. (بردارها را در جهت مثبت محور فرض کنید)

ب) زاویه بردار برآیند با محور افقی را به روش ترسیمی و روش ریاضی به دست آورید.

۵- دو نیروی \vec{F}_1 و \vec{F}_2 مطابق شکل ۱۸-۲ بر نقطه O وارد می‌شوند. زاویه بین دو نیرو ۴۵

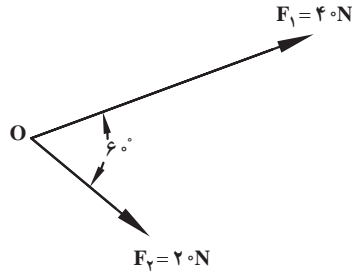
درجه است. طول بردار برآیند و زاویه بردار برآیند با محور افق را بیابید.



شکل ۱۸-۲

۶- برآیند دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 در شکل ۱۹-۲ چقدر است؟ از روش مثلث برای ترسیم استفاده

کنید و پاسخ آن را با روش متوازی‌الاضلاع و روش ریاضی مقایسه کنید.



شکل ۱۹-۲

- ۷- حاصل ضرب داخلی دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.
 - ۸- حاصل ضرب خارجی (اندازه) دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.
 - ۹- یک قایق تفریحی مسیر زیر را در یک ساعت می‌پیماید :
 - ۵ کیلومتر به طرف شمال
 - ۴ کیلومتر به طرف شرق
 - ۳ کیلومتر به طرف شمال
 - ۸ کیلومتر به طرف جنوب
- الف) با مقیاس‌گذاری مناسب مسیر این قایق را رسم کنید، بردار برآیند جابجایی را به دست آورید.
- ب) مسافت پیموده شده قایق را حساب کنید.
- ج) سرعت و تندی متوسط قایق را برای این مسیر حساب کنید.