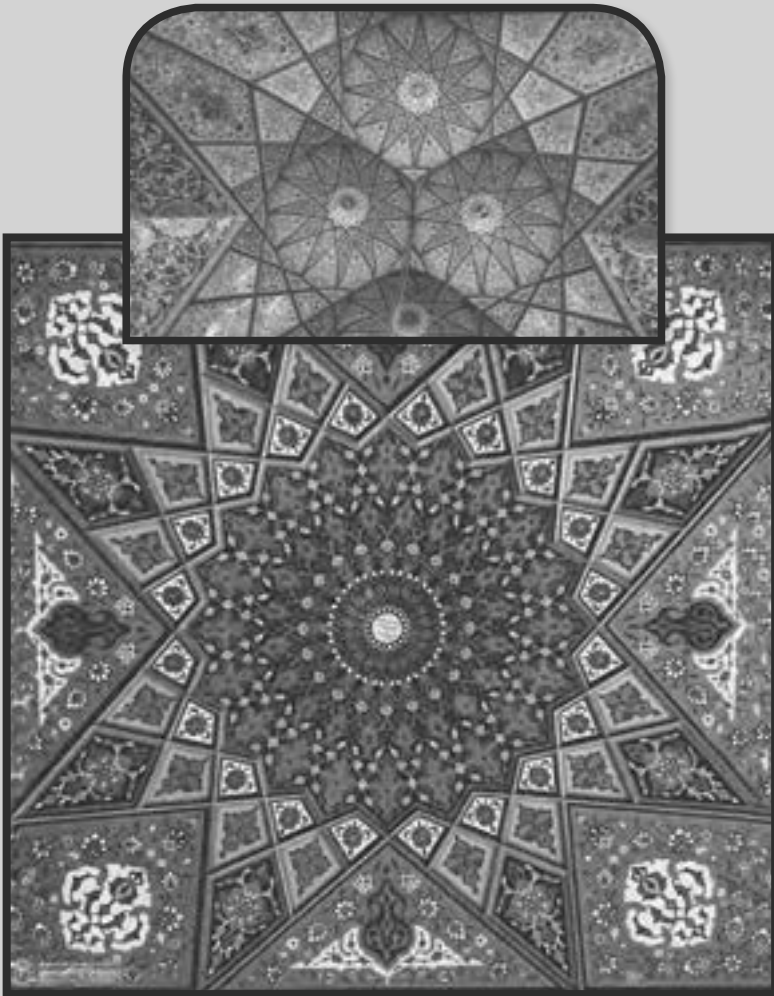




خط و معادله‌های خطی



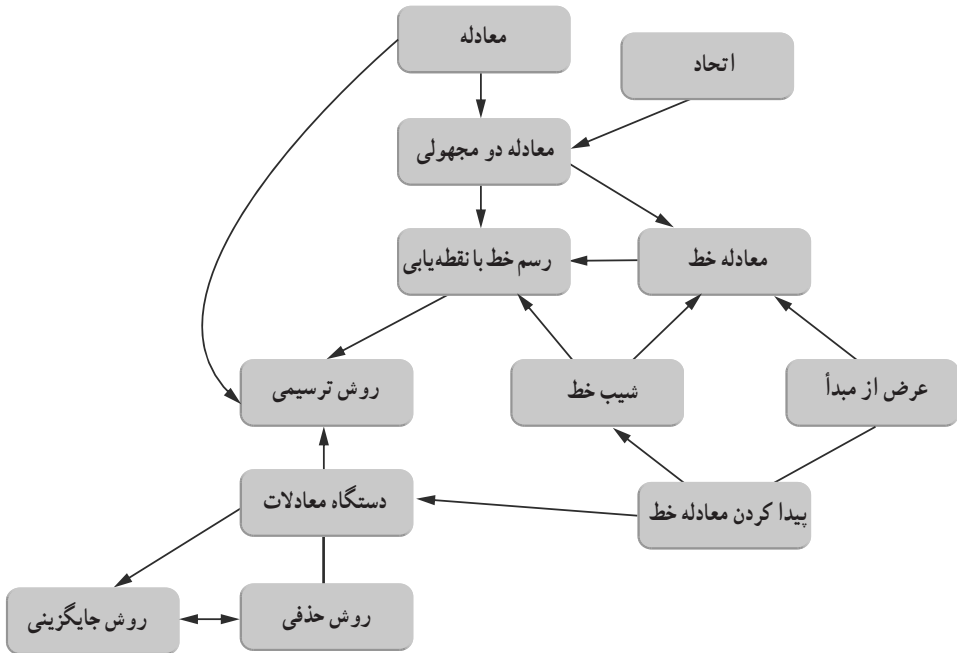
بخشی از سقف صحن و سرای حرم مطهر سیدالشهدا، امام حسین (ع)

کاربرد هندسه و خطها در فرش‌بافی، کاشی‌کاری، نگارگری، خطاطی، گچ‌بری، کتیبه‌نویسی، تذهیب و ... غیرقابل انکار، و بسیار حائز اهمیت است. از انواع خط برای ایجاد زاویه‌ها و جداسازی فضاها استفاده‌های فراوان شده است.

نگاه کلی به فصل

این فصل شامل سه درس است. ابتدا مفهوم معادله خط با استفاده از رابطه بین طول و عرض نقطه‌ها و قرار گرفتن بی‌شمار نقطه در کنار هم برای ساختن یک خط آغاز می‌شود. در درس دوم مفهوم شیب و عرض از مبدأ خط طرح شده و به کمک آن علاوه بر رسم خط، معادله خط مورد نظر پیدا می‌شود. در درس آخر این فصل مفهوم دستگاه معادله‌های خطی و روش‌های حل دستگاه، آموزش داده می‌شود. همچنین دانش‌آموزان یاد می‌گیرند که به کمک تشکیل دستگاه معادله، مسئله‌ها را نیز حل کنند.

نقشه مفهومی



تصویر عنوانی

تصویر آغازین این فصل نمایشگر کاربرد خط در نقش‌های معماری اسلامی است. این ویژگی یکی از کاربردهای خط است و به طور کلی می‌توان خط را به عنوان ماده اولیه هندسه نام برد و با توجه به تأثیر و کاربرد هندسه در زندگی روزمره و یا سایر دروس اهمیت خط بیش از پیش آشکار می‌شود.

دانستنی‌هایی برای معلم

معادله‌های خطی یک نوع خاص از انواع معادله‌های دو مجهولی است. این موضوع در واقع بخشی از یک مفهوم کلی‌تر به نام تابع است. تابع نیز نوع خاصی از رابطه است. به همین دلیل درس معادله خط با مفهوم رابطه آغاز شده است. دو یا چند کمیت می‌توانند به طرق مختلف با هم رابطه داشته باشند. البته مفهوم رابطه بسیار عام‌تر است. برای مثال والدین با فرزندان رابطه دارند. دو پسرعمو با هم رابطه دارند. میزان انرژی تولید شده در بدن ما با مقدار غذایی که میل می‌کنیم رابطه دارد. با توجه به گستردگی و کاربرد فراوان دو مفهوم رابطه و تابع در درس‌های مختلف ریاضی، موضوع تابع در کانون توجهات آموزشگران ریاضی قرار داشته است و در این زمینه مطالعات فراوانی انجام شده است. آناسفارد (Anna Sfard) در سال ۱۹۹۱ با مرور عمده پژوهش‌های انجام شده در خصوص تابع و آموزش آن جمع‌بندی کرد که مفاهیم مرتبط با تابع در دیدگاه فرایندی (Process) و عینی (objective) بررسی می‌شوند.

در آموزش این مفاهیم به طور سنتی به فرایندها پرداخته می‌شد و کمتر به عینی شدن مفاهیم توجه شده است. برای مثال وقتی یک معادله خطی مثل $2y - 3x = 4$ را به دانش‌آموزان بدهیم و از آنها بخواهیم شیب و عرض از مبدأ خط را پیدا کنند، آنها می‌توانند با طی کردن یک فرایند متداول و مشخص و تبدیل این معادله به فرم استاندارد $y = mx + n$ ، مقدار شیب و عرض از مبدأ را پیدا کرده و بیان کنند، اما این دو مفهوم برای آنها عینی نشده است به همین دلیل در پاسخ به سؤال زیر قادر به رسم تقریبی خط نیستند و درک درستی از این دو مفهوم از خود نشان نمی‌دهند.

سؤال: اگر $y = ax + b$ ، $a > 0$ ، $b < 0$ باشد، موقعیت خط را در محورهای مختصات به‌طور

تقریبی رسم کنید.

از طرفی دیگر مفاهیمی مثل تابع، بازنمایی‌های (representation) متعددی دارند. بحث بازنمایی‌های مختلف یک مفهوم نیز بسیار مورد توجه آموزشگران ریاضی قرار گرفته است. برای مثال تابع (و یا رابطه بین دو کمیت) را می‌توان به صورت کلامی توصیف کرد، همچنین می‌توان با زوج‌های مرتب مثل (۲،۳) یا $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ بیان کرد که به آن بازنمایی جدول نیز می‌گویند. تابع را می‌توان با یک ضابطه جبری نشان داد و یا نمودار آن را به صورت گرافیکی رسم کرد. بنابراین توصیف کلامی، جدول، جبری و گرافیکی، ۴ بازنمایی مختلف تابع هستند. در جدول زیر رابطه بین دیدگاه‌های مختلف و بازنمایی‌های متنوع تابع ارائه شده است.

دیدگاه	بازنمایی	جدول	جبری	گرافیکی
فرایندی				
عینی				

یک آموزش خوب وقتی شکل می‌گیرد که بازنمایی‌های مختلف تابع در کنار هم ارائه شوند و دانش‌آموز قادر باشد در هر ردیف (فرایندی یا عینی) در بین بازنمایی‌های مختلف حرکت کرده و هر کدام را به دیگری تبدیل کند.

همچنین باید بتواند از دیدگاه فرایندی به عینی حرکت کرده و در هر بازنمایی، این موضوع نهادینه شود. در برنامه جدید آموزش معادلات خطی در کتاب ریاضی نهم سعی شده است تا براساس این چهارچوب نظری تألیف انجام شود تا دانش‌آموزان از مفاهیم مرتبط با معادلات خطی درک بهتری داشته باشند.

توسعه مفاهیم

در صورتی که دانش‌آموزان شما توانایی لازم را برای طرح موضوعات تکمیلی دارند می‌توانید جهت تعمیق موضوعات این فصل به مفهوم دسته خط اشاره کرده و از دانش‌آموزان بخواهید نقطه هم‌رسی یک دسته خط را پیدا کنند. همچنین می‌توانید علاوه بر مثال‌های کتاب با طرح مسئله‌های ترجیحاً واقعی و کاربردی، زمینه را برای مدل‌سازی جبری فراهم کرده و دانش‌آموزان با تبدیل مسئله داده شده به معادله‌ای خطی و تشکیل دستگاه بتوانند آن را حل کنند.

علاوه بر این می‌توانید مفاهیم مختلف این درک را با هم ترکیب کرده و مسئله‌های ترکیبی مانند نمونه زیر طرح کنید.

«معادله خطی را بنویسید که از محل برخورد خط‌های $2x - y = 4$ و $3y - 2x = 5$ بگذرد و خط $y = 2x - 1$ را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کند.»

طرح موضوعاتی مثل فاصله دو نقطه روی محورهای مختصات و همچنین شیب دو خط عمود برهم نیز می‌تواند به غنای بیشتر موضوعات این فصل بیفزاید.

استفاده از ابزار و تکنولوژی

برای رسم منحنی تابع‌های مختلف، انواع و اقسام نرم‌افزارها وجود دارد. با وارد کردن معادله

یک تابع یا یک خط، نمودار آن رسم می‌شود و دانش‌آموزان می‌توانند شکل توابع مختلف را مشاهده کنند.

نرم‌افزار GeoGebra نیز برای آموزش معادله خط بسیار کارآمد است. چرا که در این نرم‌افزار می‌توانید بازنمایی‌های مختلف تابع را به صورت هم‌زمان برای دانش‌آموزان نمایش دهید.

همچنین می‌توانید با تعریف دو متغیر (لغزنده) a , b در این نرم‌افزار خط به معادله $y=ax+b$ را رسم کنید. با تغییر دادن مقدارهای متغیر a (با توجه به ثابت بودن مقدار b) شیب خط تغییر کرده و دانش‌آموزان می‌توانند رابطه بین شیب خط و مقدار a را درک کنند. پس از آن می‌توانید مقدار a را ثابت در نظر بگیرید و با تغییر مقدار b دانش‌آموزان مفهوم عرض از مبدأ را درک کنند. به این ترتیب می‌توانید فعالیت اول درس دوم این فصل را شبیه‌سازی کنید.

با این نرم‌افزار می‌توانید تمام فعالیت‌ها، کار در کلاس‌ها و تمرین‌ها را شبیه‌سازی کنید تا دانش‌آموزان درک بهتری نسبت به این مفاهیم پیدا کنند. این نرم‌افزار همچنین ابزار مناسبی برای رسم خط است و در زمان تدریس صرفه‌جویی خواهد کرد.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- خط $2y-4x=8$ را در محورهای مختصات رسم کرده، شیب و عرض از مبدأ آن را پیدا کنید.

۲- آیا نقطه $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟

۳- نقطه‌ای از این خط را مشخص کنید که طول آن ۲ باشد.

۴- نقطه‌ای به عرض -1 از این خط مشخص کنید.

۵- محل تقاطع خط را با محورهای مختصات مشخص کنید.

۶- مقدار k را طوری تعیین کنید که خط $y-kx=k+1$ از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۷- مقدار p را طوری تعیین کنید که نقطه $\begin{bmatrix} 2p \\ p+1 \end{bmatrix}$ روی خط $y=2x-1$ واقع شود.

۸- معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه داده شده بگذرد.

الف) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$

ج) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

د) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

- ۹- زاویه بین دو خط $y=2$ و $x=4$ را پیدا کنید.
۱۰- دستگاه معادله‌های خطی زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

- ۱۱- قیمت یک دفتر و ۳ ماژیک ۲۹۰۰ تومان و قیمت ۲ دفتر و یک ماژیک ۴۳۰۰ تومان است. قیمت هر کدام را پیدا کنید.
۱۲- جرم ۵ گلوله کوچک و ۲ گلوله بزرگ ۳۵۰۰ گرم و جرم ۴ گلوله کوچک و ۳ گلوله بزرگ ۴۹۰۰ گرم است. جرم هر گلوله را پیدا کنید.

اهداف

- آشنایی با مفهوم رابطه بین دو مقدار
- درک مفهوم رابطه خطی
- رسم خط با معادله داده شده
- پیدا کردن نقطه‌ای از خط با معادله داده شده با ویژگی مورد نظر
- درک تفاوت معادله خط و اتحاد
- ابزار مورد نیاز :
- ۱- صفحه شطرنجی
- ۲- خط‌کش

روش تدریس

درس اول این فصل با مفهوم رابطه بین دو مقدار آغاز می‌شود. در کتاب درسی برای این موضوع سه مثال ذکر شده است. شما می‌توانید مثال‌های دیگری را نیز مطرح کنید. هدف فعالیت اول این درس آشنا کردن دانش‌آموزان با مفهوم رابطه خطی بین دو مقدار است.

همچنین در این فعالیت، ۳ بازنمایی مختلف خط (جدول، جبری و گرافیکی) در کنار هم مطرح می‌شوند. دانش‌آموزان پس از پیدا کردن نقطه‌ها متوجه می‌شوند که ویژگی این نقطه‌ها این است که روی یک خط قرار دارند، سپس رابطه بین دو مقدار را به صورت جبری $y=2x$ بیان می‌کنند. در کار در کلاس مربوطه نیز نمونه دیگری از رابطه خطی در کنار یک رابطه غیر خطی مطرح می‌شود تا دانش‌آموزان درک بهتری از مفهوم رابطه بین دو مقدار پیدا کنند.

در فعالیت دوم هدف این است که دانش‌آموزان بی‌شمار جواب‌های یک معادله درجه اول دو مجهولی را پیدا کنند و تفاوت آن را با اتحاد بیان کنند. نکته جالب این است که یک معادله دو مجهولی بی‌شمار جواب دارد ولی اتحاد نیست. نحوه پیدا کردن جواب‌های یک معادله دو مجهولی را در کلاس به بحث بگذارید.

در ادامه این فعالیت حدس زدن رابطه بین x , y برای یک خط داده شده و همچنین فرم استاندارد $y=ax+b$ آموزش داده می‌شود. در کار در کلاس این قسمت با تمرین رسم خط با معادله داده شده خط‌های مبدأ گذر نیز مطرح می‌شود.

در فعالیت سوم علاوه بر رسم خط، حدس زدن معادله خط، مورد نظر است و همچنین در

کار در کلاس یاد می‌گیرند که با دو روش ترسیمی و تحلیلی، یک نقطه از خط را پیدا و این دو روش را با هم مقایسه کنند.

سؤال ۳ از تمرین‌های این درس یکی از سؤال‌هایی است که در مطالعه تیمز مطرح شده بود. شکل سوم از سمت چپ پاسخ درست است چون نشان می‌دهد که در بدو تولد، نوزاد یک مقدار مشخص قد دارد و همچنین فرایند رشد آن ابتدا سریع است ولی پس از مدتی ثابت می‌ماند. در سؤال ۴ نیز هدف صرفاً حدس زدن رابطه بین x و y است. دانش‌آموزان با این نمونه‌ها در کلاس هشتم نیز آشنا شده بودند پاسخ‌ها به ترتیب عبارت است از:

الف) $y=3x$

ب) $y=x+2$

ج) $y=3x+1$

توصیه‌های آموزشی

- ۱- حدس زدن معادله خط با داشتن دو نقطه کار ساده‌ای نیست، لذا از طرح تمرین‌های پیچیده در این قسمت خودداری کنید. دانش‌آموزان پس از اینکه شیب و عرض از مبدأ را یاد گرفتند می‌توانند معادله خط را به طور مستقیم به دست آورند.
- ۲- روش‌های مختلف (ترسیمی - تحلیلی) را در حل تمرین‌ها به کار ببرید و با هم مقایسه کنید. این کار به درک بهتر موضوع کمک می‌کند.
- ۳- استفاده از نرم‌افزارهایی مثل GeoGebra برای آموزش بهتر این موضوع توصیه می‌شود.

اشتباهات رایج

- وقتی مسئله از دانش‌آموزان نقطه‌ای از خط را می‌خواهد آنها به طور معمول به پیدا کردن x یا y اکتفا می‌کنند و نقطه مورد نظر را نشان نمی‌دهند. برای مثال محل برخورد $y=1x-2$ با محور طول‌ها نقطه $\left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right]$ است نه $x=1$.
- در حدس زدن معادله خط، یک معادله‌ای می‌نویسند که نقطه برای یکی از نقطه‌ها درست است و فراموش می‌کنند نقطه دیگر را امتحان کنند.

اهداف

- درک مفهوم شیب و عرض از مبدأ
- پیدا کردن معادله خط با داشتن شیب و عرض از مبدأ
- رسم خط با کمک مفهوم شیب و عرض از مبدأ

ابزار مورد نیاز :

- ۱- صفحه شطرنجی
- ۲- خط کش
- ۳- نرم افزارهای مرتبط

روش تدریس

در این درس دانش آموزان با مفهوم شیب به سه صورت مختلف آشنا می‌شوند. در فعالیت اول صرفاً با مفهوم شیب و عرض از مبدأ آشنا می‌شوند و متوجه می‌شوند که تغییر دو پارامتر a , b در معادله خط $y=ax+b$ چه تأثیری در شکل خط در محورهای مختصات می‌گذارد. در این فعالیت توجه آنها را به شیب‌های مثبت و منفی جلب کنید. در کار در کلاس مربوطه نیز دانش آموزان به صورت فرایندی شیب و عرض از مبدأ خط‌های داده شده را پیدا می‌کنند، بدون آنکه از این دو مفهوم درک عینی داشته باشند.

در فعالیت دوم تلاش شده است تا دانش آموزان از مفهوم شیب خط یک درک بهتری پیدا کنند. ابتدا با مقایسه شیب سه خط، پله و نسبت ارتفاع به طول شیب یک خط به صورت قدر مطلق معرفی می‌شود.

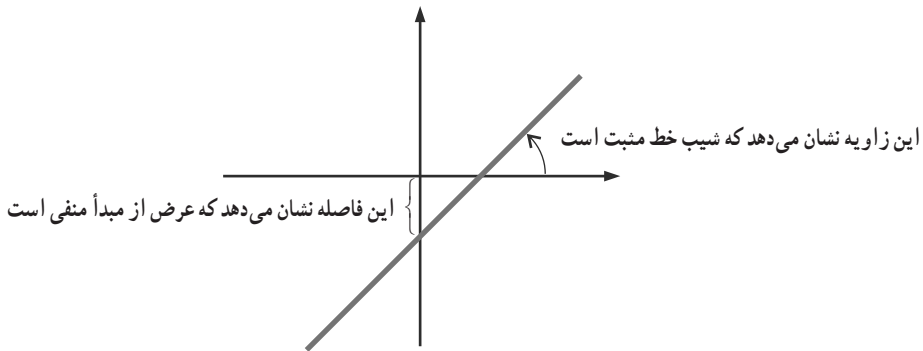
در سؤال‌های ۳ و ۴ این فعالیت دانش آموزان با رسم مثلث قائم‌الزاویه و نوشتن نسبت ارتفاع به قاعده (y به x) مقدار شیب را پیدا می‌کنند. اگر مثلث سمت راست خط شکل بگیرد شیب مثبت و اگر سمت چپ باشد شیب منفی خواهد بود.

در پایان فعالیت یاد می‌گیرند تا به کمک مفهوم شیب و عرض از مبدأ یک خط را رسم کنند. در مرحله اول، به کمک مفهوم عرض از مبدأ، نقطه اول را پیدا می‌کنند. در مرحله دوم به کمک مفهوم شیب دوم یک مثلث قائم‌الزاویه، نقطه دوم خط را پیدا کرده و در مرحله سوم با داشتن دو نقطه، خط را رسم می‌کنند.

در فعالیت سوم این درس دانش‌آموزان با خط‌های موازی محورها آشنا می‌شوند. برای اینکه درک کنند $x=2$, $y=3$ می‌توانند معادله خط باشند لازم است فرم کلی معادله‌های خطی $ax+by=c$ معرفی شود و دانش‌آموزان با قراردادن مقادیر مختلف به جای a, b, c خط‌های مختلفی را به دست آورند.

پس از آن متوجه می‌شوند که چگونه با تعیین ضرایب a, b, c می‌توانند معادله خط $x=2$ را پیدا کنند. در کار در کلاس مربوطه نیز به تمرین رسم خط‌های موازی محورها و نوشتن معادله‌های آنها می‌پردازند.

سؤال ۴ قسمت تمرین بسیار کلیدی است. وقتی $a > 0$ و $b < 0$ باشد شکل خط به صورت زیر خواهد شد.



در سؤال ۵ نیز می‌توان با رسم مثلث قائم‌الزاویه و داشتن عرض از مبدأ معادله خط را نوشت. در شکل سمت چپ خط محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع کرده است پس عرض از مبدأ ۱ است. با توجه به مثلث رسم شده شیب خط ۲ و با توجه به اینکه مثلث سمت چپ خط است شیب منفی می‌شود (۱-). پس معادله خط عبارت است از: $y = -2x + 1$.

در سؤال ۷ نیز موضوع شیب برای بار سوم مطرح شده است در این حالت با داشتن دو نقطه از خط و نوشتن رابطه مذکور می‌توان مقدار شیب خط را به دست آورد. بنابراین در سؤال ۸، شیب خط را می‌توان به کمک همین رابطه پیدا کرد و با داشتن شیب و یک نقطه از خط معادله آن را پیدا کرد.

توصیه‌های آموزشی

۱- رسم خط با داشتن شیب و عرض مبدأ و پیدا کردن معادله‌های خط رسم شده به درک بهتر

مفاهیم شیب و عرض از مبدأ کمک می‌کند.

۲- برای اینکه دانش‌آموزان از معادله $x=2$ درک درستی داشته باشند لازم است در معادله

$2 = x + 1 \times y$ به جای x ، y مقادیر مختلف قرار دهید تا دانش‌آموزان به حذف شدن مقدار y پی ببرند

و ثابت بودن مقدار x در مختصات نقطه‌های مختلف خط با عرض‌های متفاوت را درک کنند.

اشتباهات رایج

– یکی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان پس از اینکه مراحل پیدا کردن شیب خط را انجام می‌دهند

این است که به جای بیان ضریب x به عنوان شیب عدد و x را با هم بیان می‌کنند. برای مثال می‌گویند

شیب خط $2x$ است.

اهداف

- درک مفهوم دستگاه معادله‌های خطی
- درک مفهوم جواب مشترک در معادله
- حل دستگاه به روش ترسیمی
- حل دستگاه به روش‌های تحلیلی (حذفی و جایگزینی)
- تشکیل دستگاه معادله‌های خطی و حل مسئله به کمک آن

ابزار مورد نیاز :

- ۱- صفحه شطرنجی
- ۲- خط‌کش
- ۳- نرم‌افزارهای مرتبط

روش تدریس

شروع درس با یک فعالیت کاربردی مناسب است تا دانش‌آموزان چگونگی شکل‌گیری دستگاه معادلات خطی را درک کنند. در سؤال دوم نیز هدف درک مفهوم جواب مشترک دو معادله و مقایسه آن با مفهوم هندسی تقاطع دو خط است. در کار در کلاس روش ترسیمی حل دستگاه تمرین می‌شود. در فعالیت دوم دانش‌آموزان ابتدا دو قاعده مورد نیاز برای حل یک دستگاه را یاد می‌گیرند سپس روش حذفی که در کتاب انجام شده است را با این دو قاعده مرتبط می‌کنند. در کار در کلاس این بخش نیز حل دستگاه به روش حذفی را تمرین می‌کنند. در فعالیت سوم نیز مدل‌سازی یک مسئله به صورت تشکیل معادله سه روش حذفی، جایگزینی و معادله یک مجهولی با هم مقایسه می‌شود. در کار در کلاس نیز روش جایگزینی تمرین می‌شود.

سؤال ۳ از قسمت تمرین را به صورت زیر برای دانش‌آموزان حل کنید تا نحوه نوشتن جواب را نیز بیاموزند.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \\ 2x = 2 \end{cases} \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ نقطه تقاطع دو خط}$$

$$y = ax + b \rightarrow y = \frac{-2}{3}x + b \rightarrow 0 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \rightarrow b = \frac{2}{3}$$

نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط است شیب خط $-\frac{2}{3}$ است

پس معادله خط عبارت است از: $3y + 2x = 2$ یا $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ در سؤال ۶ نیز چون دو خط با هم موازی هستند و شیب برابر دارند پس همدیگر را قطع نمی‌کنند و یا به عبارت دیگر می‌گوییم دستگاه جواب ندارد.

توصیه‌های آموزشی

مقایسه روش‌های مختلف حل دستگاه و یا تشکیل دستگاه و نوشتن معادله بسیار توصیه می‌شود.
 طرح مسئله‌هایی که برای حل، نیاز به تشکیل دستگاه دارند از توصیه‌های جدی این قسمت است.

اشتباهات رایج

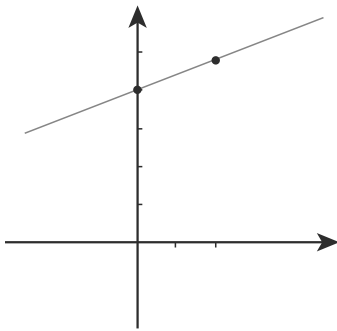
– وقتی دو معادله خط همدیگر را قطع نکنند می‌گوییم دستگاه جواب ندارد. در این موارد اغلب دانش‌آموزان می‌گویند دستگاه اشتباه است چون جوابی پیدا نشده است.
 – وقتی دو معادله خط روی هم قرار می‌گیرند در واقع می‌توان گفت دستگاه تشکیل نشده است و یا به عبارت دیگر بگوییم دستگاه بی‌شمار جواب دارد. تفاوت این دو پاسخ در این است که چه چیزی را به عنوان تعریف دستگاه پذیرفته‌ایم. دانش‌آموزان به طور معمول تفاوت در تعاریف مختلف و تأثیر آن در پاسخ دادن به یک سؤال را درک نمی‌کنند.

حل تمرین های فصل ۶

تمرین

x	۰	۲
y	۴	۵

۱- خط به معادله $y = \frac{1}{2}x + 4$ را رسم کنید.



الف) آیا نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی این خط است؟ خیر

ب) مختصات نقطه های برخورد خط را با محورهای

مختصات پیدا کنید. $\begin{bmatrix} -8 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

ج) نقطه ای از خط به طول -۱ را پیدا کنید.

$$x = -1 \rightarrow y = \frac{1}{2}(-1) + 4 = \frac{-1+8}{2} = \frac{7}{2} \quad \begin{bmatrix} -1 \\ 3\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

۲- طول یک فنر 1° سانتیمتر است. وقتی وزنه ای به جرم x به آن وصل شود، طول فنر از رابطه

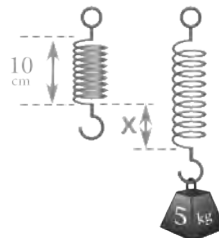
$y = 0.8x + 1^\circ$ پیدا می شود. اگر وزنه ای به جرم ۵ کیلوگرم به آن وصل شود، طول فنر چقدر می شود؟

$$x = 5$$

$$y = 0.8 \times 5 + 1^\circ$$

$$y = 4 + 1^\circ$$

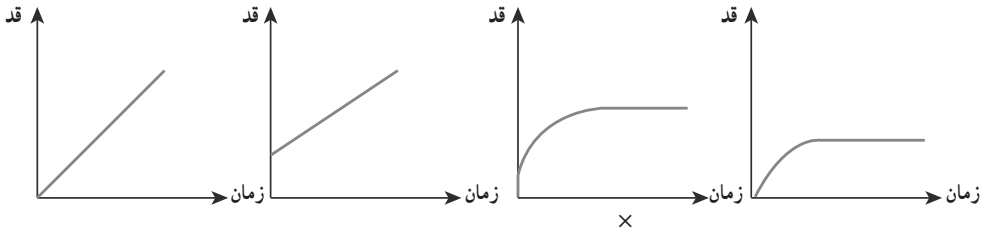
$$y = 14$$



۳- کدام یک از نمودارهای زیر رابطه رشد قد انسان را از هنگام تولد تا بزرگسالی نشان می دهد؟

با توجه به وضعیت های مختلف، نمودار آن را توصیف کنید؛ برای مثال بگویید محل برخورد نمودار

با محور y به چه معنا است.



۴- دو نقطه از یک خط داده شده است؛ معادله خط را حدس بزنید.

الف) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$y = 3x$$

$$y = 2x - 1$$

$$y = 3x + 1$$

۵- مختصات محل برخورد خط به معادله $y = -x + 2$ را با محورهای مختصات بیابید.

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \quad y = 0 \rightarrow x = +2 \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۶- مختصات نقطه‌ای از خط به معادله $y = -\frac{3}{5}x + 4$ را بیابید که طول آن نقطه ۵ باشد.

$$y = -\frac{3}{5}x + 4 \rightarrow y = -\frac{3}{5} \times 5 + 4 = -3 + 4 = 1 \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۷- خط $y = -\frac{1}{2}x + 2$ را رسم کنید.

آیا نقطه $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ نقطه‌ای به طول ۱- از این خط پیدا کنید. بله، $\begin{bmatrix} -1 \\ 2/5 \end{bmatrix}$
نقطه‌ای به عرض ۲- از این خط پیدا کنید. $\begin{bmatrix} 8 \\ -2 \end{bmatrix}$

محل برخورد خط را با محورهای مختصات پیدا کنید.

x	0	2
y	2	1

$$y = -\frac{1}{2}x - 1 + 2$$

$$x = 0 \rightarrow y = 2$$

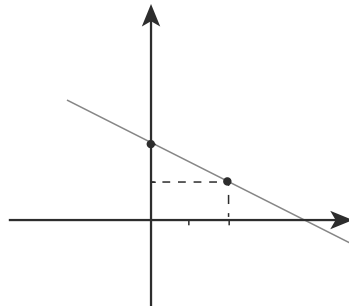
$$y = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$y = 0 \rightarrow x = 4$$

$$-2 = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$-\frac{1}{2}x = -4$$

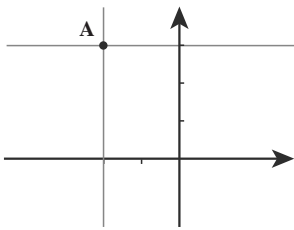
$$x = 8$$



نقاط برخورد خط با محورها $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

۱- خط‌های به معادله $y=3$ و $x=-2$ را رسم و مختصات محل برخورد آنها را پیدا کنید. زاویه

بین این دو خط چند درجه است؟ 90°



$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

۲- معادله محور طول‌ها و محور عرض‌ها را بنویسید؛ محل برخورد آنها چه نقطه‌ای است؟

$$\begin{bmatrix} \circ \\ \circ \end{bmatrix} \text{ محل برخورد} \quad y = \circ \text{ محور طول‌ها}$$

$$x = \circ \text{ محور عرض‌ها}$$

۳- شیب و عرض از مبدأ خط‌های زیر را پیدا و سپس آن خط‌ها را رسم کنید.

l) $3y - 2x = 6$

j) $4x - 2y = 8$

e) $2x - y = 3$

$$3y = 2x + 6$$

$$-2y = -4x + 8$$

$$-y = -2x + 3$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$y = 2x - 4$$

$$y = 2x - 3$$

$$\text{شیب} = 2$$

$$\text{شیب} = 2$$

$$\text{شیب} = \frac{2}{3} \quad \text{عرض از مبدأ} = 2 \quad \text{عرض از مبدأ} = -4 \quad \text{عرض از مبدأ} = -3$$

$$\begin{bmatrix} \circ \\ 2 \end{bmatrix}$$

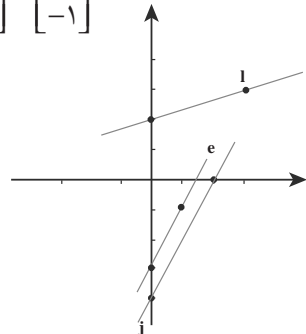
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \circ \\ -4 \end{bmatrix}$$

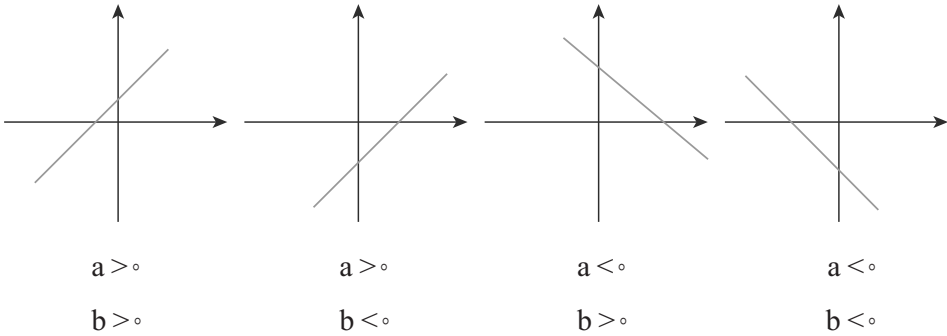
$$\begin{bmatrix} 2 \\ \circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \circ \\ -3 \end{bmatrix}$$

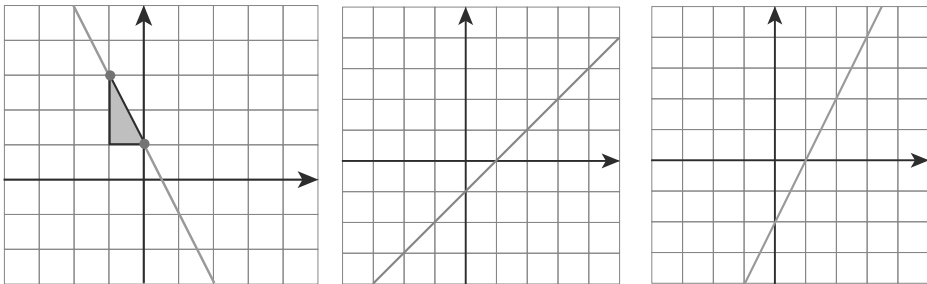
$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



۴- خط $y=ax+b$ را در نظر بگیرید. در هر یک از حالت‌های مورد نظر، خط را مانند نمونه در دستگاه مختصات رسم کنید.



۵- معادله خط‌های زیر را بنویسید.



شیب $= -2$ $y = -2x + 1$ شیب $= 1$ $y = x - 1$ شیب $= 2$ $y = 2x - 2$

۶- معادله خطی بنویسید که با خط $2y - 4x = 5$ موازی باشد و از نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد.

$$2y = 4x + 5$$

$$y = 2x + \frac{5}{2}$$

شیب \swarrow

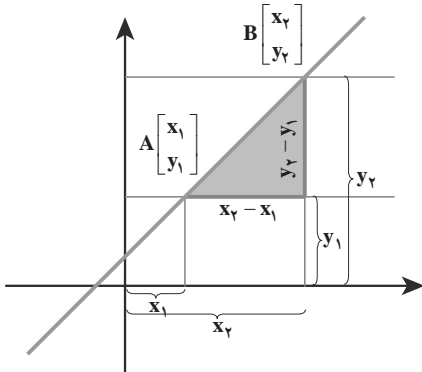
$$y = 2x + b$$

$$-1 = 2 \times 1 + b$$

$$-1 = 2 + b \rightarrow b = -3$$

$$\boxed{y = 2x - 3}$$

۷- با توجه به شکل مقابل نشان دهید.



$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۸- دو نقطه از یک خط هستند؛ شیب خط را پیدا کنید و معادله خط را بنویسید.

$$\text{شیب خط} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$y = -3x + b \rightarrow 2 = -3 \times (3) + b \quad b = 11 \quad y = -3x + 11$$

تمرین

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$1) \begin{cases} 2(x - y) + 3y = 4 \\ 3x - 2(2x - y) = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -1x + 2y = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$5y = 18$$

$$\boxed{y = \frac{18}{5}}$$

$$-x + 2y = 7$$

$$x = 2 \times \frac{18}{5} - 7$$

$$\boxed{x = \frac{1}{5}}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{1}{6} \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 - 2y + 2 = 1 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 2 \\ -3x - 3y = -12 \end{cases}$$

$$-5y = -10 \quad \boxed{y = 2}$$

$$\boxed{x = 2}$$

۲- یک جواب برای x و y طوری تعیین کنید که تساوی زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 3x + y - 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$2x - y - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$3x = 3 \quad \boxed{x = 1}$$

۳- معادله خطی بنویسید که از محل برخورد دو خط $x - y = 1$ و $x + y = 1$ بگذرد و شیب آن $-\frac{2}{3}$ باشد.

$$y = -\frac{2}{3}x + b$$

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

$$0 = -\frac{2}{3} \times 1 + b \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

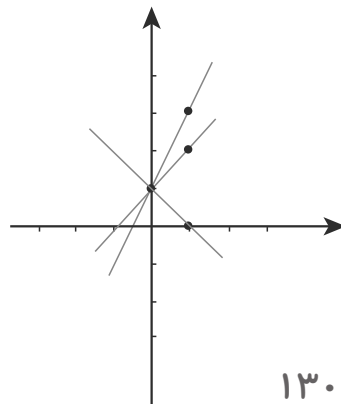
$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

۴- در معادله $y = ax + 1$ اگر به جای a عددهای مختلفی قرار دهیم، معادله خط‌های زیادی به دست می‌آید. به ازای $a = 1$ و $a = 2$ و $a = -1$ این خط‌ها را رسم کنید؛ این خطوط چه ویژگی مشترکی دارند؟

$$y = x + 1 \quad y = 2x + 1 \quad y = -x + 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نقطه مشترک هر سه خط است. نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



۵- در یک مزرعه، ۲۰ شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آنها ۵۶ عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟ (شترمرغ ۲ پا و گاو ۴ پا دارد)

$$\begin{cases} x + y = 20 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -40 \\ 2x + 4y = 56 \end{cases}$$

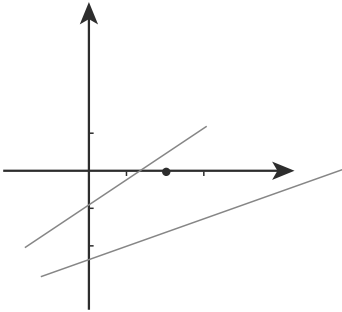
$$\begin{array}{r} 2y = 16 \\ y = 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{گاو} \\ x = 12 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y = 20 \\ x + 8 = 20 \\ x = 12 \end{array}$$

۶- دستگاه معادله خطی زیر را از دو روش حذفی و ترسیمی حل کنید.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 6y = -14 \\ 4x - 6y = 5 \end{cases}$$

x	0	$\frac{5}{4}$	x	0	$\frac{7}{2}$
y	$-\frac{5}{6}$	0	y	$-\frac{7}{3}$	0

آیا این دستگاه جواب دارد؟ خیر



شیب هر دو خط را به دست آورید. توضیح دهید چرا نقطهٔ مشترکی به عنوان جواب معادله به دست نمی آید.

$$\begin{array}{l} 2x - 3y = 7 \\ -3y = -2x + 7 \\ y = \left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{7}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} 4x - 6y = 5 \\ -6y = -4x + 5 \\ y = \frac{4}{6}x - \frac{5}{6} \rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)x - \frac{5}{6} \end{array}$$

دو خط دارای شیب مساوی هستند، پس موازی هستند.

۷- مجموع سن علی و پدرش ۷۰ سال و اختلاف آنها ۲۶ سال است. سن هر یک را با تشکیل دستگاه معادلات به دست آورید.

$$\begin{cases} x + y = 70 \\ x - y = 26 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 2x = 96 \\ x = 48 \end{array} \quad \begin{array}{l} x + y = 70 \\ 48 + \quad = 70 \\ \quad = 22 \end{array}$$



عبارت های گویا

پل طبیعت (تهران)



پل خنجر

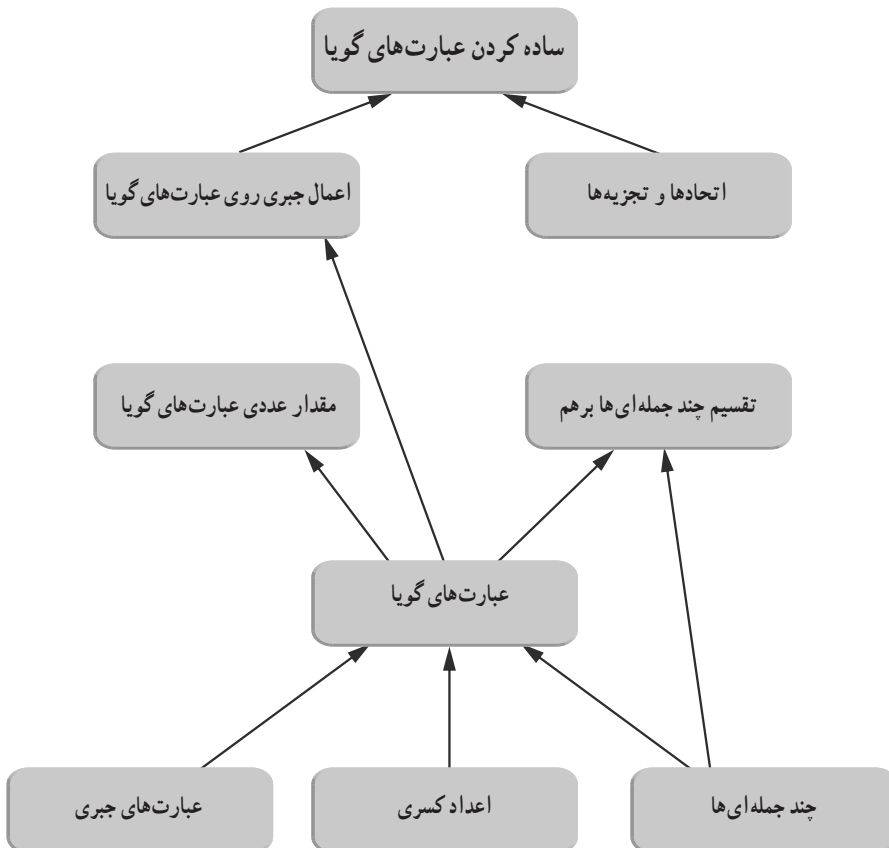
پل ها نقش اساسی در زندگی انسان دارند. انواع مختلفی از پل ها وجود دارند و در موارد زیادی نیروهای وارد بر آنها از فرمول هایی به دست می آید که با یک عبارت گویا بیان می شوند. مثلا در مورد پل های عابر پیاده، بار

محاسباتی از دستور $2 + \frac{15^\circ}{L+15^\circ}$ به دست می آید که در آن L طول بارگذاری شده بر حسب متر است.

نگاه کلی به فصل

در پایه هشتم و همچنین در فصل پنجم همین کتاب، دانش‌آموزان با عبارت‌های جبری آشنا شده‌اند. در این فصل که شامل ۳ درس است، در درس اول، دانش‌آموزان با مفهوم عبارت‌های گویا آشنا می‌شوند و چگونگی پیدا کردن مقدار عددی آنها را به ازای متغیرهای داده شده، یاد می‌گیرند و اینکه چگونه باید آنها را ساده کنند. در روند یادگیری این درس، مطالب خوانده شده در مورد عددهای گویا باید یادآوری شود تا دانش‌آموزان راحت‌تر و بهتر این درس را یاد بگیرند. درس دوم به اعمال جبری روی عبارت‌های گویا یعنی جمع، تفریق و ضرب و تقسیم می‌پردازد و در درس سوم، با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر چند جمله‌ای‌ها آشنا می‌شوند. اطلاعات این فصل، به دانش‌آموزان کمک خواهد کرد تا در حل معادلات گویا و نامعادلات گویا که در سال بعد به آن خواهیم پرداخت از این اطلاعات استفاده کنند.

طرح کلی مفاهیم فصل هفتم



تصویر عنوانی

با توجه به اهمیت پل‌ها و نقش اساسی‌ای که در برهه‌های مختلف زمان دارند، دو پل که توسط سازندگان ایرانی طراحی و ساخته شده است در تصویر عنوانی آمده است که برای محاسبه نیروی وارده به پل در طراحی آن، عبارت‌های گویا وجود دارند. به عبارت دیگر مفاهیم ریاضی از جمله عبارت‌های گویا، می‌توانند نقش مهمی را در بخشی از زندگی اجتماعی به صورت غیر مستقیم ایفا کنند. مثلاً ساخت پل‌های متحرک در زمان جنگ تحمیلی که اثر به‌سزایی در عملیات جنوب کشور داشته است.

اهداف: در فرایند آموزشی این درس انتظار می‌رود که هر دانش‌آموز به هدف‌های زیر برسد:

- شناسایی عبارات‌های گویا و تشخیص آنها از عبارات‌های غیر گویا
- محاسبهٔ عددی عبارات‌های گویا به ازای مقادیر مختلف متغیر آن
- به دست آوردن مقدارهایی از متغیر که به ازای آنها، مقدار عددی عبارت گویا تعیین نمی‌شود.

- توانایی ساده کردن عبارات‌های گویا

ابزار مورد نیاز:

- ۱- آشنایی با کسرها و عبارات‌های جبری
- ۲- آشنایی با مقدار عددی عبارات‌های جبری
- ۳- آشنایی با چند جمله‌ای‌ها
- ۴- آشنایی با اعمال جبری روی کسرها

نگاه کلی به بخش اول

این بخش با حل یک مسئله آغاز می‌شود که هدف از آن درگیر کردن دانش‌آموزان با مفهوم نسبت و چند جمله‌ای هاست و با اطلاعات قبلی، می‌توانند آن را حل کنند. در واقع مفهوم عبارت گویا، که بلافاصله بعد از حل مسئله، تعریف می‌شود، برای دانش‌آموزان، مفهوم غریبی نیست و عملاً آن را در بسیاری از مسائل دیده‌اند ولی در این بخش، نامگذاری می‌شود تا بتوان بیشتر راجع به آن صحبت کرد. برای اینکه کاربردهایی از عبارت گویا در دنیای واقعی مطرح گردد، نمونه‌هایی از آن ذکر گردیده است. بعد از زمینه‌سازی تعریف رسمی عبارات‌های گویا، و در یک کار در کلاس، این مفهوم تثبیت می‌شود. با استفاده از یک فعالیت، مقدار عددی عبارات‌های گویا، نیز بلافاصله تعریف می‌شود تا در دانش‌آموزان، ایدهٔ عبارات‌های نمادین به عنوان اعدادی که با محاسبه روی چند عدد داده شده، به دست می‌آیند، تقویت شود. با استفاده از یک مثال و کار در کلاس، به تعمیق این مطلب پرداخته شده است.

برای ساده کردن عبارات‌های گویا، با اشاره به ساده کردن اعداد کسری که دانش‌آموزان قبلاً خوانده‌اند، نحوهٔ محاسبهٔ ساده کردن عبارات‌های گویا بیان می‌گردد و در واقع فعالیت با این هدف

پیش‌بینی شده است و سپس برای تعمیق آن، کار در کلاس آورده شده است. سعی شده است نمونه‌های مختلفی از تمرینات آورده شود تا دانش‌آموزان با حل آنها بتوانند میزان یادگیری از مطالب این بخش را محک بزنند.

ارزیابی یادگیری

دانش‌آموزان باید بتوانند عبارت‌های گویا را از غیرگویا تشخیص دهند و مقدارهای عددی آنها را در صورت قابل تعریف بودن، به دست آورند و تشخیص دهند که یک عبارت گویا به ازای چه مقدارهایی تعریف شده و به ازای چه مقادیری تعریف نشده است. همچنین دانش‌آموزان باید بتوانند در مسائلی که عبارت‌های گویا رخ می‌دهند، این گونه عبارت‌ها را تشکیل داده، محاسبات جبری با آنها انجام دهند و بتوانند آنها را ساده کنند.

روش تدریس

هدف کلی این درس، آشنایی دانش‌آموزان با عبارت‌های گویا است. با توجه به اینکه در سال‌های گذشته، مفاهیم مساحت و نسبت را یاد گرفته‌اند، در واقع با عبارت‌های گویا آشنا شده‌اند ولی نه با عنوان فوق، بلکه از آن برای حل مسائل استفاده کرده‌اند. پس شروع درس را با یک مسئله‌ای که قادر به حل آن هستند شروع می‌کنیم اما نه با این هدف که آن را حل کنیم بلکه نشان دهیم در حل این مسئله، عبارت‌های گویا حضور دارند و در نتیجه بتوان یک تعریف ساده برای عبارت‌های گویا عنوان کرد. از آنجا که دانش‌آموزان علاقه‌مند هستند مفاهیمی که یاد می‌گیرند را در زندگی روزمره مشاهده کنند و کاربرد آن را ببینند، مثال‌هایی از این نوع مسائل در ادامه آورده شده است.

جهت شناخت بهتر از عبارت‌های گویا، نمونه‌هایی به عنوان کار در کلاس داده شده است که دانش‌آموزان باید بتوانند، تشخیص دهند که کدام عبارت داده شده گویاست و کدام عبارت، گویا نیست. در صفحه ۱۱۴، عبارت‌هایی داده شده است که گویا هستند، در این عبارت‌ها، سعی شده است که توجه دانش‌آموزان را به این نکته جلب کند که اگر اعداد غیرگویا را دیدند، متوجه شوند که هیچ خللی در عبارت‌های گویا ایجاد نمی‌کند و بلافاصله مثال‌هایی از عبارت‌های غیرگویا آورده شده است که متغیر (یا متغیرهای) داده شده، شرایط تعریف عبارت‌های گویا را ندارند.

هدف از فعالیت طراحی شده در صفحه ۱۱۵، یافتن مقدارهای عددی عبارت‌های گویا است. دانش‌آموزان باید متوجه شوند که در یافتن مقدارهای عددی، ممکن است تقسیم بر صفر پیش آید که

بی‌معنا است و باید متوجه شوند که عبارت‌های گویا، ممکن است در بعضی از مقادیر برای متغیر (یا متغیرهایشان) تعریف نشوند. البته ذکر این نکته ضروری است که هدف از این بخش، مفهوم «دامنه تعریف متغیر» نمی‌باشد و تنها این نکته باید مدنظر دانش‌آموزان باشد که به ازای چه مقادیری از متغیرها، می‌توان گفت که آن عبارت گویا، تعریف نشده است. در همین راستا، کار در کلاس صفحه ۱۱۶، طراحی شده است.

عبارت‌های جبری داده شده در این کار در کلاس به گونه‌ای است که از اطلاعات فصل پنجم تبعیت می‌کند و یادآوری مطالب آن فصل نیز می‌باشد. چند جمله‌ای‌های درجه دوم نیز با استفاده از تجزیه‌های خوانده شده در فصل پنجم، به صورت حاصل ضرب دو چند جمله‌ای از $x^2 - 4$ ظاهر خواهند شد مگر نمونه (د) که مخرج کسر، $x^2 + 4$ است و همواره مثبت است و لذا هیچگاه صفر نمی‌شود. برای ساده کردن عبارت‌های گویا، ابتدا مطالب مربوط به ساده کردن عددهای گویا را آورده‌ایم که دانش‌آموزان با آن قبلاً آشنا شده‌اند و اشاره کرده‌ایم که روش ساده کردن عبارت‌های گویا نیز، عیناً مشابه ساده کردن عددهای گویاست و فعالیت صفحه ۱۱۶ نیز با یک مثال ساده شروع شده است که دانش‌آموزان فکر نکنند که این بخش، با قسمت‌های قبل متفاوت است و به راحتی می‌توانند به ساده کردن عبارت‌های گویا بپردازند.

در کار در کلاس پایانی این بخش، عبارت‌های گویایی داده شده است که قابل ساده کردن هستند. در قسمت (۱) بند (د)، در صورت کسر، عبارت $x^4 - y^4$ داده شده است که قبلاً همین عبارت جبری در صفحه ۸۷، به عنوان اتحاد مزدوج در یک فعالیت آمده است که می‌توانید از دانش‌آموزان بخواهید که ساده شده این فعالیت را، در اینجا استفاده نمایند و هدف از قسمت (۲) عبارت گویای داده شده در این کار در کلاس، بدفهمی رایج دانش‌آموزان در ساده کردن عبارت‌های گویاست.

در تمرین ۲ قسمت (د)، صورت عبارت گویای داده شده، یک چندجمله‌ای از درجه سوم است که ابتدا از y که عامل مشترک بین همه آنهاست، فاکتور می‌گیریم و سپس، عبارت درجه دوم به دست آمده را با استفاده از اتحاد جمله مشترک، به دو عبارت جبری درجه یک تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{y^3 - 2y^2 - 3y}{y^2 + y} = \frac{y(y^2 - 2y - 3)}{y(y+1)} = \frac{y^2 - 2y - 3}{y+1}$$

$$= \frac{(y+1)(y-3)}{y+1} = y - 3$$

در تمرین ۳، دانش‌آموزان باید بتوانند قرینه یک عبارت جبری داده شده را درست تشخیص دهند که به جز قسمت (الف) بقیه قسمت‌های داده شده، یا برابر یک و یا برابر -۱ می‌باشند. تمرین ۴ نیز با همان دید قرینه‌یابی طراحی شده است و ضرب عدد -۱ در صورت یا مخرج مورد نظر بوده است. در تمرین ۵، باید دقت کنید با استفاده از اتحاد جمله مشترک و فاکتورگیری عامل مشترک، چه ارتباطی با عبارت گویای داده شده دارد و با استفاده از قانون ضرب یک عبارت گویا در صورت و مخرج کسر داده شده، عبارت جاخالی را تشخیص دهید. به عنوان نمونه:

$$\text{الف) } \frac{1-z}{z} = \frac{\boxed{}}{z^2+z}$$

داده شده است. ابتدا از عبارت سمت راست، داریم:

$$z^2+z = z(z^1+1)$$

حال به عبارت گویای سمت چپ دقت می‌کنیم. کافی است صورت و مخرج را در عبارت جبری z^1+1 ضرب کنیم.

$$\frac{(1-z)(z^1+1)}{z(z^1+1)} = \frac{\boxed{(1-z)(z^1+1)}}{z^2+z}$$

تمرین ۶ به گونه‌ای طراحی شده که بعضی از بدفهمی‌های دانش‌آموزان را نشان دهد. در واقع به غیر از قسمت (الف) و (و) که با عبارت داده شده برابر نمی‌باشند، مابقی قسمت‌ها، دقیقاً با عبارت گویای داده شده برابر می‌باشند و در واقع از خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به عمل جمع و همچنین خاصیت تجزیه یک کسر، به چند کسر با مخرج یکسان، استفاده شده است.

توصیه‌های آموزشی

۱- در تعریف عبارت گویا در صفحه ۱۱۴، این نکته را اضافه کنید که باید مخرج کسر، غیر صفر باشد.

۲- اگر فعالیت مناسبی برای تعریف عبارت گویا به غیر از مسئله طرح شده در ابتدای صفحه ۱۱۴ مد نظر دارید، بهتر است از مواردی صحبت گردد که دانش‌آموزان قبلاً با آن آشنا بوده‌اند. مثلاً «نسبت طلایی»، می‌تواند به عنوان یک عبارت گویا به دانش‌آموزان کمک کند تا نمونه دیگری از عبارت‌های گویا را بشناسند.

۳- در بحث یافتن مقدارهای عددی عبارت‌های گویا، باید این‌گونه نتیجه‌گیری شود که عبارت‌های گویا به‌ازای بعضی مقادیر داده شده، به متغیرشان، تعریف نشده‌اند و نباید به مفهوم «دامنه» تعریف یک متغیر پرداخت.

اشتباهات رایج

دانش‌آموزان معمولاً در ساده‌کردن عبارت‌های گویایی که یک عبارت جبری مشترک در صورت و مخرج کسر دارند، دچار اشتباه می‌شوند. به این مثال دقت کنید.

$$\frac{\cancel{3x}}{\cancel{3x} + 4} = \frac{1}{4}$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌کنید، دانش‌آموز فکر می‌کند که عامل $3x$ در صورت و مخرج مشترک است و می‌تواند آنها را ساده کند. در این‌گونه موارد، باید تذکر داده شود که تنها و فقط تنها وقتی می‌توان یک عامل را حذف کرد که بتوان آن را به‌صورت حاصل‌ضرب در عبارت دیگری ساده کرد. نمونه‌های دیگری از این‌گونه اشتباهات در سؤالات ارزشیابی آمده است.

نمونه سؤالات‌های ارزشیابی

- ۱- یک عبارت گویا و یک عبارت غیرگویا مثال بزنید.
- ۲- جمله‌های درست را با علامت \checkmark و نادرست را با علامت \times مشخص کنید.
 - الف) عبارت $2\sqrt{x}$ یک عبارت گویاست.
 - ب) عبارت $4|x|$ یک عبارت گویا نیست.
 - ج) عبارت $\frac{x+1}{1+\sqrt{a}}$ یک عبارت گویا نیست.
- ۳- مقدار عددی عبارت $\frac{x^2-1}{x^2+1}$ را به‌ازای 1 و -1 و 2 و 0 بیابید. آیا عددی می‌توان یافت که به‌ازای آن این عبارت گویا، تعریف نشود؟
- ۴- کدام یک از عبارت‌های زیر گویا می‌باشند.

الف) $\sqrt{1+x}$ ب) $\sqrt{2+x-x^2}$

ج) $\frac{1+\sqrt{x^2}}{1-x^2}$ د) $\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{3-x}}$

۵- عبارت گویای $\frac{2x+1}{mx+1}$ به ازای $\frac{-1}{2}$ تعریف نمی‌شود. m را بیابید.

۶- جاهای خالی را طوری پر کنید که کسرها با هم مساوی باشند.

الف) $\frac{bx + bx^2}{b^2 - x^2} = \frac{b(\dots + \dots)}{(\dots + \dots)(\dots - \dots)}$

ب) $\frac{z-t}{\dots} = 1$

ج) $\frac{z-t}{\dots} = -1$

د) $\frac{x}{y} = \frac{\dots}{4y}$

ه) $\frac{3}{x} = \frac{\dots}{4x^3}$

و) $\frac{2}{b} = \frac{\dots}{abc}$

ز) $\frac{\sqrt{8}}{x} = \frac{\dots}{x(x+2)}$

۷- عبارت گویای $\frac{ay}{y+a}$ با کدام یک از عبارات زیر برابر نیست؟

الف) $a \times \frac{y}{y+a}$

ب) $\frac{y}{a}$

ج) $ay \times \frac{1}{y+a}$

د) $\frac{y}{y+a} \times \frac{a}{y+a}$

۸- هر یک از عبارتهای داده شده در ردیف اول را به عبارت مساوی آن در ردیف دوم وصل کنید.

ردیف اول: $\frac{x-3}{x+4}$ $\frac{x+3}{x-4}$ $\frac{x-3}{x-4}$ $\frac{x+3}{x+4}$ $\frac{3-x}{x+4}$ $\frac{x+3}{4-x}$

ردیف دوم: $\frac{-x-3}{4-x}$ $\frac{-x-3}{-x-4}$ $\frac{3-x}{-x-4}$ $\frac{-x+3}{-x+4}$ $\frac{x-3}{-x-4}$ $\frac{-x-3}{x-4}$

۹- تنها یکی از عبارتهای گویای زیر، ساده می‌شود. مشخص کنید که کدام یک می‌باشد.

الف) $\frac{x^2+2}{x^2}$

ب) $\frac{x^2+2}{2}$

ج) $\frac{x^2+y^2}{y^2}$

د) $\frac{x^2-5x}{x}$

۱۰- تنها یکی از عبارات گویای زیر، با عبارت گویای $\frac{x-3}{4-x}$ برابر نیست. مشخص کنید که آن کدام می‌باشد.

الف) $\frac{3-x}{x-4}$ ب) $\frac{x+3}{4+x}$ ج) $\frac{3-x}{4-x}$ د) $\frac{x-3}{x-4}$

۱۱- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{m^2-n^2}{-m+n}, \frac{(a-3)(x+y)}{(3-a)(x-y)}, \frac{5k-10}{20-10k}, \frac{7x-21}{63-21x}$$

اهداف

- عبارات‌های گویا را بتواند با یکدیگر جمع و تفریق کند.
- عبارات‌های گویا را بتواند با یکدیگر ضرب و یا بر یکدیگر تقسیم کند و آنها را ساده کند.
- بتواند عبارات‌های گویای مرکب را ساده کند.

ابزار مورد نیاز :

- ۱- آشنایی با اعمال جبری روی کسرها
- ۲- ساده کردن کسرها و هم‌مخرج کردن کسرها

روش تدریس

هدف از این درس، انجام اعمال ضرب و تقسیم و جمع و تفریق روی عبارات‌های گویاست و اینکه در ادامه دانش‌آموزان بتوانند عبارات‌های کسری که هم‌صورت و هم‌مخرج آن، یک عبارت گویاست، ساده کنند. برای همین منظور، ابتدا با یادآوری عمل ضرب و تقسیم روی عددهای گویا، یک فعالیت طراحی شده است که هدف از آن، انجام عمل ضرب و تقسیم روی عبارات‌های گویا با همان تکنیک مربوط به عددهای گویا می‌باشد. بهتر است در انجام فعالیت داده‌شده، بعد از قسمت (الف)، قسمت (د) انجام گیرد و بعد قسمت‌های باقی‌مانده کامل گردد. کار در کلاس صفحه ۱۲۰ نیز در جهت تعمیق یادگیری عمل ضرب و تقسیم روی عبارات‌های گویا می‌باشد. جهت انجام عمل جمع و تفریق روی عبارات‌های گویا، مجدداً عمل‌های جمع و تفریق روی عددهای گویا را که دانش‌آموزان با آنها آشنا بوده‌اند، یادآوری کرده‌ایم و اشاره کرده‌ایم که عیناً همان اعمال روی عبارات‌های گویا نیز قابل انجام است و به همین منظور در فعالیت صفحه ۱۲۰، در قسمت راست نمونه عمل جمع یا تفریق را روی اعداد گویا آورده‌ایم و انتظار داریم که دانش‌آموزان، به‌طور مشابه همان عمل را روی عبارات‌های گویای داده شده انجام دهند. دقت شود که نمونه‌های آورده‌شده در این فعالیت به‌گونه‌ای طراحی شده است که یا دارای یک مخرج مشترک می‌باشند و یا، مخرج یک کسر، مضربی از مخرج کسر دیگر است و در ساده کردن عبارت گویا، نباید به دنبال مفهوم کوچک‌ترین مخرج مشترک برویم و حداکثر پس از محاسبه، عمل ساده‌سازی را انجام دهیم تا عبارات‌های اضافی را حذف کنیم.

کار در کلاس صفحه ۱۲۱ در ادامه همان فعالیت قبلی است با این تفاوت که نمونه مرتبط با

عددهای گویا در آن ذکر نشده است. در قسمت (ب) این کار در کلاس، از این نکته استفاده شود که عدد منفی می تواند از مخرج کسر به قبل از خط کسری منتقل شود. یعنی:

$$\frac{6}{x} + \frac{4}{-x} = \frac{6}{x} - \frac{4}{x}$$

و سپس عمل تفریق انجام پذیرد.

در ادامه به عبارات‌های گویای مرکب پرداخته‌ایم و در فعالیت صفحه ۱۲۱، دو روش را برای ساده کردن کسرهای مرکب ذکر کرده‌ایم که در روش اول، صورت و مخرج کسر را در بیشترین توان مخرج کسر داده شده ضرب می‌کنیم و سپس با روش‌های قبلی که به دانش‌آموزان آموخته‌اید، آن را ساده می‌کنیم. در روش دوم، ابتدا با استفاده از مخرج مشترک گیری، عبارات‌های گویای داده شده را تبدیل به یک عبارت گویا در صورت و یک عبارت گویا در مخرج می‌کنیم و با توجه به اینکه عمل تقسیم عکس عمل ضرب است، آنها را به صورت حاصل ضرب دو عبارت گویا نوشته و سپس با اطلاعات به دست آمده از قسمت‌های قبل، آنها را ساده می‌کنیم. در جهت تعمیق به فعالیت داده شده، کار در کلاس صفحه ۱۲۲ آورده شده است.

فعالیت و کار در کلاس بعدی، هر دو مرتبط با مفاهیم هندسی است که دانش‌آموزان از قبل با آنها سر و کار داشته‌اند و با کمک گرفتن از مفاهیم عبارات‌های گویا، و ساده کردن آنها، می‌توانند مسئله داده شده را حل نمایند.

در تمرین ۱، قسمت (ج)، ابتدا عبارات‌های گویای داده شده را با استفاده از اتحادها ساده می‌کنیم و سپس عمل تقسیم را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18} \\ &= \frac{\cancel{(x-2)}^2}{4xy\cancel{(x-2)}} \div \frac{(x+3)(x-2)}{6(x^2+3)} \\ &= \frac{(x-2)}{4xy} \div \frac{(x+3)(x-2)}{6(x^2+3)} \\ &= \frac{\cancel{(x-2)}}{4xy} \times \frac{6(x^2+3)}{(x+3)\cancel{(x-2)}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{x}(x^2 + 3)}{\cancel{x}xy(x + 3)} = \frac{3(x^2 + 3)}{2xy(x + 3)}$$

هدف از تمرین ۳، اشاره به یکی از بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان است که در ساده کردن عبارات‌های گویا، به عمل ضرب بین عامل‌های مشترک دقت نمی‌کنند و عبارات‌های داده‌شده زیر را به صورت غلط ساده می‌کنند:

$$\frac{x^2 + 5}{x^2} = 5 \quad \text{غلط} \quad \frac{x^2 + b^2}{x^2} = b^2 \quad \text{غلط}$$

$$\frac{a^2 + x}{x} = a^2 \quad \text{غلط}$$

$$\frac{a^2 + 5a}{a} = \frac{a(a + 5)}{a} = a + 5 \quad \text{صحیح}$$

هدف از تمرین ۵، توجه به این نکته است که علامت منفی می‌تواند هم در صورت کسر، هم در مخرج کسر و هم در کنار کسر ظاهر شود و هیچ فرقی هم نخواهد کرد. یعنی:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

در تمرین‌های ۶ و ۸، اشتباهات رایج دانش‌آموزان مورد توجه قرار گرفته است و حل این دو تمرین، دقت دانش‌آموزان را بالا می‌برد و اگر دانش‌آموزان در انجام عملیات جبری خواسته شده روی عبارات‌های گویا مشکلاتی داشته باشند، این مشکلات ظاهر می‌گردد و معلمین می‌توانند موارد اشتباه را رفع نمایند.

تمرین ۱۱، از جمله تمرین‌هایی است که دارای جواب باز پاسخ است و می‌تواند به تعداد هر یک از دانش‌آموزان کلاس، جواب صحیح داشته باشد.

توصیه‌های آموزشی

۱- در جمع و تفریق عبارات‌های گویا، سعی کنید از روش ارائه‌شده در کتاب پیروی کنید و از به‌کاربردن مفهوم کوچک‌ترین مضرب مشترک، خودداری نمایید.

۲- در ساده کردن عبارات‌های گویای مرکب، از دانش‌آموزان بخواهید که کدام روش را بهتر

درک می‌کنند و دلیل آن را بخواهید و سپس به آنها توصیه کنید که از روشی استفاده کنند که برای آنها راحت‌تر و قابل فهم‌تر است.

۳- روی اشتباهات رایجی که در این بحث، دانش‌آموزان به آن می‌پردازند، بیشتر متمرکز شوید و با مثال‌های بیشتری، سعی کنید که این اشتباهات را تکرار نکنند.

بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان

۱- یکی از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، در ساده کردن عبارتهایی است که یا در صورت کسر و یا در مخرج کسر، عامل ضرب بین عوامل مشترک وجود ندارد مانند

$$\frac{x+5}{x} = 5 \text{ غلط}$$

برای پرهیز از این گونه اشتباهات، باید به دانش‌آموزان متذکر شوید که فقط زمانی می‌توانند عامل مشترک (مثلاً x در مثال بالا) را از صورت و مخرج ساده کنند که هم صورت کسر به صورت حاصل ضرب دو عبارت (یا چند عبارت) نوشته شده باشد و هم مخرج کسر. در صورتی که در مثال بالا، $x+5$ را نمی‌توان به صورت حاصل x در یک عبارت دیگر نوشت:

۲- یکی دیگر از اشتباهات رایج دانش‌آموزان، ضرب عدد منفی در پشت پرانتز، بدون در نظر گرفتن مفهوم پرانتز است. به مثال زیر دقت کنید:

$$\frac{2y}{y-2} - \frac{4y-1}{y-2} = \frac{2y-4y-1}{y-2}$$

که غلط است و عدد -1 فقط در $4y$ ضرب شده است. در صورتی که صحیح آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{2y}{y-2} - \frac{4y-1}{y-2} &= \frac{2y-(4y-1)}{y-2} \\ &= \frac{2y-4y+1}{y-2} = \frac{-2y+1}{y-2} \end{aligned}$$

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید:

$$\text{الف) } \frac{x-2}{2x-3} \times \frac{4x-6}{x^2-4} \quad \text{ب) } \frac{x-2}{x-3} \times \frac{2x-6}{x+5}$$

$$\text{ج) } \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x + 4} \times \frac{x - 2}{x^2 + 6x + 8} \quad \text{د) } \frac{x^5 y^4}{3xy} \div \frac{1}{x^3 y}$$

$$\text{ه) } \frac{x + 3}{x^2 - 2x + 1} \div \frac{x + 3}{x - 1}$$

$$\text{و) } \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x - 18} \div \frac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 6}$$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید :

$$\text{الف) } \frac{7}{t} + \frac{2}{5} \quad \text{ب) } \frac{11}{5x} - \frac{1}{5x} \quad \text{ج) } \frac{x^2}{x+5} - \frac{25}{x+5}$$

$$\text{د) } \frac{y^2}{y+6} - \frac{36}{y+6} \quad \text{ه) } \frac{-3p+7}{p^2+7p+12} + \frac{8p+13}{p^2+7p+12}$$

$$\text{و) } x - \frac{1}{x} \quad \text{ز) } 3 + \frac{2}{x+2} \quad \text{ح) } 1 - \frac{1}{1+x}$$

۳- دانش‌آموزی دو عبارت گویا را با هم جمع کرده است و جواب را به صورت ساده شده $\frac{3}{5-y}$ نوشته است.

دانش‌آموز دیگری نیز همین مسئله را حل کرده و جواب را به صورت ساده شده $\frac{-3}{y-5}$ نوشته است.

آیا هر دو جواب صحیح است؟ توضیح دهید.

۴- مانند نمونه، ضرب‌های داده‌شده را حل کنید.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{الف) } \frac{3x}{x+1} \times \frac{6x^2}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{x^3}{3y} \times \frac{9y^2}{x^5}$$

$$\text{ج) } \frac{a^4}{5b^2} \times \frac{25b^4}{a^3}$$

$$\text{د) } (7k+7) \times \frac{5}{4k+4}$$

۵- در حل زیر، چه قسمتی غلط می باشد؟

$$\frac{x}{x+2} - \frac{4x-1}{x+2} = \frac{x-4x+1}{x+2} = \frac{-3x+1}{x+2}$$

۶- عبارت های مرکب زیر را ساده کنید.

الف) $\frac{12}{x} - \frac{x-1}{6}$ ب) $\frac{k+1}{3k-1} - \frac{2k}{4k}$ ج) $\frac{1}{x} + 1 - \frac{1}{1+x}$

د) $\frac{3}{x} + \frac{3}{y} - \frac{x}{3} - \frac{y}{3}$ ه) $\frac{8x-24y}{x-3y} - \frac{10}{5x}$ و) $\frac{y-y-3}{4} - \frac{3}{9} + \frac{2}{3y}$

ز) $\frac{p-p+2}{3} - \frac{4}{4} - \frac{5}{2p}$ ح) $\frac{x+2}{x} + \frac{1}{x+2} - \frac{5}{x} + \frac{x}{x+2}$ ط) $\left(\frac{1}{x} + x + 2 \right) \div \left(\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)$

۷- عبارت $\frac{x^2+7x+10}{x^2-6x} \div \frac{x^2-4x}{x^2-8x+12}$ با کدام یک از عبارت های زیر برابر است؟

الف) $\frac{x+5}{x^2}$ ب) $\frac{x^2}{x+5}$ ج) $\frac{(x+5)(x+2)^2}{(x-6)^2}$

د) $\frac{(x-6)^2}{(x+5)(x+2)^2}$

۸- مساحت یک مستطیل برابر با $x^2+13x+36$ می باشد. اگر طول مستطیل برابر با $x+9$

باشد، کدام یک از عبارت های زیر، بیان کننده عرض مستطیل است؟

الف) $x+4$ ب) $x+27$ ج) x^2+4 د) x^2+27

اهداف

- آشنایی با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر هم
- آشنایی با مفاهیم مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقیمانده در تقسیم چند جمله‌ای و رابطه بین آنها

ابزار مورد نیاز :

- ۱- شناخت کامل از چند جمله‌ای‌ها
- ۲- تعیین درجه یک چند جمله‌ای داده شده
- ۳- ساده کردن کسرها

روش تدریس

با توجه به اینکه هدف از این درس، آشنایی دانش‌آموزان با تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر است، یادگیری را در ۳ مرحله انجام می‌دهیم :

مرحله اول : ساده‌ترین حالت، تقسیم یک جمله‌ای بر یک جمله‌ای است که در واقع یادآوری ساده کردن کسرها و نیز یادآوری قوانین مربوط به ساده کردن توان‌هاست و کافی است تنها به ارائه چند مثال بسنده کنیم .

مرحله دوم : در این مرحله تقسیم چند جمله‌ای بر یک جمله‌ای مورد توجه قرار می‌گیرد که قبل از شروع، ابتدا ساده کردن عددهای گویا که متشکل از یک کسر با تنها یک مخرج است، را به دانش‌آموزان یادآوری می‌کنیم و اشاره می‌کنیم که قانون حاکم بر عددهای گویا به فرم فوق را می‌توان برای تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یک جمله‌ای نیز اعمال نمود و به همین منظور، فعالیت صفحه ۱۲۶ طراحی شده است. قسمت‌های (الف)، (ب) و (ج) به گونه‌ای طراحی شده است که در روند انجام محاسبه آنها، ساده کردن کسرها و عبارتهای گویا، مجدداً یادآوری می‌شود و در جهت تثبیت این فعالیت، کار در کلاس صفحه ۱۲۷ طراحی شده است.

مرحله سوم : در واقع این مرحله، آخرین مرحله و کامل‌کننده بحث تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر چند جمله‌ای است. مجدداً قبل از شروع روند اعمال مورد نظر، یادآوری مفاهیم مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقیمانده در تقسیم دو عدد طبیعی ارائه شده است تا دانش‌آموزان در انجام تقسیم چند جمله‌ای‌ها، بهتر و روان‌تر کارهای خواسته شده را انجام دهند.

شروع روند یادگیری، با یک مثال است که به صورت دقیق و کامل، گام‌های اول، دوم و سوم جهت انجام تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر یکدیگر، توضیح داده شده است و بلافاصله یک فعالیت طراحی شده است که لازم است دانش‌آموزان مشابه با مثال انجام‌شده، قسمت‌های (الف) و (ب) این فعالیت را انجام دهند.

از آنجا که در تقسیم چندجمله‌ای‌ها، اولین و مهم‌ترین نکته، رعایت نوشتن جملات واقع در چندجمله‌ای از توان بیشتر به توان کمتر است لذا در بخش دوم فعالیت فوق، نمونه‌ای داده شده است، که مقسوم‌علیه دارای این خاصیت نیست و لذا ابتدا باید ترتیب صعودی به نزولی رعایت شود و براساس آن، بازنویسی شود.

در تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر چندجمله‌ای‌ها، مناسب است که الگوریتم ارائه شده در متن کتاب، با چند مثال ارائه شود و این مثال‌ها، به گونه‌ای باشد که به ترتیب در یک مرحله، دو مرحله و سه مرحله به پاسخ برسند و در این مثال‌ها، باقیمانده‌ای وجود نداشته باشد. سپس مثال‌هایی ارائه شود که در یک مرحله تمام می‌شوند ولی باقیمانده دارند و مفهوم باقیمانده توضیح داده شود که طبق تعریف، باید درجه آن از درجه مقسوم‌علیه کمتر باشد و زمانی که به این حالت می‌رسیم، عمل تقسیم پایان یافته است و در آخر، ارتباط بین مقسوم، مقسوم‌علیه و خارج قسمت بیان گردد و بیان شود که باقیمانده یا صفر است و یا یک چندجمله‌ای که درجه آن اکیداً از درجه مقسوم‌علیه کمتر است.

در تمرین ۱، نمونه‌های مختلفی از تقسیم چندجمله‌ای‌ها بر عبارت یک جمله‌ای و دوجمله‌ای داده شده است که قسمت (ج) را در این قسمت حل می‌نماییم:

$$\begin{array}{r}
 x^3 - 27 \quad | \quad x - 2 \\
 \hline
 \mp x^3 + 2x^2 \quad | \quad x^2 \\
 \hline
 +2x^2 - 27 \quad | \quad x - 2 \\
 \hline
 \mp 2x^2 \pm 4x \quad | \quad 2x \\
 \hline
 4x - 27 \quad | \quad x - 2 \\
 \hline
 \mp 4x \pm 8 \quad | \quad 4 \\
 \hline
 -19
 \end{array}$$

بنابراین داریم:

$$(x^3 - 27) \div (x - 2) = (x^2 + 2x + 4)(x - 2) - 19$$

در تمرین ۴، هدف این است که یک ارزیابی از مفهوم بخش‌پذیری توسط دانش‌آموز داشته

باشد که حل آن به صورت زیر است :

$$\begin{array}{r}
 20x^3 + 23x^2 - 10x + a \quad | \quad 4x + 3 \\
 \hline
 \mp 20x^3 \mp 15x^2 \\
 \hline
 8x^2 - 10x + a \quad | \quad 4x + 3 \\
 \hline
 -8x^2 \mp 6x \\
 \hline
 -16x + a \quad | \quad 4x + 3 \\
 \hline
 \pm 16x \pm 12 \\
 \hline
 a - 12
 \end{array}$$

باقیمانده

چون باید بخش پذیر باشد، لذا باقی مانده صفر خواهد بود یعنی باید داشته باشیم $a - 12 = 0$ و این یعنی اینکه $a = 12$

توصیه های آموزشی

- ۱- تأکید می شود که در ابتدای شروع تقسیم چند جمله ای ها، تقسیم عددهای صحیح مورد توجه قرار گیرد و ضمن یادآوری مفهوم مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقیمانده، قوانین ساده کردن عبارت های گویا مجدداً یادآوری گردد.
- ۲- همواره از دانش آموزان بخواهید که قبل از شروع انجام تقسیم چند جمله ای بر یک چند جمله ای دیگر، نحوه مرتب شدن توان های متغیر داده شده را بررسی کنند و در صورتی که به ترتیب نزولی نوشته نشده است، آنها را ابتدا مرتب کنند و سپس عمل تقسیم را انجام دهند.
- ۳- در تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای باید متذکر شوید که روند تقسیم فقط تا زمانی ادامه پیدا می کند که درجه باقیمانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

اشتباهات رایج

- ۱- یکی از اشتباهات رایج دانش آموزان در تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای، رعایت نکردن علامت منفی در بین عبارت داده شده در صورت کسر است. به این مثال توجه کنید.

$$\frac{45x^3 + 35x^2 - 12x + 15}{15} = -\frac{45x^3}{15} + \frac{35x^2}{15} - \frac{12x}{15} + \frac{15}{15}$$

که علامت منفی در پشت کسر باید در کل عبارت ضرب شود و صحیح آن به شکل زیر است :

$$-\frac{45}{15}x^3 - \frac{35}{15}x^2 + \frac{12}{15}x - \frac{15}{15}$$

۲- در الگوریتم تقسیم چند جمله‌ای‌ها، باید در اولین مرحله بعد از ضرب مقسوم علیه در خارج قسمت، عبارت حاصل که زیر مقسوم نوشته می‌شود را تغییر علامت دهند که بعضی مواقع اشتباه می‌کنند و با همان علامت به دست آمده، الگوریتم را ادامه می‌دهند.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- تقسیم‌های زیر را انجام دهید:

الف) $\frac{2^0 a^4 b^5 c^6}{\sqrt{8} a^2 b^6 c^3}$

ب) $\frac{2yz - xz^2 + 4xyz}{-4z^2}$

ج) $\frac{22x^2a^2 - 16x^4a^3 + 12xa - x^2a^3}{2a^2x^2}$

د) $(z^3 - 64) \div (z - 2)$

هـ) $(x + x^2 + 2x^3) \div (x - 3)$

۲- در هر یک از تقسیم‌های زیر، خارج قسمت و باقیمانده را تعیین کنید.

الف) $10 - 3x^2 + 2x^4 \mid x^2 - 5$

ب) $x - 2x^2 + 4 - 6x^3 \mid 1 - x$

۳- اگر در تقسیم $2x^2 + 5x + 3x + a$ بر $x + 2$ باقیمانده صفر شود، مقدار a را تعیین کنید.

۴- در تقسیم $2x^2 - 2x^2$ بر $2x^2 + 4$ ، باقیمانده تقسیم کدام عبارت زیر است؟

الف) $2x + 4$ (ب) $2x + 4$ (ج) $4x + 8$ (د) $-4x + 8$

۵- عبارت $3x^2 + 3x^2 - 6$ بر کدام دو جمله‌ای زیر بخش پذیر است؟

الف) $x + 1$ (ب) $x - 1$ (ج) $x + 2$ (د) $x^2 - x$

۶- در صورتی که مقسوم $4x^2 - 4$ ، خارج قسمت $4x - 4$ و باقیمانده صفر باشد، مقسوم علیه

کدام است؟

الف) $x + 1$ (ب) $x - 1$ (ج) $-x + 1$ (د) $-x - 1$

۷- مساحت یک متوازی الاضلاع بر حسب x به صورت $-x^2 + x^2 + 1 - x$ و قاعده آن $1 - x$

است. ارتفاع آن را بیابید.

۸- مساحت یک مستطیل $5 + 4x - x^2$ و عرض آن $x - 1$ است. طول آن را بیابید.

۹- اگر در تقسیم $3x^2 + 4x + k$ بر $x - 1$ ، باقیمانده صفر شود، مقدار k را بیابید.

حل تمرین های فصل ۷

تمرین

۱- برای هر عبارت گویا، مقادیری را به دست آورید که عبارت به ازای آنها تعریف نشده است.

الف) $\frac{5x}{3ab^2}$

ب) $\frac{2y}{y(2y-6)}$

ج) $\frac{2P}{P^2-P-12}$

$a = 0$

$y = 0$

$p^2 - p - 12 = 0$

$b = 0$

$2y - 6 = 0$

$(p+3)(p-4) = 0$

$y = 3$

$p = -3 \quad p = +4$

د) $\frac{2x+5}{x}$

ه) $\frac{x^2-1}{x+5}$

و) $\frac{a+3}{2a+1}$

$x = 0$

$x = -5$

$2a + 1 = 0$

$2a = -1 \quad a = -\frac{1}{2}$

۲- حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت بنویسید :

الف) $\frac{3-x}{x^2-5x+6} = \frac{3-x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{x-2}$

ب) $\frac{4x^2+8x}{12x+24} = \frac{4x(x+2)}{12(x+2)} = \frac{4x}{12} = \frac{x}{3}$

ج) $\frac{24x^2}{12x^2-6x} = \frac{24x^2}{6x(2x-1)} = \frac{4x}{2x-1}$

د) $\frac{y^3-2y^2-3y}{y^2+y} = \frac{y(y^2-2y-3)}{y(y+1)} = \frac{(y-3)(y+1)}{(y+1)} = y-3$

$$\text{هـ) } \frac{1-t^4}{t^2+1} = \frac{(1-t^2)(\cancel{1+t^2})}{(1+t^2)} = 1-t^2$$

$$\text{و) } \frac{16x^2-9y^2}{4x-6y} = \frac{(\cancel{4x-3y})(4x+3y)}{2(\cancel{4x-3y})} = \frac{4x+3y}{2}$$

$$\text{ز) } \frac{6a^4b^2}{4ab^4} = \frac{3a^3}{2b^2}$$

$$\text{ح) } \frac{-2a-8}{a^2+2a-8} = \frac{-2(\cancel{a+4})}{(\cancel{a+4})(a-2)} = \frac{-2}{a-2}$$

۳- عبارتهایی را که حاصل آنها ۱ و یا -۱ است، معلوم کنید.

$$\text{الف) } \frac{2y+3}{2y-3}$$

$$\text{ب) } \frac{2y-3}{3-2y} = -1$$

$$\text{ج) } \frac{2y+3}{3+2y} = 1$$

$$\text{د) } \frac{2y+3}{-2y-3} = -1$$

۴- هر یک از عبارتهای داده شده در سطر اول را به عبارت مساوی آن در سطر دوم وصل کنید.

$\frac{a-2}{a+5}$ (۱)	$\frac{a+2}{a-5}$ (۲)	$\frac{a-2}{a-5}$ (۳)	$\frac{a+2}{a+5}$ (۴)	$\frac{2-a}{a+5}$ (۵)
$\frac{-a-2}{-a-5}$ (۶)	$\frac{-a-2}{5-a}$ (۷)	$\frac{a-2}{-a-5}$ (۸)	$\frac{2-a}{-a-5}$ (۹)	$\frac{-a+2}{-a+5}$ (۱۰)
(۴)	(۲)	(۵)	(۱)	(۳)

۵- در جای خالی چه عبارتی باید نوشت؟

$$\text{الف) } \frac{1-z}{z} = \frac{(1-z)(z^2+1)}{z^3+z}$$

$$\text{ب) } \frac{3x}{x-3} = \frac{3x(x+2)}{\cancel{x^2-x-6}} = \frac{3x(x+2)}{(x+2)(x-3)}$$

$$\text{ج) } \frac{3y+2}{5} = \frac{1}{5}(\boxed{3y+2})$$

$$\text{د) } \frac{(x-5)(\boxed{(x-2)(x+1)})}{(x-2)(x-5)} = x+1$$

۶- از عبارتهای زیر، هر کدام را که با عبارت $\frac{z(x+y)}{t}$ برابر است، مشخص کنید.

الف) $\frac{z}{t}(x+y)$ ب) $\frac{zx+y}{t}$ ج) $\frac{1}{t} \times z(x+y)$

د) $z \times \frac{x+y}{t}$ ه) $\frac{zx}{t} + \frac{zy}{t}$ و) $\frac{zx}{t} + y$

تمرین

۱- ضرب و تقسیم‌های زیر را انجام دهید (در همه تمرین‌ها مخرج کسرها مخالف صفر فرض شده است).

الف) $\frac{a^2 - 16}{a + 4} \times \frac{a + 2}{a^2 - 8a + 16} = \frac{(a - 4)(\cancel{a + 4})}{(\cancel{a + 4})} \times \frac{a + 2}{(a - 4)^2} = \frac{a + 2}{a - 4}$

ب) $\frac{m^2 - 49}{m + 1} \div \frac{m - 1}{m^2 - 1} = \frac{(m - 1)(m + 7)}{m + 1} \times \frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1}$
 $= \frac{(m + 7)(m - 1)}{-1} = -(m + 7)(m - 1)$

ج) $\frac{x^2 - 4x + 4}{4x^2y - 8xy} \div \frac{x^2 + x - 6}{6x^2 + 18} = \frac{(x - 2)^2}{4xy(x - 2)} \times \frac{6(x^2 + 3)}{(x + 3)(x - 2)}$
 $= \frac{6(x^2 + 3)}{4xy} = \frac{3(x^2 + 3)}{2xy}$

د) $\frac{1 - c^2}{b^3} \times \frac{b^2}{1 - 2c + c^2} = \frac{(1 - c)(1 + c)}{b^3} \times \frac{b^2}{(1 - c)^2} = \frac{1 + c}{b(1 - c)}$

۲- جمع و تفریق‌های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{x^4 - y^4} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x - y)^2}{(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}$

$$= \frac{x(x^r - y^r) - y(x - y)^r}{(x^r - y^r)(x^r + y^r)} = \frac{x^r + xy^r - yx^r - y^r}{(x^r - y^r)(x^r + y^r)} = \frac{x^r(x - y) + y^r(x - y)}{(x^r - y^r)(x^r + y^r)}$$

$$= \frac{(x^r + y^r)(x - y)}{(x^r + y^r)(x^r - y^r)} = \frac{x - y}{x^r - y^r} = \frac{1}{x + y}$$

ب) $\frac{\frac{x+y}{ax-bx} + \frac{y+q}{by-ay}}{x(a-b)} = \frac{(-y)(x+y) + (y+q)x}{x(a-b)(-y)} = \frac{-xy - y^2 + xy + qx}{x(a-b)(-y)}$

$$= \frac{qx - y^2}{x(a-b)(-y)}$$

ج) $\frac{a^r - b^r}{a - b} - \frac{a^r - b^r}{a^r - b^r} = \frac{a^r - b^r}{(a - b)} - \frac{(a^r - b^r)}{a^r - b^r} = \frac{(a + b)(a^r - b^r) - a^r + b^r}{a^r - b^r}$

$$= \frac{a^r - ab^r + ba^r - b^r - a^r + b^r}{a^r - b^r} = \frac{ab(a - b)}{(a - b)(a + b)} = \frac{ab}{a + b}$$

د) $\frac{4 + x^2 - 2x}{2 + x} - 2 - x = \frac{4 + x^2 - 2x - (x + 2)^2}{2 + x}$

$$= \frac{x^2 - 2x + 4 - x^2 - 4x - 4}{2 + x} = \frac{-6x}{2 + x}$$

۳- فقط یکی از عبارتهای گویای زیر قابل ساده شدن است؛ آن را مشخص و ساده کنید.

$$\frac{a^2 + 5}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2 + 3}{3} \quad \text{و} \quad \frac{a^2 + b^2}{a^2} \quad \text{و} \quad \frac{a^2 - 5a}{a} \quad \checkmark = \frac{a(a - 5)}{a} = a - 5$$

۴- از میان عبارتهای زیر، هر کدام را که مساوی عبارت $\frac{x}{y}$ است، معلوم کنید.

الف) $\frac{x+3}{y+3}$ ب) $\frac{3-x}{3-y}$ ج) $\frac{3x}{3y}$ د) $\frac{x^3}{y^3}$ ه) $\frac{a^3x}{a^3y}$ \checkmark

۵- عبارت $\frac{-x+3}{x+5}$ با کدام یک از عبارات های زیر برابر است؟

الف) $-\frac{x+3}{x+5}$ ب) $-\frac{x-3}{x+5}$ ج) $\frac{x-3}{x+5}$ د) $-\frac{3-x}{x+5}$

۶- کدام یک از عبارات های زیر به درستی ساده شده است؟

الف) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = a-5$ ب) $\frac{a+5}{a^2-25} = \frac{a+5}{(a+5)(a-5)} = \frac{1}{a-5}$

۷- اگر $A=a^2-b^2$ و $B=a^2+b^2$ و $C=2ab$ ، حاصل عبارت $\frac{A^2-B^2}{C^2}$ را به دست آورید.

$$= \frac{(a^2-b^2)^2 - (a^2+b^2)^2}{(2ab)^2} = \frac{a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - a^4 - 2a^2b^2 - b^4}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{-4a^2b^2}{4a^2b^2} = -1$$

۸- کدام یک از تساوی های زیر، درست و کدام یک نادرست است؟ موارد نادرست را اصلاح

کنید (همه عبارات های جبری تعریف شده فرض می شود).

الف) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{ab}$

ب) $\frac{x^{13}}{x^{20}} = x^7$

$\frac{a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{a^2-b^2}{ab}$

$\frac{x^{13}}{x^{20}} = \frac{1}{x^7}$

ج) $\frac{a}{5} - \frac{7-b}{5} = \frac{a-7-b}{5}$

د) $\frac{a-b}{b-a} = 1$

$\frac{a}{5} - \frac{7-b}{5} = \frac{a-7+b}{5}$

$\frac{a-b}{b-a} = \frac{a-b}{-(a-b)} = -1$

$$\text{هـ)} \frac{1}{a-b} = \frac{-1}{a+b}$$

$$\text{و)} \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$$

$$\frac{1}{a-b} - \frac{-1}{-a+b}$$

$$\text{ز)} \frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{a+b}{d}$$

$$\text{ح)} \frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{c}} = \frac{c}{b}$$

$$\frac{ca+cb}{c+cd} = \frac{c(a+b)}{c(1+d)} = \frac{a+b}{1+d}$$

۹- طول مستطیلی از دو برابر عرض آن یک واحد کمتر است. نسبت محیط به مساحت این مستطیل را به صورت یک کسر گویا (عبارت گویا) بنویسید.

$$\text{عرض} = x$$

$$\text{محیط} = 2(x + 2x - 1) = 2(3x - 1) = 6x - 2$$

$$\text{طول} = 2x - 1$$

$$\text{مساحت} = x(2x - 1) = 2x^2 - x$$

$$\frac{6x - 2}{2x^2 - x}$$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و نتیجه را ساده کنید.

$$\text{الف)} \frac{\frac{a-a^2}{a^2-1}}{\frac{a}{a+1}-a} = \frac{a(1-a)(a+1)}{(a^2-1)(a-a^2-a)} = \frac{a(1-a^2)}{(1-a^2)(a^2)} = \frac{1}{a}$$

$$\text{ب)} \frac{\frac{1}{x-y} - \frac{2}{x+y}}{\frac{x^2-9y^2}{(x-y)^2}} = \frac{\frac{x+y-2x+2y}{(x-y)(x+y)}}{\frac{(x-3y)(x+3y)}{(x-y)^2}} = \frac{(x-y)^2(-x+3y)}{(x-y)(x+y)(x-3y)(x+3y)}$$

$$= \frac{-1(x-y)}{(x+y)(x+3y)}$$

$$\text{ج)} \frac{\frac{2x}{x^2+2x+1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1}}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{2x(x-1) + (x+1) - 2(x-1)(x+1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$(x+1)^2 (x-1)(x+1)$$

$$= \frac{\cancel{2x^2} - 2x + x + 1 - \cancel{2x^2} + 2}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{-x+3}{(x+1)^2(x-1)}$$

۱۱- دو عبارت گویا بنویسید که :

الف) حاصل ضرب آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود. $\frac{a-2}{b}, \frac{b}{a+7}$

ب) حاصل جمع آنها $\frac{a-2}{a+7}$ شود. $\frac{a}{a+7}, \frac{-2}{a+7}$

۱۲- عرض مستطیل مقابل را بر حسب x به دست آورید.

$$\frac{x^2 - x - 12}{x - 4}$$

مساحت مستطیل $x^2 - 9$ است.

$$A = x^2 - 9$$

$$(x^2 - 9) \div \frac{x^2 - x - 12}{x - 4} = \frac{(x-3)(x+3)}{1} \times \frac{(x-4)}{(x-4)(x+3)} = x - 3$$

تمرین

۱- تقسیم های زیر را انجام دهید.

الف) $\frac{-2x^2y^3z^4}{18xz^5} = \frac{-xy^3z^2}{9}$

ب) $\frac{2a^3y - a^4y^2 + 15xy}{-5y^2} = \frac{2a^3y}{-5y^2} - \frac{a^4y^2}{-5y^2} + \frac{15xy}{-5y^2}$

$$= \frac{-2a^3}{5y} + \frac{a^4}{5} - \frac{3x}{y}$$

$$\text{ج) } (x^3 - 27) \div (x - 2)$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 27 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ x^2 + 2x + 4 \end{array} \right. \\ \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ 2x^2 - 27 \\ \underline{\pm 2x^2 \mp 4x} \\ 4x - 27 \\ \underline{\pm 4x \mp 8} \\ -19 \end{array}$$

$$\text{د) } (3y^2 - 10y - 24) \div (3y - 4)$$

$$\begin{array}{r} 3y^2 - 10y - 24 \quad \left| \begin{array}{l} 3y - 4 \\ y - 2 \end{array} \right. \\ \underline{\pm 3y^2 \mp 4y} \\ -6y - 24 \\ \underline{\mp 6y \pm 8} \\ -32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ه) } 2x^5 + 5x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 3 \quad \left| \begin{array}{l} x + 3 \\ 2x^2 - x^3 + x^2 - x + 1 \end{array} \right. \\ \underline{-2x^5 - 6x^4} \\ -x^4 - 2x^3 \\ \underline{+x^4 + 3x^3} \\ x^3 + 2x^2 \\ \underline{-x^3 - 3x^2} \\ -x^2 - 2x \\ \underline{+x^2 + 3x} \\ x + 3 \\ \underline{-x - 3} \\ 0 \end{array}$$

۲- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم زیر را مشخص کنید و درستی عمل تقسیم را با نوشتن روابط

$$-3x^4 + 4x^6 + x^2 + 5 \quad \left| \begin{array}{l} 1 - x^3 \end{array} \right. \quad \text{تقسیم نشان دهید.}$$

$$\begin{array}{r} 4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5 \quad \left| \begin{array}{l} -x^3 + 1 \\ -4x^3 + 3x - 4 \end{array} \right. \\ \underline{-4x^6 + 4x^3} \\ -3x^4 + 4x^2 + x^2 + 5 \\ \underline{+3x^4 - 3x} \\ 4x^3 + x^2 - 3x + 5 \\ \underline{-4x^3 + 4} \\ x^2 - 3x + 9 \end{array}$$

$$4x^6 - 3x^4 + x^2 + 5 = (1 - x^3)(-4x^3 + 3x - 4) + x^2 - 3x + 9$$

۳- حجم یک جعبه به شکل مکعب مستطیل برابر با $2x^3 + 15x^2 + 28x$ است. اگر ارتفاع این جعبه x و طول آن $x+4$ باشد، عرض آن را به دست آورید.

$$\frac{2x^3 + 15x^2 + 28x}{x(x+4)} = \frac{\cancel{x}(2x^2 + 15x + 28)}{\cancel{x}(x+4)} = 2x + 7$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 15x + 28 \quad | \quad x+4 \\ -2x^2 - 8x \\ \hline 7x + 28 \\ -7x - 28 \\ \hline 0 \end{array}$$

۴- اگر چند جمله‌ای $20x^3 + 23x^2 - 10x + a$ بر $4x+3$ بخش پذیر باشد، a را به دست آورید.

$$\begin{array}{r} 20x^3 + 23x^2 - 10x + a \quad | \quad 4x+3 \\ -20x^3 - 15x^2 \\ \hline 8x^2 - 10x \\ -8x^2 - 6x \\ \hline -16x + a \\ +16x + 12 \\ \hline a + 12 \end{array}$$

$$a + 12 = 0$$

$$a = -12$$

۵- خارج قسمت و باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 9x + 9$ را بر هر یک از عبارت‌های زیر به دست آورید.

$$2x+3 \quad \text{و} \quad 2x-3 \quad \text{و} \quad x-3 \quad \text{و} \quad x+3$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x+3 \\ -2x^2 - 6x \\ \hline -15x + 9 \\ 15x + 45 \\ \hline 54 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad x-3 \\ -2x^2 + 6x \\ \hline -3x + 9 \\ +3x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x-3 \\ -2x^2 + 3x \\ \hline -6x + 9 \\ +6x - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 9x + 9 \quad | \quad 2x+3 \\ -2x^2 - 3x \\ \hline -12x + 9 \\ +12x + 9 \\ \hline 18 \end{array}$$