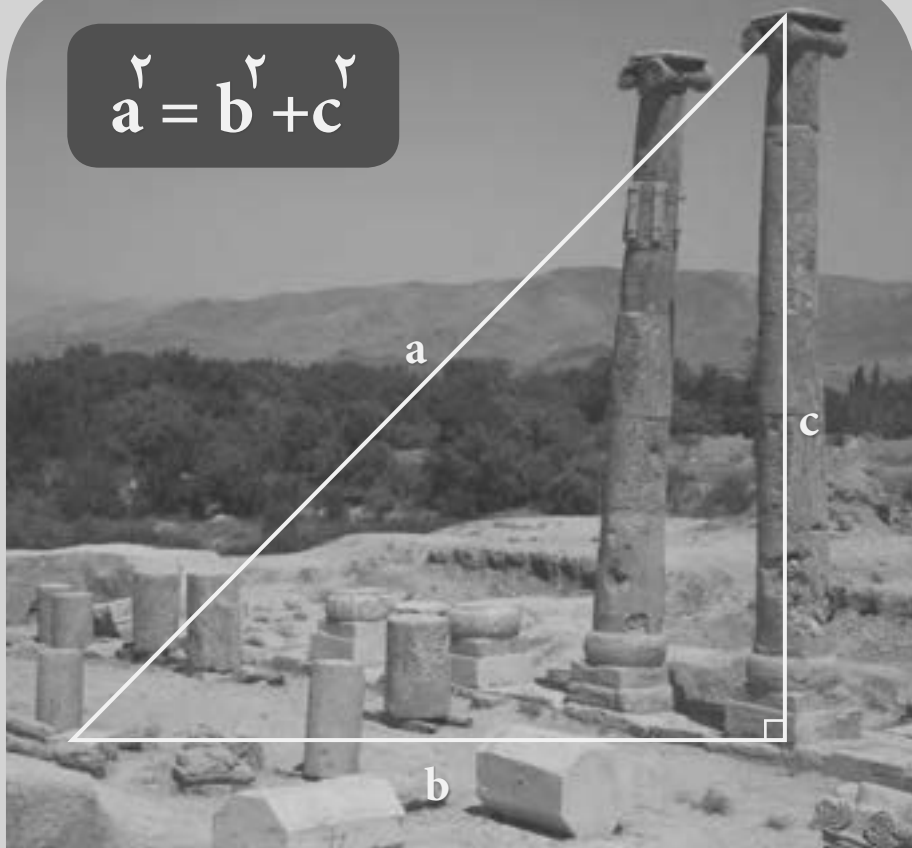


$$a^2 = b^2 + c^2$$



عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند، به طور مثال رابطه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

## نگاه کلی به فصل

درس اول: یادآوری و تکمیل مطالب مربوط به یک جمله‌ای‌ها و چندجمله‌ای‌ها است. در این قسمت عبارت‌هایی که یک جمله‌ای محسوب نمی‌شوند مورد بررسی قرار می‌گیرند در ادامه یک جمله‌ای‌های متشابه، درجه یک جمله‌ای، یک جمله‌ای‌های غیرمتشابه و چندجمله‌ای‌ها تعریف دقیق شده و مثال‌هایی آورده شده است.

همچنین به معرفی اتحاد پرداخته و تفاوت بین اتحاد و معادله را با انجام یک فعالیت بررسی خواهیم کرد. سپس اتحاد مربع دوجمله‌ای و مفهوم تجزیه و تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کمک اتحادها در این درس آمده است.

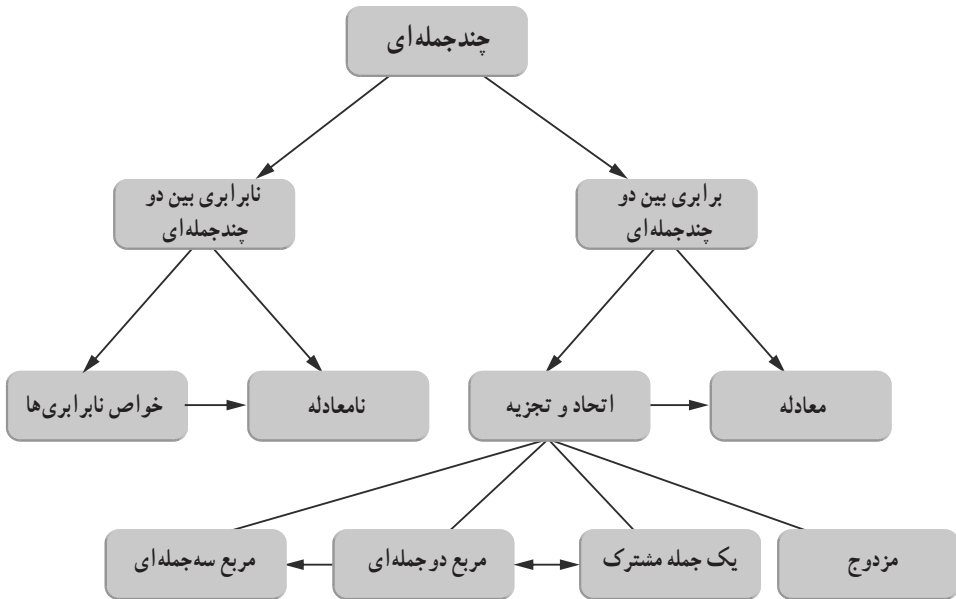
درس دوم: در ادامه درس اول اتحاد مربع سه جمله‌ای، مزدوج و یک جمله مشترک آمده است. نکته مهمی که باید به آن توجه داشت، این است که در اثبات اتحادها از استدلال جبری و تعبیر هندسی استفاده شده است و دانش‌آموز باید بتواند اتحادهای جبری را به صورت یک عبارت کلامی بیان کند. در ادامه تجزیه چندجمله‌ای‌ها به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک با انجام چند فعالیت بررسی شده و اتحاد مربع دوجمله‌ای به عنوان حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک آمده است.

درس سوم: مفهوم نابرابری و تعریف آن بیان می‌شود. باید توجه داشت که این تعریف یک رابطه دوسویه است و از هر دو طرف آن استفاده می‌شود.

$$a > b \Leftrightarrow \square p > \circ : a = b + p$$

پس مفهوم « $\geq$ » و نامساوی مضاعف مطرح شده است. در ادامه خواص نابرابرها با استفاده از یک فعالیت به صورت استدلال استقرایی مطرح شده است. می‌توان خواص نابرابری‌ها را به کمک تعریف آن اثبات کرد که در قسمت دانستنی برای معلم، خواهیم آورد.

در قسمت آخر مفهوم نامعادله یک مجهولی درجه اول و روش حل آن با استفاده از خواص نابرابرها آمده است و مجموعه جواب نامعادله با بررسی چند مثال خاتمه بخش این فصل است.



### دانستنی‌هایی برای معلم

۱- کوتاه‌شدهٔ تاریخ جبر و نمادهای حرفی<sup>۱</sup>: جبر به‌عنوان دانش حلّ معادله‌ها پدید آمد. در مصر و بابل کهن و همچنین در دوران‌های جدیدتر در هند، با مقدمه‌های جبر آشنا بودند و با توجه به داده‌های مسأله، می‌توانستند معادله را تشکیل دهند و برخی از گونه‌های آن را حل کنند. البته آنها از حرف برای نشان دادن داده‌ها و مجهول‌ها آگاهی نداشتند و نمی‌توانستند معادله‌ها را به صورت کلی خود تنظیم کنند. در دوران ریاضیات کاربردی، عنصرهای جبری، همچون ادامهٔ دانش حساب تلقی می‌شد. با وجود این، به ویژه بابلی‌ها تا مرز بالایی از جبر جلو رفته بودند و می‌توانستند مسأله‌های عملی را که منجر به گونه‌هایی از معادلهٔ درجهٔ دوم و در بعضی حالت‌ها، حتی درجهٔ سوم شود، حل کنند. به واژهٔ «جبر» برای نخستین بار در سدهٔ نهم میلادی و در کارهای محمد فرزند موسی مشهور به خوارزمی، برخورد می‌کنیم. خوارزمی کتاب «حساب جبر و مقابله» را به تشکیل و حلّ معادله‌ها اختصاص داده است. او از شش نوع معادله صحبت می‌کند که یکی از آنها، معادلهٔ درجهٔ اول و پنج گونهٔ دیگر درجهٔ دوم است (درواقع، معادلهٔ درجهٔ اول را هم حالت خاصی از معادلهٔ درجهٔ دوم، وقتی

۱- تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه

که ضریب درجه دوم برابر صفر باشد، می‌گیرد). «حساب جبر و مقابله» همه چیز را با واژه‌ها بیان می‌کند و هیچ‌گونه نماد حرفی ندارد.

اصطلاح‌های «جبر» به معنای «جبران کردن»، و «مقابله» (مقابل هم قراردادن)، معرّف دو عمل ساده جبری است؛ به نحوی که همه جمله‌های سمت چپ و راست معادله، مثبت یا با ضریب مثبت باشند. واژه «جبر» به همان معنایی آمده است که در این مصراع سعدی: «که جبر خاطر مسکین بلا بگرداند» و از نظر عمل‌های جبری، به معنای انتقال جمله منفی به طرف دیگر معادله است تا مثبت شود. اصطلاح «مقابله» هم به معنای مقابل قراردادن جمله‌ها در دو طرف برابری و حذف مقدارهای برابر از دو طرف است.

به این ترتیب «جبر و مقابله» به معنای ساده کردن معادله و ساده کردن جمله‌های متشابه است. نمادهای امروزی به تدریج و در طول زمان به وجود آمد.

«محمد کرجی» ریاضیدان ایرانی اول سده یازدهم میلادی، برای نشان دادن مجهول، نمادی را انتخاب کرد. معادله‌ها نزد ایرانی‌ها تا جایی رسید که «خیام» معادله‌های درجه سوم را به باری برش‌های مخروطی حل می‌کند. باید توجه داشت که ایرانیان به پیروی از یونانی‌ها، از هندسه برای حل مسأله‌های جبری کمک می‌گرفتند. خوارزمی مسأله‌های خود را گاهی با شیوه جبری و گاهی با کمک هندسه حل می‌کند. ولی خیام برای حل معادله‌های درجه سوم، تنها از هندسه و برش‌های مخروطی استفاده می‌کند تا سرانجام جمشید کاشانی راه حلی جبری برای معادله درجه سوم می‌یابد که جواب را تا هر درجه دقت به دست می‌دهد.

۲- یک جمله‌ای صفر و درجه آن: یک نوع ساده از عبارات‌های جبری، چندجمله‌ای‌ها هستند. در این جا چندجمله‌ای با یک متغیر را بحث خواهیم کرد.

هر چندجمله‌ای یک متغیره، به صورت یک عبارت جبری روی یک متغیر است که در آن فقط از جمع و ضرب روی آن متغیر و اعداد استفاده شده است، مانند:

$$2x^2 + 5x^2 + 4 \quad \text{یا} \quad -\frac{2}{5}x + 7x^2 - 3x^5 - \sqrt{2}$$

چنانچه یک عبارت جبری فقط از ضرب اعداد در آن متغیر حاصل شود، به آن یک جمله گفته می‌شود، هر یک جمله‌ای برحسب متغیر  $x$  را پس از ساده کردن به صورت  $ax^n$  نمایش می‌دهند که در آن  $n \in \mathbb{W}$ ،  $a \in \mathbb{R}$  درجه یک جمله‌ای و  $x$  متغیر آن یک جمله‌ای است، واضح است که:

$$ax^n = \begin{cases} a \in \mathbb{R} & n = 0 \\ 0 & a = 0 \end{cases}$$

در نتیجه هر عدد حقیقی  $a \in \mathbb{R}$  یک جمله‌ای بر حسب متغیر  $x$  و از درجه صفر است. عدد  $0$  نیز یک جمله‌ای محسوب می‌شود و برای آن درجه تعریف نمی‌کنیم. این گونه محدودیت‌ها در تعاریف را قبلاً دیده‌اید، برای مثال وقتی مفهوم عمل تقسیم تعریف می‌شود، در آن همواره مقسوم علیه را مخالف با صفر در نظر می‌گیریم و عمل تقسیم بر صفر را تعریف نشده تلقی می‌کنیم.

اگر اصرار داشته باشیم که برای یک جمله‌ای صفر درجه تعریف کنیم، باید این جمله را چنان در نظر بگیریم که در بیان کردن قضیه‌ها ثمری داشته باشد و به ویژگی مهمی اشاره کند. دو قضیه زیر را در چند جمله‌ای‌ها در نظر بگیرید.

**قضیه ۱:** درجه حاصل ضرب دو چندجمله‌ای برابر با مجموع درجه‌های آن دو چندجمله‌ای است.

**قضیه ۲:** درجه حاصل جمع دو چندجمله‌ای کوچک‌تر یا مساوی ماکزیمم درجه آن دو چندجمله‌ای است.

اکنون اگر در قضیه ۱،  $A = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  و  $B = 0$  قرار دهید، در این صورت مثال نقضی برای درستی این قضیه به دست آورده‌ایم.

برای اینکه از این تنگنا عبور کنیم، دو پیشنهاد مطرح می‌شود.

**پیشنهاد اول:** در قضیه‌های ۱ و ۲، دو چندجمله‌ای را ناصفر در نظر بگیریم.

**پیشنهاد دوم:** صورت قضیه را تغییر ندهیم ولی برای یک جمله‌ای صفر، درجه تعریف کنیم.

در این حالت اگر درجه یک جمله‌ای صفر را  $-\infty$  تعریف کنیم، روشن است که معنای قابل قبولی در قضیه‌های ۱ و ۲ خواهد داشت. برای مثال فرض کنید  $A$  یک جمله‌ای بر حسب متغیر  $x$  و از درجه  $n$  و  $B$  چندجمله‌ای صفر و از درجه  $-\infty$  باشد، در این صورت  $A \times B = 0$  و درجه حاصل ضرب  $A \times B$  برابر با  $-\infty$  است. از آنجا که  $n + (-\infty) = -\infty$  پس درستی قضیه ۱ برقرار خواهد بود.

## مسیرهایی برای توسعه

تعریف پیشرفته از چندجمله‌ای‌ها<sup>۱</sup>: عملاً، هر چندجمله‌ای که به شکل استاندارد خود نوشته شده باشد، با دنباله ضرایب خود به طور کامل مشخص می‌شود. بنابراین، هر چندجمله‌ای را می‌توان متناظر یک دنباله از اعداد در نظر گرفت که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر است.

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \leftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$$

۱- آیا عدد صفر چندجمله‌ای است؟ / دکتر ناصر بروجردیان / مجله ریاضی پایا

در سطوح پیشرفته‌تر، برای تعریف چند جمله‌ای‌ها فقط همین دنباله ضرایب را در نظر می‌گیرند و هر دنباله از اعداد حقیقی که از مرحله‌ای به بعد ثابت صفر باشد را به عنوان یک چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی معرفی می‌کنند. روشن است که در این شیوه معرفی چند جمله‌ای‌ها، کسی چند جمله‌ای‌ها را به عنوان تابع در نظر نخواهد گرفت. البته این شیوه معرفی چند جمله‌ای‌ها، مناسب مدرسه نیست و در اینجا فقط برای روشن شدن مفاهیم، صرفاً برای معلمین این روش آورده شده است. با این شیوه معرفی چند جمله‌ای‌ها، جمع و ضرب آنها به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) \cdot (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (c_0, c_1, \dots, c_n, \dots)$$

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0$$

توجه داشته باشید که این دنباله‌ها با اندیس صفر شروع می‌شوند. چند جمله‌ای‌هایی که اندیس ۱ به بعد آنها صفر است و فقط اندیس صفر آنها احیاناً ناصفر است با یک عدد حقیقی مشخص می‌شوند و جمع و ضرب آنها همان جمع و ضرب اعداد حقیقی است. یعنی،

$$(a_0, 0, 0, \dots) + (b_0, 0, 0, \dots) = (a_0 + b_0, 0, 0, \dots)$$

$$(a_0, 0, 0, \dots) \cdot (b_0, 0, 0, \dots) = (a_0 b_0, 0, 0, \dots)$$

به همین خاطر به خود حق می‌دهیم، این چند جمله‌ای‌ها را با همان ضریب اندیس صفرشان نشان دهیم و اعداد حقیقی را به عنوان زیرمجموعه‌ای از چند جمله‌ای‌ها در نظر بگیریم. پس عدد  $a$  به عنوان یک چند جمله‌ای همان دنباله  $(a, 0, 0, \dots)$  است. با توجه به تعریف جمع و ضرب چند جمله‌ای‌ها، جمع و ضرب یک عدد با چند جمله‌ای‌ها به شکل زیر خواهد بود.

$$a + (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (a + b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$$

$$a (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (ab_0, ab_1, \dots, ab_n, \dots)$$

چند جمله‌ای  $(0, 1, 0, 0, \dots)$  نقش ویژه‌ای بازی می‌کند و برای آن یک اسم خاص انتخاب می‌کنیم و مثلاً آن را با  $\times$  نشان می‌دهیم. ضرب یک چند جمله‌ای در  $\times$  موجب می‌شود ضرایب آن چند جمله‌ای، یک واحد به جلو حرکت کند، یعنی

$$\times (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots) = (0, b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$$

به ویژه ضرب  $\times$  در خودش به شکل زیر خواهد بود.

$$\times^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$\times^3 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

□

با این علامت گذاری‌ها و قراردادها، هر چند جمله‌ای  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \circ, \circ, \dots)$  را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم.

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, \circ, \circ, \dots) = a_0(1, \circ, \circ, \dots) + a_1(\circ, 1, \circ, \circ, \dots) + \dots + a_n(\circ, \circ, \dots, 1, \circ, \circ, \dots) \\ = a_0 + a_1 \chi + \dots + a_n \chi^n$$

به این ترتیب به همان شکل مرسوم چند جمله‌ای‌ها می‌رسیم، ولی یک تفاوت اساسی وجود دارد که در اینجا  $\chi$  یک متغیر عددی نیست و یک چند جمله‌ای خاص است، در واقع  $\chi = (\circ, 1, \circ, \circ, \dots)$  مجموعه چند جمله‌ای‌ها، مجموعه مشخصی از اشیاء معین است که بین آنها عملیات جمع و ضرب تعریف شده است و تمام خواص مهم اعمال جمع و ضرب برقرار است، غیر از اینکه چند جمله‌ای‌ها عموماً وارون پذیر نیستند. در واقع تنها چند جمله‌ای‌های وارون پذیر، اعداد ناصفرند.

**چند جمله‌ای‌ها و توابع چند جمله‌ای:** در هر چند جمله‌ای، اگر چند جمله‌ای خاص  $\chi$  را به متغیر عددی  $x$  تبدیل کنیم، یک چند جمله‌ای معمولی به دست می‌آوریم که در مدرسه مطرح می‌شود و می‌توانیم آن را به عنوان یک تابع در نظر بگیریم. این گونه توابع را توابع چند جمله‌ای می‌نامند. توجه کنید که چند جمله‌ای و تابع چند جمله‌ای دو مفهوم متفاوتند، اگرچه تشخیص این تفاوت در سطح مدرسه آسان نیست. البته برای دانش‌آموزان تشخیص این تفاوت ساده‌تر است، زیرا دانش‌آموزان هنوز مفهوم تابع را نمی‌شناسند تا مشکلی برای تفکیک کردن داشته باشند. بیشترین مشکل برای خود معلمین است که هر دو مفهوم را می‌شناسند و باید بتوانند این دو مفهوم را برای خود از هم تفکیک کنند. چند جمله‌ای به عنوان تابع در ذهن معلمین قوی‌تر است، ولی معلمین باید بتوانند به چند جمله‌ای در شکل استاندارد آن نگاه کنند و آن را صرفاً به عنوان یک عبارت جبری یا دنباله ضرایب در نظر بگیرند. با این تفکیک دو مفهوم چند جمله‌ای و تابع چند جمله‌ای از هم جدا خواهند شد.

البته با وجود تفاوت مفهومی بین چند جمله‌ای‌ها و توابع چند جمله‌ای، بین آنها یک تناظر یک به یک برقرار است و هر چند جمله‌ای یک تابع چند جمله‌ای مشخص می‌کند و برعکس و دو چند جمله‌ای مساویند اگر و فقط اگر توابع چند جمله‌ای وابسته به آنها مساوی باشند. همچنین اعمال جمع و ضرب چند جمله‌ای‌ها متناظر اعمال جمع و ضرب توابع چند جمله‌ای می‌باشد. به همین خاطر است که تفکیک این دو مفهوم مشکل شده است.

**درجه چند جمله‌ای‌ها:** به طور شهودی، بزرگ‌ترین توانی از  $\chi$  که در یک چند جمله‌ای رخ می‌دهد را درجه آن چند جمله‌ای می‌نامند. در چند جمله‌ای‌هایی که حداقل یک جمله ناصفر دارند

این مفهوم بدون ابهام است ولی برای چندجمله‌ای صفر که همه جملات آن به صورت  $x^n$ ,  $0$  است نمی‌توان بزرگ‌ترین  $n$  را تعیین کرد. بنابراین مفهوم درجه، فقط برای آن چندجمله‌ای‌هایی قابل تعریف است که حداقل یکی از ضرایب آنها ناصفر باشد. به‌طور دقیق‌تر درجه یک چندجمله‌ای ناصفر مانند  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  برابر است با بزرگ‌ترین اندیس  $k$  که  $a_k \neq 0$ . روشن است که این تعریف فقط برای چندجمله‌ای‌های ناصفر اعتبار دارد و برای چندجمله‌ای صفر، درجه، تعریف نمی‌شود.

### معرفی منابع برای معلمان

- جبر و مقابله / محمد بن موسی خوارزمی ترجمه حسین خدیو جم / انتشارات اطلاعات
- تاریخ ریاضیات / پرویز شهریاری / انتشارات مدرسه از سری کتاب‌های کوچک ریاضی
- عبارت‌ها و معادله‌های جبری / علی حسن‌زاده ماکویی / انتشارات مدرسه
- همانی عبارت‌های جبری و کاربردهای آن / عبدالحسین مصحفی / انتشارات مدرسه
- نابرابری‌ها و نامعادله‌ها / میر شهرام صدر / انتشارات مدرسه

### نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)  $(\frac{1}{4}x^2y)^3$

ب)  $(-3a^2b)(2ab^2)^2$

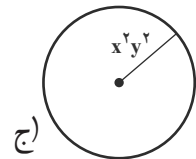
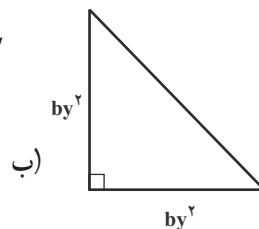
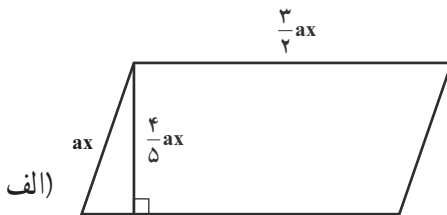
ج)  $(-\frac{3}{4}a^2bc^3)^2(\frac{2}{3}ab^2c)$

د)  $(-\frac{5}{7}a^2bxy^2)(-\frac{3}{5}ax^2y)$

هـ)  $(\frac{3}{4}a^2bxy)^2(-\frac{4}{3}a^5b^2y^3)^3$

و)  $(-\frac{2}{5}ab^5)(\frac{25}{7}a^5b) + 3(a^2b^2)^3$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.





۳- درجه عبارتهای زیر را نسبت به  $x$ ، نسبت به  $y$  و نسبت به  $x$  و  $y$  تعیین کنید. سپس هریک از عبارتهای زیر را یک بار برحسب توانهای نزولی  $x$  و یک بار برحسب توانهای نزولی  $y$  مرتب کنید.

الف)  $5 + 9xy^2 + 4bx^2y^2 - 3x^2y$

ب)  $1 + x + x^4y^2 - x^2y^4 + 2x^2y^2 - x^4y^2 + x^6$

ج)  $5 + 3y^{k+2} - 3y^{k+1}x^{k-2} - 3y^{k+1}x^{k+1}$

د)  $\frac{1}{6}x^2y^2 + \frac{1}{2}xy^3 - \frac{1}{3}x^3y$

۴- اگر  $A(x) = -x^2 - 1$ ،  $B(x) = -3x^2 + 1 - 2x$  و  $C(x) = 4x^2 + 6x - 7$  حاصل عبارتهای

زیر را حساب کنید و سپس چند جمله‌ای به دست آمده را برحسب توانهای نزولی  $x$  مرتب کنید.

الف)  $A(x) + B(x) - 2C(x)$

ب)  $\frac{1}{2}A(x) + B(x) - 3C(x)$

ج)  $2[A(x) - B(x)] + 3C(x)$

د)  $2B(x) - A(x) \cdot C(x)$

۵- اگر  $A(x) = (x^m - 1)^2$  و  $B(x) = x^m - x^{2m} - 1$  و  $C(x) = x^{m+1}$  حاصل عبارتهای زیر را

تعیین کنید، سپس چند جمله‌ای به دست آمده را برحسب توانهای نزولی  $x$  مرتب کنید.

الف)  $A(x) + \frac{B(x)}{2} - 3C(x)$

ب)  $A(x) + B(x) - 2C(x)$

۶- حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف)  $(x^2 + \frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{4})(x^2 - \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{4})$

ب)  $(2x + \frac{y}{3})^2$

ج)  $(xy + 5)(xy - 4)$

د)  $(x+y-2z)^2$

هـ)  $(a^2-b)(b+a^2)$

و)  $(\frac{2}{3}x^2y + \frac{3}{4}z^2)^2$

ز)  $(x^2-5xy-3x^2)(x^2-3x+5y)$

ح)  $(4x-y^2)^2$

ط)  $(a+2b+c-3)(a+3-2b+c)$

ی)  $(3\frac{1}{4}k^2 - \frac{12}{5}L^5)^2$

ک)  $(7x^2y^2+3x^2y^2)^2$

ل)  $(a+5)(a-3)(a^2-2a+15)$

م)  $(x^{k+2}+y^{k+2})(x^{k+2}-y^{k+2})$

ن)  $(2a - \sqrt{3b} - \frac{1}{2})^2$

ق)  $(a^m b^n - c^m d^n)(a^m b^n + c^m d^n)$

ر)  $(\frac{a+b}{2})^2 - (\frac{a-b}{2})^2$

ش)  $[(2x-y)(2x+y)]^2$

ت)  $(2x^m-1)(2x^m+1)(4x^{2m}+1)$

ث)  $(x^2+x+1)(x^2+x-2)(x^2+2x^2+x+2)$

خ)  $(\frac{3}{a} + \frac{a}{3})(\frac{3}{a} - \frac{a}{3})$

۷- حاصل عبارت‌های زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

الف)  $256^2 - 250^2 - 6^2$

ب)  $10001^2$

ج)  $75^2 - 275^2$

د)  $423 \times 437$

هـ)  $440^2 - 430^2 - 10^2$

و)  $102^2 - 2^2$

۸- به جای نقطه چین ها، عبارت مناسب بنویسید.

الف)  $(2x - \dots)^2 = \dots - 12x + \dots$

ب)  $(\dots + \dots)^2 = a^2 + 12ab^2 + \dots$

ج)  $(\dots - 7y)(x^2 + \dots) = (\dots)^2 - 49y^2$

د)  $(\dots + \dots)^2 = \frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{16} + \dots$

### چند مسئله کاربردی نامعادله یک مجهولی درجه اول

۹- زمین شناسی: در جریان حفاری زمین در سال ۱۹۸۴، دانشمندان زمین شناس روسیه

به این نتیجه رسیدند، که درجه حرارت در  $x$  کیلومتری زیر سطح زمین از رابطه زیر به دست می آید:

$$T = 25(x - 3) + 30 \quad (3 \leq x \leq 15)$$

که در این رابطه،  $T$  درجه حرارت برحسب درجه سانتی گراد است. مشخص کنید در چه محدوده‌ای از عمق زمین، درجه حرارت بین  $200^\circ\text{C}$  تا  $300^\circ\text{C}$  تغییر می کند.

حل:

$$T = 200 \Rightarrow 200 = 25(x - 3) + 30 \Rightarrow x = 9/8$$

$$T = 300 \Rightarrow 300 = 25(x - 3) + 30 \Rightarrow x = 13/8$$

در نتیجه  $9/8 \leq x \leq 13/8$ ، یعنی در عمق  $9/8$  تا  $13/8$  کیلومتری زیر سطح زمین، درجه حرارت بین  $200^\circ\text{C}$  تا  $300^\circ\text{C}$  تغییر می کند.

۱۰- هواشناسی: وقتی هوای گرم از سطح زمین به طرف بالا می رود، منبسط می شود و

تقریباً بعد از  $4000$  پا. برای هر  $1000$  پا؛  $5/5$  فارنهایت از درجه هوا کم می شود. اگر درجه حرارت در اطراف سطح زمین  $70^\circ\text{f}$  باشد، آنگاه درجه حرارت ( $T$ ) در ارتفاع  $h$  از سطح زمین از رابطه  $T = 70 - 0.0055h$  به دست می آید. حدود تغییرات ارتفاع را وقتی که درجه حرارت هوا از  $4^\circ\text{f}$  تا  $26^\circ\text{f}$  تغییر می کند، به دست آورید.

حل:

$$\begin{cases} -40 \leq T \leq 26 \\ \Rightarrow -40 \leq 70 - 0.0055h \leq 26 \\ T = 70 - 0.0055h \end{cases}$$

$$\Rightarrow -40 - 70 \leq -0.0055h \leq 26 - 70 \Rightarrow -110 \leq -0.0055h \leq -44$$

$$\Rightarrow \frac{110}{0.0055} \geq h \geq \frac{44}{0.0055} \Rightarrow 20000 \geq h \geq 8000$$

یعنی در ارتفاع ۸۰۰۰ تا ۲۰۰۰۰ پا بالاتر از سطح زمین، حرارت هوا بین  $4^{\circ}f$  تا  $26^{\circ}f$  تغییر می‌کند.

۱۱- روان‌شناسی: آی کیوی (IQ) افراد مختلف از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$IQ = \frac{MA}{CA} \times 100$$

که در آن MA سنّ هوشی و CA سنّ تقویمی افراد است. در صورتی که  $80 \leq IQ \leq 140$ : برای بچه‌های ۱۲ ساله حدود تغییرات سنّ هوشی را به دست آورید.

$$\begin{cases} 80 \leq IQ \leq 140 \\ IQ = \frac{MA}{CA} \times 100 \Rightarrow 80 \leq \frac{MA}{12} \times 100 \leq 140 \Rightarrow \frac{12}{100} \times 80 \leq MA \leq \frac{12}{100} \times 140 \\ CA = 12 \end{cases} \quad \text{حل:}$$

$$\Rightarrow 9.6 \leq MA \leq 16.8$$

در نتیجه سنّ هوشی بچه‌های ۱۲ ساله بین ۹/۶ تا ۱۶/۸ است.

۱۲- تجارت و اقتصاد: در یک تجارت سودآور واضح است، که باید سود (R) بیشتر از هزینه (C) باشد؛ یعنی  $R > C$ . اگر معادله هزینه یک شرکت تولیدی ساعت در یک هفته به صورت  $C = 300 + 1/5x$  و معادله سود شرکت در یک هفته به صورت  $R = 2x$  باشد، که در این معادله‌ها x تعداد ساعت‌های فروخته شده در یک هفته است؛ در این صورت این شرکت در هفته باید چند ساعت بفروشد، تا اینکه فعالیت تولیدی آن در واقع سودآور باشد.

$$\begin{cases} R > C \\ C = 300 + 1/5x \Rightarrow 2x > 300 + 1/5x \Rightarrow x > 600 \\ R = 2x \end{cases} \quad \text{حل:}$$

در نتیجه برای اینکه فعالیت این شرکت سودآور باشد، باید در هفته بیشتر از ۶۰۰ عدد ساعت بفروشد.

۱۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را روی محور اعداد مشخص کنید:

الف)  $3 - 2x \geq 5(3 - 2x)$       ب)  $2(x - 3) + 5 < 5 - x$

ج)  $\frac{\sqrt{m}}{-3} + 1 \leq -2$       د)  $-7n \geq 21$

$$\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2} \text{ (و)}$$

$$\frac{p}{3} - \frac{p-2}{2} \leq \frac{p}{4} - 4 \text{ (ح)}$$

$$-4 \leq \frac{9}{5}x + 32 \leq 68 \text{ (ع)}$$

$$15 \leq 7 - \frac{2}{5}x \leq 21 \text{ (ج)}$$

$$-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3} \text{ (ه)}$$

$$2 \leq 3m - 7 < 14 + 2m \text{ (ز)}$$

$$\frac{2x}{5} - \frac{1}{2}(x-3) \leq \frac{2x}{3} - \frac{3}{10}(x+2) \text{ (ط)}$$

$$-6 \leq -\frac{2}{3}(1-x) \leq 4 \text{ (ك)}$$

## اهداف

- یک جمله‌ای را تشخیص دهد و مفهوم ضریب عددی و قسمت حرفی را درک کند.
- مفهوم چند جمله‌ای را درک کند و بتواند چند جمله‌ای را بر حسب توان‌های نزولی متغیر مرتب کند.
- مفهوم اتحاد را درک کند و فرق اتحاد با معادله را بداند
- اتحاد مربع دوجمله‌ای را به صورت عبارت کلامی بیان کند و درستی آن را از روش جبری و هندسی درک کند.
- مفهوم تجزیه را بداند.
- در صورت امکان با استفاده از ب.م.م چند جمله‌ای را تجزیه کند و به تجزیه سه جمله‌ای‌ها به کمک اتحاد مربع دوجمله‌ای مسلط شود.

## روش تدریس

هدف فعالیت صفحه ۷۹ ارائه مفهوم یک جمله‌ای است، با انجام این فعالیت دانش آموزان باید بتوانند یک جمله‌ای‌ها را تشخیص دهند. سپس ضریب عددی و عبارت حرفی آنها را مشخص کنند.  $2\sqrt{x}$  و  $\sqrt[3]{y}$  یک جمله‌ای نیستند زیرا از حاصل ضرب متغیرها با توان‌های صحیح و منفی در اعداد به دست نیامده‌اند.

$\frac{1}{x}$  و  $|x|$  یک جمله‌ای نیستند، زیرا به طور صریح از حاصل ضرب اعداد در متغیرها با توان‌های صحیح و نامنفی به دست نیامده‌اند.

$2x^2 + 2x$  و  $1+x$  یک جمله‌ای نیستند، زیرا در آنها از عمل جمع استفاده کردیم، در حالی که در یک جمله‌ای‌ها فقط از عمل ضرب (با توجه به تعریف) استفاده می‌کنیم.

$3^x$  یک جمله‌ای نیست، زیرا از ضرب اعداد در متغیرها (با توجه به تعریف) به دست نمی‌آید. در ادامه این فعالیت می‌خواهیم، عملیات روی یک جمله‌ای‌ها را یادآوری و تکمیل کنیم. در قسمت ۲ فعالیت صفحه ۸۰، درجه یک جمله‌ای را نسبت به یک یا دو متغیر با استفاده از تکمیل جدول آموزش می‌دهیم، سپس چند جمله‌ای و درجه چند جمله‌ای را نسبت به یک یا چند متغیر آورده‌ایم. در قسمت ۳ فعالیت، از دانش‌آموزان می‌خواهیم که چند جمله‌ای‌ها را نسبت به توان‌های

نزولی متغیر مرتب کنند و نتیجه این فعالیت آن است که «دو چندجمله‌ای وقتی با هم برابرند که صورت استاندارد آنها (یعنی برحسب توان‌های نزولی متغیر) با هم یکسان باشند».

در کار در کلاس صفحه ۸۰ و ۸۱ می‌خواهیم عملیات روی چندجمله‌ای‌ها را با توجه به خاصیت توزیع پذیری یادآوری و تکمیل کنیم، سپس دانش‌آموزان چندجمله‌ای‌ها را ساده کنند. نتیجه این کار در کلاس این است که «چندجمله‌ای‌ها فقط از جمع جبری یک جمله‌ای‌ها پدید نمی‌آیند، بلکه در بعضی مواقع از حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها در یکدیگر نیز حاصل می‌شوند».

هدف از فعالیت صفحه ۸۱ ارائه مفهوم اتحاد است. با کامل کردن جدول ملاحظه می‌کنیم که مقادیر عددی دو ستون آخر با هم یکسان می‌شوند، سپس حاصل  $(x+3)^2$  را با روش جبری به دست آورده و نتیجه می‌گیریم که حاصل آن  $x^2+6x+9$  است و به همین دلیل؛ دو ستون آخر جدول مقادیر عددی یکسانی دارند. در قسمت ۲ و ۳ این فعالیت می‌خواهیم دانش‌آموزان با ضرب پرانتزها، اتحاد مربع دوجمله‌ای را درک کنند، سپس با مقایسه دو طرف برابری اتحاد بتوانند با یک عبارت کلامی، این اتحاد را بیان کنند. سپس درستی این اتحاد را با روش هندسی درک کنند. در حقیقت در بیان اتحادها از دیدگاه جبری، دیدگاه هندسی و بیان اتحاد به صورت کلامی استفاده شده است.

در قسمت ۴ این فعالیت می‌خواهیم حاصل مربع تفاضل دو جمله یعنی  $(a-b)^2$  را پیدا کنیم و آن را با حاصل مربع مجموع دو جمله یعنی  $(a+b)^2$  مقایسه کنیم و در نهایت آنها را با عبارت‌های کلامی مشابه هم بیان کنیم.

قسمت ۱ کار در کلاس صفحه ۸۳ می‌خواهد که با عبارت‌های کلامی به دست آمده برای اتحاد مربع دوجمله‌ای، حاصل عبارات داده شده را به دست آورید.

در قسمت ۲ این کار در کلاس می‌خواهیم که با درک عبارت کلامی متناظر با اتحاد مربع دوجمله‌ای جاهای خالی را پر کنند و این قسمت پیش‌زمینه ورود به تجزیه سه جمله‌ای‌هایی است که با این اتحاد تجزیه می‌شوند.

فعالیت صفحه ۸۳ ورود به تجزیه چندجمله‌ای‌ها است، در ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر خاصیت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع را به صورت زیر بنویسیم. در این صورت دوجمله‌ای  $ab+ac$  را تجزیه کرده‌ایم:

$$ab+ac=a(b+c)$$

در اینجا  $a$  را (ب.م.م) جملات چندجمله‌ای معرفی کرده و به این روش در صورت وجود (ب.م.م) بین جملات می‌توان چندجمله‌ای را تجزیه کرد.

هدف از کار در کلاس صفحه ۸۴ این است که سه جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای تجزیه کنیم. ابتدا باید تشخیص دهیم، کدام سه جمله‌ای‌ها به کمک این اتحاد با ضرایب گویا تجزیه می‌شوند. با توجه به سه جمله‌ای  $a^2 + 2ab + b^2$  در سه جمله‌ای‌هایی که دو جمله مربع کامل داشته باشند؛ اولی و دومی را تشخیص می‌دهیم. سپس اگر جمله دیگر، دو برابر حاصل ضرب اولی و دومی باشد، به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای آن را تجزیه می‌کنیم.

یادآوری می‌کنیم که اگر بین جملات (ب.م.م) موجود بود، ابتدا به کمک (ب.م.م) گیری تجزیه می‌کنیم. سپس از اتحاد مربع دو جمله‌ای برای ادامه تجزیه استفاده می‌کنیم، مانند:

$$\begin{aligned}
 & 18ab - 3a^2b - 27b^2 = 3b(6a - a^2 - 9) \\
 & \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \end{array} \\
 & (ب.م.م) = 3b \quad \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \quad = -3b(a^2 - 6a + 9) \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad = -3b(a-3)^2 = -3b(a-3)(a-3)
 \end{aligned}$$

### تمرین صفحه ۸۵

۲- چون دوزنقه FCDE متساوی الساقین است، پس  $\hat{E} = \hat{D}$ .

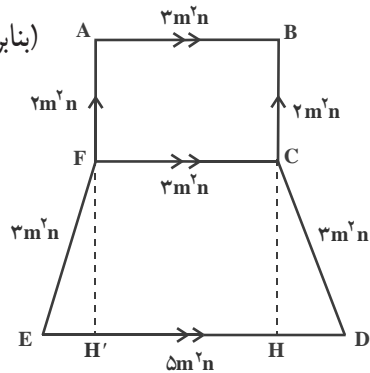
$$\begin{cases} \hat{E} = \hat{D} \\ FE = CD \end{cases} \Rightarrow \triangle CHD \cong \triangle FH'B \quad (\text{بنابر وتر و یک زاویه})$$

$$\Rightarrow HD = EH' = m'n$$

$$\triangle CHD : CD^2 = CH^2 + HD^2$$

$$\Rightarrow (3m'n)^2 = CH^2 + (m'n)^2$$

$$\Rightarrow CH = 2\sqrt{2}m'n$$



مساحت دوزنقه + مساحت مستطیل = S (مساحت شکل)

$$= 3m'n \times 2m'n + \frac{(3m'n + 5m'n) \times 2\sqrt{2}m'n}{2} = (6 + 8\sqrt{2})m^2n^2$$



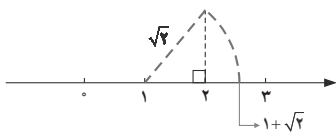
۶- هدف تمرین این است که بگوییم حاصل  $(a-b)^2$  را می توان با استفاده از اتحاد مربع مجموع دو جمله، مستقیماً محاسبه کرد.

$$(a+(-b))^2 = a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

## اشتباهات رایج

یکی از سؤال های متداول دانش آموزان در بحث عبارت های جبری، شمردن تعداد جمله های یک چندجمله ای است، آنها می گویند برای مثال  $5x^2 + 7x$  دو جمله ای است. از طرفی ° یک جمله ای محسوب می شود، اکنون آیا  $5x^2 + 7x + 0$  سه جمله ای است؟ در پاسخ به سؤال بالا می توان گفت: برای شمردن تعداد جمله های چندجمله ای، ابتدا باید آن را ساده کرد. برای این منظور جمله های متشابه را با یکدیگر جمع جبری می کنیم. سپس تعداد جمله های چندجمله ای ساده شده را می شماریم. می دانیم ساده شده عبارت  $5x^2 + 7x + 0$  دو جمله ای  $5x^2 + 7x$  است. پس اضافه کردن جمله صفر، در تعداد جمله ها تأثیری ندارد.



توجه داشته باشید که عبارت  $5x^2 + 7x + 1 + \sqrt{2}$  سه جمله ای محسوب می شود. زیرا  $1 + \sqrt{2}$  یک عدد حقیقی است و روی محور اعداد حقیقی یک نقطه منحصر به فرد است.

البته به طور دقیق تر می توان تعریف تعداد جمله های چندجمله ای را به صورت زیر آورد تا این گونه بدفهمی ها ایجاد نشود.

اگر در یک چندجمله ای ناصفر،  $k$  جمله غیرمتشابه ناصفر وجود داشته باشد، آن را یک  $-k$  جمله ای می نامند. با این تعریف، یک جمله ای های ناصفر، مجدداً یک جمله ای هستند، اما این تعریف، برای صفر، تعداد جمله، تعریف نمی کند. اما قبلاً، بنا به تعریف، صفر را یک جمله ای محسوب کرده ایم. اشکالی که این مطلب، پیش آورده، این است که اگر مثلاً دو یک جمله ای غیرمتشابه را جمع کنیم باید یک دو جمله ای به دست آوریم، در حالی که  $x + x = 2x$ . این پارادکس نشان می دهد که در جایی اشتباه کرده ایم و این اشتباه در همین فکر ساده است که «اگر دو یک جمله ای غیرمتشابه را جمع کنیم یک دو جمله ای به دست می آید». حرف درست آن است که «اگر دو یک جمله ای غیرمتشابه ناصفر را جمع کنیم یک دو جمله ای ساخته می شود». بنابراین، در اینجا نیز باید صفر را کنار بگذاریم و مطلب مورد نظر را برای چندجمله ای های ناصفر بیان کنیم.

## اهداف

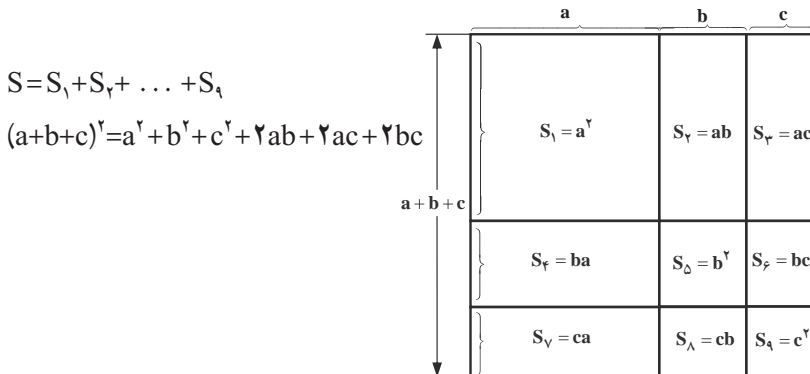
- اتحاد مربع سه جمله‌ای را به صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.
- اتحاد مزدوج را به صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.
- اتحاد یک جمله مشترک را به صورت عبارت کلامی بیان کند و مفهوم درستی آن را با روش جبری و هندسی درک کند.
- چند جمله‌ای‌ها را به کمک اتحادهای مزدوج و یک جمله مشترک تجزیه کند.

## روش تدریس

در درس اول اتحاد مربع دو جمله‌ای بررسی شد، در این فعالیت اتحاد مربع سه جمله‌ای با دو روش جبری بیان می‌شود. روش اول همان ضرب پراترها و استفاده از خاصیت پخشی است. در روش دوم از اتحاد مربع دو جمله‌ای استفاده می‌کنیم که در آن  $(a+b)$  را جمله اول و  $c$  را جمله دوم در نظر می‌گیریم. در اینجا از دانش‌آموزان بخواهید که برای این اتحاد یک عبارت کلامی بیان کنند، سپس به کمک عبارت کلامی در مرحله بعد حاصل  $(a+b-c)^2$  را به صورت زیر بیابند.

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2 &= (a+b+(-c))^2 = a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2a(-c) + 2b(-c) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc\end{aligned}$$

برای درک درستی این اتحاد، علاوه بر روش جبری می‌توان از دیدگاه هندسی نیز درستی این اتحاد را درک کرد. برای این منظور مربعی به ضلع  $(a+b+c)$  را در نظر بگیرید، مساحت این مربع برابر با  $(a+b+c)^2$  است که می‌توان این مساحت را به صورت مجموع مساحت‌های چهارضلعی‌های به کار رفته در شکل زیر در نظر گرفت.



در قسمت ۲ این فعالیت، اتحاد مزدوج بیان شده است، ابتدا با روش جبری این اتحاد بیان می‌شود، سپس از دیدگاه هندسی درستی اتحاد را درک کنیم، برای این منظور در سمت راست یک مربع به ضلع  $a$  را ملاحظه می‌کنید که مساحت آن برابر با  $a^2$  است، اگر از این مربع مساحتی به اندازه  $b^2$  (مساحت مربع به ضلع  $b$ ) را جدا کنیم، آن‌گاه مساحت قسمت باقی‌مانده برابر با  $S=(a^2-b^2)$  است. اکنون در قسمت پایین شکل سمت راست یک مستطیل با ابعاد  $b$  و  $(a-b)$  را ملاحظه کنید، چنانچه این مستطیل را از قسمت خط‌چین جدا کنید و به پهلوئی سمت راست شکل باقی‌مانده بچسبانید یک مستطیل به ابعاد  $(a+b)$  و  $(a-b)$  به دست می‌آید که مساحت آن برابر با  $S=(a+b)(a-b)$  است در نتیجه:

$$S=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

توجه: بیان عبارت کلامی متناظر با این اتحاد ضروری است.

صفحه ۸۷، قسمت ۲ کار در کلاس، از دانش‌آموزان می‌خواهیم به کمک اتحاد مزدوج، حاصل ضرب پرانتزها را محاسبه کنند، برای این منظور جمع جبری جملاتی که در هر دو پرانتز علامت یکسانی دارند، به عنوان اولی و بقیه جملات پرانتز اول را دومی در نظر می‌گیریم، برای مثال:

$$(-4y-2z)(2z-4y)=(-4y)^2-(2z)^2=16y^2-4z^2$$

چون  $-4y$  در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی  $-4y$  در نتیجه دومی  $2z$  است.

$$(a-b-c+d)(b-a-c+d)=[(-c+d)+(a-b)][(-c+d)-(a-d)]$$

$$=(-c+d)^2-(a-d)^2$$

چون  $(-c+d)$  در هر دو پرانتز یکسان است، پس اولی  $(-c+d)$ ، در نتیجه دومی  $(a-b)$ .

در فعالیت صفحه ۸۷ می‌خواهیم عبارت‌های جبری را که به صورت تفاضل دو مربع کامل هستند، به کمک اتحاد مزدوج تجزیه کنیم. برای این منظور اولی  $A$  و دومی  $B$  در نظر گرفته‌ایم. عبارت کلامی زیر می‌تواند در تجزیه کردن مفید واقع شود.

$$(دومی - اولی) (دومی + اولی) = مربع دومی - مربع اولی$$

در قسمت ۶ این فعالیت، متذکر شوید که تجزیه را تا جایی که همه جملات قابل تجزیه شدن

باشند، ادامه می‌دهیم.

$$x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (y^2)^2 = \underbrace{(x^2 - y^2)}_{\downarrow} (x^2 + y^2) \\ = \underbrace{(x - y)(x + y)}_{\downarrow} (x^2 + y^2)$$

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۸۸؛ با چند تمرین، کاربرد اتحادها را در ساده‌شدن محاسبات عددی ملاحظه می‌کنید.

$$497 \times 503 = (500 - 3)(500 + 3) = 500^2 - 3^2 = 259991$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = (1000)^2 + 2(1000) \times 1 + 1^2 = 1002001$$

در فعالیت صفحه ۸۸، اتحاد یک جمله مشترک بیان شده است. توجه کنید که دیدگاه هندسی برای درک بهتر این اتحاد در تمرین ۵ صفحه ۸۹ آمده است.

در قسمت ۲ این فعالیت، می‌خواهیم تجزیه سه جمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک انجام دهیم. برای این منظور معمولاً در سه جمله‌ای یک جمله مربع کامل داریم که از آنجا، جمله مشترک را پیدا می‌کنیم. برای مثال برای تجزیه سه جمله‌ای  $x^2 + 7x + 10$ ؛ چون مربع کامل است، پس جمله مشترک  $x$  = حال دو عدد صحیح پیدا می‌کنیم که حاصل ضربشان  $10$  + و حاصل جمعشان  $7$  باشد. چون علامت  $10$  مثبت است. پس هر دو عدد هم علامت هستند، در نتیجه جدول زیر را برای دو عدد خواهیم داشت که فقط در یک حالت حاصل جمعشان برابر با  $7$  + است.

$$xy = 10 \Rightarrow$$

	x	y	x+y	نتیجه
	+۲	+۵	+۷	✓
	-۲	-۵	-۷	×
	+۱	+۱۰	+۱۱	×
	-۱	-۱۰	-۱۱	×

در نتیجه داریم:

$$x^2 + 7x + 10 = (x+2)(x+5)$$

$$\text{مثال دیگر: } y^2 - y - 6 = (y+2)(y-3)$$

مربع کامل

$$xy = -6 < 0$$

	x	y	x+y	نتیجه
	-۲	+۳	+۱	×
	+۲	-۳	-۱	✓
	+۱	-۶	-۵	×
	-۱	+۶	+۵	×

توجه: بعد از حل چند تمرین، از دانش آموزان بخواهید، جدول را ذهنی تصور کنند و جواب را بگویند.

### تمرین صفحه ۸۹

۴- هدف تمرین این است که با استفاده از اتحاد یک جمله مشترک می توان درستی اتحاد مربع دو جمله ای را به دست آورد. در حقیقت اتحاد مربع دو جمله ای حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab \quad (۱)$$

$$a=b \stackrel{(۱)}{\Rightarrow} (x+a)(x+a) = x^2 + (a+a)x + a \times a$$

$$\Rightarrow (x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

همچنین اگر  $a$  و  $b$  قرینه باشند، یعنی  $b = -a$  در این صورت اتحاد مزدوج به دست می آید، یعنی اتحاد مزدوج نیز حالت خاصی از اتحاد یک جمله مشترک است.

$$b = -a \Rightarrow (x+a)(x-a) = x^2 + (a+(-a))x + a \times (-a)$$

$$\Rightarrow (x+a)(x-a) = x^2 - a^2$$

## اهداف

- تعریف نابرابری را بداند و بتواند در حل مسائل از تعریف استفاده کند.
- در یک نابرابری مانند  $\frac{a^2b}{c} > 0$  علامت متغیرهای  $a$ ،  $b$  و  $c$  را تعیین کند.
- خواص نابرابری‌ها را درک کند.
- با استفاده از خواص نابرابری‌ها، نامعادله درجه اول یک مجهولی را حل کند و مجموعه جواب آن را به دست آورد.

## روش تدریس

هدف از فعالیت صفحه ۹۰ ارائه مفهوم و تعریف نابرابری است. دانش‌آموزان قبلاً با مفهوم برابری با علامت «=» و نابرابری با علامت « $\neq$ » آشنا شده‌اند.

در حالتی که نابرابری بین دو عدد رخ می‌دهد در این صورت یکی از عددها از دیگری بزرگ‌تر است، مانند  $3 \neq 2$  و در اینجا ۳ بزرگ‌تر از ۲ است و می‌نویسیم  $3 > 2$ ، اکنون می‌خواهیم مفهوم  $3 > 2$  را بیان کنیم. برای این منظور از مفهوم برابری استفاده می‌کنیم.  $3 > 2$ ، یعنی اینکه مقدار مثبتی وجود دارد که اگر آن را به کوچک‌تر یعنی ۲ اضافه کنیم، حاصل برابر با ۳ می‌شود و آن مقدار مثبت، عدد ۱ است. در فعالیت، کفه‌های ترازو در حقیقت بیان‌کننده مفهوم بالا است، کفه وزنه سنگین‌تر پایین‌تر است، پس :

$$a \not\geq b, a \geq b, b \leq a$$

همان‌طور که قبلاً گفته شد، تعریف نابرابری یک رابطه دوطرفه است که در این فعالیت خواسته شده برای رابطه‌های برابری زیر یک نابرابری بین متغیرها بنویسند.

الف) وقتی  $x = y + 4$ ، یعنی به  $y$ ، ۴ واحد که اضافه شود، حاصل آن برابر  $x$  می‌شود، پس  $x$  از  $y$  بزرگ‌تر است.

ب)  $m + 1 = n + 3$ ، می‌توان نوشت  $m = n + 2$  و از اینجا واضح است که  $m > n$ .

ج)  $a - 2 = b + 3$ ، یعنی  $a = b + 5$  و در نتیجه  $a > b$ .

د)  $2m = 3n$ ، یعنی اگر  $m$  دو برابر شود و  $n$  را سه برابر کنیم، حاصل آنها با هم برابر می‌شود.

از آنجا که  $m$ ،  $n$  هر دو مثبت هستند و  $m$  در عدد کوچک‌تری ضرب می‌شود، پس  $m > n$ .

یا به‌طور ساده از  $2m = 3n$  می‌توان نتیجه گرفت  $m = \frac{3}{2}n$ ، یعنی اگر  $n$  در کسری بزرگ‌تر از

واحد ضرب شود حاصل آن با  $m$  برابر می‌شود، پس  $m$  از  $n$  بزرگ‌تر است.

در قسمت ۲ کار در کلاس صفحه ۹۱ می‌خواهیم با استفاده از نابرابری‌های داده شده نوعی استدلال کنیم و به کمک آن علامت متغیرها را پیدا کنیم.

الف) نادرست است. برای مثال  $5 > -3$  و این درحالی است که  $3 \not> 0$ .

ب) درست است، زیرا اگر حاصل ضرب دو عدد مثبت باشد، آن‌گاه هر دو مثبت یا هر دو منفی است یعنی  $a, b$  هم علامت هستند.

ج) اگر  $\frac{ab}{c} < 0$  در این صورت دو حالت زیر را داریم.

حالت اول: صورت منفی و مخرج مثبت است. یعنی:

$$\begin{cases} ab < 0 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, b < 0 \\ \text{یا} \\ a < 0, b > 0 \end{cases}$$

حالت دوم: صورت مثبت و مخرج منفی است، یعنی:

$$\begin{cases} ab > 0 \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0, b > 0 \\ \text{یا} \\ a < 0, b < 0 \end{cases}$$

در نتیجه ۴ حالت مختلف پاسخ علامت‌های  $a, b, c$  است. بنابراین قطعاً نمی‌توان گفت که هر سه عدد منفی هستند، پس قسمت ج نادرست است.

ج) درست است، چون همواره  $a^2$  نامنفی است، پس برای اینکه  $a^2 b < 0$  باید  $b$  منفی باشد.

پاسخ قسمت ۳ کار در کلاس صفحه ۹۱:

$$\bullet \quad 3x - 1 > 7$$

$$\bullet \quad 8 > -2x + 3$$

هدف از فعالیت صفحه ۹۱، ارائه خواص نابرابری‌ها است. در اینجا می‌خواهیم دانش‌آموز با استدلال استقرایی خواص نابرابری‌ها را کشف کند.

خاصیت‌ها را می‌توان با تعریف نابرابری به صورت زیر اثبات کرد.

اثبات خاصیت ۱:

$$a > b \Rightarrow \exists p > 0 : a = b + p \Rightarrow a + c = (b + c) + p$$

$$\Rightarrow a + c > b + c$$

### اثبات خاصیت ۲ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > 0 : a = b + p \xrightarrow{c > 0} ac = bc + pc \\ \xrightarrow{pc > 0} ac > bc$$

### اثبات خاصیت ۳ :

$$a > b \Rightarrow \exists p > 0 : a = b + p \xrightarrow{c < 0} ac = bc + pc \\ \xrightarrow{pc < 0} ac + (-pc) = bc \xrightarrow{-pc > 0} bc > ac$$

در قسمت ۳ این فعالیت، می‌خواهیم مفهوم مجموعه جواب نامعادله درک شود، سپس در ادامه به کمک خواص نابرابری بتواند نامعادله یک مجهولی در جداول را حل کند و مجموعه جواب آن را به دست آورد.

### تمرین صفحه ۹۳ :

$$a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 \Rightarrow a > b \quad \text{(الف)}$$

$$u - v = -2 \Rightarrow u + 2 = v \Rightarrow v > u \quad \text{(ب)}$$

$$2p - 2 = 2q - 3 \Rightarrow 2p + 1 = 2q \Rightarrow p + \frac{1}{2} = q \Rightarrow q > p \quad \text{(ج)}$$

$$\frac{a - b}{2} = -3 \Rightarrow a - b = -6 \Rightarrow a + 6 = b \Rightarrow b > a \quad \text{(د)}$$

۲- الف) چون  $b^2$  همواره نامنفی است، پس صورت کسر باید منفی باشد؛ یعنی :

$$ac < 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, c < 0 \\ \text{یا} \\ a < 0, c > 0 \end{cases}$$

البته  $b$  می‌تواند مثبت یا منفی باشد، یعنی  $b > 0$  یا  $b < 0$ .

$$\frac{a}{bc} > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0, bc < 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0, c < 0 \\ \text{یا} \\ b < 0, c > 0 \end{cases} \\ a < 0, bc > 0 \Rightarrow \begin{cases} b > 0, c > 0 \\ \text{یا} \\ b < 0, c < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{(ب)}$$



$$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) > 0 \quad \text{۴- نادرست است، زیرا:}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a+b > 0, a-b > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > b \\ \text{و} \\ a > -b \end{cases} \\ \text{یا} \\ a+b < 0, a-b < 0 \Rightarrow \begin{cases} a < b \\ a < -b \end{cases} \end{array} \right.$$

مثال نقض:  $2^2 < (-3)^2$  و این درحالی است که  $2 \not> -3$ .

۵- از آنجا که  $a, b > 0$ ، پس  $a+b > 0$  و داریم:

$$a^2 > b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) > 0$$

$$\xrightarrow{(a+b) > 0} (a-b) > 0 \Rightarrow a > b$$

۶- الف) فرض کنید پول علی برابر با  $x$  باشد، پس  $3x \geq 2x + 300$ .

$$\text{ب) } \frac{1}{3}a + 4b \leq 6$$

۷- دو نفر روی هم در هر روز نیاز به  $450 = 3 \times (65 + 85)$  کیلوکالری انرژی دارند. فرض کنیم

آنها  $x$  روز می‌توانند با این مواد غذایی در جنگل دوام آورند، پس داریم:

$$450 \cdot x \leq 4500 \Rightarrow x \leq 10$$

در نتیجه آنها حداکثر ۱۰ روز می‌توانند در جنگل با این مواد غذایی دوام بیاورند.