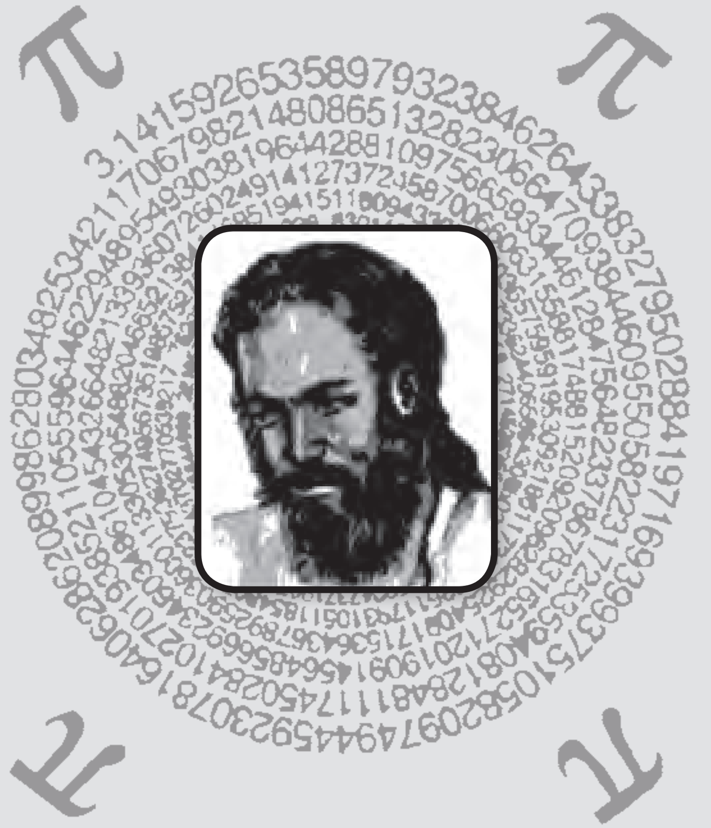
عددهای حقیقی

«... وَ اَحاطَ بِما لَدَیْهِمْ وَ اَحْصیٰ کُلَّ شَیْءٍ عَدَدًا»

«... و او (خداوند) به آنچه نزد آنهاست احاطه دارد و همه‌چیز را به عدد شمارش کرده است.» (سورهٔ جن، آیهٔ ۲۸)



غیاث‌الدین جمشید کاشانی زبردست‌ترین حسابدان، برجسته‌ترین ریاضی‌دان دورهٔ اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران به‌شمار می‌رود. کاشانی به روشی کاملاً خلاقانه و از طریق محاسبه و مقایسه محیط چندضلعی‌های محاطی و محیطی توانست عدد π که عددی **حقیقی** و **گنگ** است را تا ۱۶ رقم بعد از اعشار محاسبه کند که تا حدود ۱۵۰ سال پس از وی کسی در جهان نتوانست با دقت بهتری آن را محاسبه کند. او در ابتدای رسالهٔ محیطیه خود به زبانِ ریاضی به نام خدا را چنین بیان می‌کند:

«به نام او که از اندازهٔ نسبتِ محیط دایره به قطرش آگاه است.»

نگاه کلی به فصل

در این فصل دانش‌آموزان با اعداد گنگ، اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی، نام مجموعه‌های اعداد حقیقی و گنگ و مفهوم قدر مطلق آشنا می‌شوند. لازم به ذکر است که در سال گذشته با اعدادی مانند $\sqrt{1}$ و $\sqrt{10}$ آشنا شده‌اند ولی مجموعه‌ای که این اعداد در آن قرار دارند را نام‌گذاری نکرده‌اند. در این فصل با نام این مجموعه که به صورت Q' یا Q^C می‌باشد و نام مجموعه اعداد حقیقی که به صورت $\mathbb{R}$ می‌باشد آشنا می‌شوند.

با یادآوری مجموعهٔ اعداد طبیعی، اعداد صحیح و اعداد گویا پلی برای رسیدن به اعداد گنگ (اصم) و در نهایت مجموعه اعداد حقیقی ایجاد می‌شود و این پل توسط فعالیت‌های صفحه ۱۹ و ۲۱ ساخته شده است. در فعالیت صفحه ۲۱ نمایش اعشاری و تقریب اعشاری اعداد گویا مطرح می‌شود که پل ارتباطی برای رسیدن به اعداد حقیقی است و در فعالیت صفحه ۲۴، عددهای گنگ یا اصم معرفی می‌شوند و در فعالیت بعدی نشان داده می‌شود که با وجود اینکه بین هر دو عدد گویا می‌توان بی‌شمار عدد گویای دیگر به‌دست آورد ولی عددهایی نیز بین هر دو عدد گویا وجود دارند که گویا نیستند پس تمام اعداد گویا را نمی‌توان به صورت یک خط بر روی محور نشان داد.

در واقع هدف اصلی که در این فصل دنبال می‌شود آن است که دانش آموزان به این مفهوم پی‌ببرند که مجموعه اعداد طبیعی و مجموعه اعداد صحیح را توانستیم به ترتیب به‌صورت $\{1,2,3,...\}$ و $\{0,\pm 1,\pm 2,...\}$ یعنی به صورت اعضا نمایش دهیم.

ولی با توجه به اینکه بین هر دو عدد گویا، عدد گویای دیگری وجود دارد نمی‌توانیم مجموعه Q را به صورت اعضا نشان دهیم پس به صورت $Q=\left\{\frac{a}{b}\middle| a,b,\in z, b\neq 0\right\}$ نشان می‌دهیم. مجموعه اعداد حقیقی را نمی‌توانیم به صورت نمادین یا بیان ریاضی نشان دهیم پس ناچاریم آن را روی محور و به صورت یک خط نمایش دهیم و از طرفی زیر مجموعه‌های $\mathbb{R}$ معمولاً به صورت پاره خط یا نیم‌خطی روی محور خواهند بود.

در این فصل محاسبات اعداد گویا کامل می‌شود و دانش‌آموزان با تقریب اعشاری و نمایش اعشاری اعداد گویا آشنا می‌شوند و از آن برای مرتب کردن اعداد گویا استفاده خواهند کرد.

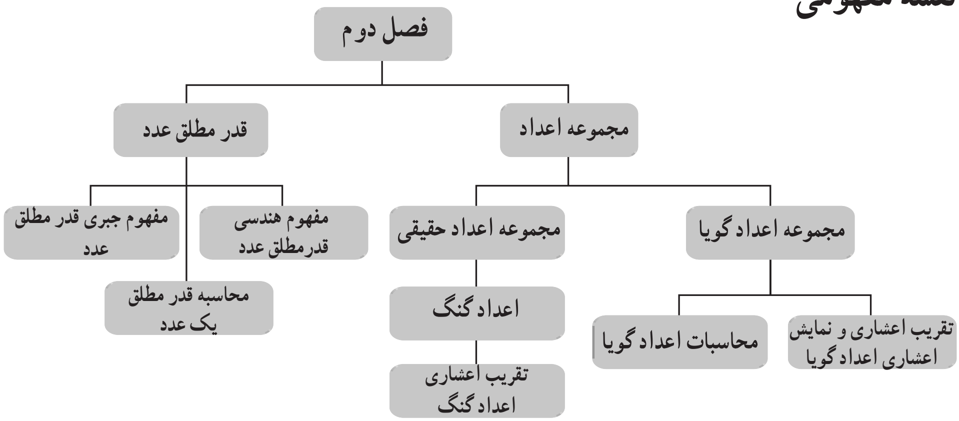
آشنایی با مفهوم هندسی قدر مطلق و تعریف جبری آن از اهداف دیگر این فصل می‌باشد. همان‌طور که می‌دانید معرفی این نماد به ما کمک می‌کند تا بتوانیم بعضی از مفاهیم را به درستی انتقال دهیم.

برای مثال برای اینکه برای دانش‌آموزان توضیح دهیم چرا علامت حاصل $-4+2=-2$ منفی

می‌شود خواهیم گفت: عدد ۲ را از ۴ کم می‌کنیم و علامت عددی که قدر مطلق آن بزرگ‌تر است را می‌گذاریم.

در کل در این فصل مانند فصول دیگر سعی می‌شود که دانش‌آموزان بتوانند عبارات فارسی را به زبان ریاضی و برعکس بنویسند و بیان کنند.

نقشه مفهومی

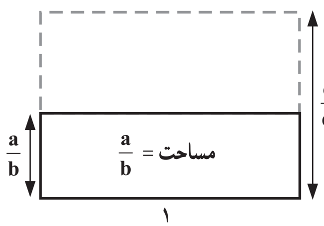


تصویر عنوانی

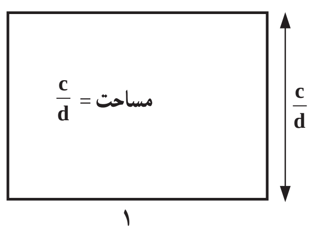
عدد π یک عدد حقیقی است که در محاسبه محیط و مساحت دایره به‌کار می‌رود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی تا ۱۶ رقم بعد از اعشار عدد π را به‌دست آورد. تاکنون تا بیش از یک میلیون رقم بعد از اعشار عدد π به کمک نرم‌افزارهای کامپیوتری به‌دست آمده است. البته برای محاسبات روزمره و محاسبه محیط و مساحت دایره تا دو رقم بعد از اعشار عدد π کافی است.

دانستنی‌هایی برای معلم

۱ــ اگر d,c,b,a اعداد حقیقی مثبت باشد و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ باشد $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ قرار دارد.

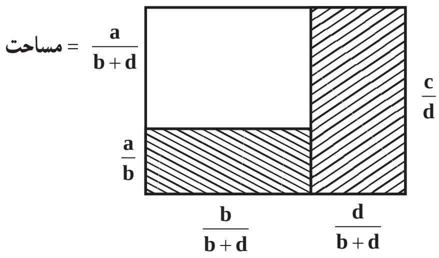


شکل (۱)



شکل (۲)

اکنون طول مستطیل شمارهٔ (۱) را به دو قسمت $\frac{b}{b+d}$ و $\frac{d}{b+d}$ تقسیم می‌کنیم (توجه کنید که $۱=\frac{d}{b+d}+\frac{b}{b+d}$) در نتیجه به شکل زیر خواهیم رسید.



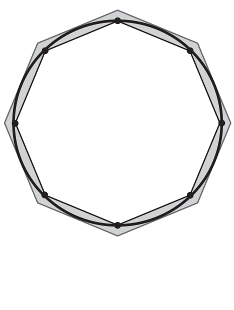
می‌دانیم مساحت شکل (۳) از مساحت شکل (۱) بیشتر و از مساحت شکل ۲ کمتر است.

درنتیجه می‌توان نوشت $\frac{c}{d}>\frac{c}{b+d}+\frac{a}{b+d}>\frac{a}{b}$ پس $\frac{c}{d}>\frac{a+c}{b+d}>\frac{a}{b}$

۲ـ عدد پی (π) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. π یکی از حروف یونانی است. اولین محاسبه عدد π توسط ارشمیدس و با کمک چندضلعی‌ها انجام شد او با ۹۶ ضلعی منتظم عدد π را بین دو کسر $۳\frac{۱۰}{۷۰}$ و $۳\frac{۱۰}{۷۱}$ به‌دست آورد.لودلف وان‌کولن آلمانی در قرن هفدهم به کمک ۳۲۲۱۲۲۵۴۷۲۰ ضلعی منتظم مقدار π را تا ۳۲ رقم بعد از اعشار محاسبه کرد. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در کتاب رساله محیطیه π را تا ۱۶ رقم پس از اعشار حساب کرده است.

ساده‌ترین راه حل محاسبه π از تقسیم محیط دایره به قطر دایره محاسبه می‌شود یعنی $\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$ شما می‌توانید به کمک دایره به شعاع واحد و رسم ۸ ضلعی منتظم محاطی و محیطی دایره مقدار عددی π را تقریب بزنید.

$۳<\pi<۳/۴۶۴۱$



اگر به جای ۸ ضلعی منتظم از ۱۲ ضلعی منتظم محیطی و محاطی استفاده کنیم. ۳/۱۰۵۸< π <۳/۲۱۵
به جدول زیر توجه کنید.

شعاع دایره‌ها R=۱ می‌باشد.

محیط n ضلعی منتظم محیطی	محیط n ضعلی منتظم محاطی	n
۳/۴۶۴۱	۳	۶
۳/۲۱۵۴	۳/۱۰۵۸	۱۲
۳/۱۵۹۶	۳/۱۳۲۶	۲۴
۳/۱۴۶۰	۳/۱۳۹۳	۴۸
۳/۱۴۱۶	۳/۱۴۱۴	۹۶

از کسرهای زیر نیز می‌توان مقدار تقریبی عدد π را محاسبه کرد.

$$\pi = ۳ + \frac{۸}{۶۰} + \frac{۲۹}{۶۰^{۳}} + \frac{۴۹}{۶۰^{۲}} = ۳/۱۴۱۶۱۵۶$$

$$\frac{\pi}{۲} = \frac{۲\times۲\times۴\times۴\times۶\times۶\times\cdots}{۱\times۱\times۳\times۳\times۵\times۵\times\cdots}$$

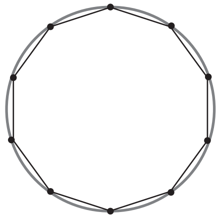
$$\frac{\pi}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \cdots$$

روز ۱۴ مارس روز جهانی عدد π نام‌گذاری شده است زیرا مارس سومین ماه میلادی است.

سرچشمه عددهای حقیقی

از میان همهٔ دانش ریاضی که به فیثاغورث نسبت داده می‌شود، مهم‌ترین آن این است که از قضیه فیثاغورث چنین برمی‌آید که همه مقادیر را نمی‌توان با عدد صحیح بیان کرد. طول قطر مربع و مستطیل، ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع، اضلاع مثلث قائم الزاویه نمونه‌هایی هستند که در اکثر مواقع عددی غیر صحیح خواهند بود. مثلاً اگر مربعی به ضلع ۲ در نظر بگیریم طول قطر آن $\sqrt{۸}$ خواهد شد. اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱/۵}$ و... را عدد گنگ (اصم) می‌نامیم و مجموعه اعداد حقیقی از اجتماع اعداد اصم و اعداد گویا به‌دست می‌آید یعنی $\mathbb{R}=Q\cup Q'$

مسیرهایی برای توسعه



۱ــ از دانش‌آموزان بخواهید روش‌هایی برای محاسبه عدد π به‌دست آورند. مثلاً آنها می‌توانند یک دایره رسم کنند و توسط سوزن ته‌گرد داخل آن یک چند ضلعی محاط کنند در واقع نخ‌ها را دور سوزن‌ها بچرخانند. سپس به کمک محیط چند ضلعی که به راحتی قابل اندازه‌گیری است و تقسیم این محیط بر قطر دایره مقداری تقریبی برای عدد π به‌دست آورند. $\pi = \frac{۲\pi R}{۲R}$ بدیهی است که هر چه تعداد ضلع‌های چند ضلعی بیشتر باشد محیط چند ضلعی به محیط دایره نزدیک خواهد بود و تقریب بهتری از π به دست خواهد آمد.

۲ــ اگر $a,b,c,d>۰$ و $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ باشد نشان دهند که $\frac{c}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$ می‌باشد. از دانش‌آموزان بخواهید اثباتی برای این نامساوی ارائه دهند.

۳ــ از دانش‌آموزان بپرسید چرا ۱۴ مارس را روز جهانی عدد π نامیده‌اند؟

استفاده از ابزار فناورانه

۱ــ دانش‌آموزان می‌توانند از ماشین حساب برای نمایش اعشاری اعداد گویا و تقریب اعشاری جذر عددها استفاده کنند.

۲ــ شما می‌توانید از سایت www.teamboard.com با توجه به مسیر www.teamboard.com /software /Team board–draw 60 نرم‌افزار Teamboard (را با توجه به windows set up کامپیوترتان) را نصب کنید و از آن در کلاس استفاده نمایید.

معرفی منابع برای معلمان

- بحث ریاضی با دانش‌آموز، مؤلف سرژلانگ، مترجم نعمت عبادیان، انتشارات مدرسه، صفحه ۷ تا ۳۶.
- اثبات بدون کلام، تألیف راجرب. نلسِن، مترجم سپیده چمن‌آوا، انتشارات مدرسه، صفحه ۵۲.
- عدد، نوشته آیزاک آسیموف، ترجمه ایرج جهانشاهی، انتشارات فاطمی.
- کسرهای مسلسل، نوشته کارل د. اولدز، ترجمه محمد جلوداری ممقانی، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.

- دانستنی‌های اعداد بزرگ، نوشته فیلیپ ج.دیویس، ترجمه علی عمیدی، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.
- اعداد : گویا و گنگ، نوشته ایوان نیون، ترجمه غلامحسین اخلاقی‌نیا، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.
- نا مساوی‌ها، نوشته پاول پترویچ کارولین، ترجمه پرویز شهریاری، انتشارات خوارزمی.
- گزیده‌هایی از نظریه اعداد، نوشته لویستن اور، ترجمه منوچهر وصال، انتشارات نشر دانشگاهی تهران.
- سیری در عددهای طبیعی، تألیف جلیل الله قراگزلو، انتشارات فاطمی.

نمونه سؤال‌های ارزشیابی

۱ــ نمایش اعشاری اعداد $\frac{7}{10}$ و $\frac{7}{22}$ و $-\frac{10}{9}$ را به دست آورید.

۲ــ چه تفاوتی بین نمایش اعشاری عدد $\frac{7}{22}$ و تقریب اعشاری $\sqrt{3}$ وجود دارد؟

۳ــ سه کسر بین $\frac{13}{12}$ و $\frac{15}{14}$ به‌دست آورید.

۴ــ ۵ عدد گنگ بین ۲ و ۳ به‌دست آورید.

۵ــ با چند مثال نشان دهید که اگر $0<a<1$ باشد $a^0>a^2>a^3>a^4>\ldots$ و اگر $a>1$ باشد $a<a^2<a^3\ldots$

۶ــ کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$2\frac{1}{5}$ و $\frac{8}{11}$ و $-\frac{4}{9}$ و ۲ و $-\frac{3}{5}$ و $\frac{7}{9}$

۷ــ اگر $a=-\frac{1}{2}$ و $b=-\frac{3}{4}$ و $c=-2\frac{1}{8}$ باشد حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱) $|2a-b+c|$ ۲) $|a+b|-|b-c|+|a+c|$

۸ ــ حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید.

۱) $\left|2-\sqrt{7}\right|$ ۲) $\left|-6-\sqrt{3}\right|$ ۳) $\left|\sqrt{3}-3\sqrt{5}\right|$

۹ــ اگر $a<0$ و $b<0$ و $c>0$ باشد حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

۱) $|a+b|+|ac|$ ۲) $|ab|+|ac|$

۱۰ــ عبارات زیر را ساده کنید.

۱) $\sqrt{(-۲۵۹)^{۲}}$ ۲) $\sqrt{۱۸۹^{۲}}$ ۳) $\sqrt{(۱-\sqrt{۵})^{۲}}$ ۴) $\sqrt{(۷-\sqrt{۲})^{۲}}$

۱۱ــ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

۱) $(۲\frac{۱}{۵}+۳\frac{۱}{۲})\div(۱-\frac{۱}{۴})$ ۲) $\dfrac{۱+\frac{۳}{۴}}{۱-\frac{۳}{۴}}\div\dfrac{-۱-\frac{۳}{۴}}{-۱+\frac{۳}{۴}}$ ۳) $\frac{۵}{۶}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}$

۱۲ــ آیا جمع دو عدد گنگ حتماً گنگ است؟

۱۳ــ زیر اعداد گویا خط بکشید؟

$-۰/۵,\ ۰/\overline{۱۲۳}\ ,\ ۰/۴۰۴۰۰۴۰۰۰۴,\ \ldots$

۱۴ــ عدد $۲+\sqrt{۷}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۵ــ عدد $-۴+\sqrt{۲}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۶ــ در $|-۷-۲|\le|-۷|+\square$ چه اعدادی می‌توان در مربع قرار داد تا نامساوی درست باشد. سه عدد مثال بزنید.

۱۷ــ در تساوی $|-۴\times۳|=\square\times\square$ چه اعدادی می‌توان در مربع قرار داد تا تساوی درست باشد؟ سه جفت عدد مثال بزنید.

۱۸ــ بین $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ ، چهار عدد گویا بنویسید.

۱۹ــ حاصل کسر زیر را به‌دست آورید.

$$-۱۰\frac{۷}{۸}+۲۰\frac{۳}{۴}-۱۲۰\frac{۱}{۶}$$

۲۰ــ آیا $-۴\frac{۱}{۵}$ مساوی $-۴+\frac{۱}{۵}$ است؟ چرا؟

۲۱ــ آیا $-۲\frac{۱}{۳}$ مساوی $-۲-\frac{۱}{۳}$ است؟ چرا؟

اهداف

ــ یادآوری و مرور این مطلب که بین دو عدد گویا همیشه می‌توان بی‌شمار عدد گویا به‌دست آورد.

ــ ایجاد پل ارتباطی بین اعداد گویا و اعداد حقیقی و لزوم به وجود آمدن اعداد حقیقی

ــ توجه به دانش‌آموزانی که یادگیری آنها به صورت تصویری است تا آنها نیز بتوانند زیر ساخت شناختی خویش را کامل کنند.

ــ استفاده از نمایش اعشاری اعداد برای مرتب کردن آنها از کوچک به بزرگ یا برعکس

ــ آشنایی با مفهوم عدد اعشاری مختوم و متناوب

ــ توجه دانش‌آموزان به تخمین عدد اعشاری توسط ماشین حساب در ماشین حساب‌های مختلف

ــ کامل کردن محاسبات با اعداد گویا

ابزار مورد نیاز :

۱ــ محور اعداد

۲ــ ماشین حساب

۳ــ نرم‌افزار معرفی شده

روش تدریس

شما می‌توانید مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد حسابی و مجموعه اعداد صحیح را روی تخته بنویسید و از دانش‌آموزان بخواهید مثلاً بگویند ۴– متعلق به چه مجموعه‌هایی است و یا عدد ۷ متعلق به چه مجموعه‌هایی است و یا از دانش‌آموزان بخواهید عددی مثال بزنند که متعلق به هر سه مجموعه باشد و یا فقط در Z باشد.

سپس قسمت (۱) فعالیت صفحه ۱۹ را از دانش‌آموزان بخواهید که انجام دهند.

در این فعالیت به نامساوی $x \geq ۳$ توجه شده است که دانش‌آموزان با قراردادن اعداد ۱ و ۲و ۳و۴و۵ درستی یا نادرستی عبارت را تحقیق می‌کنند.

درست $۴ \geq ۵$ درست $۳ \geq ۳$ نادرست $۲ \geq ۳$ نادرست $۱ > ۳$

در این فعالیت عبارت بر روی نابرابری $3 \geq 3$ تأکید شده است که :

نامساوی درستی است. دانش‌آموزان درستی این عبارت را از ردیف (۱) جدول مربوط به این فعالیت می‌توانند متوجه شوند.

در قسمت (۲) این فعالیت دانش‌آموزان به روش جبری و به روش هندسی، به این مفهوم پی می‌برند که بین هر دو عدد گویا می‌توان اعداد گویای بی‌شماری به‌دست آورد. پس با توجه به این واقعیت نمی‌توان مجموعه اعداد گویا را به صورت اعضا مانند $\mathbb{N}$ W/ $\mathbb{Z}$ نمایش داد پس به روش $\left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in z, b \neq 0\right\}$ نمایش می‌دهیم. (در واقع در فعالیت‌های بعدی دانش‌آموزان به این درک خواهند رسید که $\mathbb{R}$ (مجموعه اعداد حقیقی) را به روش اعداد گویا هم نمی‌توان نمایش داد پس آن را روی محور نمایش می‌دهیم.

در فعالیت صفحه ۲۰ دانش‌آموزان می‌خواهند تعدادی اعداد گویا را از کوچک به بزرگ و یا برعکس مرتب کنند. روش محور روش خوبی است امّا چون مخرج کسرها با هم متفاوت است اگر تعداد این اعداد زیاد شوند بسیار وقت‌گیر و گاهی غیر ممکن می‌شود. پس برای دو کسر $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{6}$ که روی محور نشان داده شده‌اند مشخص است که $\frac{3}{5}$ از $\frac{5}{6}$ کوچک‌تر است امّا در روش مجید بقیه کسرها را با تقسیم صورت به مخرج تبدیل به یک عدد اعشاری می‌کنیم و در روش مرتضی مخرج‌ها را یکسان می‌کنیم. در هر دو روش می‌توانیم کسرها را به ترتیب از کوچک به بزرگ مرتب کنیم.

وقتی دانش‌آموزان صورت کسر را بر مخرج آن تقسیم می‌کنند، بعضی از این اعداد مانند $\frac{1}{3}$ به صورت ۰/۳۳۳۳۳۳ خواهند بود که با نمایش مثلاً $\frac{2}{5} = 0/4$ متفاوت است. در اینجا دانش‌آموزان با این اعداد، آشنا می‌شوند.

توصیه‌های آموزشی

۱ــ از آنجا که بعضی از دانش‌آموزان یادگیری بصری دارند به آنها فرصت دهید از روی محور عدد بین دو عدد گویا را به‌دست آورند.

۲ــ برای تدریس این قسمت دانش‌آموزان نیاز به ماشین حساب دارند پس آوردن ماشین‌حساب را در جلسه قبل یادآوری کنید.

۳ــ روی درست بودن عبارت $2 \leq 2$ و $4 \geq 4$ به اندازه کافی تأکید کنید.

۴ــ دانش‌آموزان باید بدانند چگونه واحدهای روی محور را به دو قسمت، سه قسمت و … تقسیم کنند. پس لازم است قبل از شروع فعالیت این مطلب یادآوری شود.

۵ــ توجه دانش‌آموزان را به این مطلب جلب کنید که چگونه $\mathbb{W}$ از روی $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ از روی $\mathbb{W}$ ساخته شده است.

۶ــ اجازه دهید دانش‌آموزان درباره روش‌های مختلف گفته شده در فعالیت با هم بحث کنند، دنبال بهترین راه حل نباشید.

اشتباهات رایج

۱ــ دانش‌آموزان نامساوی $3\leq3$ را غلط فرض می‌کنند در صورتی که درست است.

۲ــ دانش‌آموزان ۲/۸۷۵ را از ۲/۹ بزرگ‌تر می‌بینند.

۳ــ دانش‌آموزان در محاسبه $-1+\frac{2}{3}$ را مساوی $-1\frac{2}{3}$ می‌گیرند در صورتی که $-1\frac{2}{3}=-1-\frac{2}{3}$ می‌باشد.

۴ــ دانش‌آموزان در محاسبه $2+\frac{1}{3}\times\frac{5}{14}\div\frac{7}{5}-\frac{2}{3}$ ابتدا ضرب را انجام می‌دهند و بعضی از آنها ابتدا $\frac{7}{5}-\frac{2}{3}$ را محاسبه می‌کنند.

۵ــ دانش‌آموزان $-\frac{2}{3}$ را بزرگ‌تر از $-\frac{1}{3}$ می‌گیرند. در اینجا لازم است تأکید شود که هر چه عدد سمت راست محور باشد بزرگ‌تر است.

۶ــ دانش‌آموزان وقتی می‌خواهند واحد را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنند با گذاشتن ۵ نقطه در واقع آن را به ۶ قسمت تقسیم می‌کنند.

اهداف

ــ پیدا کردن مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$, $\sqrt{۳}$, $\sqrt{۵}$, ... به کمک ماشین حساب و توجه به اینکه ماشین حساب‌های مختلف به دلیل اینکه بعضی ۸ خانه، بعضی ۹ خانه و... برای نمایش عدد دارند ممکن است در رقم آخر نمایش اعشاری با هم تفاوت داشته باشند (به دلیل گرد کردن)

ــ شناختن اعدادی مانند $\sqrt{۲}$, $\sqrt{۱۰}$, $\sqrt{۱/۵}$ به عنوان عدد اصم

ــ نام‌گذاری اعداد اصم به صورت Q' و یا Q^C

ــ اعدادی مانند ۰/۰۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰ با داشتن نظم، مشخص امّا گویا نیستند بلکه اصم هستند.

ــ عدد π اصم است.

ــ مجموعه اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}$ نشان می‌دهیم و $\mathbb{R}=Q \cup Q'$

ــ اینکه بین هر دو عدد اصم بی‌شمار عدد اصم وجود دارد.

ــ آشنایی با بعضی از زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی به عنوان مثال $\{x|x<۵\}$

ــ دانش‌آموزان تفاوت دو مجموعه $\{x\in N|x<۵\}$ و $\{x\in R|x<۵\}$ را بدانند.

ابزار مورد نیاز :

۱ــ ماشین‌حساب

۲ــ محور اعداد

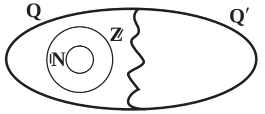
۳ــ نرم‌افزار معرفی شده

روش تدریس

هدف کلی این درس شناخت اعداد اصم و در نتیجه اعداد حقیقی و مجموعه اعداد حقیقی می‌باشد. برای این منظور در فعالیت صفحه ۲۴ دانش‌آموزان عددی مانند $\sqrt{۲}$ را به کمک ماشین‌حساب تقریب می‌زنند و با توجه به قسمت اعشاری این عدد، تفاوت آن را با نمایش اعشاری اعدادی مانند $\frac{۱}{۱۱}$ و $\frac{۷}{۶}$ متوجه می‌شوند. در ضمن ممکن است در هنگام استفاده از ماشین حساب برای محاسبه تقریب اعشاری $\sqrt{۲}$ با این موضوع روبه‌رو شوند که رقم آخری که ماشین‌حساب نشان می‌دهد برای دانش‌آموزان مختلف در کلاس یکسان نباشد در اینجا دانش‌آموزان کشف می‌کنند رقم آخر با توجه به

قانون گرد کردن اعداد نوشته می‌شود. مثلاً در ماشین‌حساب ۸ رقمی/، رقم آخر مقدار تقریبی $\sqrt{۲}$ با رقم مشابه در ماشین‌حساب ۱۲ رقمی تفاوت دارد زیرا در واقع در عدد ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۶۲ به دلیل وجود ۶ که از ۵ بزرگ‌تر است عدد ۵ به ۶ تبدیل شده است.

در این فعالیت اعداد گنگ معرفی می‌شود و مجموعه‌ای که این اعداد در آن قرار دارند را Q' و یا Q^C می‌نامیم. در این فعالیت عدد π نیز به عنوان عدد گنگ معرفی می‌شود.



نمایش سمبولیک برای مجموعه‌های $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و Q و Q' ارائه شده است و جمع‌بندی مناسبی از این مجموعه در ذهن دانش‌آموزان شکل خواهد گرفت.

با انجام فعالیت صفحه ۲۵ طبق مراحل ذکر شده، دانش‌آموزان به طور انتزاعی پاره‌خطی را در ذهن می‌آورند که داخل آن سوراخ‌هایی قرار دارند که نمی‌گذارند پاره‌خط مورد نظر شکل واقعی خود را بیابد و این اعدادی که مانع از تشکیل این پاره خط هستند اعداد گنگ یا اصم هستند.

با انجام این فعالیت باید این روند در ذهن دانش‌آموزان شکل بگیرد که ما به کمک مجموعه $\mathbb{N}$، مجموعه $\mathbb{Z}$ را و به کمک مجموعه Z ، Q را ساختیم ولی اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$، ... وجود دارند که در Q نیستند و مجموعه جدیدی را تشکیل می‌دهند که باعث خلق مجموعه $\mathbb{R}$ می‌شود.

با انجام کار در کلاس صفحه ۲۶، دانش‌آموزان متوجه می‌شوند که بین هر دو عدد گنگ نیز می‌توان بی‌شمار عدد گنگ به‌دست آورد و بین هر دو عدد گویا نیز بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد. برای مثال :

$$۱)\ \sqrt{۵} < \sqrt{۵/۲} < \sqrt{۶} < \sqrt{۷/۸} < \sqrt{۸} < \cdots < \sqrt{۱۰}$$

$$۲)\ ۲ = \sqrt{۴}, ۳ = \sqrt{۹} \Rightarrow \sqrt{۴} < \sqrt{۴/۸} < \sqrt{۵} < \cdots < \sqrt{۹}$$

در تمرین ۳ کار در کلاس روی این موضوع تأکید می‌شود که اعداد گویا که در رابطهٔ $۲ \le x \le ۳$ صدق می‌کنند یک پاره خط را نمایش نمی‌دهد چون اعداد گنگ بین آنها این اجازه را نخواهند داد که این پاره‌خط تشکیل شود.

در فعالیت شماره ۳ صفحه ۲۷ بعضی از زیر مجموعه‌های مجموعه R به صورت $\{x \in R | x < ۳\}$ یا $\{x \in x | -۱ < x \le ۴\}$ روی محور نمایش داده شده‌اند.

در تمرین ۳ کار در کلاس صفحه ۲۷، به یک بدفهمی دانش‌آموزان توجه شده است که آنها

مجموعه $\{x \in R | x > -۲\}$ فقط اعداد ۱- و ۰ و ۱ و ۲ و ... در نظر نگیرند.

توصیه‌های آموزشی

۱ــ برای تدریس این درس دانش‌آموزان به ماشین حساب نیاز دارند. در جلسه قبل به آنها یادآوری کنید با خود ماشین‌حسابی را بیاورند که بتواند جذر اعداد را محاسبه کنند.

۲ــ قبل از شروع درس رابطه فیثاغورث و نمایش اعدادی مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ ، ... را روی محور یادآوری کنید.

۳ــ از دانش‌آموزان به طور شفاهی بخواهید عددی بزرگ‌تر از مثلاً ۵ بگویند آیا پاسخ خواهند داد ۶ و ۷ و ... قانع نشوید از آنها بخواهید غیر از این مدل عددها، عددهای دیگر را معرفی کنند. مثلاً ۵/۲ و ۵/۰۰۱ و ...

۴ــ از دانش‌آموزان بخواهید به طور ذهنی مقدار تقریبی مثلاً $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۵}$ و $\sqrt{۷۰}$ را بگویند مثلاً بگویند $\sqrt{۷}$ می‌شود ۲ و خرده‌ای.

۵ــ بعد از فعالیت فوق از آنها بخواهید به طور ذهنی عددهایی مانند $\sqrt{۱۰}$ و $\sqrt{۱۵}$ و... را بین دو عدد صحیح متوالی قرار دهند. دانش‌آموزان را در انجام این فعالیت درگیر کنید.

۶ــ در پایان فعالیت به کمک بچه‌ها، عددی را بگویید و از آنها بخواهید بگویند این عدد به کدام‌یک از مجموعه‌های خوانده شده تعلق دارد مثلاً ۶- متعلق به Z و Q و R می‌باشد.

۷ــ وقتی فعالیت‌های کتاب را انجام دادید در پایان یک‌بار روند به‌وجود آمدن $\mathbb{R}$ را در کلاس مرور کنید.

۸ ــ به دانش‌آموزان فرصت دهید آموخته‌های خود را سازماندهی کنند.

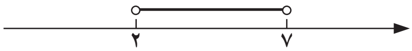
اشتباهات رایج

۱ــ وقتی می‌گوییم اعداد بین مثلاً ۵ و ۱۰، دانش‌آموزان فقط به اعداد طبیعی ۶ و۷و۸ و۹ اشاره می‌کنند. باید در فواصل درس تأکید کنیم مثلاً ۵/۲ و ۷/۹ و ۵/۰۰۰۱ نیز اعدادی بین دو عدد ۵ و ۱۰ می‌باشند.

۲ــ دانش‌آموزان نظم در اعدادی مانند ۰/۲۰۲۰۰۲۰۰۰۲۰۰ را به معنای وجود تناوب می‌گیرند در صورتی که این عدد گنگ است و گویا نیست.

۳ـ $\frac{۵}{۰}$ عدد حقیقی نیست و در واقع $\frac{۵}{۰}$ کلاً عدد نیست.

۴ـ $\frac{۰}{۵}$ همان صفر است.

۵ـ دانش‌آموزان $\{x|۲<x<۷\}$ را مساوی $\{۶و۵و۴و۳\}$ می‌گیرند. تأکید کنیم مجموعه $\{x|۲<x<۷\}$ را می‌توان روی محور به صورت  نمایش داد و توسط اعضا نمی‌توانیم آن را نمایش دهیم.

اهداف

ــ شناخت علامت قدرمطلق

ــ تغییر هندسی قدرمطلق

ــ بیان مفهوم جبری قدرمطلق

ــ محاسبه قدرمطلق یک عدد

ــ کاربرد قدرمطلق در محاسبه عباراتی مانند $|A|$ $\sqrt{A}$

ــ دانش‌آموزان بتوانند عبارات فارسی را به ریاضی و برعکس بنویسند.

ابزار مورد نیاز :

۱ــ محور اعداد

۲ــ نرم‌افزار معرفی شده

روش تدریس

در فعالیت صفحه ۲۹، دانش‌آموزان فاصله دو نقطه A و B که نسبت به مبدأ مختصات قرینه هستند را مساوی ۲ به‌دست می‌آورند و برعکس دو نقطه به‌دست می‌آورند که فاصله آنها تا مبدأ مساوی مثلاً ۲ واحد می‌باشد. پس دانش‌آموز می‌تواند عبارت |۲| را به دو صورت بخواند، قدرمطلق ۲ و یا فاصله ۲ از مبدأ و عبارت |۲−| را نیز می‌تواند به دو صورت بخواند قدر مطلق ۲− و یا فاصله ۲− از مبدأ را که در هر دو حالت داریم ۲ = |۲−| = |۲|. با چند مثال نشان می‌دهیم که ۵ = |۵| و ۵ = |۵−| چیزی که مهم است آن است که برای به‌دست آوردن جواب |۵−| گفته نشود که علامت ۵− حذف می‌شود بلکه گفته شود که (۵−) را قرینه می‌کنیم. و این به بیان جبری قدر مطلق کمک کرد. با تمرین کافی در این قسمت به دانش‌آموزان فرصت دهیم که خود به بیان جبری قدرمطلق پی ببرند.

$a = \circ \Rightarrow |a| = \circ$

$a > \circ \Rightarrow |a| = a$ خود عدد

$a < \circ \Rightarrow |a| = -a$ قرینه عدد

تأکید می‌کنیم که در واقع a− عددی مثبت است چون a منفی است.

در کار در کلاس صفحه ۳۰ تمرین ۱، دانش‌آموزان جملات فارسی را به مفهوم معادل آن به زبان ریاضی وصل می کنند یعنی (۱) به د، (۲) به الف، (۳) به ب، (۴) به ج و (۵) به هـ وصل خواهد شد.

در تمرین ۲ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ الف به ۲،ب به ۳ و ج به ۱ وصل می‌شود.

در تمرین ۳ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ الف به ۲، ب به ۳، ج به ۱ و د به ۴ وصل می‌شود.

در تمرین ۴ کار در کلاس صفحه ۳۰؛ دانش‌آموزان می‌توانند مثال‌های زیر را مطرح کنند.

$$۱)\ |ab| = |a|\,|b|$$

$$|-۳ \times ۷| = |-۲۱| = ۲۱$$

$$|-۳ \times ۷| = |-۳| \times |۷| = ۳ \times ۷ = ۲۱$$

$$۲)\ |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|-۴ + ۹| \not\leq |-۴| + |۹|$$

$$۵ \not\leq ۴ + ۹$$

با توجه به مقدار تقریبی این اعداد دانش‌آموزان راجع به مثبت یا منفی‌بودن مقدار داخل رادیکال قضاوت خواهند کرد و با توجه به تعریف جبری قدرمطلق حاصل عبارت را بدون استفاده از نماد قدرمطلق خواهند نوشت.

در فعالیت صفحه ۳۱، بعد از انجام فعالیت دانش‌آموزان به این نکته توجه خواهند کرد که حاصل عبارت $\sqrt{A^{۲}} = |A|$ خواهد شد و همیشه نمی‌توانند $\sqrt{A^{۲}} = A$ را استفاده کنند.

در شروع فعالیت اعداد کوچک هستند و دانش‌آموزان آن را به توان ۲ می‌رسانند ولی در ادامه فعالیت از اعداد بزرگ استفاده شده است که به توان ۲ رساندن آنها برای دانش‌آموزان سخت است و آنها دنبال راه چاره گشته، متوجه می‌شوند که این اعداد باید به صورت مثبت از زیر رادیکال خارج شوند، که همان مفهوم قدر مطلق است. پس:

$$\sqrt{(۱-\sqrt{۳})^{۲}} = |\overbrace{۱-\sqrt{۳}}^{\text{منفی}}| = -(۱-\sqrt{۳}) = -۱ + \sqrt{۳}$$

در کار در کلاس صفحه ۳۲، چون $۰/۲^{۵}$ از $۰/۲^{۶}$ بزرگ‌تر است پس حاصل $۰/۲^{۵} - ۰/۲^{۶}$ مثبت است. پس:

$$|۰/۲^{۵} - ۰/۲^{۶}| = ۰/۲^{۵} - ۰/۲^{۶}$$

و $۷^{۴}$ از $۷^{۳}$ بزرگ‌تر است و

$$|۷^{۳} - ۷^{۴}| = -(۷^{۳} - ۷^{۴}) = ۷^{۴} - ۷^{۳}$$

در تمرین ۳ به‌جای $\square$ می‌توان اعدادی مانند ۸- و ۲ و ۰ و ۵ و ۲- و ... را قرار داد.

$$|۵ - ۱۲| > ۱ + \square$$

و یا

$$۷ > ۱ + \square$$

در تمرین ۵ اگر به‌جای a اعداد منفی قرار دهیم به یک عبارت نادرست تبدیل می‌شود.

$$\sqrt{(-۸)^{۲}} \neq -۸$$

توصیه‌های آموزشی

۱ــ برای محاسبه حاصل $|-۴|$ به هیچ وجه نگویید علامت منفی حذف می‌شود بلکه بگویید قرینه ۴- می‌شود ۴ یعنی : $۴ = -(-۴) = |-۴|$ و یا از مفهوم فاصله استفاده کنید.

۲ــ برای محاسبه عبارتی مانند $|\sqrt{۵}-۱|$ و یا $|\sqrt{۲}+۱-|$ از دانش‌آموزان بخواهید با ذکر دلیل توضیح دهند حاصل این عبارت چه خواهد شد.

۳ــ از گسترش مفهوم قدر مطلق به مطالب سخت‌تر خودداری کنید زیرا این مفهوم برای دانش‌آموزان بسیار جدید و انتزاعی است.

اشتباهات رایج

۱ــ دانش‌آموزان $\sqrt{a^۲} = a$ می‌نویسند در صورتی که باید بنویسند $\sqrt{a^۲} = |a|$

۲ــ دانش‌آموزان $\sqrt{(-۳۰۰)^۲} = -۳۰۰$ می‌نویسند در صورتی که باید بنویسند

$$\sqrt{(-۳۰۰)^۲} = ۳۰۰$$

۳ــ اگر برای محاسبه مقدار $|-۵|$ گفته شود علامت منفی را حذف می‌کنیم دانش‌آموزان در محاسبه حاصل $|\sqrt{۷}-۱|$ علامت منفی را حذف می‌کنند و می‌نویسند $\sqrt{۷}+۱$

۴ــ دانش‌آموزان می‌نویسند $|a| = \pm a$ که غلط است زیرا جواب $|a|$ فقط یک عدد است اگر $a \geq ۰$ باشد $|a| = a$ و اگر $a < ۰$ باشد $|a| = -a$.

حل تمرین‌های فصل ۲

تمرین

۱ــ پس از محاسبهٔ هر قسمت، کسر حاصل را تا حد امکان ساده کنید :

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{8}=\frac{20-3}{24}=\frac{17}{24}\qquad -1+\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}\qquad 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{6}\div 2\frac{1}{2}=\frac{5}{6}\div\frac{5}{2}=\frac{5}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

۲ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\frac{1-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{10}-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}\div 5\frac{1}{3}=\frac{\frac{4-2+3}{4}}{\frac{10-15-10}{20}}\div\frac{16}{3}$$

$$=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{-15}{20}}\times\frac{3}{16}=-\frac{5}{3}\times\frac{3}{16}=-\frac{5}{16}$$

$$(-2\frac{5}{6}+3\frac{1}{2})\div(-1-\frac{1}{9})$$

$$=(\frac{-17}{6}+\frac{7}{2})\div(\frac{-9-1}{9})$$

$$=(\frac{-17+21}{6})\div(-\frac{10}{9})=\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{2}}\times(-\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{5}})=-\frac{3}{5}$$

$$-2\frac{1}{2}-3\frac{1}{3}+4\frac{7}{12}=-\frac{5}{2}-\frac{10}{3}+\frac{55}{12}$$

$$=\frac{-30-40+55}{12}=\frac{-15}{12}=-\frac{5}{4}=-1\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{-5}{6}\div\frac{7}{3}\times\frac{7}{5}+\frac{2}{3}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\cancel{-5}^{-1}}{\cancel{6}_{2}}\times\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{7}}\times\frac{\cancel{7}}{\cancel{5}}+\frac{2}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$$

$$=\frac{-3-3+4}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$$

$$\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{۳}}}=\frac{۱}{-۱-\frac{۱}{-\frac{۴}{۳}}}=\frac{۱}{-۱+\frac{۳}{۴}}=\frac{۱}{-\frac{۱}{۴}}=-۴$$

$$\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\div(۲\div\frac{-۶}{۵})$$

$$=\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\div(\frac{\cancel{۲}^{۱}}{۱}\times-\frac{۵}{\cancel{۶}_{۳}})=\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\div(-\frac{۵}{۳})$$

$$=\frac{۵}{۶}-\frac{۷}{۸}\times\frac{-۳}{۵}=\frac{۵}{۶}+\frac{۲۱}{۴۰}=\frac{۱۰۰+۶۳}{۱۲۰}=\frac{۱۶۳}{۱۲۰}$$

۳ــ عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

الف) $\frac{۷}{۸}, -\frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, ۲, -۳\frac{۵}{۶}$

$$-۳\frac{۵}{۶}<-\frac{۲}{۳}<\frac{۳}{۴}<\frac{۷}{۸}<۲$$

ب) $\frac{۱۶}{۷}, -\frac{۳}{۴}, ۲/۷۵, -\frac{۵}{۶}, ۴\frac{۳}{۵}, \frac{۵۶}{۱۳}$

$$-\frac{۵}{۶}<-\frac{۳}{۴}<\frac{۱۶}{۷}<۲/۷۵<\frac{۵۶}{۱۳}<۴\frac{۳}{۵}$$

۴ــ بین هر دو کسر، سه کسر بنویسید.

الف) $\frac{۱۰}{۱۱}, \frac{۱۲}{۱۳}$

$$\frac{۱۰}{۱۱}<\ ?\ <\frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\frac{۱۳۰}{۱۴۳}<\ ?\ <\frac{۱۳۲}{۱۴۳}\rightarrow\frac{۲۶۰}{۲۸۶}<\ ?\ <\frac{۲۶۴}{۲۸۶}$$

$$\frac{۲۶۱}{۲۸۶}, \frac{۲۶۲}{۲۸۶}, \frac{۲۶۳}{۲۸۶}$$

ب) $۰, -\frac{۱}{۳} \rightarrow -\frac{۱}{۳}<\ ?\ <\frac{۰}{۳}$

$$-\frac{۴}{۱۲}<\ ?\ <\frac{۰}{۱۲}$$

$$\rightarrow -\frac{۳}{۱۲}, -\frac{۲}{۱۲}, -\frac{۱}{۱۲}$$

تمرین

۱ــ با توجه به مجموعه‌های داده شده، سایر سطرها را مانند سطر اوّل کامل کنید :

مجموعهٔ اعداد	$\sqrt{۳/۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۰	π	$-\frac{۳}{۴}$	۰/۲۹۲۲۹۲۲۲۲۹....	۱۰−	$\frac{۶}{۲}$
$\mathbb{N}$ طبیعی	×	×	×	×	×	×	×	✓
W حسابی	×	×	✓	×	×	×	×	✓
$\mathbb{Z}$ صحیح	×	×	✓	×	×	×	✓	✓
Q گویا	×	✓	✓	×	✓	×	✓	✓
Q' گنگ	✓	×	×	✓	×	✓	×	×
$\mathbb{R}$ حقیقی	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

۲ــ در هر یک از حالت‌های الف و ب تفاوت دو مجموعه را با ذکر دلیل بنویسید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱/۵ < x < ۵\}$, $B = \{x \in Q \mid ۱/۵ < x < ۵\}$

مجموعه A شامل تمام اعداد حقیقی بین ۱/۵ و ۵ است درحالی‌که مجموعه B شامل تمام اعداد گویا بین ۱/۵ و ۵ است.

ب) $C = \{۴,۵,۶,۷,۸\}$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid ۳ < x < ۹\}$

مجموعه C اعداد حقیقی بین ۳ و ۹ است درحالی‌که مجموعه D تمام اعداد حقیقی بین ۳ و ۹ است.

۳ــ طرف دوم تساوی‌های زیر را کامل کنید :

۱) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ۲) $\mathbb{R} - Q' = Q$ ۳) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ۴) $\mathbb{R} \cap Q' = Q'$

۴ــ عدد $\sqrt{۵}+۱$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ ۳ و ۴

۵ــ بین هر دو عدد، چهار عدد گنگ بنویسید :

الف) ۵ و ۲−   ب) ۶ و ۷   ج) $\sqrt{۳},۶$ د) $\sqrt{۲},\sqrt{۴/۱}$

$۵=\sqrt{۲۵}$ $۶=\sqrt{۳۶}$ $\sqrt{۸}$, $\sqrt{۷}$, $\sqrt{۶}$, $\sqrt{۵}$ $\sqrt{۳,۵}$, $\sqrt{۳}$, $\sqrt{۲,۵}$, $\sqrt{۲,۱}$

$-۲=۰\sqrt{۴}$ $۷=\sqrt{۴۹}$

$\sqrt{۱۷}$, $\sqrt{۲۱}$ $\sqrt{۳۸}$, $\sqrt{۳۷}$

$-\sqrt{۳}$, $\sqrt{۵}$ $\sqrt{۴۰}$, $\sqrt{۳۹}$

۶ــ عبارات درست را با ✓ و عبارات نادرست را با × مشخص کنید. برای عبارات درست مثال بزنید.

☑ ۱) عددی وجود دارد که صحیح و گویا باشد. $\frac{۶}{۲}$

☑ ۲) عددی وجود دارد که گویا و گنگ باشد.

☑ ۳) عددی وجود دارد که حقیقی و گنگ باشد. $\sqrt{۲}$

☑ ۴) عددی وجود دارد که حقیقی و طبیعی باشد. ۳

۷ــ در نمایش اعشاری عدد $\sqrt{۱۰}$ و عدد $\frac{۳}{۱۱}$ چه تفاوتی هست؟

$\sqrt{۱۰}$ به دلیل نداشتن دوره تناوب گنگ بوده ولی $\sqrt{۱۰} \simeq ۳/۱۶۲۲۷۷۶۶۰۰۰$

$\frac{۳}{۱۱}$ متناوب بوده و عددی گویا است $\frac{۳}{۱۱} = ۰/\overline{۲۷}$

تمرین

۱ــ اگر $a=۰/۲۵$, $b=-\frac{۱}{۴}$, $c=۲\frac{۱}{۲}$ باشد، حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید:

$|a+b| + ۲|a-b-c|$

$۲۵ + (-۰/۲۵)| + ۲|۰/۲۵ - (-۰/۲۵) - ۲/۵| = ۲|۰/۵ - ۲/۵| = ۲|-۲| = ۲\times۲ = ۴$

۲ــ حاصل عبارات زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید:

الف) $|-۳\sqrt{۵}|$ $= -(-۳\sqrt{۵})$ $= ۳\sqrt{۵}$

ب) $|۷-۵\sqrt{۳}|$ $= -(۷-۵\sqrt{۳})$ $= -۷+۵\sqrt{۳}$

ج) $|۰+\sqrt{۵}| = \sqrt{۵}$

۳ــ جای خالی را با عدد مناسب پر، و جواب‌هایتان را در کلاس با سایر دوستانتان مقایسه کنید:

هر عدد کوچک‌تر از ۶ صحیح است.

$|\cancel{۵-۱۲}| > ۱ + \boxed{۵}$ ۷

۴ــ مقدار عددی عبارت $|a|+a$ را به ازای $a=-۲$ ، $a=۰$ و $a=۲$ به‌دست آورید. آیا می‌توانید

عددی حقیقی به‌جای a قرار دهید که حاصل |a|+a منفی باشد؟ خیر

$a=-۲ \rightarrow |a|+a=|-۲|+(-۲)=۰$

$a=۰ \rightarrow |a|+a=|۰|+۰=۰$

$a=۲ \rightarrow |a|+a=|۲|+۲=۴$

۵ــ با ارائه یک مثال، نادرست بودن تساوی $\sqrt{a^{۲}}=a$ را نشان دهید.

$\sqrt{(-۷)^{۲}}=|-۷|=+۷ \neq -۷$

۶ــ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید : $\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^{۲}}$ $\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}$

$\sqrt{(\sqrt{۲}-۱)^{۲}}=\left|\sqrt{۲}-۱\right|=\sqrt{۲}-۱$

$\sqrt{(۱-\sqrt{۱۰})^{۲}}=\left|۱-\sqrt{۱۰}\right|=-(۱-\sqrt{۱۰})=-۱+\sqrt{۱۰}$