

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

استاتیک و دینامیک مقدماتی

رشته مکانیک موتورهای دریایی

گروه تحصیلی علوم و فنون دریایی

زمینه صنعت

شاخه آموزش فنی و حرفه‌ای

شماره درس ۲۹۹۸

همکاران محترم و دانش آموزان عزیز :

پیشنهادات و نظرات خود را درباره محتوای این کتاب به نشانی
تهران - صندوق پستی شماره ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف کتاب های درسی
فنی و حرفه ای و کار دانش، ارسال فرمایند.

info@tvoccd.sch.ir

پیام نگار (ایمیل)

www.tvoccd.sch.ir

وب گاه (وب سایت)

وزارت آموزش و پرورش

سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

برنامه ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب های درسی فنی و حرفه ای و کار دانش

نام کتاب : استاتیک و دینامیک مقدماتی - ۴۶۳/۹

مؤلفان : وحید طاووسی، فرهاد میریانی و حمید یزدانی

اعضای کمیسیون تخصصی : حمید یزدانی، جواد سقای سعیدی، فرهاد میریانی، محمد تاجر قزوینی، جعفر تذکر و جواد داداش زاده

آماده سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۰۹۲۶۶۰۸۸۳، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وب سایت : www.chap.sch.ir

مدیر امور فنی و چاپ : لیدا نیک‌روش

طراح جلد : طاهره حسن زاده

صفحه آرا : فاطمه سادات قوامی درو

حروفچین : فاطمه باقری مهر

مصحح : علی مظاهری نظری فر، سید کیوان حسینی

امور آماده سازی خیر : سپیده ملک ایزدی

امور فنی رایانه ای : طوبی عطایی، ناهید خیام باشی

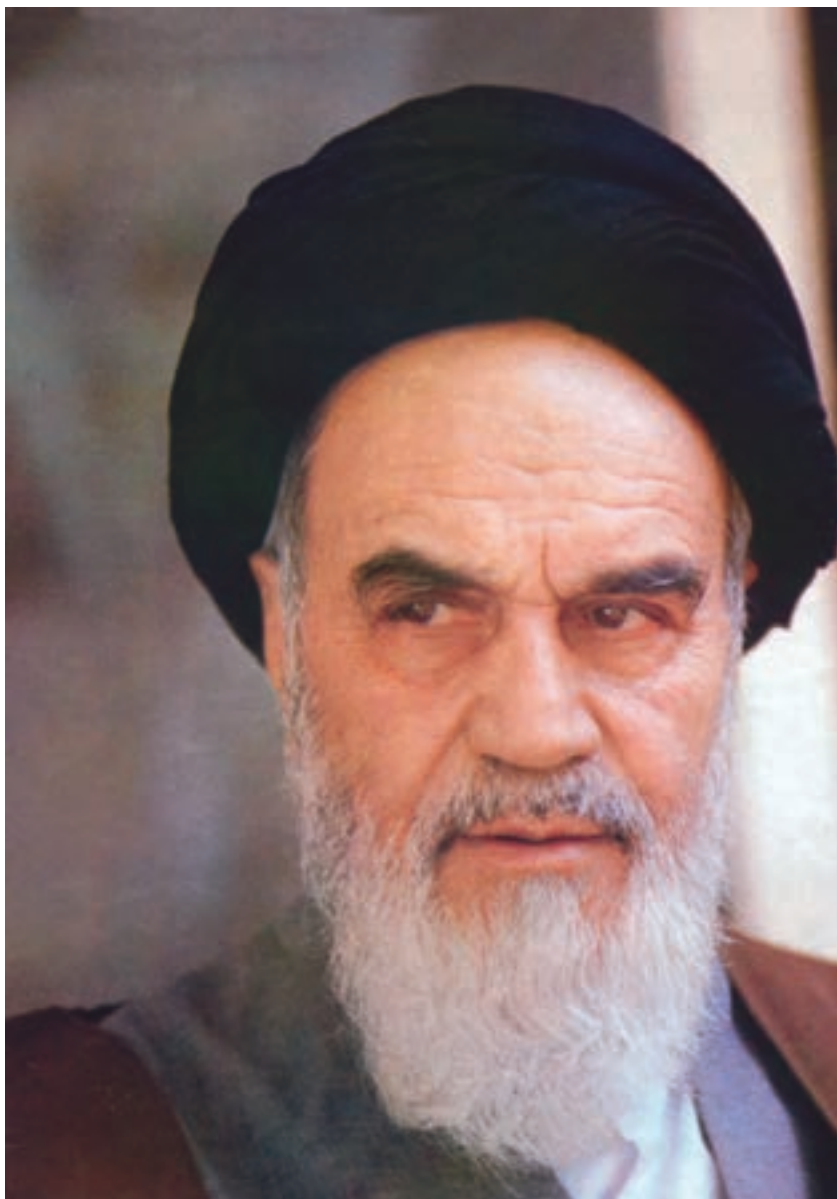
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران : تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن : ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۰۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹-۳۷۵۱۵

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ : چاپ اول ۱۳۹۴

حق چاپ محفوظ است.



اسلام، طبیعت را مهار می‌کند برای واقعیت و همه را رو به وحدت و توحید می‌برد.
امام خمینی (ره) صحیفه نور، ج ۸، ص ۶

فهرست

مقدمه

فصل اول

- ۱ کاربرد ریاضی در مکانیک
- ۱-۱-۱ مکانیک
- ۱-۱-۲ استفاده از ریاضیات در مکانیک
- ۱-۲-۱ مثلث‌های راست گوشه
- ۱-۲-۲ روابط مثلثاتی کمکی
- ۱-۲-۳ قانون کسینوس‌ها
- ۱-۲-۴ قانون سینوس‌ها
- ۱-۳-۱ دستگاه بین‌المللی یکاها
- ۱-۴-۱ توان‌های 10°
- ۱-۵-۱ مقایسه کمیت‌ها در دستگاه‌های مختلف
- ۱۵ خودآزمایی فصل اول

فصل دوم

- ۲۱ استفاده از بردار برای تحلیل نیروها
- ۲-۱-۲ کمیت‌های برداری
- ۲-۲-۲ محاسبات برداری
- ۲-۲-۱-۲ خواص بردار
- ۲-۲-۲-۲ جمع برداری
- ۲۷ الف) روش مثلث
- ۲۷ ب) روش متوازی‌الاضلاع
- ۲۹ جمع بیش از ۲ بردار
- ۲-۲-۳-۲ تفریق بردارها

۳۱ تجزیه بردار ۲-۲-۴
۳۵ ضرب بردارها ۲-۲-۵
۳۵ ضرب داخلی
۳۶ ضرب خارجی
۳۸ خودآزمایی فصل دوم

فصل سوم

۴۰ نیرو و ایستایی
۴۱ نیرو ۳-۱
۴۳ ۱-۱-۳ حل مسائل حرکت شناسی و ایستایی به کمک قوانین نیوتن ...
۴۳ ۲-۱-۳ رسم نمودار جسم آزاد
۴۵ ۳-۱-۳ گشتاور
۴۶ قانون دست راست
۴۷ گشتاور جفت نیرو
۴۸ ۲-۳ ایستایی
۴۸ ۳-۲-۱ انواع تکیه‌گاه
۴۸ تکیه‌گاه مفصلی ثابت (لولایی)
۴۹ تکیه‌گاه مفصلی متحرک (غلتکی)
۵۰ تکیه‌گاه گیردار (طره‌ای)
۵۰ ۲-۲-۳ حل مسائل ایستایی جسم صلب
۵۳ مسائل خاص
۵۳ ۳-۲-۳ خریا
۵۵ فشار
۵۵ کشش
۵۵ ۴-۲-۳ پایداری سازه
۵۶ حل خریا
۶۲ خودآزمایی فصل سوم

فصل چهارم

- ۶۵ دینامیک ماشین‌ها
- ۶۶ ۴-۱- حرکت دورانی
- ۶۶ ۴-۱-۱- سرعت زاویه‌ای
- ۶۸ ۴-۱-۲- سرعت دورانی
- ۶۸ ۴-۱-۳- رابطه سرعت خطی و زاویه‌ای
- ۷۰ ۴-۱-۴- گشتاور
- ۷۴ ۴-۱-۵- موتورهای دیزل و الکتریکی
- ۷۴ ۴-۲- چرخ‌دنده
- ۷۴ ۴-۲-۱- چرخ‌دنده‌های صاف یا ساده
- ۷۶ ۴-۲-۲- چرخ‌دنده‌های مارپیچ
- ۷۷ ۴-۲-۳- چرخ‌دنده‌های مخروطی
- ۷۷ ۴-۲-۴- چرخ‌دنده‌های حلزونی
- ۷۸ ۴-۲-۵- چرخ‌دنده شانه‌ای
- ۷۹ ۴-۲-۶- محاسن چرخ‌دنده‌ها
- ۷۹ ۴-۲-۷- معایب چرخ‌دنده‌ها
- ۷۹ ۴-۲-۸- شرایط فیزیکی لازم در چرخ‌دنده‌ها
- ۸۰ ۴-۲-۹- روش ساخت چرخ‌دنده‌ها
- ۸۰ ۴-۲-۱۰- هندسه چرخ‌دنده‌ها
- ۸۱ مدول m
- ۸۲ ۴-۳- اجزای مکانیکی انعطاف‌پذیر
- ۸۳ ۴-۳-۱- تسمه و پولی
- ۸۳ ویژگی‌های تسمه‌ها
- ۸۶ چگونه ابعاد قرقره بر بازده توان تأثیر می‌گذارد
- ۸۶ سرعت خروجی نسبی در مکانیزم‌های تسمه‌ای
- ۸۸ ۴-۴- درجه آزادی مکانیکی
- ۸۹ ۴-۴-۱- درجات آزادی اجسام صلب

۸۹ ۴-۴-۲ درجات آزادی کشتی
۹۱ ۴-۵ سرعت نسبی
۹۲ ۴-۵-۱ تأثیر جریان آب بر سرعت و راه
۹۵ خودآزمایی فصل چهارم

فصل پنجم

۹۸ ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر
۹۹ ۵-۱ تجزیه و تحلیل ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر
۱۰۱ ۵-۲ اهرم
۱۰۲ ۵-۳ انواع اهرم
۱۰۳ ۵-۳-۱ اهرم نوع اول
۱۰۴ ۵-۳-۲ اهرم نوع دوم
۱۰۵ ۵-۳-۳ اهرم نوع سوم
۱۰۶ ۵-۳-۴ بهره مکانیکی
۱۰۷ ۵-۴ قرقه و طناب
۱۱۱ ۵-۵ راندمان ماشین
۱۱۳ ۵-۶ قرقه زنجیری
۱۱۵ ۵-۷ چرخ و محور
۱۱۷ ۵-۸ قرقه سگکی
۱۱۸ ۵-۹ چرخ و محور دو پله‌ای
۱۱۹ ۵-۱۰ میله حلزون و چرخ حلزون بالابر
۱۲۰ خودآزمایی فصل پنجم

۱۲۲ مراجع
-----	-------------

مقدمه

امروزه دریانوردی نیز مانند همهٔ امور روزمره به یک دانش تبدیل شده است. دانشی که فراگیری و کنکاش در آن به بهبود کیفیت و کمیت این امر منجر می‌شود. امروزه کمتر پدیدهٔ فیزیکی را می‌توان یافت که توجیهی علمی در پس آن موجود نباشد. برای مثال در مورد حرکت یک شناور در آب، روابط ریاضی و توجیحات فیزیکی مختلف بیان شده و کتاب‌های مختلفی در این زمینه نگارش شده است. در مورد موتورهای محرک این وسایل معمولاً غول پیکر و یا سایر تجهیزات آنها نیز می‌توان پدیده‌های فیزیکی را به شکل فرمول‌های ریاضی در آورده و توجیه کرد. برای فهم درست این پدیده‌ها و روابط فیزیکی آنها لازم است با بنیان‌های نظری ساخت آنها آشنا شویم.

شما هنرجویان این رشته نیز نیاز دارید که از معادلات حاکم بر سامانه‌های دریایی درک درستی داشته باشید و استدلال‌های فیزیکی مناسبی را برای پدیده‌های پیرامون بحث شناورهای دریایی و تجهیزات وابسته ارائه دهید. از این رو برآن شدیم تا با نگارش کتابی در زمینهٔ ایستایی و حرکت شناسی، بخشی از دانش روز و الفبای مورد نیاز آن را در اختیار شما عزیزان قرار دهیم. امیدواریم که خواندن این کتاب برایتان مفید واقع شود و شما را در این زمینه پویاتر و کنجکاوتر سازد. در این کتاب در فصول مختلف مطالب مورد نیاز ارائه شده است.

فصل اول این کتاب آشنایی مختصری است با مثلثات و کاربرد آن در علوم فیزیکی همچون ایستایی و حرکت شناسی. از ابتدا همواره مهندسی با هندسه همراه و عجین بوده است. در فصل دوم کتاب از دانسته‌های فصل اول کمک گرفته شده و مطالبی در مورد بردارها ارائه شده است. از آنجا که کمیت‌های فیزیکی مربوط به مباحث این کتاب اغلب از نوع برداری هستند، تحلیل‌های برداری کاربرد زیادی در فهم و حل مسائل ایستایی و حرکت شناسی دارد. در فصل بعدی یعنی بخش سوم این کتاب آشنایی مختصری با ایستایی شناسی ارائه شده است. در کشتی‌ها و بنادر عناصر سازه‌ای بسیار پر کاربرد هستند. به عنوان مثال می‌توان جرثقیل‌های غول پیکری را نام برد که از سازه‌های خریداری ساخته می‌شوند. دانستن استاتیک در تحلیل و به‌کارگیری اینگونه سازه‌ها بسیار مفید است.

در دو فصل انتهایی کتاب برخی اجزا و دستگاه‌های پرکاربرد در کشتی، از جمله تسمه‌ها و پولی‌ها، چرخ دنده‌ها، قرقره‌ها و اهرم‌ها معرفی شده‌اند. برای اینکه بتوان محاسبات اولیه و کاربردی لازم جهت استفاده صحیح از این ابزارها را به خوبی انجام داد، هنجاریان نیاز دارند کمی با اصول دینامیک آشنا شوند. دینامیک شاخه تحلیل حرکت در فیزیک است.

مؤلفان

فصل

کاربرد ریاضی در مکانیک

هدف کلی

بهره‌برداری از ریاضیات در مکانیک

- هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :
- ۱- هدف‌های کلی علم مکانیک را بیان کند.
 - ۲- ایستایی را توضیح دهد.
 - ۳- حرکت شناسی را توضیح دهد.
 - ۴- برای تعیین اندازه اضلاع و زوایا، دانش مثلثات را به کارگیرد.

۱-۱-۱- مکانیک

دانشمندان مسلمان ایرانی، از جمله ابولوفاء بوزجانی و خواجه نصیرالدین طوسی از اولین دانشمندانی بودند که مثلثات و ریاضیات را در علوم دیگر به کار گرفتند و توسعه دادند. اینان در بسیاری از موارد با الهام از آموزه‌های اسلامی و فرهنگ غنی ایرانی توانستند به ریاضیات چهره‌ای کاربردی ببخشند و از آن در علم طراحی سازه‌ها و دستگاه‌های آن زمان استفاده کردند.

مکانیک به وسیلهٔ ریاضیدان‌ها و فیزیک‌دان‌ها توسعه یافت. این گروه از دانشمندان عمدتاً به توضیح منطقی مشاهده‌های خود پرداختند و به مطالعهٔ اهرم، قرقه، سقوط آزاد و حرکت سیاره‌ها اقدام کردند. نتیجهٔ کار هر محقق در قالب یک تئوری جدید یا تصحیح تئوری پیشینیان به گنجینهٔ دانش بشر افزوده شد. در سال ۱۶۸۷ میلادی با کشف نیروی جاذبه و اعلام قوانین حرکت به وسیلهٔ اسحاق نیوتون دانش مکانیک در موقعیتی جدید قرار گرفت.

اهمیت علوم را می‌توان با نوع کاربرد آنها ارزیابی کرد. ملاحظه می‌شود طراحی و ساخت ساختمان، پل، خودرو، هواپیما و کشتی با تحلیل‌های اولیه بر مبنای اصول مکانیک انجام می‌شود. بنابراین نقش مکانیک و کاربرد آن در زندگی بشر بسیار مؤثر است. ایستایی و حرکت شناسی دو شاخهٔ مکانیک هستند که در این کتاب معرفی می‌شوند و کاربرد آنها به طور مجزا و توأم بررسی می‌شود.

استاتیک^۱ یا ایستایی شاخه‌ای از علم مکانیک و علوم مهندسی است که به بحث و مطالعهٔ پیرامون سامانه‌های فیزیکی در حال تعادل ایستا (تعادل استاتیکی) می‌پردازد. تعادل ایستا حالتی است که در آن، مکان نسبی اجزاء سامانه‌ها نسبت به هم تغییر نکند، یا آنکه اجزاء و سازه‌ها در اثر اعمال نیروهای خارجی در حالت ایستایی یا سکون باقی بمانند. برای مثال ایستایی به سؤالات زیر پاسخ می‌دهد :

✓ چه مقدار بار بر یک ستون وارد می‌شود؟

✓ نیروی کششی در کابل‌های یک پل چقدر است؟

✓ توزیع نیروها در اجزاء یک جرثقیل چگونه است؟

✓ مزیت مکانیکی مجموعه طناب و قرقره چه میزان است؟

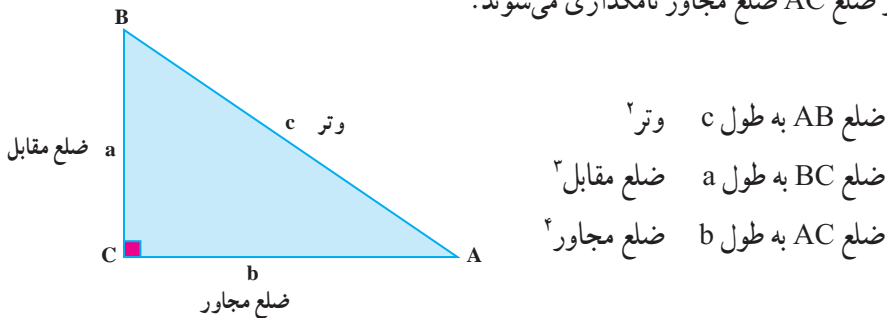
حرکت شناسی^۱ شامل مطالعهٔ هندسی حرکت (سینماتیک) و نیروهای لازم برای ایجاد حرکت (سینتیک) است. هدف نهایی حرکت شناسی تعیین نیروهای لازم برای ایجاد حرکت و تغییر حرکت است. به عنوان مثال می‌توان به مطالعهٔ حرکت یک شناور در آب یا یک خودروی روی جاده اشاره کرد. برای فهم این حرکت‌ها لازم است معادلات حرکت شناسی (دینامیکی) این سامانه‌ها استخراج و تحلیل شود.

۲-۱- استفاده از ریاضیات در مکانیک

مکانیک موضوعی تحلیلی است. در مکانیک از شاخه‌های مختلف ریاضیات مانند جبر، هندسه و مثلثات استفادهٔ بسیار می‌شود. هدف این کتاب آموختن ریاضیات نیست ولی یک شاخهٔ آن، یعنی مثلثات کاربرد فراوانی در این کتاب دارد. در واقع علوم ریاضی مانند الفبای آموزش علم مکانیک است.

۱-۲-۱- مثلث‌های راست گوشه: مثلث راست گوشه شکل سه ضلعی بسته‌ای است که

یک زاویهٔ نود درجه دارد، ضلعی که مقابل زاویهٔ نود درجه است وتر نامیده می‌شود. دو ضلع دیگر با توجه به سایر زوایا نامگذاری می‌شوند. مثلاً اگر \hat{A} زاویهٔ مورد نظر باشد ضلع BC در شکل ۱-۱ ضلع مقابل و ضلع AC ضلع مجاور نامگذاری می‌شوند.



شکل ۱-۱- مثلث راست گوشه و تعاریف آن

برای اضلاع این مثلث راست گوشه شش نسبت می‌توان نوشت. این نسبت‌ها روابط مثلثاتی

نام دارند و برای زاویه \hat{A} در جدول ۱-۱ نشان داده می‌شوند:

۱- Dynamic

۲- Hypotenuse

۳- Opposite side

۴- Adjacent side

جدول ۱-۱- تعاریف نسبت‌های مثلثاتی

$\cos(\hat{A}) = \frac{b}{c} = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}}$ کسینوس	$\sin(\hat{A}) = \frac{a}{c} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$ سینوس
$\cot(\hat{A}) = \frac{b}{a} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$ کتانژانت	$\tan(\hat{A}) = \frac{a}{b} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$ تانژانت
$\operatorname{cosec}(\hat{A}) = \frac{c}{b} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}}$ کسکانت	$\sec(\hat{A}) = \frac{c}{a} = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}}$ سکانت

از این شش رابطهٔ مثلثاتی مشخص می‌شود که برای یک زاویهٔ معین θ ، نسبت‌های طولی اضلاع در یک مثلث راست گوشه مقادیری ثابت هستند. مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت زوایایی که کاربرد بیشتری نسبت به سایر زوایا دارند (زوایای صفر، 30° ، 45° ، 60° و 90° درجه) در جدول ۱-۲ درج شده است. مقادیر مثلثاتی زوایا (1° درجه تا 90° درجه) در جدول پایانی کتاب (پیوست الف) وجود دارد.

جدول ۱-۲- مقادیر نسبت‌های مثلثاتی

tan	Cos	Sin	زاویه (درجه)
۰	۱	۰	۰
$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0,577$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$	$\frac{1}{2} = 0,5$	30°
۱	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707$	45°
$\sqrt{3} = 1,732$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$	60°
بی‌نهایت	۰	۱	90°
۰	-۱	۰	180°
منفی بی‌نهایت	۰	-۱	270°
۰	۱	۰	360°

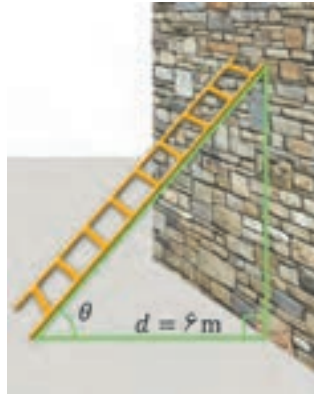
یک مثلث راست گوشه دارای پنج متغیر است (سه ضلع و دو زاویه). اگر مقدار دو متغیر معین باشد سه متغیر دیگر به آسانی قابل تعیین است.

مثال ۱: یک نردبان ۶ متری مطابق شکل ۱-۲ قرار داده شده است. اگر θ برابر ۴۵ درجه باشد، فاصله d (از پایه نردبان تا دیوار) چند متر است؟
حل: سینوس ۴۵ درجه نسبت طول d و وتر را تعیین می کند.

$$\sin\theta = \sin 45^\circ = \frac{d}{6}$$

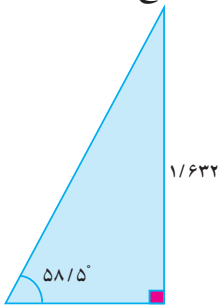
$$d = 6 \times \sin 45^\circ = 4.242$$

با استفاده از جدول ۱-۲ مقدار $\sin 45^\circ$ به دست می آید و در نتیجه فاصله d برابر ۴.۲۴۲ متر است.



شکل ۱-۲ - نردبانی که به دیوار تکیه کرده است.

مثال ۲: با استفاده از قوانین مثلثاتی، دو پاره خط رسم کنید که با هم زاویه $58/5$ درجه بسازند.
حل: از رابطه تانژانت برای رسم و یا اندازه گیری دقیق زوایا استفاده می شود. مثلاً برای رسم زاویه $58/5$ درجه، ابتدا مقدار تانژانت زاویه $58/5$ درجه از جداول مثلثات یادداشت می شود (برابر $1/632$) و سپس یک مثلث راست گوشه (مانند شکل ۱-۳) رسم می شود، طوری که نسبت ضلع مقابل به ضلع مجاور برابر با تانژانت زاویه $58/5$ درجه باشد (در این مثال نسبت عدد $1/632$ به عدد یک). دقت زاویه رسم شده به دقت رسم طول اضلاع بستگی دارد. مثلاً دقت زاویه مثلثی که اضلاع آن به ترتیب برابر با $16/32$ و 1° می باشد بسیار بیشتر از زاویه مثلثی است که اضلاع آن به ترتیب برابر $1/63$ و یک است.



شکل ۱-۳ - مثلث مثال ۲

۱-۲-۲ روابط مثلثاتی کمکی: روابط مختلفی بین نسبت‌های مثلثاتی برقرار است که می‌توان برای ساده‌سازی محاسبات از آن استفاده کرد. در رابطه (۱-۱) رابطه‌ای برای مجموع زوایا آمده است که می‌توان از آن روابط (۱-۲) و (۱-۳) را نیز به دست آورد.

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \times \cos \beta \pm \cos \alpha \times \sin \beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \times \cos \beta \mp \sin \alpha \times \sin \beta$	(۱-۱)
$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$	(۱-۲)
$\sin^2 x = 2 \sin x \times \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$ $\cos^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$	(۱-۳)

فعالیت کلاسی ۱

به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، سعی کنید از رابطه (۱-۱) روابط (۱-۲) و (۱-۳) را استخراج کنید.

مثال ۳: با استفاده از مقادیر جدول ۱-۱ نسبت‌های مثلثاتی و روابط بالا، زوایای زیر را به دست آورید.

$$\theta = 15^\circ \Rightarrow \theta = 45^\circ - 30^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(15) = \sin(45 - 30) = \sin 45 \cos 30 - \\ \sin 30 \cos 45 = 0.258 \\ \cos(15) = \cos(45 - 30) = \cos 45 \cos 30 + \\ \sin 45 \sin 30 = 0.969 \end{array} \right.$$

$$\theta = 135^\circ \Rightarrow \theta = 180^\circ - 45^\circ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sin(135) = \sin(180 - 45) = \sin 45 = 0.707 \\ \cos(135) = \cos(180 - 45) = -\cos 45 = 0.707 \end{array} \right.$$

فعالیت ۱-۱

شما در نزدیکی یک برج بلند ایستاده‌اید. اگر فاصله شما تا برج 10 متر باشد و ارتفاع چشمان شما از سطح زمین $1/7$ متر باشد و خط دید شما با افق زاویه 83 درجه بسازد، ارتفاع برج را محاسبه کنید.

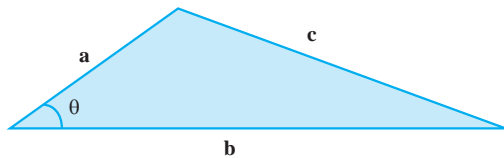
فعالیت کلاسی ۲

به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، و با استفاده از ابزارهای ترسیمی، مانند نقاله، خط کش، پرگار، متر و ...، ارتفاع ساختمان‌های مدرسه و همسایه را تخمین بزنید.

۳-۲-۱ قانون کسینوس ها: در مکانیک کاربردی در اکثر موارد اندازه دو ضلع یک مثلث و زاویه بین آنها مشخص است و ضرورت دارد اندازه ضلع سوم محاسبه شود. مناسب‌ترین روش برای محاسبه ضلع سوم استفاده از قانون کسینوس است. مطابق این قانون اگر a و b اندازه دو ضلع معین و θ زاویه بین آنها باشد، می‌توان اندازه ضلع سوم (c) را با استفاده از رابطه (۴-۱) به دست آورد.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \theta \quad \text{یا} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \theta} \quad (4-1)$$

مثال ۴: اندازه ضلع c در مثلث شکل ۵-۱ چقدر است؟



شکل ۴-۱- یک مثلث با دو ضلع و یک زاویه معلوم

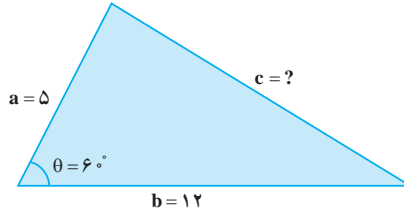
حل: از رابطه (۴-۱) یا همان قانون کسینوس‌ها می‌توان به سادگی این مسئله را حل نمود:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \theta}$$

$$c = \sqrt{5^2 + 12^2 - 2(5)(12) \times \cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{25 + 144 - 2(5)(12) \times 0.5} = \sqrt{109}$$

$$= 10.4$$



شکل ۱-۵

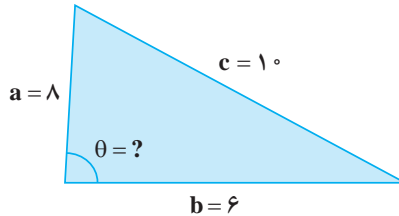
مثال ۵: اندازه اضلاع در شکل ۱-۶ مشخص شده است، زاویه θ را بیابید.
 حل: از رابطه (۱-۴) یا همان قانون کسینوس‌ها می‌توان به‌دست آورد که:

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

در نتیجه:

$$\cos \theta = \frac{36 + 64 - 100}{2 \times 6 \times 8} \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\theta = 90^\circ$$



شکل ۱-۶

توجه! اگر در قانون کسینوس‌ها مقدار زاویه بین دو ضلع 90° درجه باشد، قانون

کسینوس‌ها معادل قضیه فیثاغورث خواهد بود زیرا می‌دانیم: $\cos 90^\circ = 0$

پس:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \theta} \xrightarrow{\cos 90^\circ = 0} c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \times 0} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

در واقع قضیه فیثاغورث شکل خاصی از قانون کسینوس‌ها است. هر جا که یکی از زوایا

90° درجه باشد می‌توان به‌جای استفاده از روابط (۱-۴) از قضیه فیثاغورث بهره جست.

مثال ۶: اندازه ضلع c در مثلث شکل ۱-۷ چند متر است؟

حل: با کمک از رابطه (۱-۴) و رابطه (۱-۲) می توان این مسئله را حل نمود:

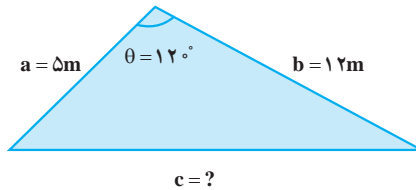
$$\cos 12^\circ = -\cos 6^\circ = -0.5$$

$$c = \sqrt{5^2 + 12^2 - 2(5)(12) \times \cos 12^\circ}$$

$$= \sqrt{25 + 144 - 2(5)(12) \times (-0.5)}$$

$$= \sqrt{25 + 144 + 60} = \sqrt{229} = 15.1 \text{ m}$$

یعنی طول ضلع سوم برابر ۱۵/۱ متر خواهد بود.



شکل ۱-۷

مثال ۷: دو یدک کش به پهنای ۸ متر یک کشتی بزرگ را یدک می کنند. طول کابل هر یدک کش برابر ۲۰ متر است. برای اینکه یدک کش ها با هم برخورد نکنند باید با فاصله ایمن ۱۲ متر از یکدیگر حرکت کنند. زاویه به وجود آمده بین کابل ها را حساب کنید (شکل ۱-۸).

حل: ابتدا باید با توجه به شکل فاصله واقعی انتهای کابل ها را بیابیم.

$$c = 12 + 2 \times \frac{8}{2} = 20 \text{ m}$$

a و b هم که ۲۰ متر هستند:

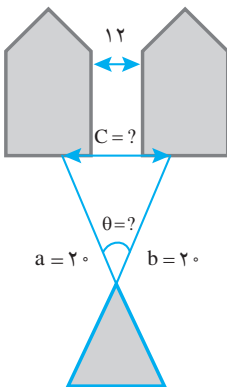
$$a = b = 20 \text{ m}$$

از مثال ۵ داریم:

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

در نتیجه:

$$\cos \theta = \frac{4000 + 4000 - 4000}{2 \times 20 \times 20} = 0.5 \xrightarrow{\text{با استفاده از جدول ۱-۱}} \theta = 60^\circ$$

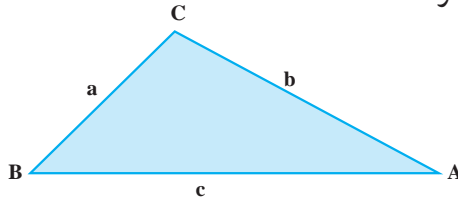


شکل ۱-۸

۴-۲-۱ قانون سینوس‌ها: این قانون کاربرد وسیعی در مکانیک دارد. مطابق این قانون در مثلثی مانند مثلث شکل ۹-۱ ارتباط و تناسب اندازه اضلاع و زوایا به شرح زیر (رابطه ۵-۱) می‌باشد.

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad (۱-۵)$$

از قانون سینوس‌ها برای تعیین اندازه ضلع سوم یک مثلث وقتی که اندازه دو ضلع دیگر و یک زاویه مقابل معین هستند استفاده می‌شود. همچنین وقتی که دو زاویه و یک ضلع معین هستند اندازه ضلع سوم را می‌توان تعیین کرد.



شکل ۹-۱- مثلث

مثال ۸: در شکل ۹-۱ با فرض اینکه اندازه b برابر ۱۲ متر، $\hat{A} = 42^\circ$ و $\hat{C} = 35^\circ$ باشد، اندازه اضلاع a و c چند متر است؟

حل: مجموع زوایای یک مثلث برابر با 180° درجه است. یعنی $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ ، پس $\hat{B} = 102^\circ$ است. لذا مطابق قانون سینوس‌ها:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

$$\frac{a}{\sin 42} = \frac{12}{\sin 102} \quad \text{و} \quad \frac{c}{\sin 35} = \frac{12}{\sin 102}$$

در صورتی که اندازه زاویه \hat{B} بین 9° و 180° درجه باشد مقدار sin آن از رابطه (۲-۱) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \Rightarrow \sin 102 = \sin(180^\circ - 78) = \sin 78$$

مقادیر سینوس زاویه ۷۸ و ۴۲ درجه از جداول مثلثات یادداشت می‌شود، که به ترتیب برابر با ۰/۹۷۸ و ۰/۶۸۲ هستند.

$$\frac{a}{0.682} = \frac{12}{0.978} \Rightarrow a = \frac{12 \times 0.682}{0.978} = 8.37 \text{ m}$$

با تکرار همین روش برای محاسبه c خواهیم داشت :

$$\frac{c}{\sin 35} = \frac{12}{\sin 102} \Rightarrow c = \frac{12 \times \sin 35}{0.978} = 7.04 \text{ m}$$

مثال ۹: در مثلث متساوی الساقین شکل ۱-۱ زاویه بین دو ساق ۳۰ درجه و طول قاعده مثلث ۲ متر است. ارتفاع مثلث را به دست آورید.

حل: ابتدا با توجه به متساوی الساقین بودن مثلث زوایای \hat{B} و \hat{C} را می‌یابیم.

$$\hat{C} = \hat{B} \text{ و } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \Rightarrow 180 = 2\hat{B} + 30$$

$$\hat{B} = \frac{180 - 30}{2} = 75^\circ$$

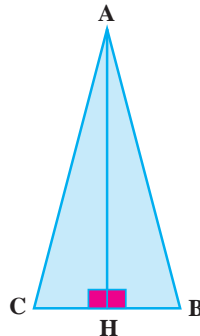
با استفاده از قانون سینوس‌ها داریم: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}}$
با ساده سازی داریم:

$$b = \frac{a \sin \hat{B}}{\sin \hat{A}} = \frac{2 \times \sin 75}{\sin 30} = 3.86 \text{ m} \Rightarrow c = 3.86 \text{ m}$$

می‌دانیم که در مثلث متساوی الساقین ارتفاع و میانه قاعده برابرند پس $CH=BH=1 \text{ m}$ است. حال می‌توانیم با استفاده از قضیه فیثاغورث در مثلث AHB اندازه ضلع AH را به دست آوریم.

$$b^2 = AH^2 + CH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{b^2 - CH^2}$$

$$AH = \sqrt{3.86^2 - 1} = 3.73$$



شکل ۱-۱

یادآوری (برای مطالعه)

این بخش از کتاب در سایر مسائل بسیار پرکاربرد است. پس فراموش نکنید که این بخش را به خوبی فراگیرید.

۳-۱- دستگاه بین المللی یکاها

دستگاه بین المللی یکاها با علامت اختصاری SI به طور کامل در کتاب درسی فیزیک مکانیک معرفی شده است. ولی با توجه به کاربردهای آن در این کتاب مواردی به طور مختصر توضیح داده می شود.

در این دستگاه از حاصل ضرب یا تقسیم کمیت دو یکا، کمیت سوم در یکای دیگر حاصل می شود. این دستگاه بر مبنای شش یکای اصلی ایجاد شده است که به ترتیب عبارت اند از: متر (واحد طول)، کیلوگرم (واحد جرم)، ثانیه (واحد زمان)، کلونین (واحد دما)، آمپر (واحد شدت جریان برق) و شمع (واحد شدت روشنایی). (در این کتاب پیرامون دما، شدت جریان برق و شدت روشنایی بحث نمی شود ولی به منظور شرح کامل دستگاه بین المللی یکاها به طور خلاصه معرفی شدند.)

از حاصل ضرب یک واحد طول (یک متر) در یک واحد طول (یک متر)، واحد سطح (یک مترمربع) حاصل می شود.

$$1\text{m} \times 1\text{m} = 1\text{m}^2$$

از تقسیم یک واحد طول یا فاصله (یک متر) بر یک واحد زمان (یک ثانیه) یک واحد سرعت (یک متر بر ثانیه) حاصل می شود.

$$1\text{m} \div 1\text{s} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

از حاصل ضرب یک واحد جرم (یک کیلوگرم) با یک واحد شتاب (یک متر بر مجذور ثانیه) یک واحد نیوتون (یک نیوتون) حاصل می شود.

$$1\text{Kg} \times 1\text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 1 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1\text{N}$$

از نتیجه اعمال یک واحد نیرو (یک نیوتون) در یک واحد فاصله (یک متر) یک واحد کار (یک ژول) حاصل می شود.

$$1\text{N} \times 1\text{m} = 1\text{J}$$

یکاهای مورد استفاده در این کتاب اعم از یکاهای اصلی و یکاهای مشتق و مرتبط با یکاهای اصلی در جدول ۱-۳ معرفی می‌شوند.

یکاهایی که یادآور اشخاص معروف هستند با حروف بزرگ لاتین نشان داده می‌شوند (مانند N برای نیوتون، W برای وات، Hz برای هرتز، J برای ژول) و سایر یکاها با حروف کوچک لاتین نشان داده می‌شوند.

۱-۴- توان‌های ۱۰

گاهی مقادیر مربوط به یک کمیت بسیار کوچک و یا بزرگ هستند، به نحوی که نمایش کامل آنها به دلیل زیاد بودن تعداد ارقام مطلوب نیست و باعث ایجاد خطا در زمان خوانش آنها می‌شود. برای ساده‌سازی نمایش آنها از پیشوندهایی استفاده می‌شود که نماینده توان‌های ۱۰ است.

جدول ۱-۳

علامت	پیشوند	استاندارد نگارش	ضرب عامل
T	tera (ترا)	10^{12}	۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
G	giga (گیگا)	10^9	۱/۰۰۰/۰۰۰/۰۰۰
M	mega (مگا)	10^6	۱/۰۰۰/۰۰۰
K	kilo (کیلو)	10^3	۱/۰۰۰
h	hecto (هکتو)	10^2	۱۰۰
da	deca (دکا)	10^1	۱۰
d	deci (دسی)	10^{-1}	۰/۱۰
c	centi (سنتی)	10^{-2}	۰/۰۱
m	milli (میلی)	10^{-3}	۰/۰۰۱
μ	micro (میکرو)	10^{-6}	۰/۰۰۰۰۰۱
n	nano (نانو)	10^{-9}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۱
p	picco (پیکو)	10^{-12}	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱

مثال ۱۰: نیروی وارد بر یک تیر برابر $235 \times 10^3 \text{ N}$ است که نمایش این عدد را می‌توان به شکل $23/5 \times 10^5 \text{ KN}$ یا $23/5 \text{ KN}$ نمایش داد.

۵-۱- مقایسه کمیت‌ها در دستگاه‌های مختلف

با وجود گسترش تجهیزات و سیستم‌های متریک هنوز در برخی کشتی‌ها تجهیزاتی وجود دارند که بر مبنای واحدهای اندازه‌گیری غیرمتریک طراحی و ساخته شده‌اند. بسیاری از اوقات ضرورت دارد واحدهای اندازه‌گیری به یکدیگر تبدیل شوند. برخی مقایسه‌ها و تبدیل‌ها به شرح زیر است.

نیرو:	طول:
$1 \text{ lbf} = 4/448 \text{ N}$ (پوند نیرو)	$1 \text{ in} = 2/54 \text{ cm} = 25/4 \text{ mm}$ (اینچ)
$1 \text{ tonf} = 9/964 \text{ KN}$ (تن نیرو)	$1 \text{ ft} = 30/48 \text{ m}$ (فوت)
فشار:	$1 \text{ yd} = 9/144 \text{ m}$ (یارد)
$1 \text{ lbf. ft}^{-2} = 47/88 \text{ N. m}^{-2}$ (پاسکال Pa)	$1 \text{ mile} = 1/609 \text{ km}$ (مایل)
$1 \text{ bar} = 100 \text{ KN. m}^{-2}$	$1 \text{ مایل دریایی} = 1/852 \text{ km}$ (بین‌المللی)
$1/013 \text{ bar} = 1 \text{ atm}$ (اتمسفر)	

تحقیق: با استفاده از منابع مکتوبی که هنرآموزان معرفی می‌کند سایر تبدیل‌ها را به دست آورید و آنها را در جدولی که به همین منظور در ادامه قرار دارد، بنویسید.

جدول تحقیقی ۴-۱- تبدیل واحدهای متریک به سایر واحدهای عرف در کشتی!

	جرم
	حجم
	توان
	انرژی

خودآزمایی فصل اول



۱- جاهای خالی را پر کنید.

الف) سینوس یک زاویه برابر است با نسبت ضلع _____

به _____.

ب) _____ یک زاویه برابر است با نسبت ضلع مقابل زاویه بر ضلع مجاور زاویه.

ج) ۱ اینچ برابر _____ میلی‌متر است.

۲- گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) طول وتر یک مثلث راست گوشه 20° سانتی‌متر و یک زاویه آن 60° درجه است. طول ضلع

مجاور این زاویه چقدر است؟

۱- $17/3$ ۲- 10 ۳- 20 ۴- 30

ب) در مثال قبل طول ضلع مقابل زاویه را بیابید.

۱- $17/3$ ۲- 10 ۳- 20 ۴- 30

ج) دو ضلع یک مثلث راست گوشه به ترتیب ۶ و ۴ واحد است. زاویه بین وتر و ضلع کوتاه‌تر

چند درجه است؟

۱- $32/7$ ۲- 30 ۳- $56/3$ ۴- 70

د) در یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه طول ساق‌ها ۱۲ واحد است. طول وتر تقریباً چقدر

است؟

۱- 144 ۲- 288 ۳- 17 ۴- 12

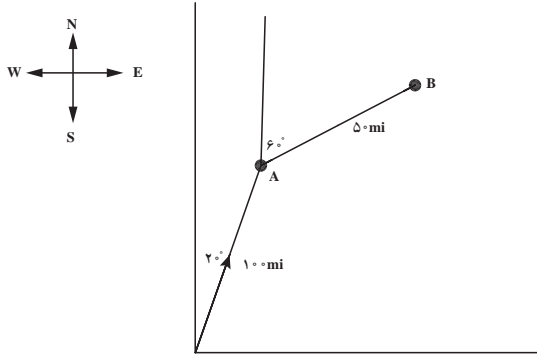
۴- یک نردبان ۵ متری با زاویه 35° درجه نسبت به دیوار قرار داده شده است. فاصله نقطه

بالایی نردبان تا کف زمین چقدر است؟

۵- یک کشتی فاصله 100 مایل را در مسیر 20° درجه شمال شرقی و سپس فاصله 50 مایل را

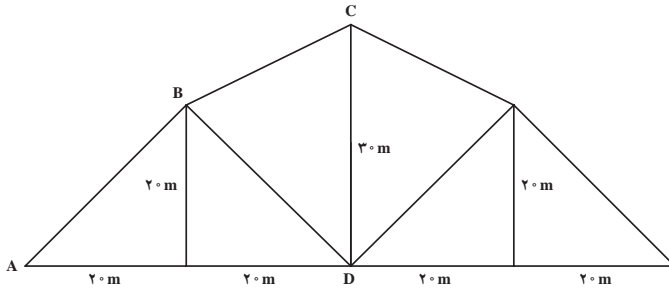
در مسیر 60° درجه شمال شرقی مطابق شکل ۱۱-۱ دریاوردی می‌کند. فاصله کشتی از نقطه شروع

چقدر است؟



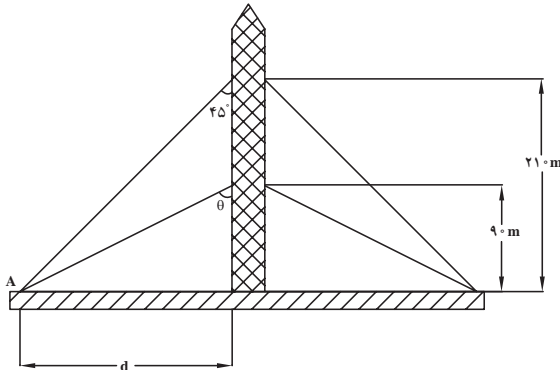
شکل ۱-۱۱

۶- خرپای یک سقف دارای اعضایی با اندازه‌های شکل ۱-۱۲ است. اندازه زوایای DBC و BCD چقدر است؟ طول ضلع BC چقدر است؟



شکل ۱-۱۲

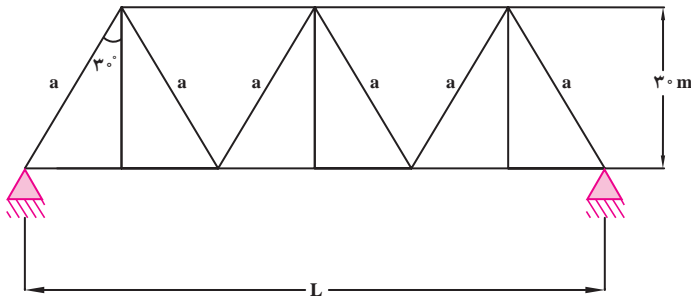
۷- یک آنتن فرستنده تلویزیون به ارتفاع 300 متر مطابق شکل ۱-۱۳ با کابل‌های فلزی مهار شده است. فاصله تکیه گاه A تا آنتن (فاصله d) و اندازه زاویه θ (زاویه بین کابل‌های مهار تحتانی و آنتن) چقدر است؟



شکل ۱-۱۳

۸- ارتفاع یک مثلث راست گوشه 40° سانتی متر و قاعده آن 90° سانتی متر است. طول وتر و زاویه بین وتر و قاعده چقدر است؟

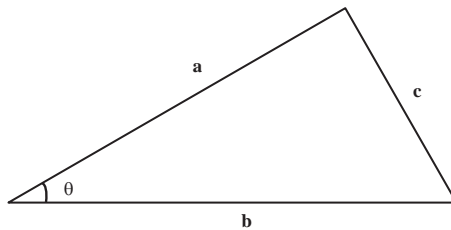
۹- چنانچه ارتفاع یک مثلث متساوی الساقین 50° سانتی متر و اندازه قاعده آن 25 سانتی متر باشد اندازه دو ضلع مساوی و زاویه آنها با قاعده چقدر است؟
 ۱۰- فاصله L در شکل ۱-۱۴ چقدر است؟



شکل ۱-۱۴

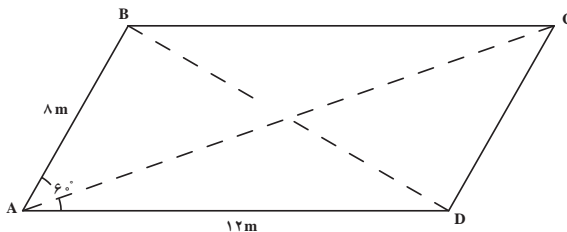
۱۱- با استفاده از روش تانژانت خطی رسم کنید که با یک خط افقی مبنا زاویه $57/2^\circ$ درجه تشکیل دهد.

۱۲- در شکل ۱-۱۵ در صورتی که $a = 5\text{cm}$ ، $b = 10\text{cm}$ و $\theta = 30^\circ$ درجه باشد اندازه ضلع c چقدر است؟



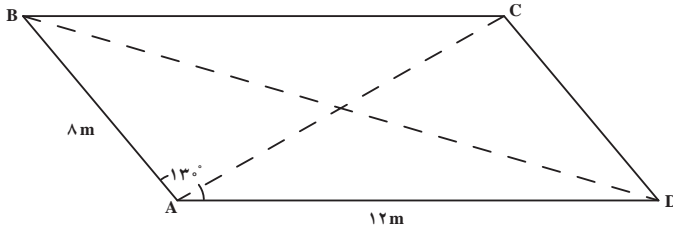
شکل ۱-۱۵

۱۳- اندازه قطرهای AC و BD در متوازی الاضلاع شکل ۱-۱۶ چقدر است؟

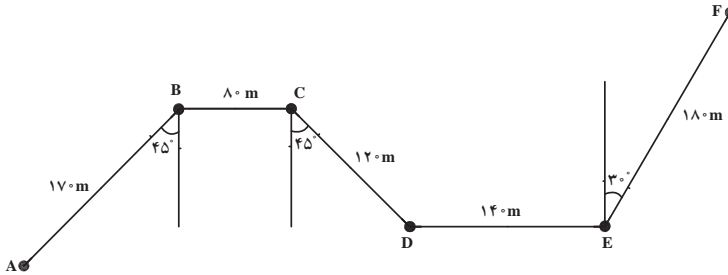


شکل ۱-۱۶

۱۴- اندازه قطرهای AC و BD در متوازی الاضلاع شکل ۱۷-۱ چقدر است؟
 ۱۵- یک فایق مسیر زیگزاگ را از نقطه A تا نقطه F مطابق شکل ۱۸-۱ می‌بینید. خط AF را رسم کرده و اندازه آن را تعیین کنید.



شکل ۱۷-۱



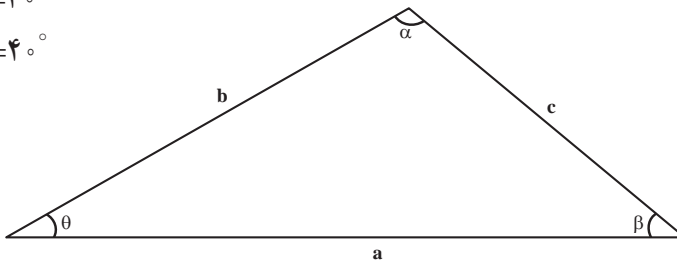
شکل ۱۸-۱

۱۶- در مثلث شکل ۱۹-۱ اندازه ضلع و زوایای معین نشده، چقدر است؟

$$a = 100 \text{ cm}$$

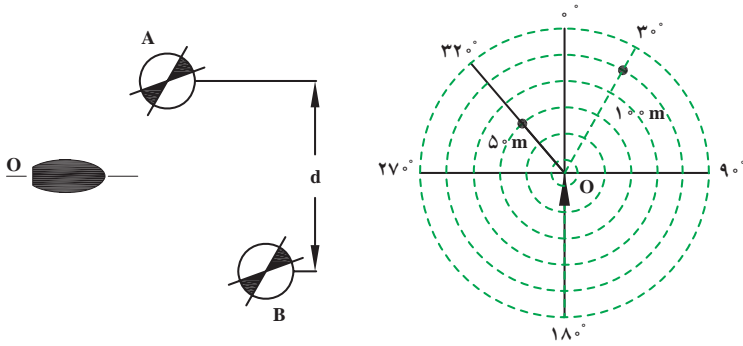
$$\theta = 3^\circ$$

$$\beta = 4^\circ$$



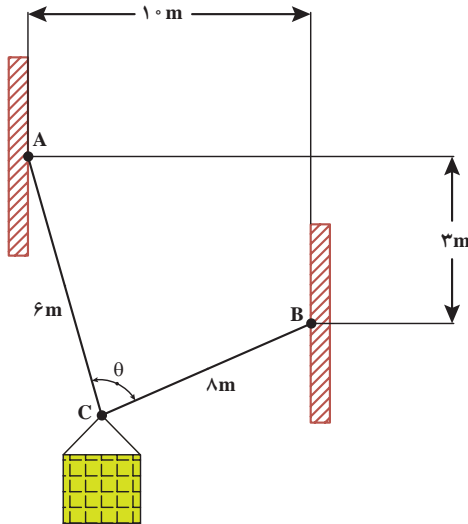
شکل ۱۹-۱

۱۷- یک کشتی مطابق شکل ۲۰-۱ باید از بین دو بویه A و B بگذرد. فواصل A و B از کشتی به ترتیب 5° و 10° متر است. اندازه d چقدر است؟



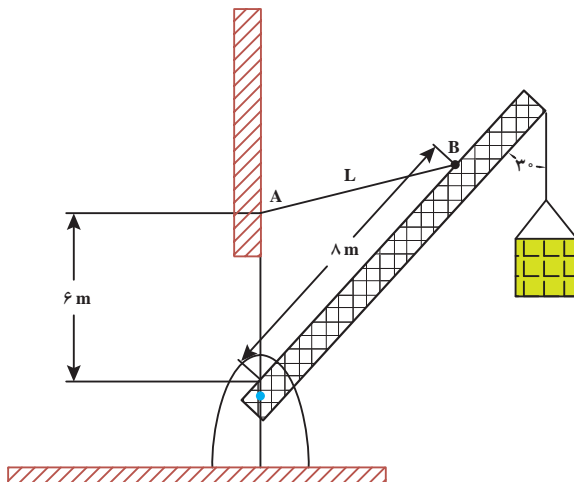
شکل ۱-۲۰

۱۸- وزنه‌ای مطابق شکل ۱-۲۱ از کابل‌های AC و BC آویزان است. زاویه θ بین این دو کابل چقدر است؟



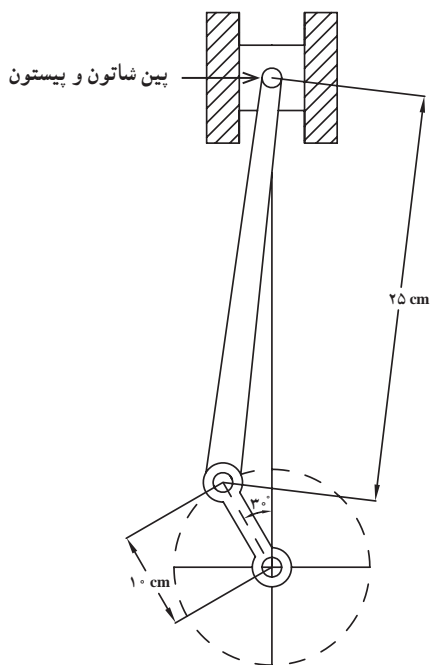
شکل ۱-۲۱

۱۹- بوم جرثقیل شکل ۱-۲۲ به وسیله کابل AB مهار شده است. طول کابل L و زاویه بین کابل و بوم چقدر است؟



شکل ۱-۲۲

۲۰- در شکل ۱-۲۳ فاصله بین شاتون و پیستون در این لحظه تا نقطه مرگ بالا برای همین بین چقدر است؟ فاصله بین نقطه مرگ بالا و پایین برای این بین چقدر است؟



شکل ۱-۲۳

۲

فصل

استفاده از بردار برای تحلیل نیروها

هدف کلی

استفاده از بردار در تحلیل‌های نیرویی

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

- ۱- بردار را تعریف کند.
- ۲- کمیت‌های برداری و نرده‌ای را تشخیص دهد.
- ۳- جمع برداری را به روش ترسیمی و تحلیلی انجام دهد.
- ۴- ضرب داخلی و خارجی را بر روی بردارهای ۲ بعدی انجام دهد.

۱-۲- کمیت‌های برداری

شما در دوران راهنمایی و ابتدایی با مبحث محورهای مختصات و بردار آشنا شده‌اید. اما شاید تاکنون به کاربرد آنها فکر نکرده‌اید یا با آنها برخوردی نداشته‌اید. در این کتاب به‌وفور از محاسبات برداری و مختصاتی در علم مکانیک استفاده شده است. اما بهتر است قبل از آن بدانیم چرا این محاسبات در علم استاتیک و دینامیک کاربرد دارد.

در فیزیک سال گذشته با کمیت‌های فراوانی روبه‌رو شدید. برخی از این کمیت‌ها فقط مقدار دارند، مثل کار^۱، جرم^۲، دما^۳، فاصله^۴ و تندی^۵. این‌گونه کمیت‌ها را کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای می‌نامند.

اما برخی کمیت‌ها هستند که علاوه بر اندازه، راستا و جهت نیز دارند. به عنوان مثال فاصله جزیره قشم (از بندر قشم) تا بندر عباس ۸/۱۰ مایل (۲۰ کیلومتر) است. اما آیا به نظر شما برای طی کردن یک مسافت دریایی دانستن فاصله به تنهایی کافی است؟ مسلماً برای دانستن موقعیت این دو بندر نسبت به هم لازم است، طول و عرض جغرافیایی هر دو و با راستا و جهت حرکت از بندری به بندر دیگر مشخص شود. به همین دلیل است که در کشتی‌ها از وسایل جهت‌یابی مختلفی استفاده می‌شود. برای مثالی دیگر می‌توان به نیرو اشاره کرد. اگر یک جعبه را با نیروی ۱۰۰ نیوتن روی زمین بکشید، به کدام طرف حرکت می‌کند؟ باید اول معلوم کنید که این نیرو در چه جهت و در چه راستایی وارد شده است. مثلاً اگر نیرو به سمت پایین وارد شود اصلاً جعبه از جایش تکان نمی‌خورد بلکه به زمین فشرده می‌شود.

۱- work

۲- mass

۳- temperature

۴- distance

۵- speed



شکل ۲-۲- سرعت سنج دریایی دیجیتالی



شکل ۲-۱- سرعت سنج کشتی قدیمی

شکل ۲-۱ و شکل ۲-۲ سرعت سنج‌های دریایی را نشان می‌دهد. در واقع این سرعت سنج‌ها فقط تندی را نشان می‌دهند و اطلاعاتی در مورد جهت در اختیار نمی‌گذارند. (در واقع شکل ۲-۱ یک دسته تلگراف است و نه یک سرعت سنج واقعی به این معنی که فقط سرعت دلخواه ناخدا را نمایش می‌دهد نه سرعتی که کشتی واقعاً به آن رسیده است.) به همین دلیل از دیرباز ملوانان از وسایلی همچون قطب‌نما^۱ (شکل ۲-۳) و یا نشان‌دهنده راه کشتی^۲ (شکل ۲-۴) استفاده کرده‌اند.



شکل ۲-۴- قطب‌نمای دیجیتالی یا نشان‌دهنده راه کشتی



شکل ۲-۳- قطب‌نمای معمولی

۱- compass

۲- cruise indicator

توضیح

سرعت^۱ به دلیل اینکه جهت و راستای حرکت را نشان می‌دهد، یک کمیت برداری و تندی به دلیل اینکه صرفاً مسافت طی شده در زمان را نشان می‌دهد یک کمیت نرده‌ای است.

جدول ۱-۲ کمیت‌های برداری و نرده‌ای را که در این کتاب کاربرد دارند، فهرست کرده است.

جدول ۱-۲- کمیت‌های برداری و نرده‌ای

نماد	واحد	نوع	کمیت
\vec{F}	N نیوتن	برداری	نیرو
t	s ثانیه	نرده‌ای	زمان
\vec{a}	متر بر مجذور ثانیه $m \cdot s^{-2}$	برداری	شتاب
\vec{v}	$m \cdot s^{-1}$ متر بر ثانیه	برداری	سرعت
V	$m \cdot s^{-1}$ متر بر ثانیه	نرده‌ای	تندی
s یا d	m متر	نرده‌ای	مسافت
$\vec{\Delta R}$	m متر	برداری	جاب‌جایی

دقت داشته باشید که ممکن است در کتاب‌های دیگر و یا در بخش‌های دیگر همین کتاب از نمادهای دیگری برای این کمیت‌ها استفاده شود و یا برای ساده سازی از نوشتن علامت بردار در بالای آن نماد خودداری شود. در این موارد باید به توضیحات توجه کرد و حل مناسب را با توجه به برداری یا نرده‌ای بودن آن کمیت، ارائه کرد.

تعریف بردار: کمیتی را که هم اندازه و هم راستا و جهت داشته باشد، بردار می‌گویند. در این

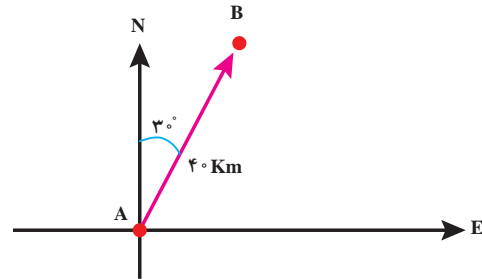
کتاب فقط بردارهایی که در مختصات دوبعدی هستند مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲-۲ محاسبات برداری

قبل از اینکه به نحوه محاسبات برداری بپردازیم باید خواص بردار و نحوه نمایش آن یادآوری شود. بردار را می‌توان با بزرگی و جهت آن تعریف کرد.

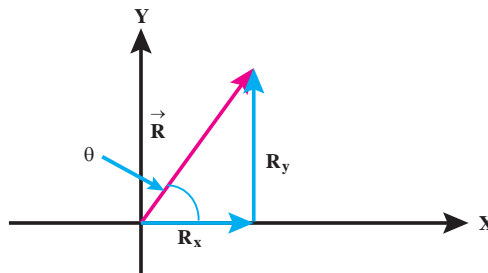
مثال ۱: یک کشتی فاصله شهر A تا B را به اندازه 40° کیلومتر و در جهت 30° درجه نسبت به شمال و به سمت شرق حرکت کرده است بردار این جابجایی را رسم کنید (شکل ۲-۵).

حل: ابتدا برای رسم این بردار دو محور مختصات رسم می‌کنیم. خطی در امتداد زاویه 30° درجه از محور شمال رسم می‌کنیم. با مقیاس‌بندی مناسب طول مورد نظر معادل 40 کیلومتر را جدا می‌کنیم.



شکل ۲-۵ بردار جابجایی یک کشتی

می‌توان بردار را با مؤلفه‌های طول و عرض (X و Y) نیز نمایش داد. فرض کنید برداری به اندازه $|\vec{R}|$ داریم. این بردار با محور X زاویه θ می‌سازد. تصویر بردار \vec{R} روی محور X ها را مؤلفه R_x و تصویر بردار روی محور Y را مؤلفه R_y می‌نامیم. این دو نوع تعریف با استفاده از آموزه‌های فصل قبل به یکدیگر تبدیل خواهند شد.



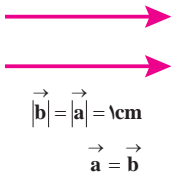
شکل ۲-۶ مؤلفه‌های یک بردار

در این جا می‌توان بردار \vec{R} را به جای بزرگی و زاویه، به کمک مؤلفه‌های R_x و R_y تعریف کرد. یعنی بگوییم به اندازه R_x در جهت X و سپس به اندازه R_y در جهت Y ، بردار \vec{R} را تشکیل می‌دهد.

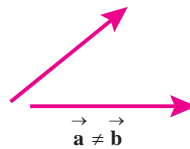
به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، سعی کنید از روابطی که در فصل ۱ خوانده‌اید استفاده کنید و مؤلفه‌های برداری شکل ۶-۲ را برحسب بزرگی و زاویه بردار به‌دست آورید.

۱-۲-۲- خواص بردار : خواص زیر برای بردارهای مفروض است :

۱- اگر دو بردار جهت، راستا و اندازه مساوی داشته باشند آن دو بردار را همسنگ می‌نامند. به زبان شیواتر، آن دو بردار با هم برابرند. فقط ممکن است مبدأ آنها متفاوت باشد.



شکل ۷-۲- ب- دو بردار همسنگ



شکل ۷-۲- الف- دو بردار هم اندازه ناهمسنگ

۲- حاصل جمع دو بردار با هم یک بردار جدید خواهد بود. (در مورد تفریق هم همین‌طور

است.)

۳- حاصل ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار یک بردار خواهد بود، به شکلی که بزرگی آن

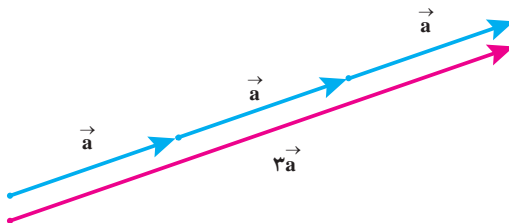
چند برابر می‌شود، راستای آن ثابت می‌ماند و اگر کمیت نرده‌ای علامت مثبت داشته باشد، جهت ثابت

می‌ماند و گرنه جهت نیز تغییر خواهد کرد. یعنی :

$$|a \times \vec{A}| = |a| \times |\vec{A}| \quad (۲-۱)$$

و

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Leftrightarrow a \times \vec{A} = a \times \vec{A}_x + a \times \vec{A}_y \quad (۲-۲)$$

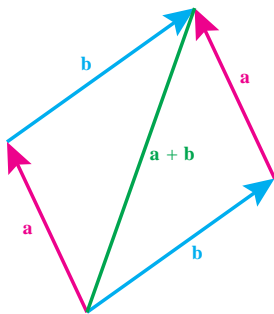


شکل ۷-۲- ج- ضرب مقدار عددی در بردار

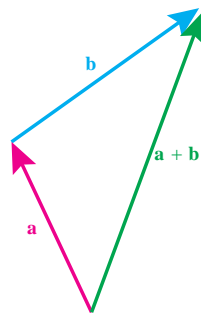
۴- برای ضرب بردارها دو نوع ضرب تعریف می‌شود. ضرب داخلی یا نقطه‌ای و ضرب خارجی یا کراس. حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار یک کمیت نرده‌ای خواهد بود و حاصل ضرب خارجی دو بردار یک کمیت برداری.

۲-۲-۲ جمع برداری: همان‌طور که در سال‌های گذشته آموخته‌اید، بردارها را می‌توان به دو روش با هم جمع کرد. روش ترسیمی و روش تحلیلی. روش ترسیمی به منظور دست‌یابی سریع و بدون استفاده از محاسبات پیچیده به پاسخ مورد نظر کاربرد دارد و روش تحلیلی به منظور دست‌یابی به پاسخ دقیق به‌کار می‌رود. در روش ترسیمی از دو روش متوازی‌الاضلاع و روش مثلث استفاده می‌شود. شکل ۸-۲ الف، جمع به روش مثلث و شکل ۸-۲ ب، جمع به روش متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد.

الف) روش مثلث: در این روش انتهای یکی از بردارها (در این جا \vec{a}) را روی ابتدای بردار دیگر (در این جا \vec{b}) می‌گذاریم. سپس ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کنیم. پاره خط جدید بردار برآیند جمع دو بردار $(\vec{a} + \vec{b})$ است.



شکل ۸-۲-ب - جمع به روش متوازی‌الاضلاع



شکل ۸-۲-الف - جمع به روش مثلث

ب) روش متوازی‌الاضلاع: در این روش ابتدای آنها را روی هم قرار می‌دهیم. سپس از انتهای آنها بردار همسنگ بردار دیگر را رسم می‌کنیم. مثلاً در این جا از انتهای بردار \vec{b} همسنگ بردار \vec{a} را رسم می‌کنیم. یک متوازی‌الاضلاع به دست می‌آید. قطر این چهار ضلعی برابر بردار برآیند جمع دو بردار است.

فکر می‌کنید چه موقع از روش مثلث و چه زمانی از روش متوازی‌الاضلاع

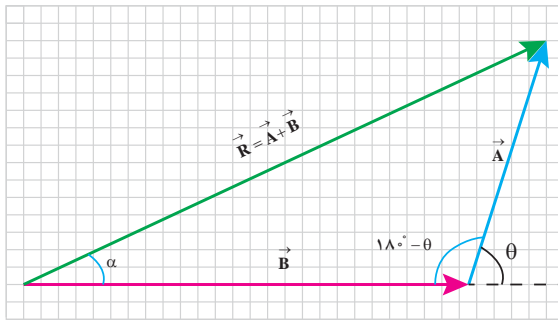
باید استفاده کرد؟

برای استفاده از روش ترسیمی استفاده از نقاله و خط کش الزامی است.

مثال ۲: بردار برآیند دو بردار A و B را رسم کنید، طول بردار برآیند و زاویه‌ای که با بردار B می‌سازد را محاسبه کنید.

$$\theta = 71/7^\circ, |\vec{B}| = 26 \text{ و } |\vec{A}| = 15/8$$

حل: ابتدا با استفاده از خط کش و نقاله بردارها را رسم می‌کنیم. یک‌بار برای حل با روش مثلث (شکل ۲-۹) و یک‌بار برای حل با روش متوازی‌الاضلاع (شکل ۲-۱۰) رسم را کامل می‌کنیم.



شکل ۲-۹- رسم بردارهای مثال ۲

$$180^\circ - \theta = 108/3^\circ \quad \text{داریم:}$$

با استفاده از این رابطه و قاعده کسینوس‌ها اندازه بردار برآیند به دست می‌آید:

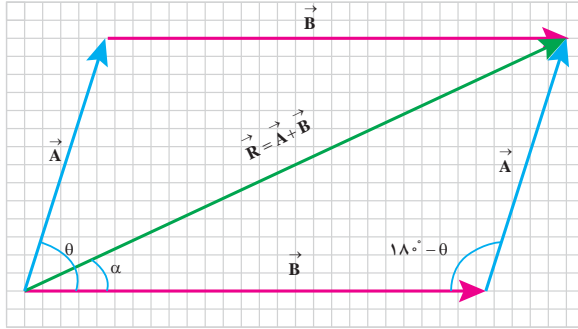
$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2 \times |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(180^\circ - \theta)} = \sqrt{1186} = 34/4$$

با استفاده از قانون سینوس‌ها نیز می‌توانیم زاویه بین بردار برآیند و بردار B را محاسبه کنیم.

می‌توان برای ساده‌سازی در زمان نمایش طول بردار، علامت بردار و قدرمطلق را حذف کرد.

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin(180^\circ - \theta)} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{A}{R} \sin(180^\circ - \theta) = \frac{15/8}{34/4} \times 0/95 = 0/436 \Rightarrow \alpha = 25/9^\circ$$

اگر از روش متوازی‌الاضلاع هم استفاده کنیم باز به نتیجه مشابه می‌رسیم. این روش در شکل ۲-۱۰ رسم شده است.



شکل ۱-۲- رسم بردارهای مثال ۲

فعالیت ۱-۲

– برآیند دو بردار به طول‌های 10° و 15° واحد را در ۳ حالات زیر حساب کنید.
از هر دو روش ترسیمی استفاده کنید. چه نکته خاصی در هر یک از این حالات وجود دارد؟

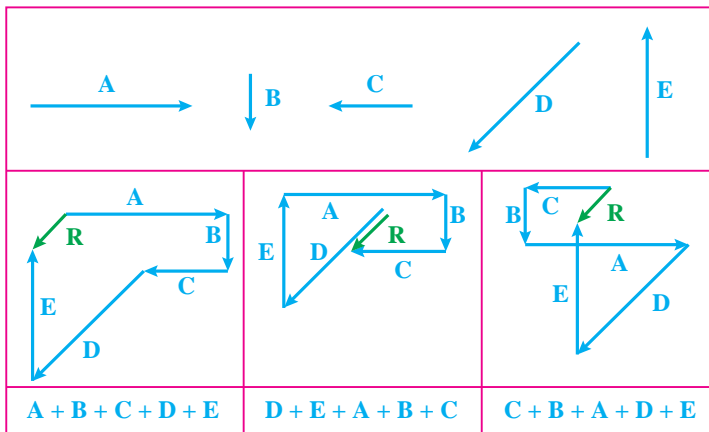
- دو بردار بر هم عمود باشند.
- دو بردار با یکدیگر زاویه 30° درجه بسازند.
- دو بردار با هم زاویه 21° درجه بسازند.
- دو بردار هم راستا و هم جهت باشند.
- دو بردار هم راستا و در خلاف جهت هم باشند.

جمع بیش از ۲ بردار: برای جمع بیش از ۲ بردار می‌توانید ابتدا دو بردار را به‌عنوان بردارهای اول انتخاب کنید و سپس با هم جمع کنید و در مرحله بعد بردار برآیند دوبردار اول را با بردار سوم جمع نمایید. این کار را تا به دست آوردن بردار برآیند کل بردارها ادامه دهید.

اما روش دیگری وجود دارد به نام روش چند ضلعی، در این روش ابتدای هر بردار را در انتهای بردار قبلی قرار می‌دهید تا یک چند ضلعی باز تشکیل شود. ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کنید. پاره خط به‌دست آمده، برآیند کل بردارها است. ترتیب انتخاب بردارها در هیچ یک از روش‌ها تأثیری روی پاسخ ندارد.

در شکل ۱۱-۲ نمونه‌ای از جمع چند بردار به روش چند ضلعی آمده‌است. در این شکل ۳

ترتیب مختلف برای جمع بردارها در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌کنید که در هر سه حالت، پاسخها یکسان است.



شکل ۱۱-۲- بردار برآیند ۵ بردار به روش ترسیمی

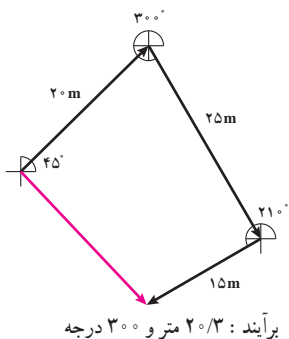
مثال ۳: فرض کنید در یک مسابقه شنا شرکت کرده‌اید. در مسابقه به شما می‌گویند در سه جهت و به طول‌های مشخص باید شنا کنید. انتخاب اولویت مسیرها با خودتان است. اطلاعات مسئله به شکل زیر است:

(زوایای اعلام شده برحسب درجه است)

۲۰ متر	۲۵ متر	۱۵ متر
۴۵ درجه	۳۰۰ درجه	۲۱۰ درجه

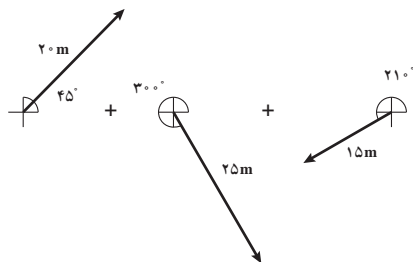
نقطه نهایی در چه فاصله‌ای از مبدأ واقع شده‌است.

حل: ابتدا شکل را رسم می‌کنیم.



برآیند: ۲۰/۳ متر و ۳۰۰ درجه

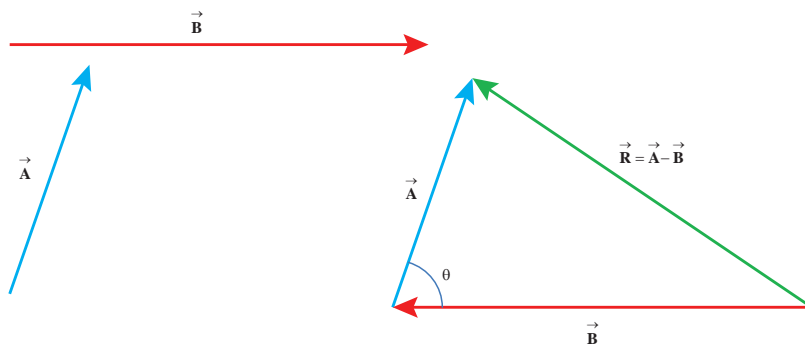
شکل ۱۲-۲- ب- جمع بردارهای مثال ۳



شکل ۱۲-۲- الف- بردارهای مثال ۳

همان‌طور که در متن درس آمده است فرقی نمی‌کند که ابتدا کدام مسیر را انتخاب کنید. لذا پاسخی که با انتخاب در شکل ۱۲-۲ ب به دست آمده است تنها پاسخ این مسئله می‌باشد.

۲-۲-۳ تفریق بردارها: برای تفریق دو بردار کاملاً مانند جمع در روش مثلث عمل می‌شود. به عنوان مثال در شکل ۱۳-۲ می‌خواهیم برآیند $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$ را محاسبه کنیم. برای این کار کافی است معادله را به این شکل بازنویسی کنیم: $\vec{R} = \vec{A} + (-\vec{B})$ در نتیجه به یک جمع می‌رسیم که در آن بردار B معکوس شده است.



شکل ۱۳-۲- تفریق بردارها

فعالیت ۲-۲

در مثال ۲ به جای جمع بردارها، $\vec{A} - \vec{B}$ را محاسبه کنید.

۲-۲-۴ تجزیه بردار: همان‌طور که در فعالیت کلاسی ۱ آمد، می‌توان هر بردار (۲ بعدی) را به دو مؤلفه در راستای محورهای X و Y تجزیه کرد. برای اینکه بتوان از این تجزیه در محاسبات استفاده کرد، برداری به نام بردار یکه تعریف شده است.

بردار یکه:

برداری است به طول واحد در راستای یکی از محورهای مختصات.

بردار یکه در راستای محور X را بردار یکه \hat{i} می‌نامند.

بردار یکه در راستای محور Y را بردار یکه \hat{j} می‌نامند.

حال می‌توان بردارهای مؤلفه بردار R در شکل ۶-۲ را به این شکل نوشت:

$$\overline{R_x} = R_x \hat{i} \quad \text{و} \quad \overline{R_y} = R_y \hat{j}$$

در نتیجه بردار R را می‌توان به دو مؤلفه برداری خود به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} \quad (2-3)$$

از طرفی در فعالیت کلاسی ۱ مقادیر مؤلفه‌ها به شکل زیر به دست آمد:

$$R_x = |\vec{R}| \cos \theta \quad (2-4)$$

$$R_y = |\vec{R}| \sin \theta$$

حال می‌توان از معادله ۲-۳ و ۲-۴ به خوبی برای جمع و تفریق برداری استفاده کرد. همچنین می‌توان برای نمایش یک بردار به جای داشتن یک زاویه و یک طول از دو مؤلفه آن استفاده کرد. مثلاً:

بردار R به طول ۵ واحد و زاویه ۳۷ درجه نسبت به محور X را می‌توان به شکل زیر نمایش

داد:

$$R_x = |\vec{R}| \cos \theta = 5 \cos(37) = 5 \times 0.8 = 4$$

$$R_y = |\vec{R}| \sin \theta = 5 \sin(37) = 5 \times 0.6 = 3$$

$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} = 4\hat{i} + 3\hat{j} \quad \text{یا} \quad \vec{R} = (4, 3)$$

برای جمع دو بردار نیز می‌توان از رابطه (۲-۵) استفاده کرد:

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} C_x = B_x + A_x \\ C_y = B_y + A_y \end{cases} \quad (2-5)$$

با استفاده از فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (2-6)$$

و همچنین با استفاده از رابطه (۲-۴) و روابط موجود در فصل ۱ می‌توان رابطه زیر را به دست

آورد:

$$\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} \quad (2-7)$$

مثال ۴: جمع دو بردار $\vec{A} = 2\hat{i} - 1\hat{j}$ و $\vec{B} = 0\hat{i} - 3\hat{j}$ را محاسبه کنید.

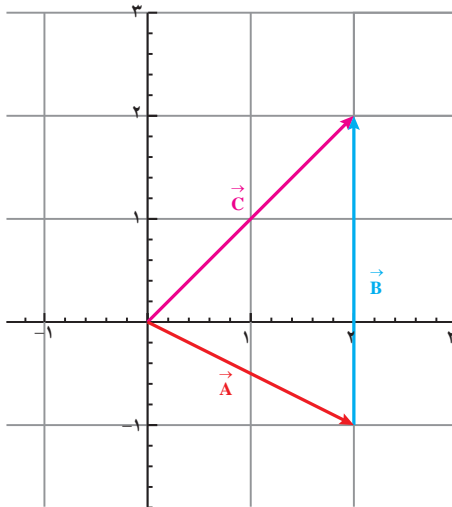
حل: توجه کنید که برای حل این مثال ساده می‌توان از دو روش استفاده کرد. روش اول استفاده از ترسیم است و روش دوم روش تجزیه بردار و استفاده از روابط (۲-۴) و (۲-۵) (یا روش تحلیلی) که در ادامه خواهد آمد.

$$\vec{B} = 0\hat{i} - 3\hat{j}$$

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 1\hat{j}$$

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \begin{cases} C_x = B_x + A_x \\ C_y = B_y + A_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_x = 2\hat{i} - 0\hat{i} \\ C_y = 3\hat{j} - 1\hat{j} \end{cases} \Rightarrow \vec{C} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

هر دو روش نیاز به ترسیم دارد. اما در روش تحلیلی ترسیم فقط به فهم بهتر مسئله کمک می‌کند. لذا شما هم در حل مسائل برداری در صورت استفاده از روش تحلیلی، ترسیم را فراموش نکنید. اما نیازی به دقت بالا در ترسیم و ابزارهای ترسیمی خاص وجود ندارد.



شکل ۱۴-۲- بردارهای مثال ۴

مثال ۵: یک کشتی از بندر A به سمت بندر B و سپس از بندر B به سمت بندر C حرکت می‌کند. فاصله AB برابر 120°Km و در جهت 30° درجه نسبت به شرق و فاصله BC برابر 60°Km و در جهت 45° - درجه نسبت به محور شرق است. بردار جابه جایی AC را از روش تحلیلی محاسبه کنید.

حل: برای شروع به حل باید بردارهای \overline{AB} و \overline{BC} را به مؤلفه‌های عمودی و افقی تجزیه کنیم.
 برای این کار از رابطه (۲-۴) کمک می‌گیریم.

$$\overline{AB}_x = 1200 \times \cos(30^\circ) \hat{i} = 1039 / 2 \hat{i}$$

$$\overline{AB}_y = 1200 \times \sin(30^\circ) \hat{j} = 600 \hat{j}$$

$$\overline{BC}_x = 1200 \times \cos(-45^\circ) \hat{i} = 424 / 3 \hat{i}$$

$$\overline{BC}_y = 1200 \times \sin(-45^\circ) \hat{j} = -424 / 3 \hat{j}$$

حال با استفاده از رابطه (۲-۵) بردارها را جمع می‌کنیم:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$

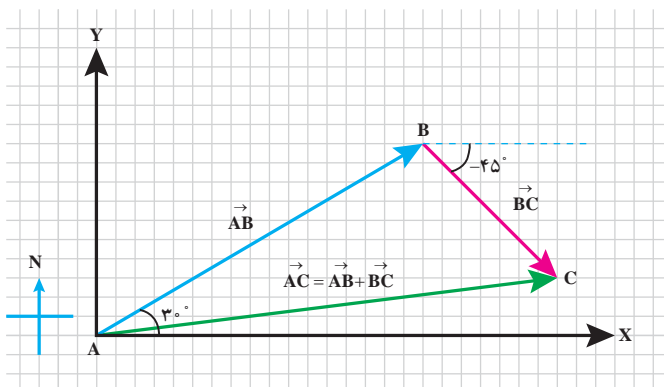
$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AC}_x = \overline{AB}_x + \overline{BC}_x = 1463 / 5 \hat{i} \\ \overline{AC}_y = \overline{AB}_y + \overline{BC}_y = 175 / 7 \hat{j} \end{cases}$$

در نتیجه بردار جابه‌جایی کشتی که همان بردار AC باشد به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\overline{AC} = 1463 / 5 \hat{i} + 175 / 7 \hat{j}$$

با استفاده از فیثاغورث (یعنی رابطه ۲-۶) طول این بردار را می‌توان محاسبه کرد:

$$|\overline{AC}| = \sqrt{1463 / 5^2 + 175 / 7^2} = 1474 \text{ km}$$



شکل ۲-۱۵- بردارهای مثال ۵

و با استفاده از روابط مثلثاتی (یعنی رابطه ۷-۲) می‌توان به راحتی زاویه بردار نسبت به محور شرق را یافت :

$$\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} = \frac{175/7}{1463/5} = 0.12$$

با استفاده از جدول مقادیر مثلثاتی در انتهای کتاب و یا استفاده از ماشین حساب می‌توان زاویه مورد نظر را یافت : $\theta = 6/8^\circ$

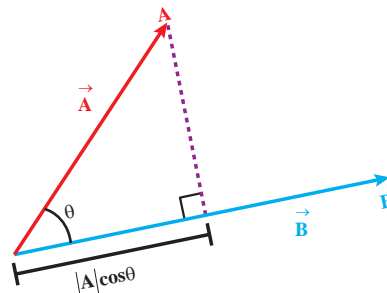
فعالیت ۲-۳

فرض کنید در مثال ۵ فاصله A تا B برابر ۸۰۰ کیلومتر و فاصله B تا C برابر ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. در انتها نیز به شهر D بروید که تا C، ۵۰۰ کیلومتر فاصله دارد و در امتداد شرقی شهر C واقع شده است. بردار برآیند جابجایی از A تا D را محاسبه کنید.

۵-۲-۲- ضرب بردارها : در کل دو نوع ضرب برداری داریم. ضرب در بردارها با ضرب در کمیت‌های نرده‌ای متفاوت است. شاید این موضوع را بتوان با ذکر مثالی، روشن کرد. در بحث کار و انرژی، مقدار کار در اصل نوعی حاصل ضرب بردارهای جابه‌جایی و نیرو است. مقدار کار به دست آمده از این طریق یک بردار نیست و بلکه یک کمیت نرده‌ای است. به این نوع ضرب ضرب برداری می‌گویند. یا در مورد گشتاور، که در فصل آینده با آن آشنا می‌شوید، در ضربی مشابه بحث کار و انرژی اما ضرب از نوع خارجی یا برداری، حاصل ضرب که همان گشتاور باشد، یک بردار است.

ضرب داخلی : همان‌طور که گفته شد حاصل ضرب این نوع ضرب یک بردار نیست، بلکه یک کمیت نرده‌ای (اسکالر) است. رابطه (۸-۲) که با توجه به شکل ۱۶-۲ نوشته شده است، ضرب داخلی دو بردار A و B را نشان می‌دهد.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) \quad (2-8)$$



شکل ۱۶-۲- ضرب داخلی

در واقع ضرب داخلی حاصل ضرب طول تصویر بردار A بر روی بردار B ، ضرب در طول بردار B است. همچنین داریم:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

این نوع ضرب به دلیل علامت ضربی که بین دو بردار قرار می‌گیرد به ضرب نقطه‌ای مشهور است.

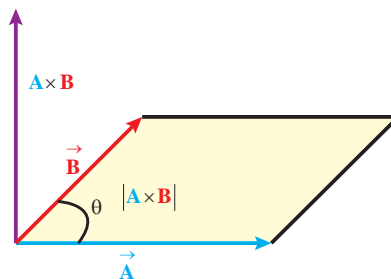
یادآوری

مقدار کار انجام شده توسط نیرو در جابه‌جایی یک جسم توسط رابطه $W = F \cdot d \cos(\theta)$ به دست می‌آید. حالا به خوبی متوجه شده‌اید که در واقع این رابطه همان ضرب داخلی دو بردار نیرو و جابه‌جایی است.

ضرب خارجی: در ضرب خارجی حاصل ضرب یک بردار است. اما محاسبه بردار حاصله از حوصله کتاب خارج است و مورد نیاز فعالیت‌های بعدی نیز نیست. لذا در این جا فقط به رابطه‌ای برای محاسبه مقدار یا طول بردار حاصله از این ضرب بسنده می‌شود. همان‌طور که از شکل ۱۷-۲ و رابطه (۲-۹) بر می‌آید، حاصل ضرب خارجی برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط دو بردار.

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\theta) \quad (2-9)$$

این ضرب در فیزیک و مکانیک بسیار پرکاربرد است. فراموش نکنید که رابطه (۲-۹) فقط و فقط مقدار یا طول بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار را نشان می‌دهد، نه خود بردار حاصل ضرب را.



شکل ۱۷-۲- ضرب خارجی

مثال ۶: با استفاده از روابطی که در بالا آمد، ضرب داخلی و طول بردار ضرب خارجی دو بردار A و B را که به ترتیب به طول‌های 1° و 15° واحد دارند و با هم زاویه 6° درجه می‌سازند، محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه (۲-۸) ضرب داخلی را محاسبه می‌کنیم.

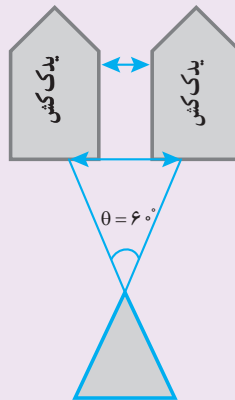
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = 1^\circ \times 15^\circ \times \cos(6^\circ) = 15^\circ \times 0.9945 = 14.9175$$

با استفاده از رابطه (۲-۹) نیز حاصل طول بردار ضرب خارجی به دست خواهد آمد.

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta) = 1^\circ \times 15^\circ \times \sin(6^\circ) = 15^\circ \times \frac{\sqrt{3}}{10} = 2.598 \approx 2.6$$

فعالیت ۲-۴

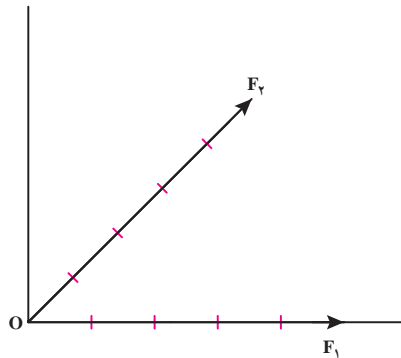
در مثال ۶ از فصل ۱، اگر کشتی بزرگ 30000 تن جرم داشته باشد و یدک‌کش‌ها هر کدام با نیروی 5° کیلونیوتن در امتداد کابل‌ها کشتی را یدک کنند. در صورتی که کشتی به این وسیله 2 کیلومتر جابه‌جا شود مقدار کار انجام شده روی کشتی چقدر است.





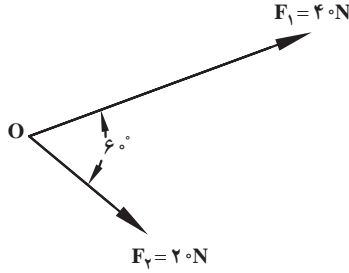
خودآزمایی فصل دوم

- ۱- روش‌های جمع برداری را نام ببرید.
- ۲- آیا حاصل جمع دو بردار، یک کمیت برداری خواهد شد یا نرده‌ای؟
- ۳- جای خالی را پر کنید.
- الف) نیرو یک کمیت _____ است.
- ب) جرم یک کمیت _____ و وزن یک کمیت _____ است.
- پ) جابه‌جایی تقسیم بر تغییرات زمان _____ نام دارد که یک کمیت _____ و مسافت تقسیم بر زمان _____ نام دارد که یک کمیت _____ است.
- ۴- الف) برآیند دو بردار عمود بر هم به طول ۳ واحد (افقی) و ۴ واحد (عمودی) را با استفاده از روش‌های ترسیمی و ریاضی تعیین کنید. (بردارها را در جهت مثبت محور فرض کنید)
- ب) زاویه بردار برآیند با محور افقی را به روش ترسیمی و روش ریاضی به دست آورید.
- ۵- دو نیروی \vec{F}_1 و \vec{F}_2 مطابق شکل ۱۸-۲ بر نقطه O وارد می‌شوند. زاویه بین دو نیرو ۴۵ درجه است. طول بردار برآیند و زاویه بردار برآیند با محور افق را بیابید.



شکل ۱۸-۲

- ۶- برآیند دو بردار \vec{F}_1 و \vec{F}_2 در شکل ۱۹-۲ چقدر است؟ از روش مثلث برای ترسیم استفاده کنید و پاسخ آن را با روش متوازی‌الاضلاع و روش ریاضی مقایسه کنید.



شکل ۱۹-۲

- ۷- حاصل ضرب داخلی دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.
 - ۸- حاصل ضرب خارجی (اندازه) دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.
 - ۹- یک قایق تفریحی مسیر زیر را در یک ساعت می‌پیماید:
 - ۵ کیلومتر به طرف شمال
 - ۴ کیلومتر به طرف شرق
 - ۳ کیلومتر به طرف شمال
 - ۸ کیلومتر به طرف جنوب
- الف) با مقیاس‌گذاری مناسب مسیر این قایق را رسم کنید، بردار برآیند جابجایی را به دست آورید.
- ب) مسافت پیموده شده قایق را حساب کنید.
- ج) سرعت و تندی متوسط قایق را برای این مسیر حساب کنید.

۳

فصل

نیرو و ایستایی

هدف کلی

تحلیل نیروها در حالت‌های ایستا

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

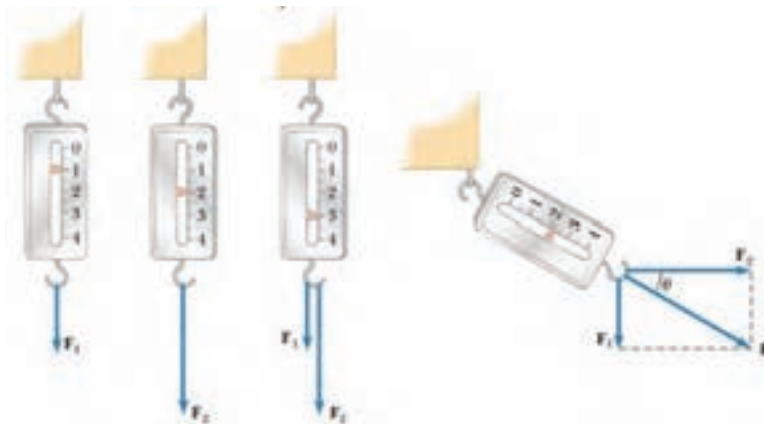
- ۱- نیرو را تعریف کند.
- ۲- شرایط ایستایی را توصیف کند.
- ۳- تفاوت قاب و خرپا را توضیح دهد.
- ۴- معادلات یک سامانه ایستا را حل کند.

۱-۳- نیرو

در کتاب‌های فیزیک سال اول و دوم با مبحث نیرو و قوانین نیوتن آشنا شدید. نیرو یکی از معدود کمیت‌هایی است که ما می‌توانیم به کمک حواس پنجگانه آن را حس کنیم. در تعریف نیرو گفته‌اند، کشش یا فشاری است که در دستان خود موقع حمل یک بار حس می‌کنیم.

نیرو یک بردار است و خواص برداری آن مشهود است. فرض کنید نیروی F_1 برابر ۱ نیوتن و F_2 برابر ۲ نیوتن را به یک نیرو سنج وارد کنیم. اگر هر بار یکی را وارد کنیم نیروسنج همان مقدار را نشان می‌دهد و اگر هر دو را همزمان با هم و در جهت نیروسنج وارد کنیم این بار نیروسنج جمع بزرگی دو نیرو را نشان می‌دهد. در آزمایش بعدی اگر نیروی F_1 را عمودی و F_2 را افقی وارد کنیم می‌بینیم که نیرو سنج زاویه می‌گیرد و مقداری که نشان می‌دهد برابر بزرگی برآیند برداری دو نیرو است (شکل ۱-۳) یعنی :

$$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2.24 \text{ N}$$



شکل ۱-۳- نیرو یک بردار است.

● می‌دانیم که تا بر جسمی نیرو وارد نشود بردار سرعت آن جسم تغییر نخواهد کرد، این موضوع را قانون اول نیوتن می‌نامند.

● اگر بردار سرعت یک جسم تغییر کند یعنی $\Delta \vec{V} / \Delta t \neq 0$ باشد به این معنی است که حرکت آن جسم شتاب‌دار است. قانون دوم نیوتن می‌گوید که مقدار شتابی که یک جسم می‌گیرد $(\vec{a} = \Delta \vec{V} / \Delta t)$ با نیروی وارد بر آن جسم رابطه مستقیم و با جرم آن رابطه عکس دارد، یعنی $\vec{a} = \vec{F} / m$. هرچه جرم جسم بیشتر باشد لخت‌تر است و در برابر شتاب گرفتن مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد. حال اگر تعداد زیادی نیرو بر یک جسم وارد شود چه اتفاقی می‌افتد؟ جسم به اندازه برآیند بردار نیروهای وارد شده شتاب خواهد گرفت.

● وقتی روی یک قایق سعی کنیم فرد دیگری از یک قایق دیگر را به سمت خود بکشیم (یا هل دهیم) هر دو قایق به هم نزدیک (یا دور) می‌شوند. قانون سوم نیوتن این پدیده را توجیه می‌کند. این قانون می‌گوید هر نیرویی که جسم ۱ به جسم ۲ وارد کند، به همان میزان، ولی در خلاف جهت، جسم ۲ به جسم ۱ وارد می‌کند (شکل ۲-۳).



شکل ۲-۳ - الف - نیرویی که بین میخ و چکش است. شکل ۳-۲ - ب - قانون سوم را در تیراندازی توضیح دهید.

یادآوری

جرم جسم با وزن آن دو تعریف جداگانه دارند. جرم به محیط وابسته نیست و برای یک جسم کاملاً یکتا است. اما وزن برای یک جسم روی کرات مختلف آسمانی مقادیر مختلفی دارد و حتی روی کره زمین متغیر است.

حال می‌توانیم از این قوانین در بحث‌های این کتاب استفاده کنیم.

فعالیت کلاسی ۱

- آیا اگر جسمی در حال سکون باشد به این معنی است که نیرویی بر آن وارد نمی‌شود؟ با ذکر مثال توضیح دهید.
- یک شناور که با سرعت ثابت در حال حرکت در آب است چگونه؟ اگر این جسم یک ذره معلق در هوا باشد چگونه؟

۱-۱-۳ حل مسائل حرکت شناسی و ایستایی به کمک قوانین نیوتن: برای حل

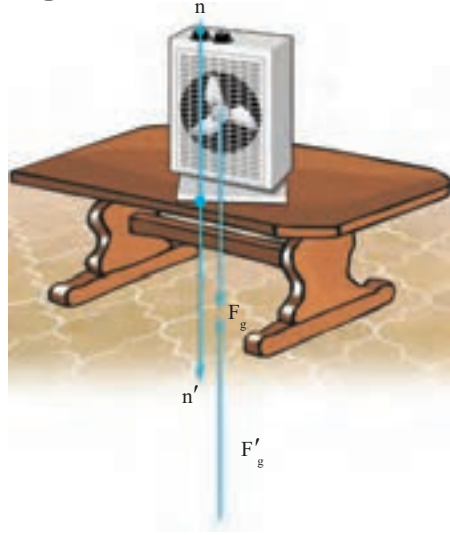
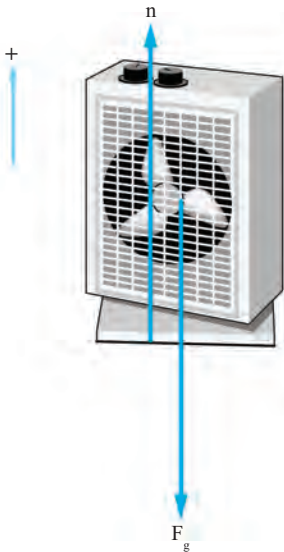
مسائل دینامیک و ایستایی به کمک قوانین نیوتن باید موارد زیر را به خوبی اجرا کنید:

- ۱- رسم شکل مناسب
- ۲- پیدا کردن تمام نیروهای وارد بر جسم مورد تحلیل
- ۳- رسم نمودار جسم آزاد
- ۴- نوشتن معادلات نیرو و شتاب (قانون دوم) ترجیحاً در راستای x و y به‌طور مجزا. در انجام مراحل بالا نیز نکاتی را نباید فراموش کرد. برخی از این نکات در زیر فهرست شده است:
 - ✓ فقط جایی نیرو وجود دارد که حداقل دو جسم وجود دارد. یعنی اگر نیرویی بر جسمی وارد شد حتماً جسم دومی وجود دارد و در غیر این صورت نیرویی که در نظر گرفته‌اید اشتباه است.
 - ✓ نیروهای کشش و واکنش همزمان وجود دارند ولی از آنجایی که این نیروها به ۲ جسم مختلف وارد می‌شوند همدیگر را خنثی نمی‌کنند.
 - ✓ برای بررسی حرکت یا حرکت نکردن یک جسم باید همه نیروهای وارد بر آن جسم را به حساب بیاوریم. به فعالیت کلاسی ۱ مراجعه کنید.

۱-۱-۳-۲ رسم نمودار جسم آزاد: برای اینکه بتوان تمام نیروهای وارد بر جسم را به‌خوبی از هم تفکیک کرد و برآیند آنها را محاسبه کرد لازم است که این نیروها در شکلی کاملاً از هم تفکیک شده رسم شوند. به این شکل «نمودار جسم آزاد» می‌گویند. در نمودار جسم آزاد، فقط جسم مورد نظر را رسم می‌کنند و سایر اجسام حذف می‌شوند و فقط اثر نیرویی آنها در شکل باقی می‌ماند. به شکل ۳-۳ توجه کنید.

در شکل ۳-۳ الف نیروهای بین پنکه، میز و کره زمین رسم شده است. F_g نیروی جاذبه بین زمین و پنکه است و n نیروی عکس العمل سطح است که میز به پنکه وارد می‌کند. نیروهای قانون سوم نیز با علامت پریم مشخص شده اند. یعنی F'_g نیرویی است که پنکه به کره زمین وارد می‌کند و n' نیز نیروی عکس العمل سطح است که جسم به میز وارد می‌کند.

در شکل ۳-۳ ب جسم‌های غیر از پنکه حذف شده اند و فقط اثر آنها باقی مانده است. به این رسم نمودار جسم آزاد می‌گویند. یعنی مثلاً میز که پنکه را در موقعیتش نگه می‌داشته و در واقع آن را به بالا هل می‌داده با یک نیروی عکس العمل سطح جایگزین شده است.



شکل ۳-۳ الف - نیروهای وارده بر پنکه، میز و کره زمین

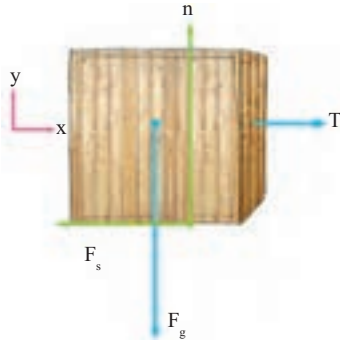
شکل ۳-۳ ب - نمودار جسم آزاد (پنکه)

می‌دانیم که پنکه در جایش ایستاده است. پس ایستا است. طبق قانون‌های اول و دوم نیوتن باید برآیند نیروهای وارد بر این جسم صفر باشد. پس داریم:

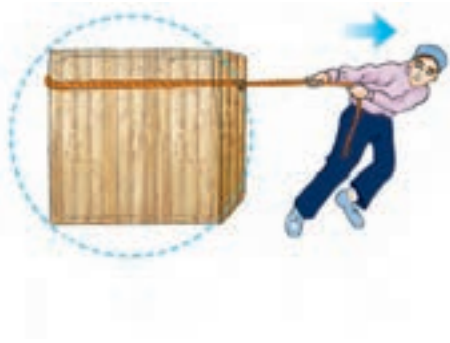
$$n - F_g = 0 \Rightarrow n = F_g$$

مثال ۱: یک جعبه توسط یک طناب روی زمین کشیده می‌شود. مقدار اصطکاک چقدر باشد تا جسم ساکن بماند؟

حل: ابتدا شکل و سپس نمودار آزاد جعبه را رسم می‌کنیم. از آنجا که جسم ساکن است باید در هر دو جهت عمودی و افقی برآیند نیروهای وارد بر آن صفر شود.



شکل ۳-۴ ب - نمودار جسم آزاد (جعبه)



شکل ۳-۴ الف - فردی سعی دارد جعبه را بکشد!

در شکل ۳-۴، T نیروی طناب و F_s نیروی اصطکاک ایستایی است که از طرف زمین بر جعبه وارد می‌شود.

حال معادلات سامانه را به طور مجزا و در جهت‌های x و y که در شکل فرض کرده‌ایم، می‌نویسیم.

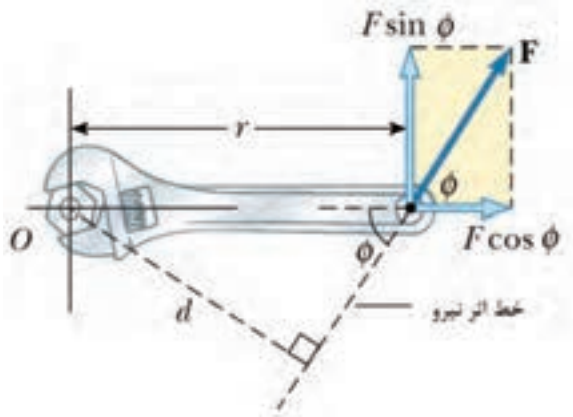
$$x: T - F_s = ma_x = 0 \Rightarrow T = F_s$$

$$y: n - F_g = ma_y = 0 \Rightarrow n = F_g$$

که در آن g_x شتاب در راستای x و g_y شتاب در راستای y است. پس می‌بینیم تا زمانی که جعبه به حرکت در نیامده نیروی اصطکاک ایستایی دقیقاً برابر نیرویی است که ما بر جعبه وارد می‌کنیم.

۳-۱-۳ گشتاور: همان‌طور که در فیزیک سال گذشته خوانده‌اید به اثر گرداننده نیرو، گشتاور می‌گوییم. وقتی نیرو در خارج از تکیه‌گاه یا خارج از مرکز جرم جسم به آن وارد می‌شود، اثر گشتاوری خود را نشان می‌دهد. گشتاور می‌تواند مانند نیرو موجب تغییر شکل و یا به حرکت در آمدن یک جسم شود.

قوانین نیوتن با کمی تفاوت برای گشتاور نیز کاربرد دارد. قانون اول به همان شکل است. یعنی تا بردار سرعت جسمی تغییر نکند گشتاوری بر آن وارد نشده یا برآیند گشتاورهای وارد بر آن صفر است. قانون دوم نیز در فصل ۴ توضیح داده شده است. اما در مورد قانون سوم نمی‌توان به همان شکل استناد کرد، زیرا در واقع، گشتاور ناشی از یک نیرو و یک بازو است. پس ممکن است عکس العمل آن به دلیل متفاوت بودن بازو و نیرویی یکسان، به گشتاوری متفاوت منجر شود. گشتاور وارد بر یک جسم از طریق ضرب خارجی بازو در نیرو به دست می‌آید. گشتاور یک بردار است که بزرگی آن از رابطه (۳-۱) که بر اساس متغیرهای شکل ۳-۵ نوشته شده، به دست آمده و جهت آن از قانون دست راست به دست می‌آید.



شکل ۳-۵- نیروی خارج از مرکز گشتاور ایجاد می‌کند.

همان‌طور که گفته شد، برای محاسبه مقدار گشتاور از ضرب خارجی استفاده می‌کنیم. البته می‌توان همانند شکل ۳-۵، امتداد خط اثر نیرو را رسم کرد و سپس از نقطه‌ای که می‌خواهیم گشتاور را حول آن حساب کنیم خطی فرضی عمود کنیم. طول پاره خط برابر d است. مقدار d از روابط مثلثاتی برابر $r \cdot \cos(\theta)$ خواهد بود. همچنین می‌توان مؤلفه عمود بردار نیرو را بر بردار بازو پیدا کرد.

این مؤلفه عمودی برابر $F \cdot \sin(\theta)$ است. هر ۳ روش در واقع به یک رابطه ختم می‌شود:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rF \cdot \sin(\theta) \quad (3-1)$$

که در این رابطه $\vec{\tau}$ بردار گشتاور را نشان می‌دهد.

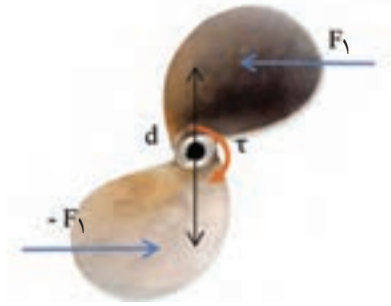
واحد گشتاور از رابطه بالا برابر می‌شود با نیوتن در متر یا به اختصار نیوتن متر ($N \cdot m$) و با وجود شباهت رابطه به رابطه کار و انرژی این واحد با ژول متفاوت است و واحدی مستقل است.

قانون دست راست: هرگاه انگشتان دست راست را ابتدا در جهت بازوی گشتاور نگاه دارید و سپس به سمت نیرو مشت کنید، انگشت شست شما جهت بردار گشتاور را نشان می‌دهد. (این روش در ضرب‌های خارجی برداری کاربرد دارد). در اینجا برای ساده‌سازی از حالت ضرب خارجی برداری برای بیان گشتاور اجتناب شده است (شکل ۳-۶).



شکل ۳-۶- قانون دست راست

گشتاور جفت نیرو: هنگامی که دو نیرو، که از نظر اندازه با هم برابرند ولی در خلاف جهت هم هستند و خط اثری متفاوت دارند همزمان بر یک جسم وارد شوند، باعث ایجاد گشتاور جفت نیرو می‌شوند و باعث جابه‌جایی یا شتاب گرفتن خطی جسم نخواهند شد. پاره‌یک قایق را که در شکل ۳-۷ آمده است فرض کنید.



شکل ۳-۷- جفت نیروی وارد بر یک پروانه قایق

اگر برآیند این نیروها صفر نبود باعث می‌شد که قایق به یک طرف (سمت یکی از نیروها) کشیده شود. اما می‌بینیم که این نیروها فقط باعث دوران جسم می‌شوند (در اینجا این نیروها باعث ثابت ماندن سرعت دورانی جسم می‌شوند). پس برآیند نیروهای وارده صفر است ولی گشتاور از رابطه (۳-۲) به‌دست می‌آید.

$$\tau = d \cdot F_1 \quad (3-2)$$

مثال ۲: در اطلاعات فنی موتور یک سرسیلندر نوشته شده است که پیچ‌های آن باید با گشتاور 12° نیوتن متر سفت شوند. برای این کار از یک آچار ترک‌متر^۱ به طول بازوی 8° سانتی‌متر استفاده می‌شود. با فرض اینکه نیروی دست عمود بر دسته آچار وارد شود نیرویی که ما باید بر آچار وارد کنیم را بیابید؟

حل: از آنجا که نیرو به صورت عمود وارد شده است، مسئله به راحتی قابل حل است. داریم:

$$\theta = 9^\circ \text{ و } r = 0.08 \text{ m, } \tau = 12^\circ \text{ N.m}$$

$$F = \frac{\tau}{r \cdot \sin(\theta)} = \frac{12^\circ}{0.08} = 15^\circ \text{ N}$$

پس از رابطه ۳-۱ خواهیم داشت:

^۱ Torque meter

۲-۳- ایستایی

هرگاه جسمی با وجود تمام نیروها و گشتاورهای وارده ثابت باشد به آن ایستا می‌گوییم و محدوده حل مسئله آن را نیز مسئله ایستایی می‌نامیم. در این حالت طبق قانون دوم نیوتن برآیند نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم صفر است یعنی :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (3-3)$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \quad (3-4)$$

رابطه (۳-۳) برای حالت برداری نیرو نوشته شده است، برای حل راحت‌تر مسائل، این رابطه را به مؤلفه‌های اصلی تجزیه می‌کنیم. رابطه (۳-۵) شکل مؤلفه‌ای این رابطه را برای مسائل ۲ بعدی نشان می‌دهد.

$$\sum \vec{F}_x = 0 \quad \text{و} \quad \sum \vec{F}_y = 0 \quad (3-5)$$

فراموش نکنید که رابطه (۳-۴) نیز در مورد یک نقطه خاص نوشته می‌شود. معمولاً برای این کار یکی از تکیه‌گاه‌ها یا مرکز جرم جسم را در نظر می‌گیرند.

یادآوری

دقت داشته باشید که اگر جسمی با سرعت ثابت و نیز در حرکت باشند برآیند نیروها و گشتاورهای وارد بر آن صفر است.

۱-۲-۳- انواع تکیه‌گاه : برای اینکه یک سازه، تحت تأثیر نیروهای خارجی یا وزن

خود حرکت نکند، باید توسط قیدهایی به محیط (زمین یا هر جسم دیگر) متصل شود. به این قیدها، تکیه‌گاه می‌گویند. تکیه‌گاه‌ها بر حسب قیدی که در مقابل حرکت به وجود می‌آورند، به انواع مختلفی دسته‌بندی می‌شوند. در ادامه، سه نمونه از معروفترین و کاربردی‌ترین آنها فهرست شده است.

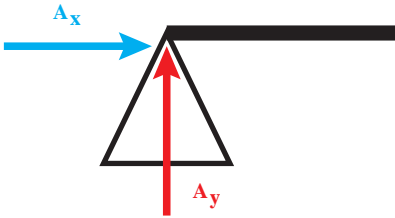
تکیه‌گاه مفصلی ثابت (لولایی) :

تکیه‌گاه مفصلی ثابت یا تکیه‌گاه لولایی^۲ نوعی از تکیه‌گاه است که از تغییر مکان نقطه تکیه‌گاهی (در فضا و یا در صفحه) جلوگیری به عمل می‌آورد، ولی هیچ‌گونه مقاومتی در برابر دوران سازه، حول محورهای تکیه‌گاه ندارد. بنابراین چنانچه سازه‌ای به این نوع تکیه‌گاه متکی باشد، در مقابل چرخش آن حول محورهای پایه، هیچ‌گونه گشتاور واکنشی ایجاد نمی‌شود و به علت محدود شدن دو امتداد حرکت در صفحه، در حالت کلی دو مؤلفه واکنش تکیه‌گاهی

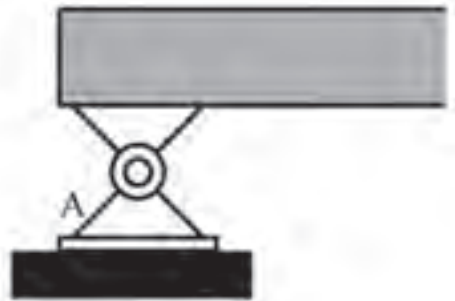
۱- Support

۲- Hinged Support

در صفحه ایجاد می‌شود. لولای در، یک نمونه از این تکیه‌گاه است. شکل ۳-۸-الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۳-۸-ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۸-ب- نمودار آزاد تکیه‌گاه لولایی

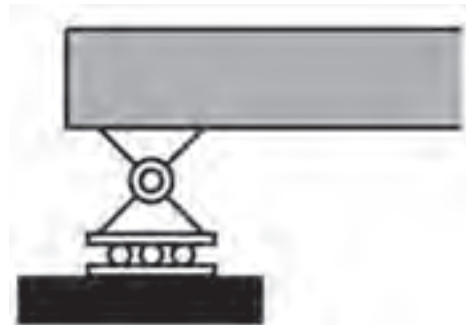


شکل ۳-۸-الف- تکیه‌گاه لولایی

تکیه‌گاه مفصلی متحرک (غلتکی): تکیه‌گاه غلتکی یا تکیه‌گاه مفصلی متحرک کاملاً شبیه تکیه‌گاه لولایی است، با این تفاوت که نسبت به آن درجه آزادی بیشتری دارد. این درجه آزادی، همان حرکت پایه در امتداد حرکت غلتک‌هاست. در واقع در این نوع تکیه‌گاه‌ها تنها یک امتداد حرکت محدود می‌شود و در نتیجه واکنش تکیه‌گاهی ایجاد شده، در امتدادی است که از حرکت پایه در آن امتداد جلوگیری شده‌است. این واکنش تکیه‌گاهی، عمود بر امتداد قابل حرکت تکیه‌گاه است که از مرکز مفصل هم می‌گذرد. وقتی یک انتهای خط‌کش را روی لبه میز می‌گذارید چیزی شبیه به تکیه‌گاه غلتکی تشکیل می‌شود. شکل ۳-۹-الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۳-۹-ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.

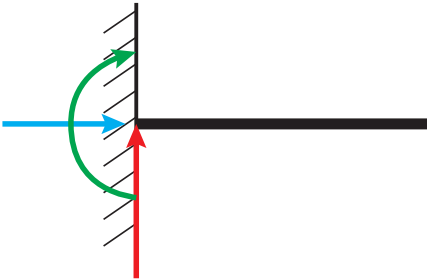


شکل ۳-۹-ب- نمودار آزاد تکیه‌گاه غلتکی



شکل ۳-۹-الف- تکیه‌گاه غلتکی

تکیه‌گاه گیردار (طره‌ای): تکیه‌گاه گیردار از حرکت نقطه تکیه‌گاهی در امتداد محورهای x و y و همچنین از دوران جسم حول نقطه تکیه‌گاهی جلوگیری می‌کند. بنابراین این سه مؤلفه واکنش تکیه‌گاهی در این نوع تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. اگر جسمی فقط یک تکیه‌گاه گیردار داشته باشد کاملاً پایدار خواهد بود. برای مثال از این نوع تکیه‌گاه می‌توان به میله پرچم در پایه آن اشاره کرد. شکل ۳-۱-۰ الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۳-۱-۰ ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.



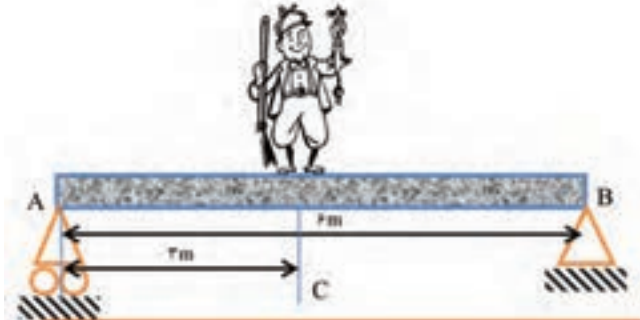
شکل ۳-۱-۰ ب- نمودار آزاد تکیه‌گاه طره‌ای



شکل ۳-۱-۰ الف- تکیه‌گاه طره‌ای

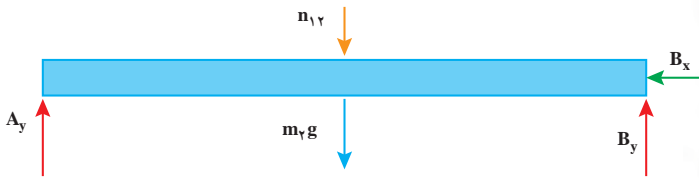
۳-۲-۲- حل مسائل ایستایی جسم صلب: حل مسائل استاتیکی با دانستن معادلات (۳-۳) الی (۳-۵)، دانسته‌های بند ۳-۱-۱ و بند ۳-۱-۲ و آشنا شدن با نمودار آزاد انواع تکیه‌گاه بسیار ساده خواهد بود.

مثال ۳: از یک تیر آهن به جرم 20° کیلوگرم برای برقراری ارتباط بین دو ساحل رودخانه به فاصله ۶ متر، استفاده می‌کنند. یک شکارچی، که به همراه شکار و ادوات شکارش 12° کیلوگرم جرم دارد در حال عبور از این پل است (شکل ۳-۱۱). وقتی که شکارچی به مرکز پل می‌رسد، عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را محاسبه کنید. تکیه‌گاه سمت راست از نوع مفصلی و سمت چپ از نوع غلتکی است.



شکل ۳-۱۱- یک پل ساخته شده از تیر آهن

حل: باید نمودار آزاد همه اجسام داده شده در شکل رسم شود. شکارچی را جرم شماره ۱ و تیرآهن را جرم شماره ۲ می‌نامیم.



شکل ۱۲-۳-ب- نمودار آزاد تیرآهن (بل)



شکل ۱۲-۳-الف- نمودار آزاد شکارچی

نمودار آزاد شکارچی در شکل ۱۲-۳-الف رسم شده است می‌بینیم که تنها نیروهای موجود فقط در راستای عمودی هستند. پس معادله ایستایی را برای این جسم می‌نویسیم:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow n_{21} - m_1 g = 0 \Rightarrow n_{21} = m_1 g = 120 \times 10 \Rightarrow n_{21} = 1200 \text{ N}$$

حال معادلات تعادل را برای تیر می‌نویسیم، فراموش نکنیم که $n_{12} = n_{21}$:

$$\sum \overline{F}_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - n_{12} - m_1 g = 0 \Rightarrow A_y + B_y = n_{12} + m_1 g$$

$$\Rightarrow A_y + B_y = 1200 + 2000 = 3200 \text{ N} \quad \text{معادله (I)}$$

$$\sum \overline{F}_x = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

برای محاسبه تعادل گشتاوری ابتدا نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم و گشتاور نیروها حول آن را محاسبه می‌کنیم، در اینجا نقطه A را انتخاب کرده‌ایم:

$$\sum \overline{\tau}_A = 0 \Rightarrow B_y \times AB - n_{12} \times AC - m_1 g \times AC = 0 \quad \text{معادله (II)}$$

حال دو معادله داریم و دو مجهول. نیروهای تکیه‌گاه‌ها مجهول‌اند و معادله (I) و (II) معادلاتی که برای یافتن مجهولات به آنها نیاز داریم.

$$\text{معادله (II)} \Rightarrow 6B_y = 3 \times 3200 \Rightarrow B_y = \frac{9600}{6} = 1600 \text{ N}$$

با جای گذاری B_y در معادله (I) مقدار نیروی عکس العمل تکیه‌گاه دوم نیز به دست می‌آید.

$$A_y = 3200 - B_y = 1600 \text{ N}$$

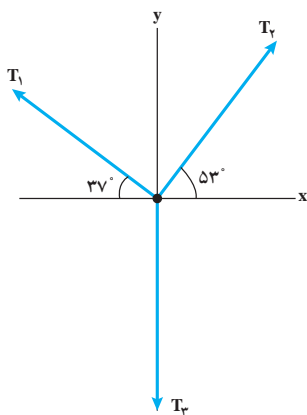
البته شاید پاسخ این مسئله از ابتدا هم مشخص بود اما مهم این بود که شما روش حل را بیاموزید. حال به سراغ فعالیت ۳-۱ بروید و آموزه‌های خود را محک بزنید.

فعالیت ۳-۱

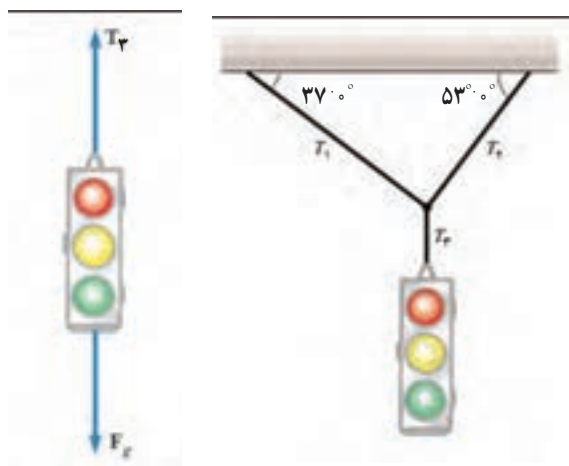
در مثال قبل فرض کنید شکارچی در ۱ متری تکیه‌گاه A باشد. حال نیروهای تکیه‌گاهی را بیابید.

مسائل خاص: در برخی مسائل خاص، ممکن است نیروها هم‌رأس باشند (یعنی امتدادشان از یک نقطه عبور کند) این اتفاق بیشتر در مورد سازه‌هایی که از طناب ساخته شده‌اند رخ می‌دهد. وقتی که نیروها هم‌رأس باشند طبعاً برآیند گشتاور آنها صفر است. زیرا با گشتاور گیری حول نقطه تقاطع این نیروها مقدار بازوی گشتاور همه آنها صفر خواهد بود و در نتیجه گشتاور نیز برابر صفر خواهد شد. از طرفی به دلیل حالت هندسی خاص، دیگر نیازی به تجزیه نیروها به مؤلفه‌هایشان نخواهد بود. بلکه می‌توان از روش‌هایی مثل قانون سینوس‌ها استفاده کرد. مثال بعدی به خوبی این قضیه را نشان می‌دهد. البته برای استفاده از این روش‌ها شرط ایستایی یا تعادل سامانه الزامی است.

مثال ۴: یک چراغ راهنمایی به وزن 100 N ، مطابق شکل ۱۳-۳ الف به کمک دو طناب آویزان شده است. نیروی کشش طناب‌ها را بیابید.



شکل ۱۳-۳ ب - نمودار آزاد
گره اتصال ۳ طناب



شکل ۱۳-۳ الف - چراغ راهنمایی که
شکل ۱۳-۳ ب - نمودار آزاد
چراغ راهنمایی
به کمک ۳ طناب معلق شده است.

حل اول : روش نوشتن معادلات تعادل را بی می گیریم . ابتدا نمودار آزاد اجسام را مطابق شکل ۳-۱۳ ب و ۳-۱۳ پ رسم می کنیم . سپس معادلات تعادل را از نمودار آزاد، استخراج می کنیم . از آنجا که برای این کار نیاز به مؤلفه های نیروی طنابها داریم باید بردارهای نیروی T_1 و T_2 را تجزیه کنیم . T_2 در راستای محور عمودی است و با توجه به شکل ۳-۱۳ ب به سادگی در می یابیم که برابر F_g یا وزن چراغ راهنمایی خواهد بود .

$$\sum \bar{F}_y = 0 \Rightarrow T_1 \cdot \sin(37^\circ) + T_2 \cdot \sin(53^\circ) - T_3 = 0 \Rightarrow 0/6 T_1 + 0/8 T_2 - 100 = 0 \quad (I)$$

$$\sum \bar{F}_x = 0 \Rightarrow -T_1 \cdot \cos(37^\circ) + T_2 \cdot \sin(53^\circ) = 0 \Rightarrow -0/8 T_1 + 0/6 T_2 = 0 \quad (II)$$

با استفاده از معادله (II) داریم :

$$T_1 = \frac{0/6}{0/8} T_2 = 0/75 T_2$$

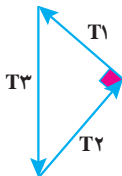
با جای گذاری این معادله در معادله (I) خواهیم داشت :

$$0/6 \times 0/75 T_2 + 0/8 T_2 - 100 = 0 \Rightarrow T_2 = 80 \text{ N} \text{ و } T_1 = 0/75 \times 80 = 60 \text{ N}$$

حل دوم : استفاده از روش سینوسها در حل به جای مؤلفه گیری :

زاویه بین دو بردار T_1 و T_2 برابر 90° درجه است، زاویه بین T_1 و T_3 ، 53° درجه است و زاویه بین T_2 و T_3 برابر 37° درجه است.

با نوشتن قاعده سینوسها داریم :



$$\frac{T_3}{\sin 90^\circ} = \frac{T_1}{\sin 37^\circ}$$

مشهود است که با حل معادله بالا همان پاسخها به دست می آید . اما خیلی سریع تر و ساده تر .

۳-۲-۳ - خرپا : در هندسه سالهای پیش می خواندیم اگر بین دو مثلث سه متغیر با هم برابر باشند هر دو مثلث با هم برابرند و مثلاً اگر ۲ مثلث سه ضلع یک به یک برابر داشته باشند، می گفتیم مثلثها به حالت سه ضلع با هم برابرند . اما در دو چهار ضلعی با داشتن چهار متغیر، مثلاً طول چهار ضلع، نمی توانستیم بگوییم این اشکال برابرند . حال اگر به کمک ۳ میله که در انتها به هم لولا (مفصل) شده اند یک سازه بسازیم، مثلثی تشکیل خواهند داد که این مثلث از نظر هندسی یکتا است . یعنی با اعمال نیروی خارجی به مثلث دیگری تبدیل نخواهد شد . به این مثلث پایدار خرپا می گوئیم .
- خرپا سازه ای صلب از واحدهای مثلثی شکل است که از اتصال اجزای باریک و بلند ساخته شده است . خرپاها توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری را دارند .

— خرپاها از جمله ساده‌ترین اعضای باربر سازه‌ها هستند، که در کل، به صورت اعضای خمشی عمل نموده و در سقف‌ها، پل‌ها و سازه‌های هوا و فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این گونه سازه‌ها به علت نبودن نیروی برشی و لنگر خمشی در تک تک اعضای متشکله مثلث‌ها، اتصالات باید به صورت مفصلی در نظر گرفته شود.

خرپا بر حسب تعریف از مجموعه‌ای از اعضای به وجود می‌آید که همگی در یک صفحه قرار دارند و ترکیب آنها یک شبکه مثلثی ایجاد می‌نماید. چون در خرپاها فرض می‌شود که اعضا در انتهای خود به اعضای دیگر لولا شده‌اند بنابراین شکل مثلثی تنها شکل پایدار خواهد بود. به شکل ۱۴-۳ نگاه کنید. می‌بینید که اضلاع متوازی الاضلاع و مستطیل دو به دو با هم برابرند ولی شکل‌ها یکسان نیستند. اما مثلث‌ها کاملاً با هم برابرند.



شکل ۱۴-۳— دو مثلث با سه ضلع برابر با هم، برابرند اما دو چهارضلعی خیر!

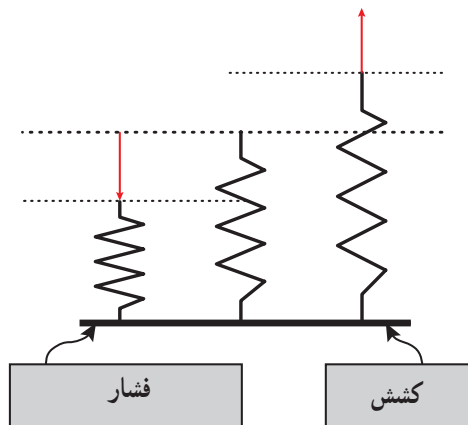
در شکل ۱۵-۳ پل بزرگ کارون آمده است. این پل که تماماً توسط مهندسان ایرانی طراحی و اجرا شده است در قوس زیرین خود دارای تعداد زیادی خرپا است. به دلیل اینکه در خرپاها، میله‌ها (یا لینک‌ها) فقط در دو انتهای آن، به صورت مفصلی با هم در ارتباط هستند، اعضای آنها فقط می‌توانند تحت کشش یا فشار قرار گیرند. به این اعضا عضو دو نیرویی می‌گویند.



شکل ۱۵-۳— پل بزرگ کارون در جنوب کشور، قوس زیرین آن از خرپا ساخته شده است.

فشار (*Compression*): نیرویی که تمایل دارد عضو تحت اثرش را فشرده یا کوتاه کند (شکل ۳-۱۶).

کشش (*Tension*): نیرویی که تمایل دارد عضو تحت اثرش را طولی یا گسترده کند.



شکل ۳-۱۶- تعریف کشش و فشار

۳-۲-۴ پایداری سازه: با اجرای یک آزمون بسیار ساده می‌توان فهمید که یک سازه خراب است یا خیر. خراب بودن به معنی پایدار بودن سازه است. رابطه (۳-۶) می‌تواند تعداد مجهولات را در یک سازه تعیین کند.

$$K = 2J - R$$

(۳-۶)

که در آن

K = تعداد مجهولات

J = تعداد مفاصل

M = تعداد اعضا

(تعداد اضلاع مثلث) $R = 3$

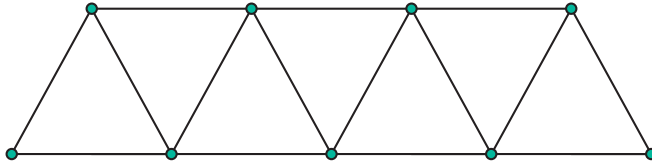
حال با توجه به شرایط زیر، پایداری و قابل حل بودن سازه مشخص می‌شود:

اگر $M = K$ باشد سازه خراب است، یعنی پایدار و قابل حل است.

اگر $M < K$ باشد سازه نه پایدار است نه قابل حل.

اگر $M > K$ باشد سازه پایدار است اما معادلات آن، قابل حل نیست.

مثال ۵: تعیین کنید که آیا شکل ۱۷-۳ خریا است یا خیر؟

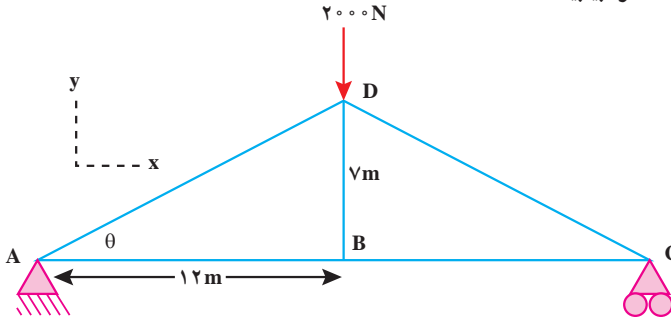


شکل ۱۷-۳- یک سازه با ۱۵ عضو

حل: $J=9$ و $M=15$ است پس $K=2(9)-3=15$ ، با توجه به شرایط ذکر شده، سازه خریا است (پایدار و قابل حل است).

حل خریا: برای حل معادلات یک خریا پس از اینکه بررسی کردیم و متوجه خریا بودن آن شدیم، کافی است معادلات تعادل را یک بار برای کل و یک بار برای تک تک مفاصل بنویسیم. در مثال زیر با این روش آشنا می شوید. دقت کنید که در نوشتن معادلات برای یک مفصل نیازی به نوشتن معادلات مربوط به گشتاور نیست زیرا همه نیروها از یک نقطه می گذرند.

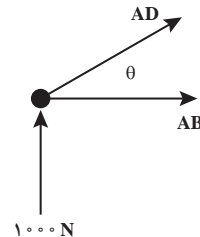
مثال ۶: آیا سازه زیر خریا است؟ نیروهای وارد بر اعضا، کششی یا فشاری بودن آنها و عکس العمل تکیه گاه را بیابید.



حل: با توجه به تقارن داریم: $A_y = C_y = 1000\text{N}$ و به سمت مثبت محور y معادله تعادل را برای نقطه A می نویسیم:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{7}{12} = 30^\circ / 3^\circ$$

$$\begin{cases} \sum F_y = 0 \Rightarrow AD \sin 30^\circ / 3 + 1000 = 0 \Rightarrow AD = -1985\text{N} \\ \sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{AD \cos 30^\circ}{3} + AB = 0 \Rightarrow AB = 1714\text{N} \end{cases}$$



از اینکه مقدار نیروی AD منفی شد نتیجه می‌گیریم که جهت این نیرو را در شکل اشتباه گرفته‌ایم. یعنی این نیرو کششی نیست بلکه فشاری است. اما نیروی AB همان نیروی کششی است، که از ابتدا حدس زده‌ایم. به دلیل تقارن، نیروی DC برابر نیروی AD خواهد بود. نیروی BC هم برابر نیروی AB.

با نوشتن معادله در نقطه B هم متوجه می‌شویم که $DB = 0$ است، زیرا تنها نیروی راستای عمود نیروی DB است و برآیند نیروهای عمودی و افقی هر دو صفر است.

هر ساله در سراسر ایران و جهان مسابقاتی با عنوان سازه‌های ماکارونی برگزار می‌شود. در این مسابقات هر شرکت کننده یک سازه ماکارونی را طبق قوانین ساخته و تحت بارگذاری قرار می‌دهد. معمولاً سازه‌هایی که در حین سبک‌تر بودن بار بیشتری را تحمل کنند برنده خواهند شد.

هدف از برگزاری این مسابقات، شبیه‌سازی سازه‌ها و خراباهای واقعی به روشی ارزان و مقرون به صرفه است. علاوه بر آن دانش فنی دانش‌آموزان و دانشجویان در رابطه با مسائل مربوط به ایستایی و مقاومت مصالح محک می‌خورد.

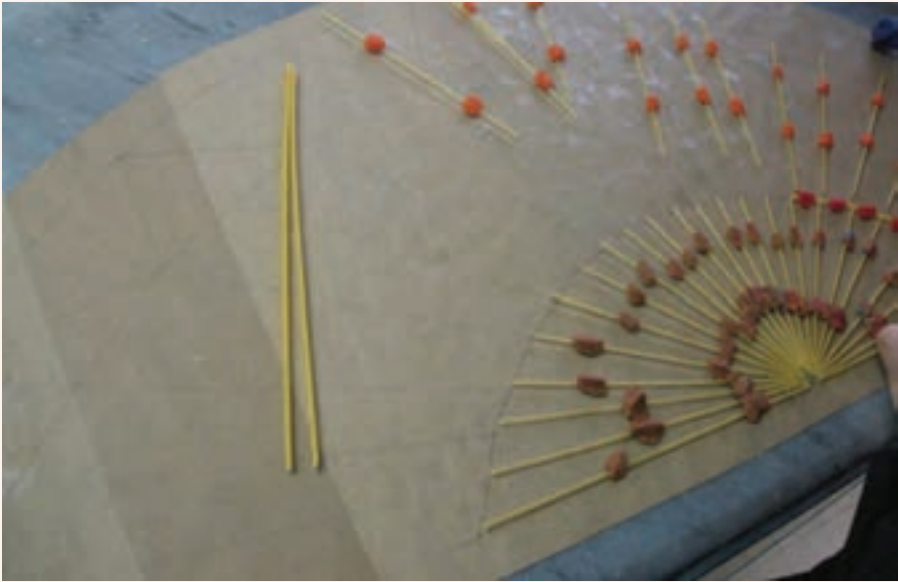
چگونه سازه ماکارونی بسازیم

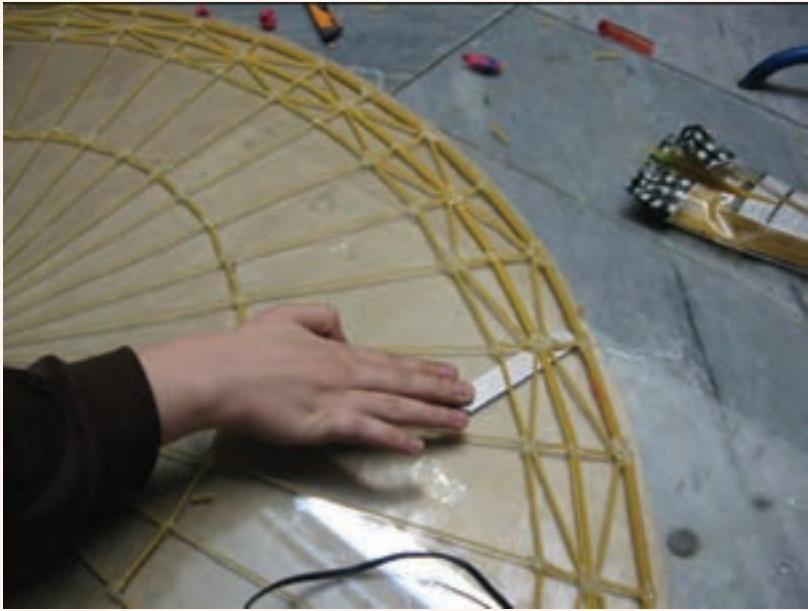
ابتدا خوب است که یک مسابقه تعریف کنیم. فرض کنید می‌خواهید یک پل از جنس ماکارونی بسازید دهانه این پل 30° سانتی متر است و قرار است که یک بار ۲ کیلوگرمی را تحمل کند. عرض پل نمی‌تواند از 10° سانتی متر تجاوز کند و ارتفاع آن نیز نباید از 20° سانتی متر بیشتر باشد.

نکات اولیه طراحی:

- وقتی که دهانه 30° سانتی متر است شما باید پل را به شکلی بسازید که حداقل طول آن بیشتر از 30° سانتی متر باشد تا به خوبی روی تکیه‌گاه قرار بگیرد.
- نقشه پل باید طوری باشد که بار را از وسط گرفته و به سمت تکیه‌گاه هدایت کند.
- همه قسمت‌ها باید به شکل خرپا باشد. وجود مربع یعنی که یک قسمت خرپا نیست.

- برای قسمت‌هایی که نیروی فشاری تحمل می‌کنند از ماکارونی‌های ضخیم (۲/۸ میلی‌متری) و برای اجزاء تحت کشش از ماکارونی نازک استفاده کنید. در طراحی سازه‌ها، عضوهای فشاری به دلیل طول زیاد ممکن است دچار پدیدهٔ کماتش شوند و فرو بریزند. بنابراین سعی کنید تا جای ممکن طول آنها را کم و قطر آنها را زیاد کنید.
- ماکارونی‌های ضخیم را با طول‌های مختلف تحت فشار قرار دهید و ببینید هر طول تحمل چه نیرویی را دارد.
- نقشه خود را تحلیل کنید و ببینید که به عضوهای فشاری چه نیرویی وارد می‌شود. طول عضو را طوری انتخاب کنید که تحمل آن نیرو را داشته باشد.
- هر پل از دو صفحه دوبعدی و یک سازه عرضی برای اتصال صفحات ساخته می‌شود.
- نقشه صفحه ۲ بعدی را روی کاغذ رسم کنید.
- ترجیحاً نقشه را زیر یک شیشه ۶ میلی‌متری بچسبانید.
- ماکارونی‌ها را روی نقشه بچینید و بچسبانید. پس از تکمیل هر دو صفحه آنها را در جهت عرضی به هم بچسبانید. بادبندهای عرضی را فراموش نکنید.







خودآزمایی فصل سوم



۱- خرپا را تعریف کنید.

۲- جاهای خالی را پر کنید:

الف) هر کنشی را واکنشی است _____ و در خلاف

جهت آن.

ب) جرم جسم به محیط وابسته _____ و برای یک جسم در سطح زمین _____ است.

۳- گزینه صحیح را علامت بزنید:

الف) وزن برای یک جسم روی کرات مختلف آسمانی مقادیر _____ دارد و حتی روی کره

زمین _____ است.

۲- مختلف، ثابت

۱- ثابت، متغیر

۴- مختلف، متغیر

۳- ثابت، ثابت

ب) تا بر جسمی نیرو وارد _____ بردار سرعت آن تغییر _____.

۲- بشود، نمی‌کند.

۱- نشود، نمی‌کند.

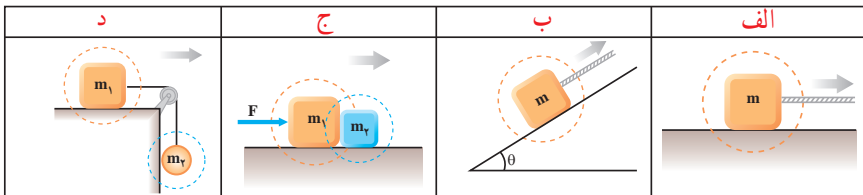
۴- گزینه‌های ۱ و ۳

۳- بشود، می‌کند.

۴- انواع تکیه‌گاه را نام ببرید.

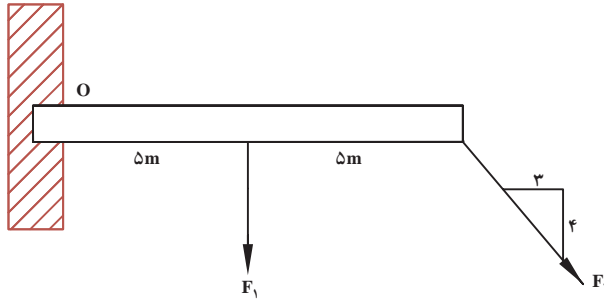
۵- نمودار آزاد اجسام زیر را که در شکل ۱۸-۳ آمده‌اند، تحت نیروهای نشان داده شده رسم

کنید. در همه موارد اصطکاک وجود دارد.



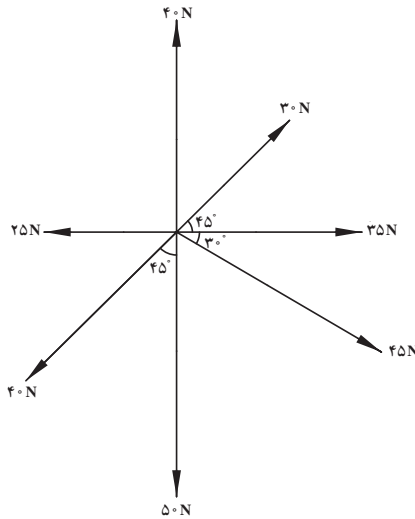
شکل ۱۸-۳

۶- دو نیروی \bar{F}_1 و \bar{F}_2 مطابق شکل ۳-۱۹ بر تیر وارد می‌شوند. گشتاور هر یک از نیروها در محل تکیه‌گاه چقدر است؟



شکل ۳-۱۹

- ۷- در مسئله قبل عکس‌العمل تکیه‌گاه را محاسبه کنید.
- ۸- چند نیرو مطابق شکل ۳-۲۰ بر نقطه‌ای عمل می‌کنند. با استفاده از روش رسم، اندازه و جهت نیروی برآیند را بیابید.
- ۹- برآیند نیروهای شکل ۳-۲۰ را از روش تحلیلی محاسبه کنید.



شکل ۳-۲۰

۱۰- یک کیسه ۵۰ کیلوگرمی سیمان از دو طناب مانند شکل ۳-۲۱ آویخته شده است. نیروی هر یک از طناب‌ها را بیابید. ($\theta_1 = 6^\circ$ و $\theta_2 = 37^\circ$)

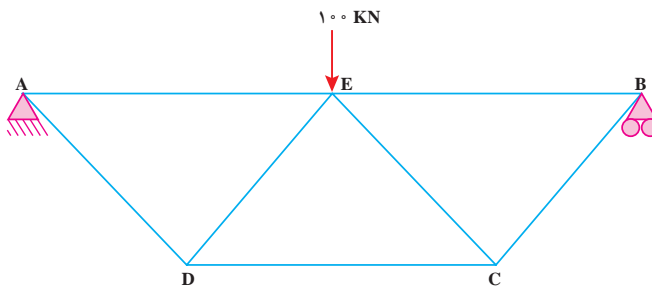


شکل ۳-۲۱

۱۱- یک پروانه کشتی برای گشتن در سرعت مورد نظر نیاز به گشتاور 300 نیوتن متر دارد. با فرض آنکه نقطه اثر نیروی آب روی پروانه در فاصله $1/2$ متری از مرکز پروانه باشد، نیروی متوسط وارد شده بر هر پره را بیابید.

۱۲- شافتی به جرم $5/97$ تن به وسیله دو زنجیر از یک قلاب جرثقیل آویزان می‌باشد. طول هر زنجیر 4 متر و فاصله بین نقاط اتصال زنجیرها به شافت نیز 4 متر است. فاصله مرکز ثقل شافت از یکی از نقاط اتصال شافت و زنجیر $1/25$ متر است. نیروی کششی در هر زنجیر چقدر است؟

۱۳- در سازه شکل ۳-۲۲ کلیه عضوهای مؤزب دارای زاویه 45 درجه با عضو مجاور خود هستند. باری به اندازه 100 KN در وسط سازه قرار دارد. نمودار برداری نیروهای موجود در اعضا را رسم و اندازه‌گیری کنید. اندازه نیروها و ماهیت آنها (کششی یا فشاری) را در یک جدول بنویسید.



شکل ۳-۲۲

۴ فصل

دینامیک ماشین‌ها

هدف کلی

تحلیل‌های هندسی و حرکتی قطعات مکانیکی

- هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :
- ۱- سرعت دورانی را تعریف کند.
 - ۲- سرعت زاویه‌ای را تعریف کند.
 - ۳- سرعت دورانی را به زاویه‌ای و بالعکس تبدیل کند.
 - ۴- سرعت زاویه‌ای و دورانی را در دستگاه‌ها به سرعت خطی تبدیل نماید.
 - ۵- بر اساس نیروهای خارجی گشتاور مورد نیاز دستگاه را محاسبه کند.
 - ۶- برخی قطعات مکانیکی پرکاربرد و هندسه آنها را بشناسد.
 - ۷- درجه آزادی را تعریف کند.

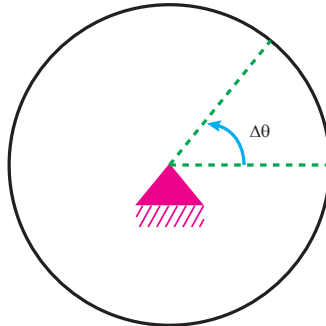
۴-۱- حرکت دورانی

در درس فیزیک سال‌های گذشته کمیتی برداری به نام سرعت برای جسمی که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند تعریف شد. این کمیت برداری از تقسیم بردار جابه‌جایی بر واحد زمان (یا تغییرات زمان) به‌دست می‌آید. اما گاهی اجسام حرکت دارند اما نه از نوع مستقیم، بلکه حول محور خود دوران می‌کنند. در این حالت نیز می‌توان برای جسم، سرعتی در نظر گرفت. این سرعت بسته به نوع تعریف «سرعت دورانی» یا «سرعت زاویه‌ای» نام دارد.

۴-۱-۱- سرعت زاویه‌ای: فرض کنید جسمی در زمان Δt به اندازه $\Delta\theta$ (دقت کنید که این تغییرات زاویه در دستگاه SI برحسب رادیان است.) حول محور خود دوران کند (شکل ۴-۱). سرعت زاویه‌ای آن طبق رابطه ۴-۱ تعریف می‌شود:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

(۴-۱)



شکل ۴-۱- دوران یک جسم حول محورش

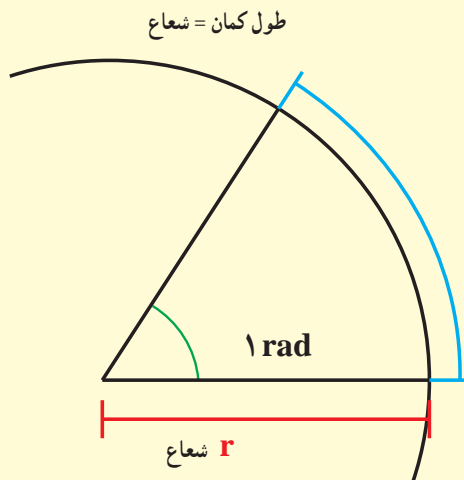
در واقع ω (امگا) حاصل تقسیم تغییرات زاویه بر تغییرات زمان است. البته فراموش نشود که سرعت زاویه‌ای یک بردار است. راستای این بردار عمود بر صفحه دوران است و جهش از قانون دست راست به دست می‌آید.

یادآوری

اگر دایره‌ای رسم کنیم و کمانی را به اندازه (طول) شعاع از آن جدا کنیم و از دو انتهای کمان به مرکز دایره وصل کنیم، زاویه‌ای تشکیل می‌شود. این زاویه برابر یک رادیان است. یک نیم دایره (180°) درجه) برابر π رادیان و یک دایره کامل (360°) درجه) برابر 2π رادیان است. هر رادیان برابر $\frac{180^\circ}{\pi}$ درجه است. از این نسبت برای تبدیل واحد زوایا می‌توان استفاده کرد.

جدول زیر برخی تبدیل‌های معروف را ارائه می‌کند.

درجه	$^\circ$	3°	45°	6°	9°	18°	27°	36°
رادیان	$^\circ$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{2\pi}{3}$	2π

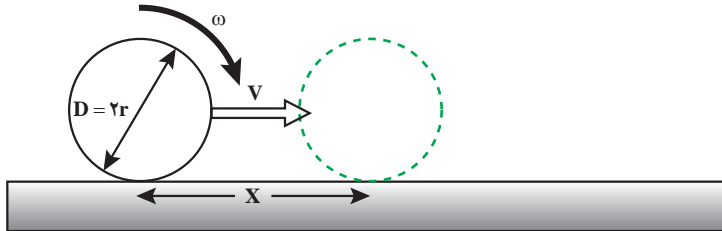


۴-۱-۲ **سرعت دورانی:** اگر بخواهیم تعداد دوری را که یک جسم حول محورش می‌زند، بیان کنیم از سرعت دورانی استفاده می‌کنیم. در کاربردهای مهندسی معمولاً از سرعت دورانی به صورت دور بر دقیقه یا rpm^1 استفاده می‌شود. سرعت دورانی و سرعت زاویه‌ای به راحتی به یکدیگر تبدیل می‌شوند. در این کتاب سرعت دورانی را با حرف N نمایش می‌دهیم. هر دور برابر 2π رادیان تغییرات زاویه‌است. همچنین هر دقیقه برابر 60° ثانیه است. لذا می‌توان با استفاده از رابطه (۴-۲) به راحتی این دو واحد را به یکدیگر تبدیل کرد. از آنجا که این واحد یک واحد SI نیست نمی‌توان در محاسبات SI از این واحد استفاده کرد.

$$N = \omega \times \frac{60}{2\pi} \quad (4-2)$$

$$N \cong \omega \times 10$$

۴-۱-۳ **رابطه سرعت خطی و زاویه‌ای:** فرض کنید یک استوانه (مثلاً چرخ یک گاری) در زمان Δt یک دور روی زمین بچرخد. در این حالت استوانه به اندازه محیطش حرکت کرده (شکل ۴-۲) و به اندازه $x = 2\pi r$ به جلو رفته است. از اینجا می‌توان به رابطه (۴-۳) و (۴-۴) دست یافت.



شکل ۴-۲- جابه‌جایی مرکز جرم در اثر دوران

$$v = \frac{2\pi r}{t} \quad (4-3)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{t} \quad (4-4)$$

با داشتن (۴-۳) و (۴-۴) و مشاهده مشترکات آنها، رابطه (۴-۵) که مهم‌ترین موضوع این قسمت از درس است حاصل می‌شود.

$$v = r\omega \quad (4-5)$$

^۱ Round per minute

مثال ۱: یک گاری با سرعت 3° سانتی متر در هر ثانیه، حرکت می کند. اگر شعاع چرخ های آن برابر 15 سانتی متر باشد، سرعت زاویه ای و سرعت دورانی چرخ ها را بیابید.
حل: ابتدا باید تبدیل واحدهای لازم برای حل مسئله را محاسبه کنیم.

$$v = 3^\circ \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1} = 0/3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$r = 15 \text{ cm} = 0/15 \text{ m}.$$

حال داده های مسئله را در معادله (۴-۵) جای گذاری می کنیم.

$$v = r\omega \Rightarrow \omega = \frac{v}{r} = \frac{0/3}{0/15} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

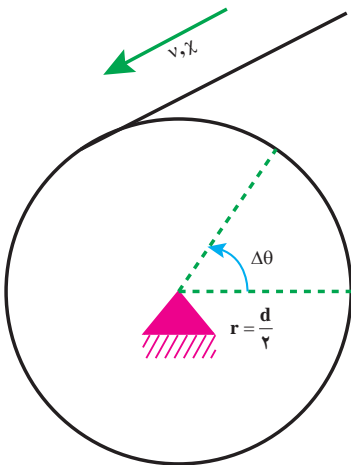
سرعت زاویه ای

با استفاده از رابطه (۴-۲) سرعت زاویه ای به سرعت دورانی تبدیل می شود.

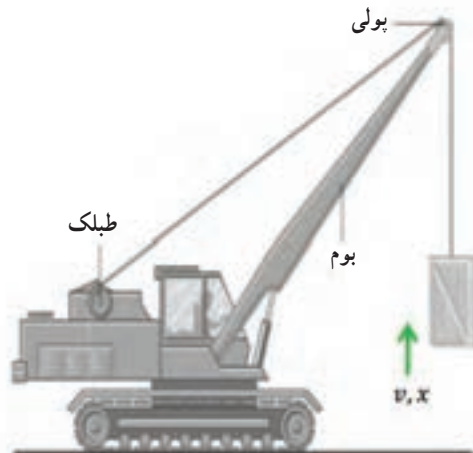
$$N \cong \omega \times 10 = 20 \text{ rpm}$$

مثال ۲: طبلک یک جرثقیل با سرعت 50 rpm می چرخد. اگر قطر این طبلک 40 سانتی متر باشد سرعت بالابری این جرثقیل چقدر خواهد بود؟

حل: هر بار که طبلک به دور خود می پیچد کابل جرثقیل را به اندازه یک محیط، به دور خود می پیچد. بولی بالای بوم نیز صرفاً جهت تغییر جهت است. پس با هر مقدار کشیده شدن کابل، جسم به همان مقدار بالا کشیده می شود. در واقع با هر دور پیچیدن طبلک، جسم به اندازه یک محیط طبلک جابه جا می شود.



شکل ۳-۴-ب - طبلک جرثقیل



شکل ۳-۴-الف - جرثقیل

برای هر دور دوران طولک جابه‌جایی برابر است با: $x = 2\pi r = 2\pi \frac{d}{4} = \pi d = 125 / 6 \text{ cm}$
 از طرفی در هر دقیقه، طولک 5° دور می‌زند پس جابه‌جایی طناب در یک دقیقه کار جرثقیل
 برابر خواهد بود با: $x_{\text{دقیقه}} = x \times 5^\circ = 628^\circ \text{ cm} = 62 / 8 \text{ m}$
 سرعت خطی v را برای جسم محاسبه کرد.

$$v = \frac{x_{\text{دقیقه}}}{6^\circ} = 1 / 0.5 \text{ m.s}^{-1}$$

سرعت خطی جسمی که جرثقیل بلند می‌کند:

فعالیت ۱-۴

با استفاده از رابطه ۲-۴ و ۴-۵ مثال ۲ را دوباره حل کنید و پاسخ خود را با پاسخ حل
 مثال ۲ مقایسه کنید.

۴-۱-۴ گشتاور: در فصل ۳ کتاب خواندید که اگر نیرویی روی بازویی وارد شود، بسته به فاصله محل اثر نیرو تا محل تکیه‌گاه تأثیر متفاوتی ایجاد می‌کند و این تأثیر را گشتاور نامیدیم. گشتاور، چیزی است که می‌خواهد اجسام را به حرکت دورانی وادارد. قوانین نیوتن که برای تعریف رابطه نیرو و حرکت خطی اجسام کاربرد داشت، در مورد گشتاور و حرکت دورانی اجسام نیز کاربرد دارد. جهت بردار گشتاور از قانون دست راست تعیین می‌شود. به این شکل که ابتدا انگشتان دست راست را در جهت بازوی گشتاور قرار می‌دهیم و به سمت بردار نیرو خم می‌کنیم. انگشت شست دست راست جهت بردار گشتاور را نشان می‌دهد.

برای مطالعه

همان‌طور که در حرکت خطی برای اجسام، شتاب خطی، تعریف می‌شد در حرکت دورانی نیز شتاب دورانی تعریف می‌شود. شتاب دورانی برابر است با تغییرات سرعت دورانی بر تغییرات زمان یعنی:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} (\text{rad.s}^{-2})$$

همچنین در قانون اول و دوم نیوتن برای اجسام در حرکت خطی یک لختی تعریف می‌شد. لختی به معنی مقاومت جسم در برابر تغییر سرعت تعریف می‌شد. در

حرکت دورانی نیز لختی دورانی تعریف می‌شود. لختی دورانی به معنی مقاومت جسم در برابر تغییرات سرعت دورانی (یا زاویه‌ای) جسم است. رابطه قانون دوم نیوتن برای گشتاور، لختی دورانی و شتاب دورانی به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha}$$

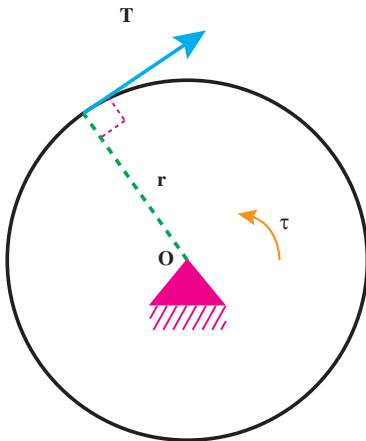
معمولاً دو مشخصه برای هر موتور، اعم از الکتریکی، پنوماتیکی، هیدرولیکی یا احتراقی بسیار حائز اهمیت است و همواره به همراه اطلاعات موتور ارائه می‌شود. اولین مؤلفه سرعت دورانی و دومین آن، گشتاور تولیدی موتور است.

در کاربردهای مسائل این کتاب، از تغییرات سرعت دورانی و وجود لختی دورانی برای اجسام صرف نظر شده است. اما فراموش نشود که در مسائل حساس و مهم مهندسی باید این پارامترها لحاظ شوند. چیزی که در اینجا بیشتر مد نظر است، محاسبه گشتاور لازم برای یک موتور برای ایجاد حرکت در اجسام در ماشین‌ها می‌باشد.

برای بهتر فهمیدن مبحث گشتاور، از چند مثال ساده استفاده می‌کنیم.

مثال ۳: اگر جرثقیل مثال ۲ قرار باشد وزنه‌ای به جرم 10000 کیلوگرم را بالا بکشد، حداقل گشتاور ورودی طبلک باید چقدر باشد؟

حل: ابتدا نمودار جسم آزاد وزنه و طبلک را رسم می‌کنیم (شکل ۴-۴).



شکل ۴-۴ ب- نمودار آزاد طبلک



شکل ۴-۴ الف- نمودار آزاد وزنه

دقت کنید که در این گونه مسائل اگر اشاره‌ای به حرکت شتاب‌دار نشده باشد به این معنی است که حرکت با سرعت ثابت مفروض است. پس می‌توان شرایط ایستایی را برای وزنه و طبلك به صورت جداگانه نوشت.

با توجه به نمودار آزاد وزنه داریم:

$$\sum F = 0 \Rightarrow W - T = 0, W = Mg \Rightarrow T = Mg = 10 \times 10^4 \text{ N}$$

از طرفی برای طبلك داریم:

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow \tau - rT = 0 \Rightarrow \tau = 10 \times 10^4 \text{ N} \times 0.2 \text{ m} = 2 \times 10^4 \text{ N.m}$$

مقدار گشتاور به دست آمده، حداقل گشتاور مورد نیاز در طبلك را نشان می‌دهد. معمولاً این گشتاور توسط یک موتور الکتریکی مجهز به جعبه دنده تأمین می‌شود. اما در جرثقیل‌های سیار موتور خودرو، می‌تواند منبع تأمین این گشتاور باشد.

در ادامه با مثالی پیچیده‌تر مفهوم تأمین گشتاور برای حرکت ارائه می‌شود. دقت کنید که در این مثال نیز از شتاب‌گیری خطی و زاویه‌ای صرف‌نظر شده است. همچنین برای ساده‌سازی از اصطکاک غلتشی نیز چشم‌پوشی شده است.

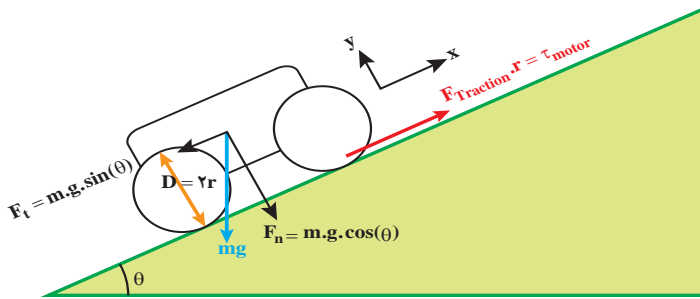
اصطکاک غلتشی نیروی مقاومی است که در برابر چرخیدن اجسام روی سطوح مختلف ظاهر می‌شود. مقدار این اصطکاک معمولاً به مراتب کمتر از اصطکاک لغزشی (جنبشی یا ایستایی) است.

مثال ۴: یک روبات نظامی جستجوگر به جرم ۱۵ کیلوگرم و با چرخ‌هایی به قطر ۳۰ سانتی‌متر قرار است از تپه‌ای با حداکثر شیب ۳۷ درجه بالا رود. این روبات چهار چرخ دارد که هر کدام از این چرخ‌ها مستقلاً از یک موتور و گیربکس الکتریکی نیرو می‌گیرد. حداقل گشتاور خروجی هر یک از این موتور و گیربکس‌های الکتریکی چقدر باشد تا روبات قادر به بالا رفتن از تپه باشد؟ (شکل ۴-۵)



شکل ۴-۵ - یک روبات جستجوگر آزمایشی ایرانی

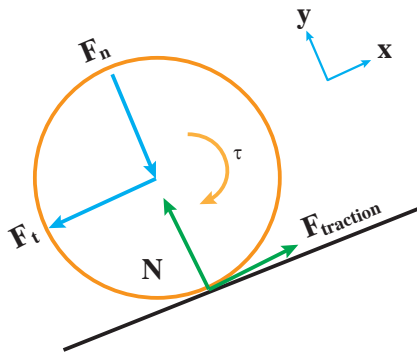
حل: ابتدا شکل شماتیک و نیروهای وارده را رسم می‌کنیم. به دلیل استفاده از لاستیک‌های آج‌دار و زبری بالای محل عبور، ضریب اصطکاک در حدود یک فرض می‌شود. در واقع گشتاور تولیدی موتورها به دلیل وجود اصطکاک لغزشی از نوع ایستایی، باعث حرکت رو به جلوی روبات می‌شود (نمودار آزاد روبات در شکل ۴-۶ رسم شده است).



$$\text{بیشینه } (F_{\text{Traction}}) = N \cdot \mu$$

شکل ۴-۶- شماتیک حرکت روبات روی تپه

برای ساده‌سازی، محاسبات را فقط روی یک چرخ اعمال می‌کنیم. به این شکل که گشتاور موتورها، نیروی عمود بر سطح و نیروی مماسی که روبات را به پایین می‌راند بر روی یک چرخ در نظر می‌گیریم و در انتها بر تعداد چرخ‌ها تقسیم می‌کنیم. پس نمودار آزاد را می‌توان به شکل زیر ساده‌سازی کرد (شکل ۴-۷).



شکل ۴-۷- نمودار آزاد روبات (با فرض یک چرخ)

همان‌طور که در بالا گفته شد، نیروی چسبندگی تایر (F_{Traction}) از جنس نیروی اصطکاک لغزشی است. یعنی بیشینه آن برابر بیشینه اصطکاک ایستایی است، اما وجود آن به دلیل گشتاور موجود در چرخ‌ها و تمایل آنها به حرکت است. از طرفی مقادیر نیروهای عمودی و مماسی نیز که

مؤلفه‌های نیروی وزن در مختصات جدید هستند نیز مشخص است. در نتیجه داریم:

$$F_{\text{traction}} \cdot r = \tau_{\text{motors}}$$

$$F_t = m \cdot g \cdot \sin(\theta) = 15 \times 9.8 \times 0.6 = 88.2 \text{ N} \text{ و } F_n = 15 \times 9.8 \times 0.8 = 117.6 \text{ N}$$

حال با نوشتن معادلات تعادل از روی شکل ادامه می‌دهیم.

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{\text{traction}} - F_t = 0 \Rightarrow F_{\text{traction}} = F_t = m \cdot g \cdot \sin(\theta) \Rightarrow F_{\text{traction}} = 88.2 \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_n - N = 0 \Rightarrow N = mg \cdot \cos(\theta) \Rightarrow N = 117.6 \text{ N}$$

$$\text{بیشینه } (F_{\text{traction}}) = N \cdot \mu_s$$

به دلیل استفاده از چرخ‌های مناسب و بالا بودن اصطکاک چرخ‌ها با سطح تپه، ضریب اصطکاک

ایستایی μ_s بیشینه برابر ۱ فرض می‌شود.

$$\text{بیشینه } (F_{\text{traction}}) = 117.6 \text{ N}$$

پس می‌توان نتیجه گرفت که نیروی چسبندگی تایر از حداکثر مجاز آن تجاوز نمی‌کند.

$$\sum M = 0 \Rightarrow \tau - F_{\text{traction}} \cdot r = 0 \Rightarrow \tau = 13.3 \text{ N.m}$$

با تقسیم گشتاور به دست آمده بر چهار (تعداد چرخ‌ها) پاسخ تقریبی مسئله به دست می‌آید.

گشتاور مورد نیاز برای هر موتور برابر است با:

$$\tau_{\text{motor}} = \frac{\tau}{4} = 3.3 \text{ N.m}$$

۵-۱-۴- موتورهای دیزل و الکتریکی: معمولاً موتورهای دیزل رنج سرعتی در حدود

۵۰۰ تا ۲۵۰۰ دور بر دقیقه دارند و گشتاور آنها نیز بسته به ابعاد و توان در رنج بسیار متنوعی قرار

می‌گیرد. البته گشتاور خروجی مستقیم از موتور، معمولاً از مقدار دلخواه طراحان پایین‌تر است.

در مورد موتورهای الکتریکی نیز همین موضوع صحت دارد. دور موتورهای الکتریکی از

۱۰۰۰ دور بر دقیقه تا چندین هزار دور بر دقیقه متغیر است که به نوع و کاربرد موتور بستگی دارد

(موتور AC/DC و ...). و نسبتاً گشتاور پایینی را تولید می‌کنند.

از این موارد می‌توان نتیجه گرفت که لازم است با روشی دور موتورها کاهش یافته و گشتاور

خروجی آنها افزایش یابد.

۲-۴- چرخ‌دنده

۱-۲-۴- چرخ‌دنده‌های صاف یا ساده^۱: این چرخ‌دنده‌ها ساده‌ترین چرخ‌دنده‌هایی هستند

که مورد استفاده قرار می‌گیرند. آنها دندانه‌های مستقیم دارند و محور دو چرخ نیز موازی با یکدیگر قرار

^۱ spur gears

گرفته‌اند. گاهی تعداد زیادی از آنها را در کنار هم قرار می‌دهند تا سرعت را کاهش و قدرت را افزایش دهند. در تعداد زیادی از وسایل از این چرخ‌دنده‌ها استفاده می‌شود. مثلاً در ساعت‌های کوکی، ساعت‌های اتوماتیک، ماشین لباسشویی، پنکه و... اما این چرخ‌دنده‌ها در خودرو و وسایل نقلیه به کار نمی‌آیند، چون سر و صدای زیادی دارند. هر بار که دندانه یک چرخ‌دنده به دندانه چرخ روبرو می‌رسد، صدای کوچکی در اثر برخورد ایجاد می‌شود. می‌توانید مجسم کنید وقتی تعداد زیادی از این چرخ‌دنده‌ها با هم کار کنند، چه سر و صدایی راه می‌اندازند؟ نکتهٔ دیگر اینکه این برخوردها در درازمدت، باعث شکستن دندانه‌ها می‌شود. برای کاهش سر و صدا و افزایش عمر چرخ‌دنده‌ها در بیشتر اتومبیل‌ها از چرخ‌دنده‌های مارپیچ استفاده می‌کنند.

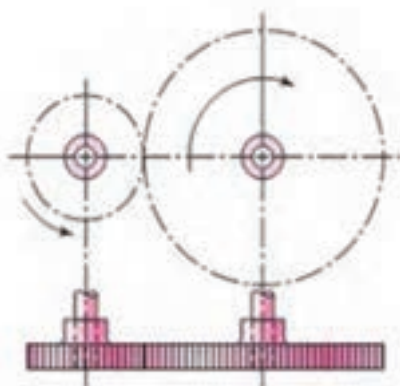
از چرخ‌دنده‌های ساده برای انتقال حرکت از یک میله محور به میلهٔ محور موازی آن استفاده می‌شود و دنده‌های آنها با محورشان موازی است. (به شکل ۸-۴ و ۹-۴ مراجعه کنید).



شکل ۸-۴-ب - یک چرخ‌دنده ساده



شکل ۸-۴-الف - یک جفت چرخ‌دنده ساده



شکل ۹-۴ - چرخ‌دنده صاف برای انتقال حرکت دورانی بین میل محور موازی به کار می‌رود.

۴-۲-۲ چرخ دنده‌های مارپیچ^۱: دندانه این چرخ دنده‌ها مایل است. وقتی یکی از آنها می‌چرخد، ابتدا نوک دندانه‌ها با هم تماس پیدا می‌کنند سپس به تدریج دو دندانه کاملاً در هم جفت می‌شوند. این درگیری تدریجی همان چیزی است که هم سر و صدا را کم می‌کند و هم باعث می‌شود که این چرخ دنده‌ها نرم‌تر کار کنند (شکل ۴-۱).



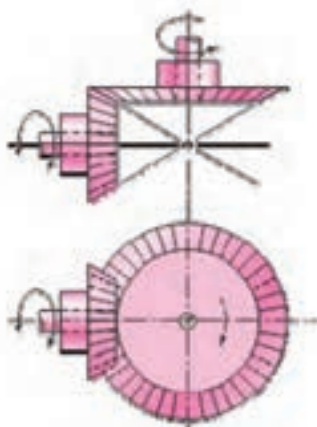
شکل ۴-۱- یک جفت چرخ دنده مارپیچ

در وسایل نقلیه تعداد زیادی چرخ دنده مارپیچ وجود دارد. به خاطر مایل بودن دندانه‌ها، هنگام درگیری نیروی زیادی به آنها وارد می‌شود. به همین علت در وسایلی که از چرخ دنده‌های مارپیچی استفاده می‌کنند بلبرینگ‌هایی تعبیه شده است تا این فشار را تحمل کند. اگر زاویه دندانه‌ها را به دقت تنظیم کنیم، می‌توان دو چرخ دنده را به دو محور عمود بر هم وصل کرد تا جهت چرخش 90° درجه تغییر کند یعنی برای انتقال دو محور ناموازی (متنافر) نیز به کار می‌روند. این خاصیت در شکل ۴-۱۱ به نمایش درآمده است.



شکل ۴-۱۱- یک جفت چرخ دنده مارپیچ با محور موازی و متنافر

۳-۲-۴- چرخ دنده‌های مخروطی^۱: این چرخ دنده‌ها، دنده‌هایی روی سطوح مخروطی دارند و بیشتر برای انتقال حرکت بین میل محورهای متقاطع به کار می‌روند (شکل ۱۲-۴). شکل ۱۳-۴ انواع این چرخ دنده را به تصویر کشیده است. در دیفرانسیل بسیاری از خودروها از این چرخ دنده‌ها استفاده می‌شود.



شکل ۱۲-۴- چرخ دنده مخروطی برای انتقال حرکت بین میله محورهای متقاطع به کار می‌رود.



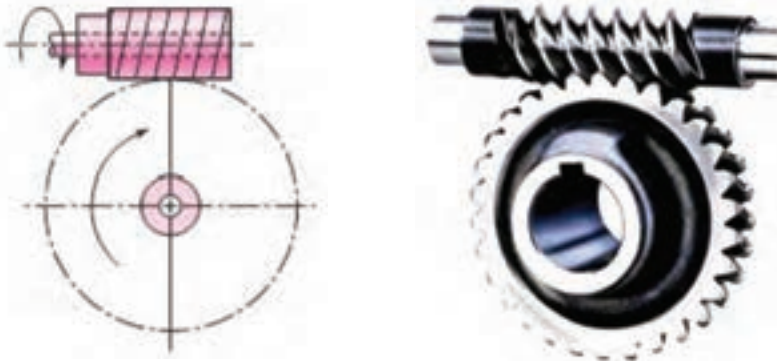
شکل ۱۳-۴- الف- چرخ دنده مخروطی با دندانه‌های مارپیچ شکل ۱۳-۴- ب- چرخ دنده مخروطی با دندانه‌های ساده

۴-۲-۴- چرخ دنده‌های حلزونی^۲: این چرخ دنده‌ها زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که بخواهیم در سرعت یا قدرت تغییر زیادی ایجاد کنیم. معمولاً نسبت شعاع دو چرخ دنده ۱: ۲۰ است و گاهی حتی به ۱: ۳۰۰ و بیشتر نیز می‌رسد (در ادامه با نسبت تبدیل آشنا خواهید شد (شکل ۱۴-۴)).

۱- bevel gears

۲- worm gears

این چرخ دنده‌ها خاصیت جالبی هم دارند که در هیچ چرخ دنده دیگری پیدا نمی‌شود. چرخ بالایی (حلزون) می‌تواند به راحتی چرخ دیگر (چرخ دنده حلزونی) را حرکت دهد، ولی اکثراً چرخ پایینی نمی‌تواند حلزون را بچرخاند. زاویه دنده‌های روی حلزون آن قدر کوچک است که وقتی چرخ پایینی بخواهد آن را بچرخاند، اصطکاک آن چنان زیاد می‌شود که از حرکت حلزون جلوگیری می‌کند. این ویژگی استفاده از این چرخ دنده‌ها را در جاهایی که به یک قفل خودکار نیاز داریم ممکن می‌سازد. فرض کنید از این چرخ دنده در یک بالابر استفاده کرده‌ایم؛ وقتی موتور بالابر از کار بیافتد، چرخ دنده‌ها قفل می‌شوند و نمی‌گذارند بار پایین بیاید. به این خاصیت «خودقفل» می‌گویند. معمولاً در دیفرانسیل کامیون‌ها و خودروهای سنگین از این چرخ دنده‌ها استفاده می‌شود. همچنین در جرثقیل‌ها و بالابرها نیز از آن بهره می‌گیریم.



شکل ۱۴-۴ الف - یک جفت چرخ دنده مارپیچ حلزون شکل ۱۴-۴ ب - نحوه گردش در چرخ دنده مارپیچ حلزون

۴-۲-۵ - چرخ دنده شانه‌ای ۱: این چرخ دنده‌ها برای تبدیل حرکت دورانی به حرکت خطی استفاده می‌شوند. یک مثال خوب برای این چرخ دنده‌ها فرمان اتومبیل است. فرمان، چرخ دنده‌ای را می‌چرخاند که با میله شانه‌ای در تماس است. وقتی شما فرمان را می‌چرخانید، با توجه به جهت چرخش فرمان، شانه به سمت چپ و یا راست حرکت می‌کند و باعث حرکت چرخ‌ها می‌شود. در برخی از ترازوها نیز برای چرخاندن عقربه از سامانه مشابهی استفاده می‌شود (شکل ۱۵-۴).



شکل ۱۵-۴ - چرخ دنده میله شانه‌ای با دندانه‌های ساده

۶-۲-۴- محاسن چرخ دنده‌ها: محاسن چرخ دنده‌ها را می‌توان به شکل زیر برشمرد.

۱- انتقال نیروی زیاد: در مقایسه با چرخ تسمه و چرخ زنجیر و محرک‌های (درايوهای مشابه دیگر، در صورت استفاده از چرخ دنده می‌توان سرعت یا قدرت زیادی (بیشتر از روش‌های دیگر) را انتقال داد. همچنین هنگام استفاده از چرخ دنده اتلاف نیرو کمتر است و در نهایت دوام و عمر مجموعه بیشتر خواهد بود.

۲- انتقال نیرو در جهت‌های مختلف: از چرخ دنده‌ها می‌توان برای انتقال نیرو در محورهای موازی و متناظر و متقاطع تحت زوایای مختلف استفاده نمود.

۳- شکستن نسبت‌ها: یعنی می‌توان برای نسبت‌های بالا از چند جفت چرخ دنده کمک گرفت و همچنین نسبت‌هایی با ضریب عدد غیر صحیح به دست آورد.

۴- تبدیل حرکت دورانی به خطی و بالعکس با استفاده از چرخ دنده شانه‌ای.

۷-۲-۴- معایب چرخ دنده‌ها: از معایب چرخ دنده‌ها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

۱- حرارت ایجاد شده بین دو چرخ دنده: به علت رعایت نکردن لقی استاندارد بین دو چرخ دنده وعدم روغن کاری مناسب پیش می‌آید.

۲- صداهای ناهنجار: در چرخ دنده‌های ساده صدا بیشتر و در چرخ دنده‌های مارپیچ و جناغی صدا کمتر است.

۳- ترک خوردن و پوسته پوسته شدن: اغلب در چرخ دنده‌های آبکاری شده به وجود می‌آید.

۴- سائیدگی دنده‌ها: در اغلب مواردی که دو چرخ دنده با هم درگیر می‌شوند چرخ دنده‌ای که قطرش کوچک‌تر است زودتر سائیده می‌شود. به همین دلیل چرخ دنده کوچک‌تر باید سخت‌تر انتخاب شود.

۸-۲-۴- شرایط فیزیکی لازم در چرخ دنده‌ها: برای عملکرد موفقیت‌آمیز چرخ دنده‌ها چند شرط زیر باید اعمال شود:

۱- مقطع حقیقی دنده‌ها باید با مقطع تئوری یکی باشد (ساخت و طراحی باید یکسان باشد).

۲- فاصله دنده‌ها باید یکسان و درست باشد.

۳- دایره گام حقیقی باید بر دایره گام تئوری منطبق و با محور چرخش چرخ دنده هم‌مرکز باشد. همچنین نقطه تماس دو چرخ دنده درگیر، در دایره گام (قطر متوسط چرخ دنده) باشد.

۴- سطح پیشانی و دامنه دنده‌ها باید برای مقاومت در مقابل سایش و جلوگیری از ایجاد صدا در هنگام چرخش، صاف و دارای سختی کافی باشند.

۵- محورهای مرکزی و یاتاقان‌ها دارای استحکام کافی باشند تا در اثر بارهای وارد شده، هنگام کار بتوانند فاصله مرکز تا مرکز مطلوب را حفظ کنند.

۹-۲-۴- روش ساخت چرخ‌دنده‌ها: روش‌های مختلفی برای ساخت چرخ‌دنده وجود دارد که هر کدام دارای معایب و مزایایی هستند و باید با توجه به نوع چرخ‌دنده، جنس، دقت مورد نیاز، امکانات موجود و هزینه ساخت بهترین روش را انتخاب کرد.

تعدادی از این روش‌ها عبارت‌اند از:

۱- توسط فرزهای افقی وعمودی (به کمک دستگاه تایکوف):

۲- توسط دستگاه‌های هابینگ؛

۳- توسط دستگاه‌های مخصوص دنده زنی؛

۴- توسط دستگاه‌های صفحه تراش و کله زنی؛

۵- توسط دستگاه‌های اسپارک؛

۶- توسط دستگاه‌های خانکشی؛

۷- توسط ریخته‌گری؛

۸- توسط قالب‌ها.

فعالیت کلاسی ۱

به کمک هنرآموز خود و با استفاده از کتب مرجع و اینترنت در مورد روش‌های بالا مطالبی را جمع‌آوری کنید و در کلاس ارائه دهید.

۱۰-۲-۴- هندسه چرخ‌دنده‌ها

دایره گام^۱: دایره فرضی است که همه محاسبات همیشه بر پایه قطر آن، که قطر گام باشد، انجام می‌شود. دوایر گام یک جفت چرخ‌دنده به هنگام کار با یکدیگر مماس هستند. از دو چرخ‌دنده درگیر آن، که کوچک‌تر است، چرخ کوچک^۲ و آن، که بزرگ‌تر است را معمولاً چرخ‌دنده^۳ گویند.

۱- pitch circle

۲- pinion

۳- gear

مدول m^1 : نسبت قطر گام به تعداد دنده هاست. واحد طولی که در اینجا به کار می رود میلی متر است. مدول همان مشخصه اندازه دنده در دستگاه استاندارد بین المللی SI (اس آی) است.

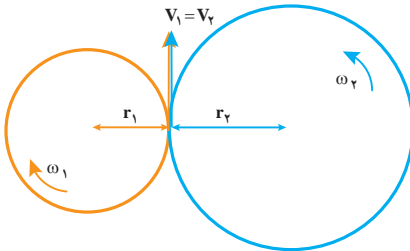
$$m = \frac{d}{N} \quad (4-6)$$

که در آن :

m = مدول به میلی متر

d = قطر دایره گام به میلی متر

نسبت تبدیل سرعت : هنگامی که دو چرخ دنده درگیرند، دواير گام آنها نسبت به یکدیگر بدون لغزش می غلتند. شعاع و دواير گام را به ترتیب r_1 و r_2 و سرعت زاویه ای آنها را ω_1 و ω_2 در نظر می گیریم (شکل ۴-۱۶).



شکل ۴-۱۶ - نسبت سرعت در چرخ دنده ها

بنابراین سرعت خطی دایره گام آنها برابر است با :

$$V_1 = V_2 \Rightarrow r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2 \quad (4-7)$$

پس رابطه بین شعاعها و سرعت های زاویه ای برابر است با :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (4-8)$$

مثال ۵ : فرض کنید بخواهیم در یک جعبه دنده سرعت ورودی 1800 rpm و سرعت خروجی 1200 rpm باشد. نسبت آنها ۳ : ۲ است و نسبت قطر گام نیز همین است، مثلاً اگر قطر چرخ کوچک 100 mm باشد، قطر چرخ دنده بزرگ 150 mm خواهد بود. ابعاد دیگر چرخ دنده نیز همیشه بر مبنای دواير گام است.

حال اگر تعداد دنده های چرخ دنده چرخ کوچک را ۱۸ دنده و چرخ دنده بزرگ درگیر با آن را ۳۰ دنده تعیین کنیم طوری که مدول این ارتباط چرخ دنده ای 12 mm میلی متر باشد. سپس از رابطه (۴-۶) اقطار گام کوچک و چرخ بزرگ به ترتیب چنین می شود :

$$d_1 = mN_1 = 12(18) = 216 \text{ mm} \quad d_2 = mN_2 = 12(30) = 360 \text{ mm}$$

فعالیت ۲-۴

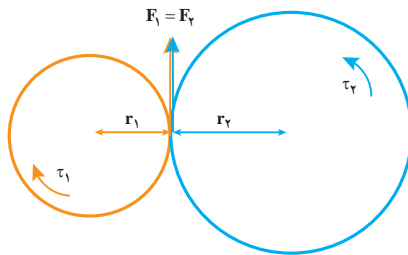
یک چرخ دنده صاف کوچک ۱۷ دنده با مدول ۳ میلی متر، با سرعت 112° دور در دقیقه می چرخد و چرخ دنده بزرگ را با سرعت 544° دور در دقیقه می گرداند. تعداد دنده های چرخ بزرگ و فاصله تتوریک مرکزین را پیدا کنید؟
فاصله تتوریک جمع بین قطرهای گام خواهد بود.

نسبت تبدیل گشتاور: از آنجا که حرکت دندانه ها شتاب دار نیست، طبق قانون سوم نیوتن نیروی بین دندانه های دو جفت چرخ دنده با هم برابر است، پس می توان نوشت:

$$\tau_1 = F_1 \cdot r_1 \quad \text{و} \quad \tau_2 = F_2 \cdot r_2 \quad (4-9)$$

و $F_1 = F_2$ در نتیجه:

$$\frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2} \quad (4-10)$$



شکل ۱۷-۴- نسبت گشتاور در چرخ دنده ها

مثال ۶: در مثال ۵ اگر گشتاور ورودی 1° نیوتن متر باشد گشتاور خروجی چقدر خواهد بود؟
حل: کافی است رابطه $(4-10)$ را بازنویسی کنیم:

$$\frac{\tau_1}{r_1} = \frac{\tau_2}{r_2} \Rightarrow \frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{2}{3} \Rightarrow \tau_2 = 1.5 \text{ N.m}$$

۴-۳- اجزای مکانیکی انعطاف پذیر

تسمه ها، طناب ها، زنجیرها و دیگر اجزای انعطاف پذیر برای دستگاه های تسمه نقاله مواد و انتقال توان در فواصل نسبتاً زیاد به کار می روند. اغلب پیش می آید که این اجزا را می توان به جای چرخ دنده ها، میله محورها و دیگر وسایل انتقال توان به کار برد. در بسیاری موارد کاربرد آنها طرح

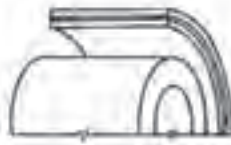
ماشین را ساده و هزینه ساخت را کاهش می‌دهند. در کنار اینها، این اجزا کشسان و به‌طور معمول بلند هستند و در جذب بارهای تکان‌دار و فرو نشاندن اثرات لرزش وظیفه مهمی دارند که این خود یک مزیت مهم برای عمر دستگاه محسوب می‌شود.

توجه! بیشتر اجزای انعطاف‌پذیر، عمر دائمی ندارند و هر جا که به کار روند برای پیشگیری از سایش، فرسودگی و کاهش راندمان باید آنها را پس از مدت زمان معینی، تعویض کرد.

۱-۳-۴- تسمه و پولی : شش گونه اصلی تسمه‌ها را در شکل ۱۸-۴ می‌بینید. وسیله‌ای را که تسمه روی آن قرار می‌گیرد و به همراه آن به چرخش درمی‌آید پولی، تپلک یا قرقره می‌نامند. از پولی‌های تاجدار برای تسمه‌های تخت و پولی‌های شیاردار برای تسمه‌های V شکل و از پولی یا چرخ دندانه‌دار (تایمینگ) برای گروه تسمه‌های دندانه‌دار (تایمینگ) استفاده می‌شود.



تسمه V شکل



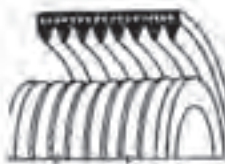
تسمه تخت



تسمه گرد



تسمه V شکل چندتایی



تسمه تخت با شیار V



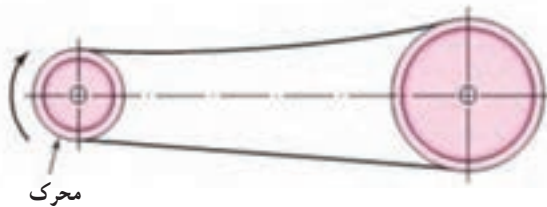
تسمه تایمینگ

شکل ۱۸-۴- انواع تسمه و پولی

ویژگی‌های تسمه‌ها : برای استفاده از تسمه می‌توان مزایای زیر را نام برد :

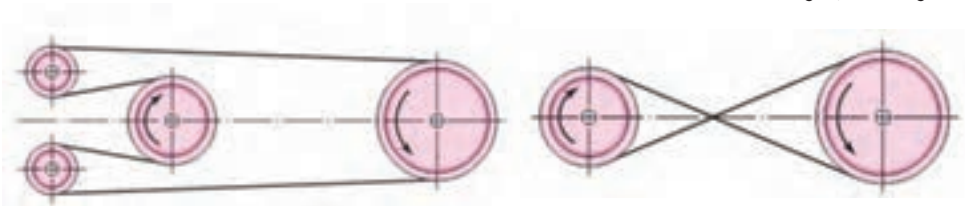
- ۱- می‌توان از آنها برای فواصل زیاد استفاده نمود.
- ۲- به‌جز تسمه‌های دندانه‌دار بقیه آنها روی قرقره مقداری لغزش خواهند داشت.
- ۳- در برخی از موارد برای دوری جستن از تنظیم فاصله بین قرقره‌ها که به علت شل شدن تسمه ضمن کار یا هنگام سوار کردن تسمه تازه ضرورت دارد، می‌توان از یک قرقره‌هرزگرد استفاده نمود.

شکل زیر یک گرداننده تسمه‌ای باز معمولی را نشان می‌دهد. برای تسمه تخت همان‌طور که در شکل می‌بینید مقدار کشش چنان است که هنگام کار، سمت شل تسمه آشکار است (شکل ۴-۱۹). اگرچه بهتر است که طرف شل در بالا باشد ولی برای گونه‌های دیگر تسمه می‌توان بالا یا پایین را به کار برد زیرا معمولاً کشش آغازین در آنها بیشتر است. در واقع سمتی که تحت کشش است کاملاً سفت می‌شود و سمت دیگر شل می‌شود و شکم می‌دهد. حتی اگر تسمه را خوب سفت کرده باشید باز هم این اتفاق می‌افتد. پولی‌ای که به تولیدکننده توان متصل است پولی محرک و دیگری را متحرک می‌نامند. پولی‌هایی را که برای سفت کردن تسمه به کار می‌روند «پولی هرزگرد» می‌نامند.



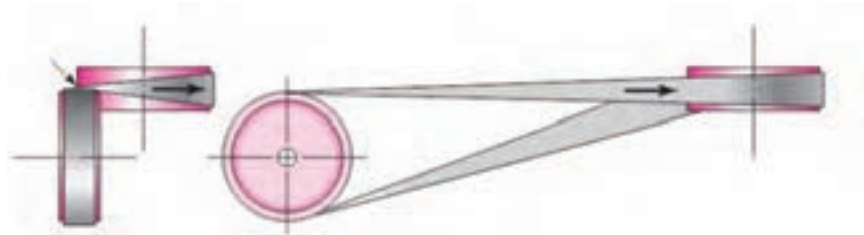
شکل ۴-۱۹ - پولی محرک و متحرک و شل شدن تسمه

دو شیوه تعویض جهت دوران را در شکل‌های پایین می‌بینید. این کار فقط با تسمه‌های تخت و گرد امکان‌پذیر است.



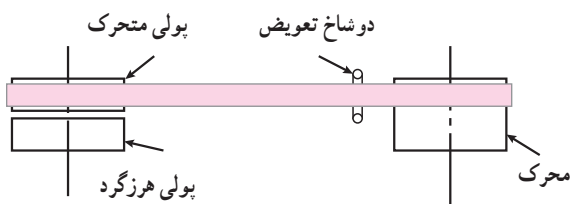
شکل ۴-۲۰ - تعویض جهت گردش به کمک تسمه تخت

در هر دو شکل دو طرف تسمه (زیر و روی آن) با پولی در تماس است. پس نتیجه می‌گیریم که تسمه‌های V شکل یا دندانه‌دار را نمی‌توان برای چنین طرح‌هایی به کار برد. در شکل پایین یک محرک تسمه تخت را می‌بینیم که برای پولی‌های ناهم‌صفحه (یا محور ناموازی) به کار رفته است (اجباری به متعامد بودن میل محورها آن چنان که در شکل می‌بینید، نیست). جای پولی‌ها باید چنان باشد که تسمه هر پولی را در وسط سطح پولی دیگر ترک کند طرح‌های دیگری نیز می‌توان به کار برد ولی احتمالاً به پولی‌های راهنما یا هرزگرد نیاز باشد.



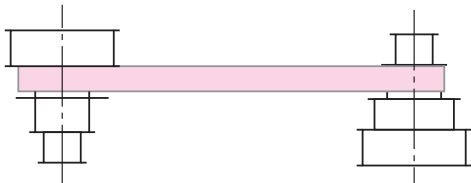
شکل ۲۱-۴- تسمه و پولی با محور غیر موازی

خوبی دیگر تسمه های تخت در شکل زیر دیده می شود که در آن عمل کلاچ گیری با جابه جا کردن تسمه ها از یک طبلک شل به یک طبلک سفت یا رانده به دست می آید. شکل ۲۲-۴ نمونه ای از این روش را به تصویر کشیده است.

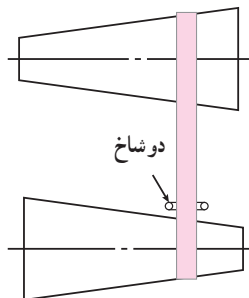


شکل ۲۲-۴- کلاچ گیری به کمک تسمه و پولی

در شکل زیر دو گرداننده با سرعت متغیر می بینیم که اولی فقط برای تسمه تخت به کار می رود و دومی که نمونه آن را در دریل عمودی می توان مشاهده کرد، به کمک پولی های شیار دار و با استفاده از تسمه V شکل یا گرد به کار می رود. این خاصیت یکی از مزایای تسمه و پولی نسبت به گیربکس های چرخ دنده ای است. در خودروهای جدید از این مزیت برای تعویض دنده پیوسته (یا نسبت تبدیل پیوسته) استفاده می شود.

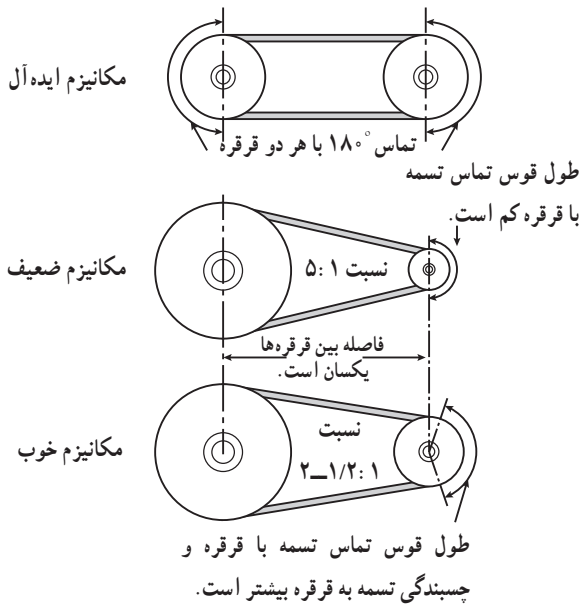


شکل ۲۳-۴- ب- نسبت تبدیل گسسته



شکل ۲۳-۴- الف- نسبت تبدیل پیوسته

چگونه ابعاد قرقره بر بازده توان تأثیر می‌گذارد: برای به دست آوردن حداکثر توان از تسمه، نسبت بین قرقره‌ها باید حداکثر ۳ به ۱ یا کمتر باشد (شکل ۲۴-۴).



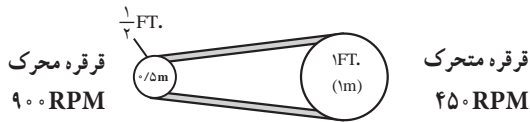
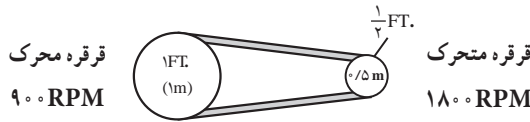
شکل ۲۴-۴- سطح تماس در بولی‌ها

نسبت‌های بیشتر طول قوس تماس را کاهش می‌دهد و موجب بکسوات (لغزش) تسمه و کاهش بازده توان خواهند شد. در قرقره‌های کوچک می‌توان با دور کردن محور قرقره‌ها از یکدیگر طول قوس تماس را اندکی افزایش داد. اگر قرقره بزرگی نیاز باشد بهترین روش استفاده از یک مکانیزم دو مرحله‌ای (با محور واسطه) است، تا از مکانیزم‌های یک مرحله‌ای با نسبت قرقره خیلی بزرگ یا یک قرقره بسیار کوچک اجتناب شود.

سرعت خروجی نسبی در مکانیزم‌های تسمه‌ای: اگر قطر دو قرقره یکی باشد هر دو با سرعت یکسان خواهند چرخید.

اگر قطر قرقره متحرک کوچک‌تر از قطر قرقره محرک باشد قرقره متحرک سریع‌تر خواهد چرخید (شکل ۲۵-۴).

اگر قطر قرقره متحرک کوچک‌تر از قطر قرقره متحرک باشد قرقره متحرک کندتر خواهد چرخید.



شکل ۲۵-۴- نسبت تبدیل دور در تسمه و پولی

رابطه زیر برای نسبت سرعت قرفره‌ها وجود دارد :

$$\text{سرعت دوران قرفره متحرک} \times \text{قطر قرفره متحرک} = \text{سرعت دوران قرفره محرک} \times \text{قطر قرفره محرک}$$

در شکل ۲۵-۴ نسبت سرعت، به ترتیب زیر است (از بالا به پایین) :

$$1 \times 900 = 1 \times 900$$

$$1 \times 900 = 1/2 \times 1800$$

$$1/2 \times 900 = 1 \times 450$$

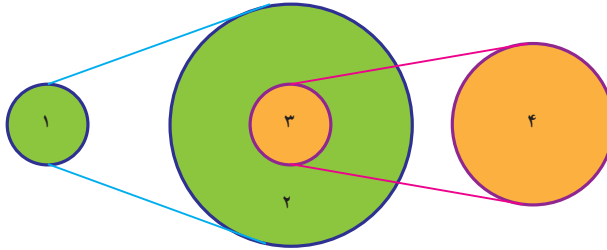
مثال ۷: یک سامانه تسمه و پولی با پولی با محرک به قطر ۱۵ سانتی متر ($D_1 = 15 \text{ cm}$) و دور ورودی 2400 دور بر دقیقه داریم، سیستم را به گونه‌ای طراحی کنید که دور خروجی 400 دور بر دقیقه باشد.

حل: همان‌طور که گفته شد بهتر است نسبت تبدیل از $3:1$ فراتر نرود. اما در اینجا با تقسیم 2400 بر 400 نسبت تبدیل $6:1$ به دست می‌آید. برای اینکه بتوان به این نسبت دست یافت از دو سری پولی و تسمه استفاده می‌کنیم. در واقع 4 پولی نیاز داریم. که در آنها: $N_1 = 2400 \text{ rpm}$ و $N_4 = 400 \text{ rpm}$ باشد.

مرحله اول را با نسبت $3:1$ و مرحله دوم را با نسبت $2:1$ در نظر می‌گیریم. پس:

$$N_3 = N_4 = \frac{1}{3} \times N_1 = 800 \text{ rpm}$$

قطر پولی دوم برابر خواهد شد با : $D_2 = D_1 \times 3 = 45 \text{ cm}$
 پولی سوم را می توان هم قطر پولی اول در نظر گرفت . بنابراین داریم :
 $D_2 = D_1 = 15 \text{ cm}$ و با توجه به نسبت تبدیل مرحله دوم قطر پولی چهارم برابر می شود با :
 $D_4 = D_2 \times 2 = 30 \text{ cm}$
 شکل ۲۶-۴ به صورت نمادین این سامانه را نشان می دهد .



شکل ۲۶-۴- سامانه تسمه و پولی دو مرحله ای

۴-۴- درجه آزادی مکانیکی

درجه آزادی یعنی حداقل تعداد متغیرهای یک سامانه، که با دانستن آنها حالت کلی آن سامانه مشخص شود .

هر ذره آزاد در فضا ۳ درجه آزادی مکانیکی دارد . طول، عرض و ارتفاع متغیرهایی هستند که دانستن آنها برای دانستن موقعیت و وضعیت دقیق ذره لازم است . اما اگر بخواهیم موقعیت دقیق همان ذره را در یک صفحه بدانیم (مثلاً صفحه XY) دیگر نیازی برای دانستن هر ۳ بعد احساس نمی شود (مثلاً Z) و تنها داشتن دو متغیر برای دانستن وضعیت آن لازم و کافی است . به تعداد متغیر مکانی (و حتی سرعت) لازم برای دانستن موقعیت یک جسم در فضا یا در صفحه، درجات آزادی مکانیکی آن می گویند .

مثال ۸ : یک ذره بر روی یک خط در حال حرکت است . تعداد درجات آزادی آن را بیان

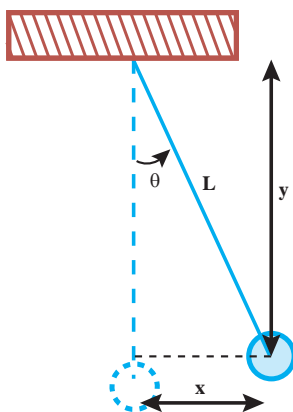
کنید .

حل : این ذره یک درجه آزادی دارد زیرا در حرکت روی یک خط، هندسه خط حرکت را محدود می کند و فقط دانستن موقعیت ذره نسبت به مبدأ حرکت برای دانستن حالت آن ذره کافی است .

مثال ۹: با توجه به شکل ۲۷-۴، یک آونگ چند درجه آزادی دارد؟

حل: با توجه به شکل ممکن است فکر کنید که این آونگ سه درجه آزادی دارد. اما با دقت بیشتر می‌توان فهمید که این آونگ تنها یک درجه آزادی دارد. زیرا:

$$x = L \cdot \sin(\theta) \text{ و } y = L \cdot \cos(\theta)$$

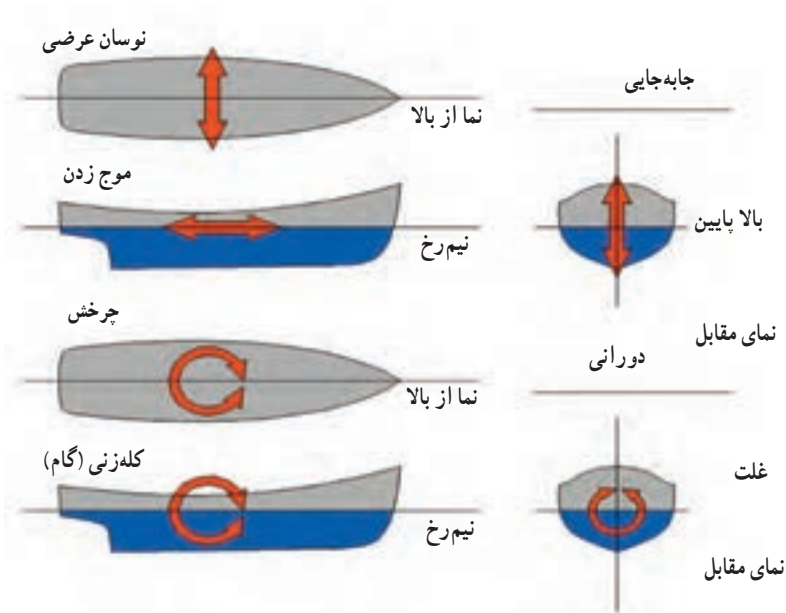


شکل ۲۷-۴. یک آونگ ساده

از معادله بالا می‌توان دریافت که تنها با دانستن موقعیت زاویه‌ای (θ) آونگ می‌توان x و y آن را نیز محاسبه کرد. پس این آونگ یک درجه آزادی دارد.

۱-۴-۴-۱ درجات آزادی اجسام صلب: اجسام صلب بر خلاف ذرات حجم دارند یعنی اینکه فقط دانستن موقعیت مکانی برای توصیف حالت آنها کافی نیست بلکه لازم است موقعیت‌های زاویه‌ای آنها نیز در دسترس باشد. برای مثال یک جعبه مکعب مستطیل در فضا شش درجه آزادی دارد. یعنی هم باید موقعیت مکانی آن (x و y و z) آن مشخص باشد و هم زاویه‌ای که هر وجه آن با یکی از صفحات مختصات می‌سازد.

۲-۴-۴-۲ درجات آزادی کشتی: برای یک کشتی می‌توان ۶ درجه آزادی در نظر گرفت. درجات آزادی کشتی در شکل ۲۸-۴ نشان داده شده است. این درجات براساس تعریف انجمن طراحان کشتی و مهندسان دریای ارائه شده است.



شکل ۲۸-۴- درجات آزادی شناور

سه عدد از این درجات آزادی مربوط به جابه‌جایی کشتی و ۳ تایی دیگر مربوط به دوران کشتی حول محورهای جابه‌جایی می‌باشد.

فعالیت کلاسی ۲

این درجات آزادی در مورد شناورها را در کلاس به بحث بگذارید و آنها را با درجات آزادی در خودرو و وسایل پرنده مقایسه کنید. این وسایل برای ناوبری به چند ابزار نیاز دارند؟ هر کدام از این وسایل ناوبری بر روی کدام درجه آزادی تأثیر دارد؟

فعالیت ۳-۴

یک جرثقیل دروازه‌ای بیابید و بگویید که این جرثقیل چند (فاصله space) درجه آزادی دارد و کاربر این وسیله برای راهبری آن به چند اهرم یا وسیله راهبری نیاز دارد. این وسایل راهبری را با تعداد درجات آزادی مقایسه کنید. نتیجه را در گروه‌های ۲ نفره به بحث بگذارید و به کلاس ارائه دهید.

در یک قایق که از نظر فیزیکی ۶ درجه آزادی دارد، کنترل چند درجه آزادی می‌تواند به دست شما باشد؟ آیا تعداد کنترل‌ها بیشتر است یا تعداد درجات آزادی غیرقابل کنترل؟

۵-۴- سرعت نسبی

در حرکت اجسام نسبت به هم، همان‌طور که جابه‌جایی نسبی سنجیده می‌شود، تغییرات آن نیز نسبی است. یعنی اگر دو جسم با سرعت‌های مختلف به هم نزدیک شوند و سرعتی که ناظر خارجی از آنها می‌بیند برای جسم اول V_1 و برای جسم دوم V_2 باشد، سرعتی که آنها نسبت به هم می‌بینند (یعنی ناظر روی جسم اول نسبت به جسم دوم و بالعکس) $V_1 + V_2$ (و در صورت هم جهت بودن $V_1 - V_2$) خواهد بود. با یک مثال این موضوع را روشن می‌کنیم.

مثال ۱۰: یک یدک کش با سرعت 30° گره دریایی به سمت شمال و یک نفت کش با سرعت 20° گره دریایی به سمت جنوب و در همان مسیر یدک کش در حرکت است. ملوانان روی کشتی نفت کش می‌بینند که یدک کش با سرعت به آنها نزدیک می‌شود. سرعت نزدیک شدن یدک کش به نفت کش را بیابید.

حل: حل این مسئله بسیار ساده است. از دید ناظر روی کشتی نفت کش (جسم شماره ۲) سرعت نزدیک شدن یدک کش (جسم شماره ۱) برابر خواهد بود با:

$$V_{1,2} = V_1 + V_2 = 30 + 20 = 50 \text{ knot}$$

مثال ۱۱: در مثال قبل اگر این کشتی دوم نیز به سمت شمال در حرکت باشد، کارکنان این کشتی سرعت یدک کش را چقدر می‌بینند؟

حل: وقتی که هر دو کشتی در یک جهت در حرکت باشند، کارکنان کشتی ۲ می‌بینند که کشتی ۱ با سرعتی برابر سرعت نسبی بین آنها از کنارشان می‌گذرد. از آنجا که هر دو هم جهت هستند سرعت نسبی که آنها می‌بینند از مثال قبل خیلی کمتر است و برابر است با:

$$V_{1,2} = V_1 - V_2 = 30 - 20 = 10 \text{ knot}$$

فراموش نکنید که سرعت یک کمیت برداری است و سرعت نسبی نیز یک خاصیت برداری خواهد بود. رابطه ۱۱-۴ یک رابطه کلی برای سرعت به صورت برداری است.

$$\vec{V}_{1,2} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 \quad (4-11)$$

مثال ۱۲: یک کشتی یدک کش با سرعت 30° گره دریایی به سمت شمال شرق و یک ناوشکن نظامی با همان سرعت ولی در جهت شمال غرب در حرکت هستند (شکل ۲۹-۴). سرعت نسبی آنها نسبت به هم چقدر است؟ (یعنی سرعت دور شدن یا نزدیک شدن آنها نسبت به هم)

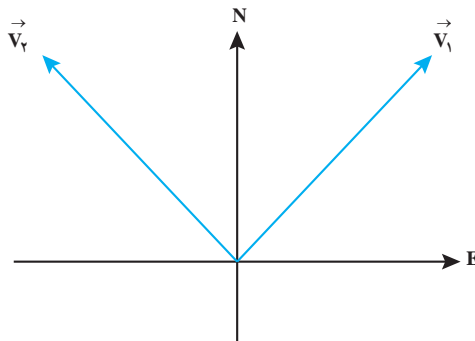
حل: ابتدا یک شکل نمادین رسم می‌کنیم تا مسئله را بهتر درک کنیم. سپس رابطه ۴-۷ را بازنویسی می‌کنیم. دقت کنید که شمال غرب و شمال شرق به معنی زاویه 45° درجه با محور شمال است.

$$\vec{V}_1 = 30 \sin(45) \mathbf{i} + 30 \cos(45) \mathbf{j}$$

$$\vec{V}_2 = -30 \sin(45) \mathbf{i} + 30 \cos(45) \mathbf{j}$$

$$\vec{V}_{1/2} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \mathbf{i} + 60 \cos(45) \mathbf{j} = 42/43 \mathbf{j}$$

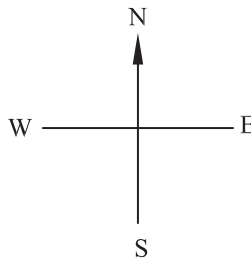
۴-۵-۱- تأثیر جریان آب بر سرعت و راه: اگر کشتی‌ای که در آب آرام حرکت می‌کند وارد محیطی با «جریان آب» شود سرعت و راه کشتی تغییر می‌کند. به این صورت که سرعت و راه جدید کشتی برآیند کار پروانه و تیغه سکان در آب آرام به علاوه سرعت جریان آب می‌باشد. واژه «سرعت» دارای دو مشخصه تندی و جهت است. این دو مشخصه قابل اندازه‌گیری بوده و در نتیجه «سرعت» یک کمیت برداری است (در فصل قبل نیز به این مطلب اشاره شده است) و با بردار نشان داده می‌شود. طول «بردار سرعت» طوری اندازه‌گیری می‌شود که تندی را نشان دهد. در واقع نمودار بردار سرعت مانند نمودار بردار نیرو رسم می‌شود.



شکل ۲۹-۴- شکل مثال ۱۲

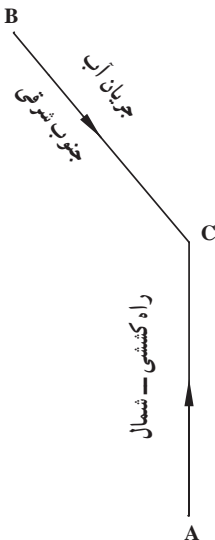
مثال ۱۳: یک کشتی با سرعت ۱۶ گره دریایی در جهت شمال وارد محیطی با جریان آب به سرعت ۴ گره دریایی به سمت جنوب شرقی می‌شود (شکل ۳-۴). مطلوب است برآیند سرعت و راه کشتی.

حل: مطلب مهم در این مثال جهت جریان آب است. وقتی گفته شود جهت جریان جنوب شرقی است به این معنی است که جهت جریان با محور افقی در ناحیه SE دارای زاویه ۴۵ درجه است (البته چون زاویه ۴۵ درجه نصف زاویه ۹۰ درجه است در این مثال زاویه جریان با محور عمودی هم ۴۵ درجه می‌باشد). بنابراین نمودار فضایی مطابق شکل ۳-۴ رسم می‌شود.



شکل ۳-۴ - شکل مثال ۱۳

نمودار برداری مطابق شکل ۳-۳۱ قابل رسم است. نمودار برداری سرعت و جهت اولیه کشتی (یعنی سرعت و جهت در آب آرام) و سرعت و جهت جریان آب که کشتی وارد آن می‌شود را نشان می‌دهد.



در نمودار برداری دو ضلع مثلث و زاویه بین آنها معلوم و معین هستند. با استفاده از قانون کسینوس اندازه ضلع سوم و با استفاده از قانون سینوس جهت (زاویه بین بردار برآیند و محور عمودی) محاسبه می‌شوند. مطابق قانون کسینوس می‌توان نوشت:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

شکل ۳-۳۱

قانون کسینوس و سینوس ها برای مثلث شکل ۳۲-۴ به صورت زیر نوشته می شود :

$$(ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 - 2(ab)(bc)\cos\beta$$

$$= 16^2 + 4^2 - 2 \times 16 \times 4 \cos 45^\circ$$

$$= 256 + 16 - 90.51 = \sqrt{181/49}$$

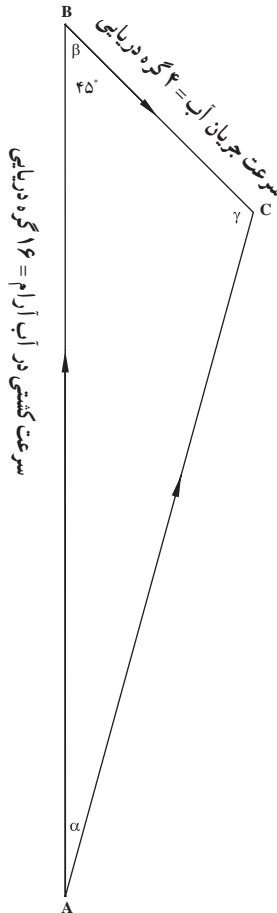
$$\Rightarrow ac = 13/47 \text{ گره دریایی}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{\sin \alpha} = \frac{13}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \sin \alpha = 0.21 \\ \alpha = 12^\circ 7' \end{cases}$$

بنابراین تندی (سرعت کشتی در جریان آب) و راه کشتی به شرح زیر می باشد :

گره دریایی ۱۳/۴۷ = تندی کشتی در جریان آب

۱۲°۷' = راه کشتی در جریان آب



شکل ۳۲-۴- شکل مثال ۱۳

خودآزمایی فصل چهارم



- ۱- سرعت زاویه‌ای را تعریف کنید.
- ۲- دو واحد مختلف سرعت دورانی چیست؟
- ۳- انواع چرخ‌دنده را نام ببرید.
- ۴- شکل ۳۳-۴ چه نوع چرخ‌دنده‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۳۳-۴

- الف) چرخ‌دنده ساده
- ب) چرخ‌دنده مارپیچ
- ج) چرخ‌دنده حلزونی
- د) چرخ‌دنده مخروطی

۵- جاهای خالی را پر کنید.

- الف) چرخ‌دنده‌ها _____ زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرند که بخواهیم تغییر زیادی در سرعت و یا قدرت ایجاد کنیم.
- ب) خاصیت مهم چرخ‌دنده‌های حلزونی نسبت تبدیل _____ و _____ است.
- ج) کاربرد اصلی چرخ‌دنده‌های مخروطی در _____ خودروها است.
- د) سامانه چرخ‌دنده‌شانه‌ای برای تبدیل حرکت _____ به حرکت _____ استفاده می‌شود.
- ه) _____ ها، _____ ها و _____ ها از اجزای انعطاف پذیر هستند.
- و) اجزای مکانیکی انعطاف پذیر در دستگاه‌های _____ و انتقال توان در فواصل نسبتاً _____ به کار می‌روند.
- ز) به جز تسمه‌های _____ بقیه آنها روی قرقره مقداری لغزش خواهند داشت.
- ح) در برخی از موارد برای دوری جستن از تنظیم فاصله بین قرقره‌ها که به علت شل شدن تسمه

ضمن کار یا هنگام سوار کردن تسمه تازه ضرورت دارد، می‌توان از یک _____ استفاده نمود.

ط) یک آونگ _____ درجه آزادی دارد.

۶- درجات آزادی یک کشتی را نام ببرید.

۷- یک جرثقیل یک تنی وزنه یک تنی را با سرعت ۱ متر بر ثانیه به بالا می‌کشد. اگر جعبه دنده

آن شامل ۳ جفت چرخ دنده و یک تسمه و پولی به شرح زیر باشد، سرعت و گشتاور موتور لازم برای جرثقیل را حساب کنید.

تسمه و پولی: قطر پولی کوچک 1° سانتی‌متر و قطر پولی بزرگ ۲۵ سانتی‌متر

چرخ دنده حلزونی (جفت اول): با نسبت ۱:۱۵

جفت دوم: چرخ دنده ساده قطر گام چرخ دنده کوچک ۵ سانتی‌متر قطر گام چرخ دنده بزرگ

۸ سانتی‌متر

جفت سوم: چرخ دنده ساده با مدول ۵، چرخ دنده اول 2° دنده و چرخ دنده دوم 35° دنده.

قطر طبلک: 2° سانتی‌متر

۸- تندی زاویه‌ای میانگین پروانه یک موتور برون نصب را که در عرض 2° دقیقه 1000° دور

می‌چرخد بر حسب rad/s تعیین کنید.

۹- یک شبانه‌روز در سیاره زهره تقریباً 3° ساعت است. در صورتی که قطر سیاره 1239°

کیلومتر باشد تندی زاویه‌ای و سرعت خطی نقطه‌ای روی دایره مرکزی آن را محاسبه کنید.

۱۰- قطر سیاره مشتری (بزرگ‌ترین سیاره منظومه شمسی) 91600° کیلومتر است. این سیاره هر

$9/9$ ساعت یک مرتبه دور خود می‌گردد. سرعت خطی یک نقطه روی خط استوای آن را تعیین کنید.

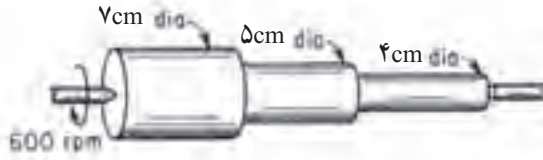
۱۱- میله پله‌دار شکل ۳۴-۴ با سرعت RPM 600° در یک دستگاه تراش می‌چرخد. تندی

خطی یک نقطه را بر حسب متر بر ثانیه در موارد زیر محاسبه کنید:

(۱) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۷ سانتی‌متر است.

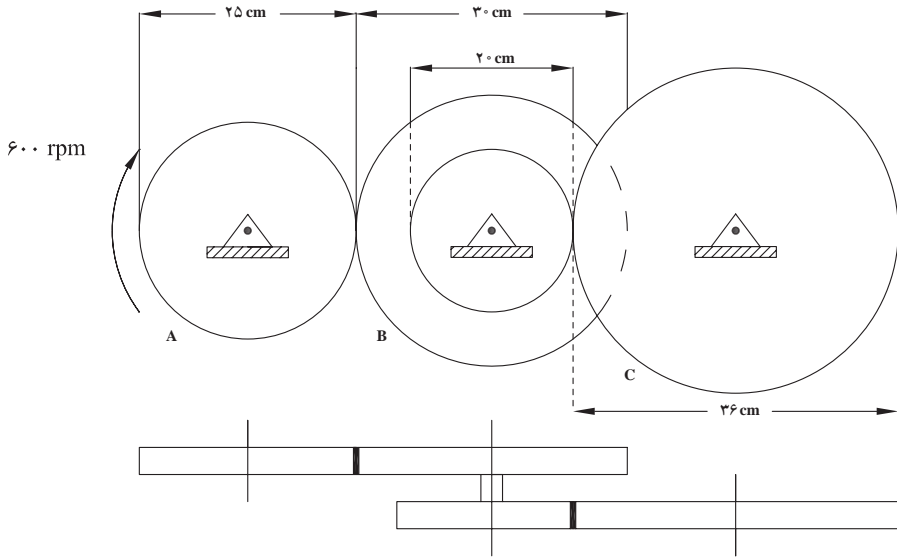
(۲) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۵ سانتی‌متر است.

(۳) نقطه‌ای روی قسمتی که قطر آن ۴ سانتی‌متر است.



شکل ۴-۳۴

۱۲- چرخ دنده A در مجموعه انتقال نیروی شکل ۴-۳۵ با تندی زاویه‌ای ۶۰۰ RPM می‌چرخد. تندی زاویه‌ای چرخ دنده‌های B و C را تعیین کنید.



شکل ۴-۳۵

۵

فصل

ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

هدف کلی

محاسبات ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

- ۱- اهرم‌ها را تجزیه و تحلیل کند.
- ۲- قرقره و طناب را تجزیه و تحلیل کند.
- ۳- ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را استفاده کند.
- ۴- نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ترکیب‌های مختلف قرقره و طناب را محاسبه کند.
- ۵- قرقره زنجیری را تجزیه و تحلیل کند.
- ۶- چرخ و محور را تجزیه و تحلیل کند.
- ۷- حلزون و چرخ حلزون بالابر را تجزیه و تحلیل کند.

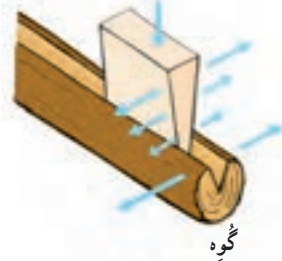
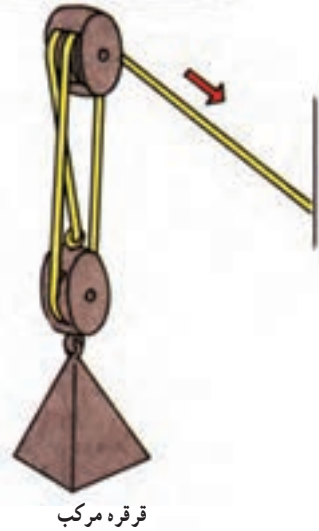
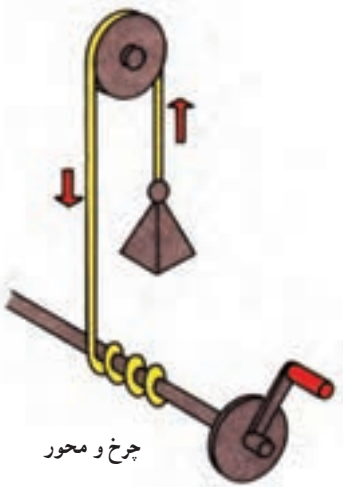
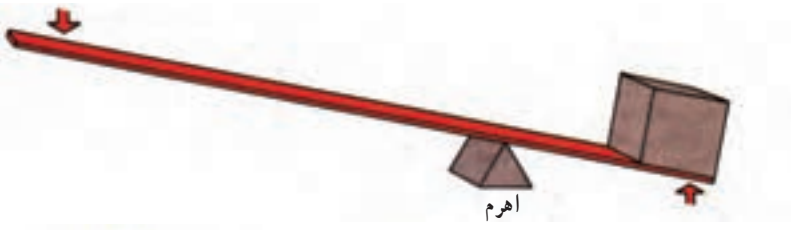
۱-۵- تجزیه و تحلیل ماشین‌های جابه‌جایی و بالابر

ابزارها توانایی بشر را برای انجام فرایندها افزایش می‌دهند. ماشین‌ها را می‌توان نوعی ابزار و یا مجموعه‌ای از ابزارها تلقی نمود. ابزارها موجب افزایش قدرت، سرعت، راندمان، دقت و بهره‌وری می‌شوند. ما نمی‌توانیم میخ را با دست خالی در یک تخته چوبی فرو کنیم ولی با کمک چکش دستی (یعنی یک ابزار ساده) انجام این فرایند امکان‌پذیر می‌شود. به‌طور کلی می‌توان ابزارها را تحت‌عنوان ابزارهای دستی، ابزارهای دستی برقی و ماشین‌ها طبقه‌بندی نمود. ابزارهای دستی ساده‌ترین نوع ابزارند طوری که نیروی لازم برای اجرای فرایند به وسیله بشر و بدون کمک وسایل دیگر تأمین می‌شود. اژه دستی و پیچ‌گوشتی از این قبیل ابزارها هستند. ابزارهای دستی برقی نوع بهبود یافته ابزار دستی‌اند. در این نوع ابزار، دست بشر برای نگهداری و حرکت دادن آن به‌کار می‌رود ولی قدرت به وسیله یک موتور الکتریکی تأمین می‌شود. اژه برقی دستی نمونه‌ای از این نوع ابزار است.

ماشین‌های ساده مبنای کار ماشین‌ها و سیستم‌های مرکب می‌باشند. اهرم‌ها، قرقره‌ها، چرخ‌دنده‌ها، سطوح شیب‌دار، پیچ‌ها و گوه‌ها که نمونه‌ای از آنها در شکل ۱-۵ ملاحظه می‌شود جزء ماشین‌های ساده هستند.

ماشین‌های ساده بدون تغییر در مقدار کار، اجرای فرایند را آسان می‌کنند. در واقع بهره مکانیکی را افزایش می‌دهند طوری که در نهایت اندازه‌ی نیرو در حین انجام کار افزایش می‌یابد. افزایش بهره مکانیکی (یا بزرگ شدن نیرو در حین انجام کار) به تدریج توضیح داده می‌شود. در واقع در ماشین‌ها

مقدار کار ورودی و خروجی برابر است و فقط مقدار نیرو و جابه‌جایی تغییر می‌کند. بدون یک چکش دستی بشر نمی‌تواند میخ را در دیوار فرو کند. با گرفتن چکش در دست و بالا بردن دست، اهرم ایجاد می‌شود. اهرم بهره‌مکانیکی را برای ورود نیرو به میخ افزایش می‌دهد و میخ با عملکرد گوه‌ای به دیوار فرو می‌رود. برای بیرون کشیدن میخ از میخ‌کش استفاده می‌شود. دست بشر نیروی کمی بر دسته میخ‌کش وارد می‌کند ولی به علت ایجاد اهرم، نیروی بزرگی در چنگال میخ‌کش موجب بیرون کشیدن میخ می‌شود.



شکل ۱-۵- ماشین‌های ساده

وقتی با مبانی کار ماشین‌های ساده آشنا شویم، می‌توانیم طرز کار ماشین‌های مرکب را درک کنیم. در واقع هر ماشین مرکب ترکیبی از دو یا چند ماشین ساده است.

۲-۵- اهرم

همه ما از کودکی با اهرم آشنا می‌شویم، الاکلنگ نوعی اهرم است که در دو سر آن دو نیرو وارد می‌شود. اهرم دارای سه عامل مهم است.

۱- نیروی ورودی یا نیروی کارگر (E)

۲- نقطه اتکا یا مرکز دوران یا تکیه‌گاه (F)

۳- نیروی مقاوم یا نیروی بار یا بار (R)

در شکل ۲-۵ یک اهرم ساده ملاحظه می‌شود. نیروی کارگر (E) در یک سر اهرم در فاصله A با نقطه اتکا (یا مرکز دوران) (F) عمل می‌کند و موجب جابه‌جایی بار (R) می‌شود. در این اهرم اندازه کار از رابطه ۱-۵ به دست می‌آید.

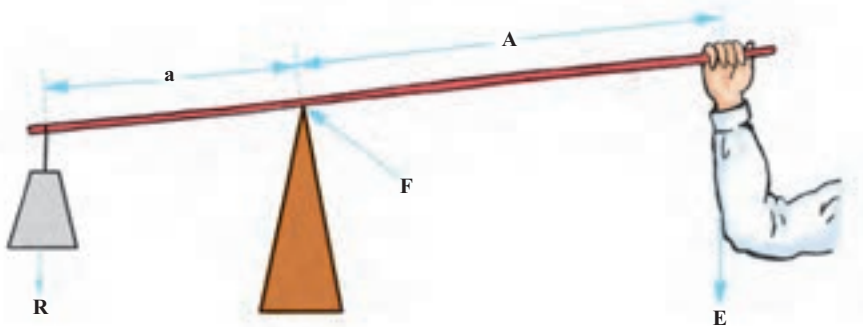
$$W = R \times a = E \times A \quad (5-1)$$

با توجه به اینکه a کوچک‌تر از A است، بنابراین مقدار بار بزرگ‌تر از نیروی کارگر است.

ملاحظه می‌شود اهرم ساده مزبور دارای بهره مکانیکی است که در مثال به آن می‌پردازیم.

مثال ۱: در اهرم ساده شکل ۲-۵ فاصله A برابر $5/1$ متر و فاصله a مساوی $1/1$ متر است.

اگر مقدار بار 490 نیوتون باشد مقدار نیروی کارگر (E) چقدر است؟



شکل ۲-۵- ماشین‌های ساده

۱- Lever

۲- Effort

۳- Fulcrum

۴- Resistance

حل:

$$R \times a = E \times A$$

$$490 \times 0/1 = 0/5 \times E$$

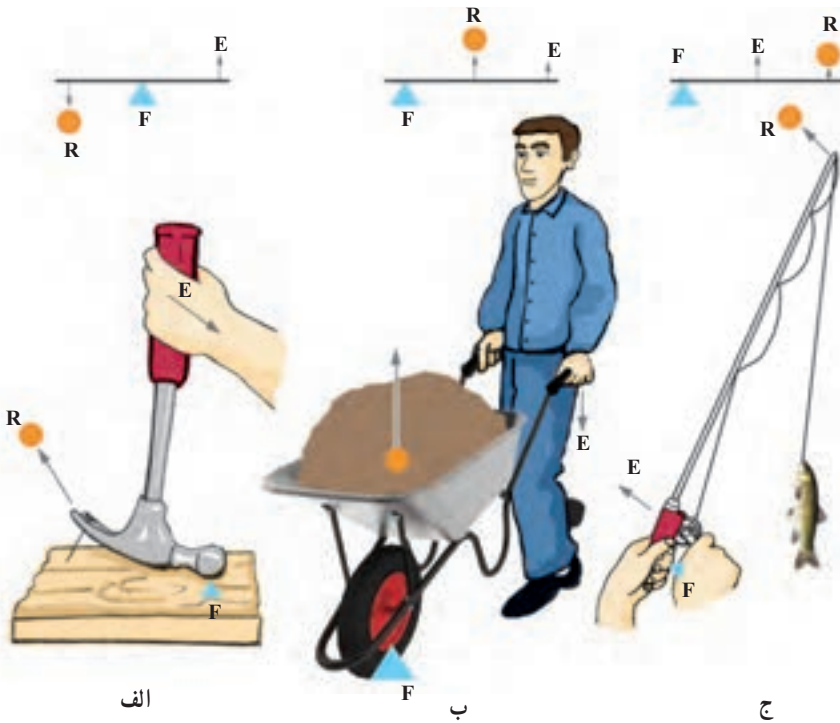
$$E = 98 \text{ نیوتون}$$

فعالیت ۱-۵

رابطه ۱-۵ را با استفاده از روابط مربوط به گشتاور اثبات کنید.

۳-۵- انواع اهرم

در شکل ۳-۵ سه نوع اهرم نشان داده شده است. نوع اهرم با توجه به محل قرارگیری نقطه اتکا یا مرکز دوران نسبت به نیروی کارگر و نیروی بار تعیین می‌شود.



شکل ۳-۵- انواع سه‌گانه اهرم

۱-۳-۵- اهرم نوع اول: در اهرم نوع اول (مطابق بخش الف در شکل ۳-۵) نقطه اتکا بین نیروی کارگر و نیروی مقاوم (بار) قرار دارد. در شکل ۳-۵ ج از چکش میخ کش برای بیرون کشیدن میخ استفاده می شود.

الاکلنگ نمونه خوبی از اهرم نوع اول است. در این نوع اهرم مقدار نیروی بار و فاصله آن از نقطه اتکا (یا تکیه گاه) با توجه به نیاز فرایند قابل تغییر است. مثال های زیر این مطلب را توضیح می دهد.

مثال ۲: شخصی به وزن 700 نیوتون در یک سر الاکلنگ نشست است. طول الاکلنگ دو متر است و تکیه گاه در فاصله نیم متری این شخص قرار دارد. شخصی با وزن 500 نیوتون در طرف دیگر الاکلنگ می نشیند. برای ایجاد موازنه، باید فاصله شخص دوم از تکیه گاه چقدر باشد؟

حل: با توجه به رابطه ۱-۵ می توان نوشت:

$$R \times a = E \times A$$

$$E = 700 = \text{وزن شخص اول نیوتون}$$

$$A = 0.5 \text{ متر}$$

$$R = 500 = \text{وزن شخص دوم نیوتون}$$

$$500 \times a = 700 \times 0.5$$

$$a = 0.7 \text{ متر}$$

مثال ۳: در صورتی که وزن شخص اول 800 نیوتون باشد فاصله شخص دوم از تکیه گاه باید

چقدر باشد؟

حل:

$$R \times a = E \times A$$

$$E = 800 = \text{وزن شخص اول نیوتون}$$

$$A = 0.5 \text{ متر}$$

$$R = 500 = \text{نیوتون}$$

$$a = \text{فاصله شخص دوم از تکیه گاه}$$

$$500 \times a = 800 \times 0.5$$

$$a = 0.8 \text{ متر}$$

بنابراین ملاحظه می شود با افزایش نیرو در یک سر الاکلنگ (اهرم نوع اول) فاصله بازوی نیروی مقاوم افزایش می یابد.

نمونه دیگر از اهرم نوع اول در شکل ۴-۵ ملاحظه می‌شود. در این شکل محل اتکا پارو بر قایق مرکز دوران اهرم می‌باشد. آب به‌عنوان نیروی مقاوم (بار) و نیروی بازوی ملوان به‌عنوان نیروی کارگر می‌باشند. بدین صورت پارو یک اهرم نوع اول محسوب می‌شود. دیلم، قیچی و انبر دست نیز اهرم نوع اول محسوب می‌شوند.



شکل ۴-۵- پارو اهرم نوع اول است.

۲-۳-۵- اهرم نوع دوم: در اهرم نوع دوم (مطابق بخش ب در شکل ۳-۵) نقطه اتکا در انتها و نیروی کارگر در سر اهرم ولی نیروی مقاوم (بار) در بین نقطه اتکا و نیروی کارگر قرار دارد. در این شکل فرغون ملاحظه می‌شود.

مثال ۴: اگر نیروی کارگر بر دسته‌های فرغون در شکل ۵-۵ برابر 22° نیوتون در فاصله $1/2$ متری از نقطه اتکا (چرخ فرغون) باشد و فاصله مرکز ثقل نیروی بار از نقطه اتکا برابر $3/3^\circ$ متر باشد مقدار نیروی مقاوم (بار) که به وسیله ملوان قابل بلند کردن است چقدر است؟
حل: با توجه به رابطه ۱-۵ داریم:

$$22^\circ \times 1/2 = R \times 3/3^\circ$$

$$R = 88^\circ \text{ نیوتون}$$

مثال ۵: چنانچه فاصله مرکز ثقل بار از چرخ فرغون $35/3^\circ$ متر شود اندازه نیروی کارگر باید

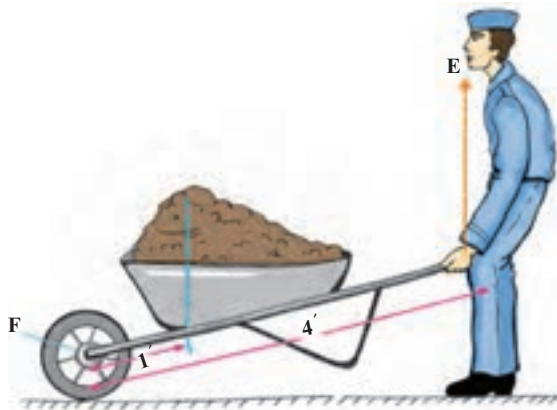
چقدر باشد؟

حل:

$$88^\circ \times 3/3^\circ = E \times 1/2$$

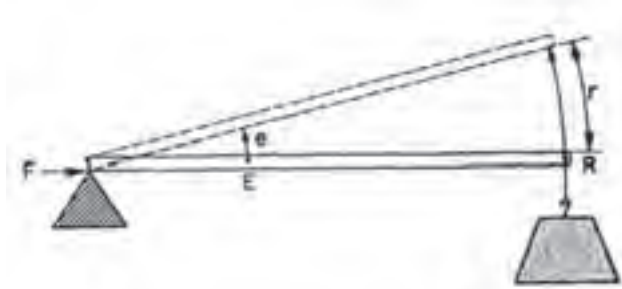
$$E = 293/3^\circ \text{ نیوتون}$$

بنابراین در صورت افزایش فاصله بار از نقطه اتکا نیروی کارگر باید افزایش یابد.



شکل ۵-۵- اهرم نوع دوم

۳-۳-۵- اهرم نوع سوم : در اهرم نوع سوم (مطابق بخش ج در شکل ۳-۵) نیروی کارگر بین نقطه اتکا و نیروی مقاوم (بار) قرار می‌گیرد. در این نوع اهرم سرعت حرکت بار زیاد است ولی نیروی کارگر باید بزرگ باشد. همان‌طور که در شکل ملاحظه می‌شود نقطه اتکا در محل نگاه‌داشتن دسته قلاب ماهی‌گیری با دست راست صیاد قرار دارد. نیروی مقاوم (بار) که ماهی صید شده می‌باشد در انتهای اهرم است و نیروی کارگر که به وسیله دست چپ صیاد وارد می‌شود بین نقطه اتکا و بار قرار دارد. برای آسان‌تر شدن درک مطلب به شکل ۶-۵ مراجعه شود. همچنان که نیروی E فاصله e را می‌پیماید نیروی مقاوم (بار) R فاصله r را طی می‌کند. ملاحظه می‌شود فاصله r بزرگ‌تر از فاصله e می‌باشد. در نتیجه سرعت حرکت R باید بزرگ‌تر از سرعت حرکت E باشد زیرا R و E دو فاصله مختلف را در مدت زمان مشابه و معین طی می‌کنند. این پدیده عیناً در مورد صیاد و ماهی به وجود می‌آید.



شکل ۵-۶- اهرم نوع سوم

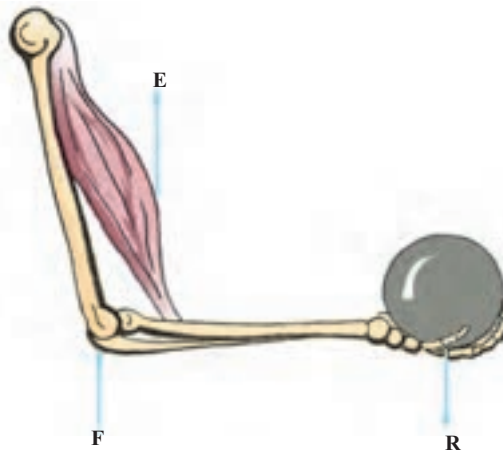
حال به شکل ۵-۷ نگاه کنید. گلوله R به وسیله انگشتان و کف دست نگه داشته شده است. نقطه اتکا F در آرنج قرار دارد و محل اجرای نیروی کارگر E بین آرنج و کف دست است. **مثال ۶:** چنانچه در شکل ۵-۶ فاصله E و R از F به ترتیب $\frac{2}{5}$ و ۴۵ سانتی‌متر و مقدار R برابر 40 نیوتون باشد. مقدار نیروی E چقدر است؟

حل:

$$E \times \frac{2}{5} = 40 \times 45$$

$$E = 720 \text{ نیوتون}$$

نتیجه می‌گیریم در اهرم نوع سوم نیروی کارگر بزرگ‌تر از نیروی مقاوم (بار) است.



شکل ۵-۷- بازو اهرم نوع سوم است.

۴-۳-۵- بهره مکانیکی: ملاحظه شد که در اهرم‌های نوع اول و دوم مقدار بار بزرگ‌تر از مقدار نیروی کارگر می‌شود. افزایش نیروها در اهرم نوع اول و دوم به بهره مکانیکی مثبت موسوم است. اهرم نوع سوم بهره مکانیکی مثبت ندارد ولی می‌تواند سرعت یا مسافت جابجایی را افزایش دهد. در اهرم نوع سوم نیروی کارگر بیشتر از نیروی مقاوم (بار) است. بهره مکانیکی به صورت رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$MA = \frac{R}{E} \text{ یا } \text{بهره مکانیکی} = \frac{\text{بار}}{\text{نیروی کارگر}} \quad (5-2)$$

مثال ۷: در مثال‌های ۴ و ۵ بهره مکانیکی را حساب کنید.

حل: با استفاده از رابطه ۲-۵ برای مثال ۴ داریم:

$$MA = \frac{R}{E} = \frac{88^\circ}{22^\circ} = 4$$

با استفاده از رابطه ۲-۵ برای مثال ۵ داریم:

$$MA = \frac{R}{E} = \frac{88^\circ}{293/3} = 3$$

رابطه ۲-۵ را می‌توان به شکل رابطه ۳-۵ بازنویسی کرد. در این حالت نسبت بازوهای اهرم به‌عنوان بهره مکانیکی انتخاب می‌شود.

$$MA = \frac{A}{a} \quad \text{یا} \quad MA = \frac{\text{بازوی نیروی کارگر}}{\text{بازوی مقاوم}} = \text{بهره مکانیکی} \quad (5-3)$$

مثال ۸: برای بازوی مثال ۶ بهره مکانیکی را محاسبه کنید.

حل: با استفاده از رابطه ۳-۵ برای مثال ۶ داریم:

$$MA = \frac{A}{a} = \frac{45}{2/5} = 11.25$$

دقت کنید که بهره مکانیکی یک کمیت اسکالر و بی‌بعد است.

۴-۵- قرقره و طناب^۱

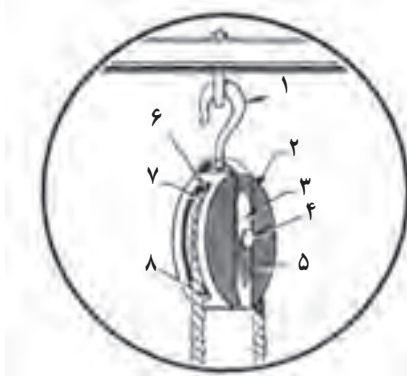
قرقره وسیله مدوری است که حول محور خود حرکت دورانی دارد. روی محیط قرقره شیاری برای قرار گرفتن طناب وجود دارد. قسمت‌های مختلف یک قرقره در شکل ۸-۵ مشاهده می‌شود. در شکل ۹-۵ از قرقره ثابت تک شیاره برای بالا بردن پرچم استفاده شده است. همچنان‌که شخص طناب را پایین می‌کشد پرچم بالا می‌رود. این قرقره را قرقره تک شیاره ثابت می‌نامیم. در شکل ۱۰-۵ همین قرقره در محل نصب مشاهده می‌شود. نیروی کارگر E در طناب A و نیروی مقاوم R در طناب B اعمال می‌شوند. مشاهده می‌شود که اندازه بازوی EF مساوی بازوی FR است. در این دستگاه با اعمال نیروی کارگر کوچک، جهت کشش تغییر می‌کند.

قرقره ثابت تک شیاره نوعی اهرم نوع اول با بازوهای مساوی است. بنابراین اندازه بهره مکانیکی در آن برابر با ۱ می‌باشد، لذا اگر در نقطه A طناب با یک نیروی ۵ نیوتونی پایین کشیده شود در نقطه B طناب با همان مقدار بالا می‌رود.

^۱ Block and Tackle



شکل ۹-۵- قرقره و طناب در قرقره ثابت تک‌شیاره



شکل ۸-۵- قسمت‌های مختلف قرقره

- (۱) قلاب
- (۲) صفحه قرقره
- (۳) نوار حافظ
- (۴) پین
- (۵) ورق بیرونی
- (۶) محفظه طناب بخور
- (۷) شیار قرقره
- (۸) نشیمنگاه قرقره



شکل ۱۰-۵- این قرقره فاقد بهره مکانیکی است.

در شکل ۱۱-۵ همان قرقره به کار رفته است. در این شکل یک انتهای طناب از سقف آویزان است و انتهای دیگر در دست فرد است. بشکه‌ای به وزن 80° نیوتون به وسیله قرقره و طناب تحمل می‌شود. با کشیدن طناب، قرقره و بشکه با هم بالا می‌آیند. وقتی قرقره و طناب به این صورت استفاده شود مجموعه آن قرقره متحرک نامیده می‌شود. با توجه به اینکه وزن بشکه 80° نیوتون است، هر نیمه از طناب به همراه قرقره 40° نیوتون از بار را تحمل می‌کند. این موضوع با رسم نمودار آزاد جسم و نوشتن معادلات تعادل به دست می‌آید (فراموش نکنید معادلات تعادل در حالی نوشته می‌شود که جسم در حال سکون باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند). از زاویه طناب در دست فرد با محور عمود صرف نظر کنید.

$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{80^\circ}{40^\circ} = 2$$

بهره مکانیکی برابر است با :



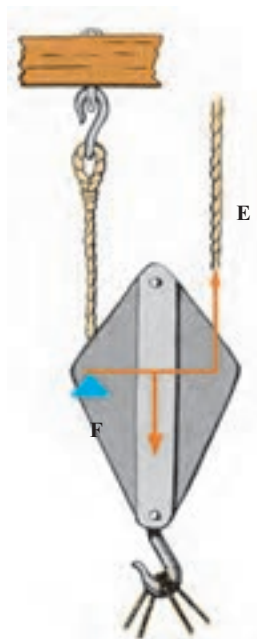
شکل ۵-۱۱- قرقره متحرک

در این دستگاه، قرقره متحرک تک شیاره همانند اهرم نوع دوم عمل می‌کند. توضیح چگونگی اعمال نیروها در شکل ۵-۱۲ نشان داده شده است. نیروی E روی بازوی EF که قطر چرخ قرقره است وارد می‌شود. نیروی مقاوم (R) روی بازوی FR که شعاع چرخ قرقره است مقاومت می‌کند. با توجه به اینکه اندازه قطر دو برابر شعاع است بنابراین بهره مکانیکی دستگاه برابر ۲ است. باید توجه کرد وقتی نیروی E به اندازه یک متر به طرف بالا حرکت می‌کند بار در محل R فقط به اندازه نیم‌متر بالا می‌رود. اگرچه در این دستگاه بهره مکانیکی حاصل می‌شود ولی طول کابلی که به وسیله دست کارگر بالا کشیده می‌شود بیشتر از فاصله‌ای است که بار بالا

می‌آید. البته استفاده از قرقره و طناب به صورت شکل ۵-۱۱ مشکل است و برای بالا کشیدن یک جسم مشابه، از دو قرقره مطابق شکل ۵-۱۳ بهره می‌گیرند. در این سیستم قرقره پایین متحرک و قرقره بالایی ثابت است. قرقره ثابت فقط جهت کشش را تغییر می‌دهد و قرقره متحرک بهره مکانیکی را دو برابر می‌کند.



شکل ۵-۱۳- ترکیب قرقره ثابت و متحرک



شکل ۵-۱۲- قرقره متحرک همانند اهرم نوع دوم

برای مثال در شکل ۱۴-۵ مجموعه قرقره و طناب متشکل از قرقره ثابت دو شیاره و قرقره متحرک تک شیاره مشاهده می‌شود. در این مجموعه بار از قرقره متحرک آویزان است. قرقره متحرک نیز به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌شود. هر بخش از طناب به اندازه مساوی بار را تحمل می‌کند. اگر وزن صندوق ۳۰۰۰ نیوتون باشد، هر طناب به اندازه ۱۰۰۰ نیوتون از بار را تحمل می‌کند. اگر نیروی وارد بر طناب B برابر ۱۰۰۰ نیوتون باشد کارگر مجبور است یک نیروی ۱۰۰۰ نیوتون برای کشیدن طناب A وارد کند تا بتواند صندوق را بالا ببرد.

بهره مکانیکی برابر است با:

$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{3000}{1000} = 3$$



وقتی بار به وسیله دو بخش از طناب تحمل می‌شود، بهره مکانیکی برابر ۲ و وقتی به وسیله سه بخش از طناب تحمل می‌شود بهره مکانیکی برابر ۳ است. این نتیجه، راهنمای خوبی برای محاسبه بهره مکانیکی انواع مجموعه‌های قرقره و طناب است. به این ترتیب که تعداد بخش‌هایی از طناب که بار به وسیله آنها تحمل می‌شود مساوی بهره مکانیکی است. نکته مهم، اطمینان یافتن از استحکام و مناسب بودن طناب برای تحمل بار است.

شکل ۱۴-۵ مجموعه قرقره ثابت دو شیاره و قرقره متحرک تک شیاره (ناهمسان)

فعالیت کلاسی ۱

به کمک هنرآموز و گروه همکلاسی‌ها سعی کنید ترکیب‌های مختلفی از انواع قرقره را بیابید و بهره مکانیکی آنها را محاسبه کنید.

اکنون آنچه را که در مورد قرقره و طناب آموختیم به‌طور خلاصه در زیر می‌آوریم تا به‌طور عملی، در کشتی قابل استفاده باشد.

— تنها مزیت قرقره ثابت تک شیاره تغییر در جهت کشیدن طناب است و بهره مکانیکی آن برابر عدد یک است.

– در قرقره متحرک تک شیاره بهره مکانیکی برابر ۲ است.
 – مجموعه قرقره و طناب را می توان به صورت های مختلف با ترکیب قرقره های تک شیاره، دو شیاره و سه شیاره و بهره مکانیکی بزرگ تر استفاده نمود.
 – تعداد بخش های طناب که از یک قرقره متحرک می گذرند مشخص کننده تقریبی بهره مکانیکی آن هستند.
 – اگر انتهای طناب به یک قرقره متحرک محکم شود بهره مکانیکی به اندازه عدد یک افزایش می یابد.

۵-۵- راندمان ماشین

تاکنون آموختیم که مجموعه قرقره و طناب در واقع نوعی ماشین بالابر است. ماشین بالابر مکانیزمی برای جابه جایی بار در امتداد قائم و امتداد افقی و یا هر دو می باشد.
 در این فرایند نیروهای ورودی و مصرفی به نیروی کارگر و نیروی مقاوم به بار موسوم است. کار انجام شده به وسیله یک ماشین نمی تواند بیش از کار ورودی به آن باشد. بنابراین هیچ ماشینی دارای راندمان صد در صد نیست و مقدار معینی از کار ورودی به علت اصطکاک بین اجزاء و قطعات از دست می رود.

روابط موجود برای کار ورودی، کار مفید و اصطکاک به شرح زیر است:

$$(۵-۴) \quad \text{کار ورودی به ماشین} = \text{کار از دست رفته به علت اصطکاک} + \text{کار مفید}$$

$$(۵-۵) \quad \text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} \times \text{نیروی کارگر} = \text{کار ورودی}$$

$$(۵-۶) \quad \text{تغییر مکان بار} \times \text{بار} = \text{کار مفید}$$

با صرف نظر از اصطکاک از روابط (۵-۴) تا (۵-۶) می توان رابطه (۵-۷) را استخراج کرد.

$$(۵-۷) \quad \text{تغییر مکان بار} \times \text{بار} = \text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} \times \text{نیروی کارگر}$$

نسبت تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر به تغییر مکان بار، به نسبت سرعت^۱ یا به اختصار $v.r.$ موسوم است. اندازه نسبت سرعت برای هر ماشین خاص ثابت است و بستگی به طراحی آن دارد. نسبت سرعت با انجام آزمایش به دست می آید. اما می توان رابطه (۵-۸) را برای آن معرفی کرد.

$$(۵-۸-۱) \quad \text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} = \text{نسبت سرعت (v.r.)} \times \text{تغییر مکان بار}$$

$$(۵-۸-۲) \quad \text{نسبت سرعت (v.r.)} = \frac{A}{a}$$

^۱ - Velocity Ratio

همیشه راندمان ماشین‌ها به صورت نسبت کار خروجی یا کار مفید به کار ورودی تعریف می‌شود. هرچه راندمان یک دستگاه بالاتر باشد استفاده از این دستگاه مقرون به صرفه تر است. حداکثر راندمان یک ماشین می‌تواند ۱ باشد.

رابطه (۵-۹) راندمان ماشین را تعریف می‌کند.

$$(5-9-1) \quad \text{راندمان} = \frac{\text{تغییر مکان بار} \times \text{بار}}{\text{کار ورودی}} = \frac{\text{کار مفید}}{\text{کار ورودی}}$$

$$(5-9-2) \quad \text{راندمان} = \frac{R \times a}{E \times A}$$

در بند ۴-۲-۵ از همین فصل آموختیم که بهره مکانیکی برابر است با نسبت بار به نیروی کارگر، لذا می‌توان رابطه (۵-۹) را به صورت رابطه (۵-۱۰) بازنویسی کرد.

$$(5-10) \quad \text{راندمان} = (M.A.) \times \frac{1}{v.r.} = \frac{M.A.}{v.r.} = \frac{\text{بهره مکانیکی}}{\text{نسبت سرعت}}$$

راندمان در رابطه (۵-۱۰) به صورت کسری بیان شده است. برای بیان راندمان به صورت درصد، راندمان در عدد ضرب می‌شود.

در صورتی که از اصطکاک صرف نظر شود یا وجود نداشته باشد فقط نیروی کارگر باید بار را جابه‌جا کند. این گونه نیروی کارگر به نیروی کارگر مطلوب یا ایده‌آل موسوم است. اگر از لحاظ تئوری یک ماشین کاملاً بدون اصطکاک وجود داشته باشد، راندمان آن صددرصد یا مساوی عدد یک است. در این گونه ماشین بهره مکانیکی مساوی با نسبت سرعت است و می‌توان نوشت:

$$(5-11) \quad E_1 = \frac{R}{v.r.} \quad \text{و} \quad \frac{R}{E_1} = v.r. \quad \text{و} \quad M.A. = v.r.$$

E_1 نیروی کارگر مطلوب یا ایده‌آل است. البته با توجه به اینکه در ماشین‌های واقعی اصطکاک وجود دارد رابطه زیر در هر ماشین واقعی برقرار است.

$$(5-12-1) \quad \text{نیروی کارگر مطلوب} - \text{نیروی کارگر واقعی} = \text{نیروی کارگر برای جبران اصطکاک}$$

$$(5-12-2) \quad \text{نیروی کارگر برای جبران اصطکاک} = E - \frac{R}{v.r.}$$

بر فرض اینکه در ماشین اصطکاک وجود نداشته باشد، باری که به وسیله یک نیروی کارگر معین جابه‌جا می‌شود به بار مطلوب موسوم است و می‌توان نوشت:

$$(5-13) \quad \text{بار مطلوب} = E \times v.r.$$

از روابط فوق در حل مسائل نمونه استفاده خواهد شد.

مثال ۹: مجموعه قرقره و طناب مطابق شکل ۱۵-۵ باری به وزن ۴۰۵ نیوتون را به فاصله یک

متر بالا می‌کشد. اگر نیروی کارگر مساوی ۹۰ نیوتون باشد راندمان مجموعه چقدر است؟

حل: با توجه به اینکه بار به وسیله پنج بخش از طناب تحمل می‌شود بنابراین فاصله طی شده

به وسیله نیروی کارگر برابر ۵ متر و فاصله طی شده به وسیله بار مساوی یک متر است.

$$v.r. (\text{نسبت سرعت}) = \frac{5}{1} = 5$$

$$(M.A.) = \frac{405}{90} = 4.5$$

$$\text{راندمان} = \frac{M.A.}{v.r.} \times 100$$

$$\text{راندمان} = \frac{4.5}{5} \times 100$$

$$\text{راندمان} = 90\%$$



شکل ۱۵-۵- مجموعه قرقره مثال ۹

۶-۵- قرقره زنجیری^۱

قرقره زنجیری که قرقره اختلافی^۲ نیز نامیده می‌شود معمولاً از سقف موتور خانه کشتی و یا کارگاه ساحلی به وسیله روروک آویزان است و برای جابه‌جایی عمودی و افقی اجسام و بارهای سنگین استفاده می‌شود. قرقره مزبور در شکل ۱۷-۵ نشان داده شده است. ماشین شامل دو قرقره متحد‌المركز به عنوان قرقره ثابت و یک قرقره تک‌شیاره متحرک می‌باشد. هر دو قرقره فوقانی هم‌زمان با هم می‌چرخند.

وقتی نیروی کارگر بر زنجیر وارد می‌شود یک سوی قرقره متحرک به طرف قرقره بزرگ A کشیده می‌شود ولی سوی دیگر آن با چرخیدن قرقره کوچک B پایین می‌آید. در نتیجه جابه‌جایی قرقره رو به بالا خواهد بود.

۱- Chain hoist

۲- Differential Pulley

اگر D و d به ترتیب قطر قرقره بزرگ A و قرقره کوچک B باشند، با یک دور چرخش کامل قرقره ثابت داریم:

$$\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} = \frac{(\pi D - \pi d)}{2}$$

$$\text{نسبت سرعت (v.r.)} = \frac{\text{تغییر مکان بار}}{\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر}}$$

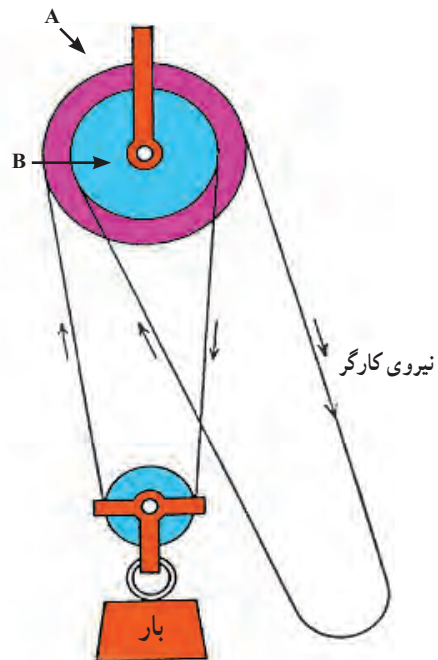
$$\text{نسبت سرعت (v.r.)} = \frac{\pi D}{\frac{1}{2}(\pi D - \pi d)}$$

$$(v.r.) = \frac{2\pi D}{(\pi D - \pi d)} = \frac{2\pi(2R)}{2\pi R - 2\pi r} = \frac{2R}{R - r} \quad (5-14)$$

رابطه (5-14) نسبت سرعت را در یک قرقره زنجیری نشان می‌دهد. در این رابطه R شعاع قرقره بزرگ و r شعاع قرقره کوچک است.

مثال ۱۰: چنانچه در شکل ۵-۱۶ شعاع قرقره بزرگ R برابر ۱۶ سانتی‌متر و شعاع قرقره کوچک r مساوی ۱۴ سانتی‌متر باشد نسبت سرعت ماشین چقدر است؟

$$v.r. = \frac{2(16)}{16 - 14} = \frac{32}{2} = 16$$



شکل ۵-۱۶- مجموعه قرقره زنجیری

اگرچه نسبت سرعت بزرگ حاکی از بهره مکانیکی بزرگ می‌باشد ولی این ماشین دارای اصطکاک نسبتاً زیادی است لذا بهره مکانیکی واقعی آن بسیار کوچک‌تر از بهره مکانیکی مطلوب است.

در این ماشین از زنجیر استفاده می‌شود. قرقه‌ها دارای دندانه هستند طوری که زنجیر قابل استفاده باشد. گام دندانه‌ها ثابت است لذا داریم:

$$\text{نسبت سرعت (v.r.)} = \frac{\text{دو برابر تعداد دندانه‌ها در قرقه بزرگ}}{\text{تفاوت تعداد دندانه‌ها در دو قرقه}}$$

$$v.r. = \frac{2D}{D-d} = \frac{2R}{R-r}$$

مثال ۱۱: قطر قرقه‌های بزرگ و کوچک در یک قرقه زنجیری به ترتیب 12° و 11° میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار $2/4$ کیلو نیوتون نیروی کارگر به مقدار 25° نیوتون لازم است. نسبت سرعت، بهره مکانیکی و راندمان را تعیین کنید. همچنین مقدار نیروی کارگر که برای جبران اصطکاک مصرف می‌شود را محاسبه کنید.

حل:

$$v.r. = \frac{2D}{D-d} = \frac{2 \times 12^\circ}{12^\circ - 11^\circ} = 24$$

$$M.A. = \frac{R}{E} = \frac{24^\circ}{25^\circ} = 9/6$$

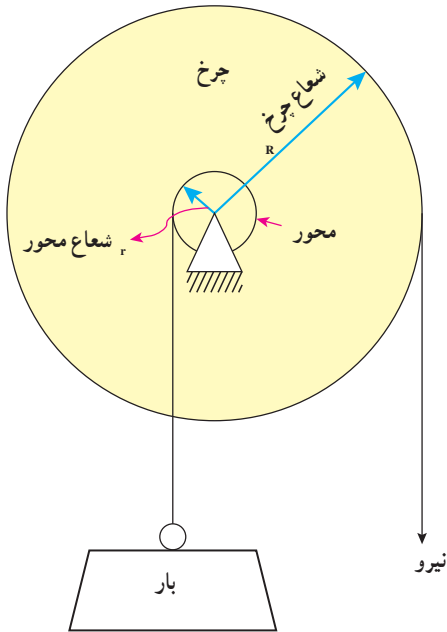
$$\text{راندمان} = \frac{M.A.}{v.r.} = \frac{9/6}{24} = 0/4 \text{ یا } 40\%$$

$$\text{نیوتون کارگر مطلوب} = \frac{R}{v.r.} = \frac{24^\circ}{24} = 100$$

نیروی کارگر مطلوب - نیروی کارگر حقیقی = نیروی کارگر مصرف شده برای اصطکاک
 $= 25^\circ - 100 = 15^\circ$ نیوتون

۵-۷- چرخ و محور

این ماشین شامل یک قرقه تک شیاره به همراه یک محور است. یک سر طناب یا سیمی که قلاب بار از آن آویزان می‌شود به محور متصل و محکم شده و به دور آن می‌پیچد. یک سر طناب یا سیمی



که نیروی کارگر آن را می کشد به دور قرقره می پیچد. این ماشین در شکل ۵-۱۷ نشان داده شده است. طناب بار و طناب نیروی کارگر در دو جهت مخالف به دور محور و قرقره پیچیده می شوند. با اعمال نیروی کارگر قرقره می چرخد و طناب به طرف کارگر کشیده می شود. هم زمان طناب بار در جهت مخالف به دور محور می پیچد و بار بالا می رود. البته ممکن است به جای طناب کارگر از یک دسته به عنوان اهرم استفاده شود. این سامانه در چرخ چاه دیده می شود.

شکل ۵-۱۷- چرخ و محور

در صورتی که D و R به ترتیب قطر و شعاع قرقره و d و r قطر و شعاع محور باشند و با فرض اینکه نیروی کارگر، قرقره و محور را یک دور کامل بچرخاند می توان نوشت:

$$\text{نسبت سرعت (v.r.)} = \frac{\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر}}{\text{تغییر مکان بار}} = \frac{\text{طول محیط قرقره}}{\text{طول محیط محور}}$$

از نسبت بالا می توان رابطه (۵-۱۵) را نتیجه گرفت:

$$(v.r.) = \frac{\pi D}{\pi d} = \frac{D}{d} = \frac{R}{r} \quad (5-15)$$



شکل ۵-۱۸- چرخ چاه

دقت کنید در صورتی که ضخامت طناب در مسئله ذکر شود باید ضخامت آن را به قطر مؤثر افزود. شکل ۱۸-۵ نیز نوعی ماشین چرخ و محور را نشان می‌دهد که نیروی کارگر به جای وارد شدن به طناب به یک دسته وارد می‌شود.

مثال ۱۲: در یک ماشین چرخ و محور، قطر قرقره و محور به ترتیب 22° و 4° میلی‌متر است. قطر طناب‌های بار و نیروی کارگر به ترتیب 1° و 5° میلی‌متر است. در صورتی که راندمان ماشین 92% باشد مقدار نیروی کارگر برای بالا بردن باری به مقدار 4° نیوتون را محاسبه کنید.
حل:

$$\begin{aligned} \text{قطر طناب نیروی کارگر} + \text{قطر قرقره} &= \text{قطر مؤثر قرقره} \\ &= 22^\circ + 5^\circ = 27^\circ \text{ میلی‌متر} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{قطر طناب بار} + \text{قطر محور} &= \text{قطر مؤثر محور} \\ &= 4^\circ + 1^\circ = 5^\circ \text{ میلی‌متر} \end{aligned}$$

$$v.r. = \frac{D}{d} = \frac{27^\circ}{5^\circ} = 4/5$$

$$\begin{aligned} v.r. \times \text{راندمان ماشین} &= \text{بهره مکانیکی (M.A.)} \\ &= 0.92 \times 4/5 \\ &= 4/14 \end{aligned}$$

$$E = \text{نیروی کارگر} = \frac{R}{M.A.} = \frac{4^\circ \cdot N}{4/14} = 96/61N$$

۸-۵- قرقره سگکی^۱

در بسیاری از ماشین‌های بالابر به جای آویزان شدن بار از طناب بار، از قرقره سگکی برای آویزان کردن بار استفاده می‌شود. این نوع قرقره دارای یک شیار است. مطابق شکل ۱۹-۵ با باز کردن سگک می‌توان طناب را در داخل قرقره قرار داد. یک سر طناب به ماشین بالابر محکم است و از داخل قرقره می‌گذرد و سر آزاد طناب به وسیله نیروی کارگر بالا کشیده می‌شود. قرقره سگکی معمولاً به صورت قرقره متحرک استفاده می‌شود.



شکل ۱۹-۵- قرقره سگکی

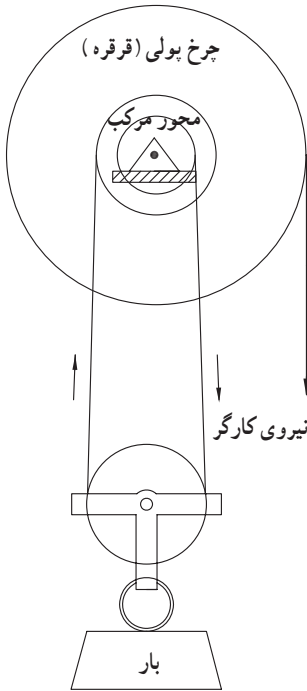
^۱ Snath Block

۹-۵- چرخ و محور دو پله‌ای

این ماشین مشابه چرخ و محور است با این فرق که محور این ماشین از دو محور متحد‌المركز با دو قطر متفاوت تشکیل شده است. مطابق شکل ۵-۲۰ با چرخش قرقره کارگر به وسیله طناب نیروی کارگر و همزمان با پیچیده شدن طناب به دور محور بزرگ‌تر، طناب از دور محور کوچک‌تر باز می‌شود. طناب محورها از داخل یک قرقره سگکی می‌گذرد و بار به وسیله قرقره سگکی تحمل می‌شود.

D قطر قرقره کارگر، d_1 قطر محور بزرگ‌تر و d_2 قطر محور کوچک‌تر است. با یک دور چرخش قرقره کارگر، طناب بالا رو به اندازه πd_1 می‌رود و طناب پایین رو به اندازه محیط محور کوچک‌تر πd_2 پایین می‌آید. بنابراین طناب حامل قرقره سگکی به اندازه $\pi d_1 - \pi d_2$ کوتاه می‌شود. با توجه به اینکه تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر در یک دور چرخش کامل قرقره کارگر به اندازه است، بنابراین می‌توان رابطه (۵-۱۶) را به این شکل نوشت:

$$\text{تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر} = \frac{\text{نسبت سرعت (v.r.)}}{\text{تغییر مکان بار}}$$



شکل ۵-۲۰- چرخ و محور

$$\begin{aligned} v.r. &= \frac{\pi D}{\frac{1}{2}(\pi d_1 - \pi d_2)} = \frac{2D}{\pi d_1 - \pi d_2} \\ &= \frac{2D}{d_1 - d_2} = \frac{2R}{r_1 - r_2} \end{aligned} \quad (5-16)$$

می‌توان مانند چرخ و محور معمولی (بخش ۵-۷) از یک دسته به جای قرقره کارگر استفاده کرد. در این صورت فاصله مرکز محور تا دسته چرخش معادل شعاع قرقره کارگر خواهد بود.

مثال ۱۳: مطابق شکل ۵-۲۰ شعاع قرقره کارگر برابر ۳ سانتی‌متر، شعاع محور بزرگ‌تر (r_1) مساوی ۱۰ سانتی‌متر و شعاع محور کوچک‌تر (r_2) برابر ۶ سانتی‌متر است. در صورتی که نیروی کارگر به مقدار ۵ نیوتون باشد چه مقدار بار را می‌توان بالا برد؟ راندمان دستگاه ۰/۹ است.

حل : با استفاده از رابطه (۵-۱۶) می نویسیم :

$$v.r. = \frac{2R}{r_1 - r_2} = \frac{2 \times 3^\circ}{10 - 6} = \frac{6^\circ}{4} = 1.5$$

$$(M.A.) \times v.r. = \text{راندمان دستگاه} = \text{بهره مکانیکی (M.A.)}$$

$$= 0.9 \times 1.5 = 13/5$$

$$E = \text{نیوتون } 5^\circ = \text{نیروی کارگر}$$

$$E = \frac{R}{M.A.} \Rightarrow R = E \times M.A. = 5^\circ \times 13/5 = 675 \text{ نیوتون}$$

۱۰-۵- میله حلزون و چرخ حلزون بالابر

مطابق شکل ۲۱-۵ ماشین بالابر میله حلزون و چرخ حلزون (که به حلزون و چرخ حلزون معروف است) شامل حلزون یا میله حلزون، چرخ حلزون، قرقه بار، قرقه کارگر، زنجیر کارگر، قلاب بار و زنجیر یا کابل بار می شود. برخی موارد به جای قلاب بار از قرقه سگکی استفاده می شود. در این موارد یک سر کابل قرقه سگکی به بدنه ماشین متصل و محکم می شود. با اعمال نیروی کارگر بر زنجیر کارگر، قرقه کارگر و سپس میله حلزون، چرخ حلزون و قرقه بار به چرخش درمی آیند و بار بالا می رود.



شکل ۲۱-۵- میله حلزون و چرخ حلزون بالابر

در این ماشین D قطر قرقه کارگر، d قطر قرقه بار و N تعداد دندانه های چرخ حلزون است. معمولاً از میله حلزون یک راهه استفاده می شود. به ازای یک دور گردش چرخ حلزون، میله حلزون باید N مرتبه بچرخد. برای یک دور گردش چرخ حلزون تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر برابر πDN و تغییر مکان بار به اندازه πd است :

در صورت استفاده از قلاب بار : تغییر مکان به وسیله نیروی کارگر

$$(v.r.) = \frac{\text{تغییر مکان بار}}{\text{تغییر مکان کارگر}}$$

$$= \frac{\pi DN}{\pi d} = \frac{DN}{d}$$

در صورت استفاده از قرقه سگکی :

$$(v.r.) = \frac{2DN}{d}$$

خودآزمایی فصل پنجم



۱- راندمان مکانیکی را تعریف کنید.

۲- بهره مکانیکی را تعریف کنید.

۳- در هنگام جارو زدن از چه نوع اهرمی استفاده می‌کنید؟

۴- در یک مجموعه قرقره و طناب شامل قرقره سه شیاره در بالا و قرقره دو شیاره در پایین، نیروی کارگر به مقدار 300 نیوتون برای بالا بردن باری به مقدار $1/26$ کیلو نیوتون مصرف می‌شود. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را در این حالت تعیین کنید.

۵- یک مجموعه قرقره و طناب شامل دو قرقره ۴ شیاره در بالا و پایین است. راندمان ماشین برای بالا بردن باری به مقدار $2/8$ کیلو نیوتون برابر 70% است. نیروی کارگر چقدر است؟

۶- در یک ماشین بالا بر نوع چرخ و محور دوپله‌ای از دسته اهرم به طول 240 میلی‌متر به‌جای قرقره کارگر استفاده می‌شود. قطر محورهای دوپله‌ای به ترتیب 110 و 80 میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار $1/12$ کیلو نیوتون به نیروی کارگر معادل 80 نیوتون نیاز است. نسبت تندی، بهره مکانیکی و راندمان ماشین را تعیین کنید.

۷- راندمان یک قرقره زنجیری (اختلافی) در بالا بردن یک بار $1/89$ کیلو نیوتونی برابر 35 درصد است. تعداد دندانه‌های قرقره‌های بزرگ و کوچک به ترتیب 27 و 24 عدد است. نیروی کارگر برای بالا بردن بار چقدر است؟

۸- قطر قرقره کوچک یک مجموعه قرقره زنجیری (اختلافی) 130 میلی‌متر است. برای بالا بردن باری به مقدار 560 نیوتون نیروی کارگر به مقدار 50 نیوتون لازم است. در صورتی که راندمان ماشین 40 درصد باشد. قطر قرقره بزرگ چقدر است؟

۹- قطر قرقره کارگر یک ماشین حلزون و چرخ حلزون 200 میلی‌متر است. میله حلزون یک راهه و چرخ حلزون دارای 40 دندانه است. قطر قرقره بار 125 میلی‌متر است و بار به وسیله قرقره سنگی تحمل می‌شود. نیروی کارگر 150 نیوتونی برای بالا بردن باری به مقدار $6/72$ کیلو نیوتون لازم است. راندمان ماشین برای بالا بردن این بار چقدر است؟

نیروی کارگر مطلوب و نیروی مصرف شده برای جبران اصطکاک چقدر است؟

بیوست الف – جدول روابط مثلثاتی

tan(°)	cos(°)	sin(°)	°(°)	tan(°)	cos(°)	sin(°)	°(°)
1.150	0.656	0.755	49	0.000	1.000	0.000	0
1.192	0.643	0.766	50	0.017	1.000	0.017	1
1.235	0.629	0.777	51	0.035	0.999	0.035	2
1.280	0.616	0.788	52	0.052	0.999	0.052	3
1.327	0.602	0.799	53	0.070	0.998	0.070	4
1.376	0.588	0.809	54	0.087	0.996	0.087	5
1.428	0.574	0.819	55	0.105	0.995	0.105	6
1.483	0.559	0.829	56	0.123	0.993	0.122	7
1.540	0.545	0.839	57	0.141	0.990	0.139	8
1.600	0.530	0.848	58	0.158	0.988	0.156	9
1.664	0.515	0.857	59	0.176	0.985	0.174	10
1.732	0.500	0.866	60	0.194	0.982	0.191	11
1.804	0.485	0.875	61	0.213	0.978	0.208	12
1.881	0.469	0.883	62	0.231	0.974	0.225	13
1.963	0.454	0.891	63	0.249	0.970	0.242	14
2.050	0.438	0.899	64	0.268	0.966	0.259	15
2.145	0.423	0.906	65	0.287	0.961	0.276	16
2.246	0.407	0.914	66	0.306	0.956	0.292	17
2.356	0.391	0.921	67	0.325	0.951	0.309	18
2.475	0.375	0.927	68	0.344	0.946	0.326	19
2.605	0.358	0.934	69	0.364	0.940	0.342	20
2.747	0.342	0.940	70	0.384	0.934	0.358	21
2.904	0.326	0.946	71	0.404	0.927	0.375	22
3.078	0.309	0.951	72	0.424	0.921	0.391	23
3.271	0.292	0.956	73	0.445	0.914	0.407	24
3.487	0.276	0.961	74	0.466	0.906	0.423	25
3.732	0.259	0.966	75	0.488	0.899	0.438	26
4.011	0.242	0.970	76	0.510	0.891	0.454	27
4.331	0.225	0.974	77	0.532	0.883	0.469	28
4.705	0.208	0.978	78	0.554	0.875	0.485	29
5.145	0.191	0.982	79	0.577	0.866	0.500	30
5.671	0.174	0.985	80	0.601	0.857	0.515	31
6.314	0.156	0.988	81	0.625	0.848	0.530	32
7.115	0.139	0.990	82	0.649	0.839	0.545	33
8.144	0.122	0.993	83	0.675	0.829	0.559	34
9.514	0.105	0.995	84	0.700	0.819	0.574	35
11.430	0.087	0.996	85	0.727	0.809	0.588	36
14.301	0.070	0.998	86	0.754	0.799	0.602	37
19.081	0.052	0.999	87	0.781	0.788	0.616	38
28.636	0.035	0.999	88	0.810	0.777	0.629	39
57.290	0.017	1.000	89	0.839	0.766	0.643	40
∞	0.000	1.000	90	0.869	0.755	0.656	41
				0.900	0.743	0.669	42
				0.933	0.731	0.682	43
				0.966	0.719	0.695	44
				1.000	0.707	0.707	45
				1.036	0.695	0.719	46
				1.072	0.682	0.731	47
				1.111	0.669	0.743	48

مراجع

١- دانشنامه آزاد (Wikipedia.org)

2- Beer, Ferdinand (2004). Vector Statics For Engineers. McGraw Hill. ISBN 0-07-121830-0.

3- Mariam Rozhanskaya and I. S. Levinova (1996), "Statics", p. 642, in (Morelon & Rashed 1996, pp. 614-642):

4- J.L. Meriam, L.G. Kraige. Engineering Mechanics Volume 2: Dynamics, John Wiley & Sons., New York, 1986.

5- F.P. Beer, E.R. Johnston, J.T. DeWolf, Mechanics of Materials, McGraw-Hill, New York, 1981.

6- Richard Budynas, J. Nisbett, Shigley's Mechanical Engineering Design, 8th ed., New York: McGraw-Hill, ISBN 978-0-07-312193-2.

